D-加群とグレブナ基底, 例題集, 問題集の解答例.

2009.09.16

1. 準備体操.

   (a) $x\partial_x(x\partial_x-1)$ を 微分作用素環で展開せよ (手計算および計算機)
   $\partial_x x = x\partial_x + 1$ であるから,

   $$x\partial_x(x\partial_x-1) = x(\partial_x x)\partial - x\partial_x = x(x\partial_x+1)\partial_x - x\partial_x = x^2\partial_x^2 + x\partial_x - x\partial_x = x^2\partial_x^2.$$

   これを様々なシステムで計算させてみる.

   Risa/Asir

```
[1206] V=[x,dx];
[x,dx]
[1207] P=x*dx;
x*dx
[1208] Q=x*dx-1;
x*dx-1
[1209] DP=dp_ptod(P,V);
(1)*<<1,1>>
[1210] DQ=dp_ptod(Q,V);
(1)*<<1,1>>+(-1)*<<0,0>>
[1211] DPQ=dp_weyl_mul(DP,DQ);
(1)*<<2,2>>
[1212] dp_dtop(DPQ,V);
x^2*dx^2
```

   Kan/sm1

```
sm1>[(x) ring_of_differential_operators 0] define_ring ;
sm1>(x*Dx). (x*Dx-1). mul ;
sm1>dehomogenize ::
x^2*Dx^2
```

   Singular

```
> LIB "nctools.lib";
> ring r=0,(x,dx),dp;
> def D=Weyl();
> setring D;
> poly f = x*dx*(x*dx-1);
> f;
x^2*dx^2
```

   Macaulay 2

```
i1 : R = QQ[x,dx,WeylAlgebra => {x=>dx}];
```

```
i2 : x*dx*(x*dx-1)

      2  2
o2 = x dx

o2 : R
```

(b) $x\partial_x(x\partial_x - 1)\cdots(x\partial_x - k)$ を微分作用素環で展開せよ. $k = 2, 3, 4, 5$.
一般に, $x\partial_x(x\partial_x - 1)\cdots(x\partial_x - k) = x^{k+1}\partial_x^{k+1}$ である. (証明は帰納法)

(c) a, b, c を数字パラメータ, $\theta_x = x\partial_x$, $\theta_y = y\partial_y$ とするとき, $\theta_x(\theta_x + \theta_y + c - 1) - x(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_x + b)$ を微分作用素環で展開せよ.

$$\begin{aligned}
&\theta_x(\theta_x + \theta_y + c - 1) - x(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_x + b) \\
&= \theta_x(\theta_x + c - 1) - x(\theta_x + a)(\theta_x + b) + \theta_x\theta_y - x\theta_y(\theta_x + b) \\
&= x\{x(1-x)\partial_x^2 + (c - x(a+b+1))\partial_x - ab + ((1-x)\partial_x - b)y\partial_y\}
\end{aligned}$$

(d) $x \mapsto -\partial_x$, $\partial_x \mapsto x$ を微分作用素の Fourier 変換と呼ぶ. a をパラメータとするとき, $L = \partial_x + 2ax$ の Fourier 変換 $F(L)$ を求めよ. $F(F(L))$ を計算せよ.
$F(L) = x + 2a(-\partial_x) = x - 2a\partial_x$,
$F(F(L)) = F(x - 2a\partial_x) = -\partial_x - 2ax = -L$.

Risa/Asir

```
[1390] load("nk_restriction.rr");
[1525] L=dx+2*a*x;
dx+2*a*x
[1526] FL=nk_restriction.fourier_trans(L,[x],[dx]);
-2*a*dx+x
[1527] FFL=nk_restriction.fourier_trans(FL,[x],[dx]);
-dx-2*a*x
```

Kan/sm1

```
sm1>[(x,a) ring_of_differential_operators 0] define_ring ;
sm1>(Dx+2*a*x). [(x) (Dx)] laplace0 /FL set ;
sm1>FL ::
-2*a*Dx+x
sm1>FL [(x) (Dx)] laplace0 ::
-2*x*a-Dx
```

Macaulay 2

```
i1 : loadPackage "Dmodules";

i2 : R=QQ[a][x,dx,WeylAlgebra => {x=>dx}];
```

```
i3 : L=dx+2*a*x;

i4 : FL=Fourier L

o4 = x - 2a*dx

o4 : R

i5 : FFL = Fourier FL

o5 = - 2a*x - dx

o5 : R
```

2. (a) $I \cdot e^{-t-xt^3} = 0$ となる holonomic なイデアル I を求めよ. holonomic であることをどのように確かめればよいか?

$\partial_t \bullet e^{-t-xt^3} = (-1-3xt^2)e^{-t-xt^3}$, $\partial_x \bullet e^{-t-xt^3} = -t^3 e^{-t-xt^3}$ であるので, $I = \langle \partial_t + 1 + 3xt^2, \partial_x + t^3 \rangle$ は $I \cdot e^{-t-xt^3} = 0$ を満たす. n 変数の Weyl algebra D の左イデアル I が holonomic であることの定義は, I の特性イデアル $\mathrm{ch}(I) := \mathrm{in}_{(0,e)}(I) \subset K[x, \xi]$ の Krull 次元が n であることだったので, それを確かめればよい. I の重み $(0, 0, 1, 1)$ に関するグレブナ基底は $\{\underline{\partial_t} + 1 + 3xt^2, \underline{\partial_x} + t^3\}$ である (下線部が先頭項) ので, $\mathrm{ch}(I) = \langle \xi_x, \xi_t \rangle \subset K[x, t, \xi_x, \xi_t]$. これの Krull 次元は 2 であるので, I は holonomic である.

Macaulay 2

```
i1 : loadPackage "Dmodules";

i2 : R=QQ[x,t,dx,dt,WeylAlgebra => {x=>dx,t=>dt}];

i3 : I=ideal(dt+1+3*x*t^2,dx+t^3);

o3 : Ideal of R

i4 : charIdeal(I)

o4 = ideal (dt, dx)

o4 : Ideal of QQ [x, t, dx, dt]

i5 : dim(o4)

o5 = 2
```

(b) D/I の t についての D-加群としての積分 $D/(I+\partial_t D)$ を計算せよ. (一行コマンドでの実行 および Gröbner basis の計算へ分解しての実行.)

Risa/Asir

```
[1384] load("nk_restriction.rr");
[1519] I=[dt+1+3*x*t^2,dx+t^3];
[dt+3*t^2*x+1,dx+t^3]
[1520] nk_restriction.integration_ideal(I,[t,x],[dt,dx],[1,0]);
-- generic_bfct_and_gr :0sec(0.001976sec)
generic bfct : [[1,1],[s,1]]
S0 : 0
B_{S0} length : 1
-- fctr(BF) + base :0sec(0.0009sec)
-- integration_ideal_internal :0.004001sec(0.001181sec)
[27*x^3*dx^2+54*x^2*dx+6*x+1]
```

Macaulay 2

```
i1 : loadPackage "Dmodules";

i2 : R=QQ[t,x,dt,dx,WeylAlgebra => {t=>dt,x=>dx}];

i3 : I=ideal(dt+1+3*x*t^2,dx+t^3);

o3 : Ideal of R

i4 : Dintegration(I,{1,0})

o4 = HashTable{0 => cokernel | -27x3dx^2-54x2dx-6x-1 |}
               1 => 0
```

Kan/sm1

```
sm1>(cohom.sm1) run ;
sm1>[[(Dt+1+3 x t^2) (Dx+t^3)] [(t)] [[(x) (t)] []]] integration ::
[ Dt+1+3 x t^2 , Dx+t^3 ]  ==> [ 3*x*Dt^2+t+1 , -Dt^3+Dx ]
[ [ 3*x*Dt^2+t+1 , -Dt^3+Dx ]  , [ t ] ] bfm
sm1>sm1>b-function is -s
[ [ 3*x*Dt^2+t+1 , -Dt^3+Dx ]  , [ t ] , 0 , 1 ]  restall1_s
Computing a free resolution ...
Resolution procedure stoped because counter == 0.
A free resolution obtained.
0-th cohomology:  [ 1 , [ 27*x^3*Dx^2+54*x^2*Dx+6*x+1 ]  ]
sm1>-1-th cohomology:  [ 0 , [   ]  ]
sm1>[ [ 1 , [ 27*x^3*Dx^2+54*x^2*Dx+6*x+1 ]  ]  , [ 0 , [   ]  ]  ]
```

- 1-step ずつ実行

I の生成元に変数 t に関する Fourier 変換を施したイデアル $F(I)=\langle t+1+3x\partial_t^2, \partial_x-\partial_t^3\rangle$ の制限イデアルを計算する.

まず, $(t,x,\partial_t,\partial_x)$ に関する重みが $w=(-1,0,1,0)$ であるようなグレブナ基底を計算する. 負の重みを含むので斉次化経由での計算が必要である.

Risa/Asir
```
[1206] FI=[t+1+3*x*dt^2,dx-dt^3];
[3*x*dt^2+t+1,dx-dt^3]
[1207] HFI=map(homogenize,FI,[t,x,dt,dx],h);
[3*x*dt^2+h^2*t+h^3,h^2*dx-dt^3]
[1208] dp_weyl_set_weight(ltov([1,0]));
[ 1 0 ]
[1209] HG=nd_weyl_gr(HFI,[t,x,dt,dx,h],0,11);
[3*x*dt^2+h^2*t+h^3,h^2*dx-dt^3,-3*h^2*x*dx+(-h^2*t-h^3)*dt-h^4,(9*h^2*x^2*dt+
(18*h^2*t-18*h^3)*x^2)*dx+6*h^2*t^2*x*dt+(6*h^4*t-6*h^5)*x-h^4*t^2-2*h^5*t-h^6,
27*h^2*x^3*dx^2+54*h^4*x^2*dx+6*h^6*x+h^4*t^3+3*h^5*t^2+3*h^6*t+h^7]
[1210] G=map(subst,HG,h,1);
[3*x*dt^2+t+1,dx-dt^3,-3*x*dx+(-t-1)*dt-1,(9*x^2*dt+(18*t-18)*x^2)*dx+6*t^2*x*
dt+(6*t-6)*x-t^2-2*t-1,27*x^3*dx^2+54*x^2*dx+6*x+t^3+3*t^2+3*t+1]
```

次いで, イデアル $F(I)$ の重み w に関する generic b-関数を計算する.

Risa/Asir
```
[1213] generic_bfct(FI,[t,x],[dt,dx],[1,0]);
s
```

generic b-関数の最大整数根は 0 である. 出力 `G` の生成元の w に関する階数 (ord) は順に $2,3,1,1,0$ であるから最後の生成元 $F(P):=27x^3\partial_x^2+54x^2\partial_x+6x+t^3+3t^2+3t+1$ において $t=0$ とした, $27x^3\partial_x^2+54x^2\partial_x+6x+1$ が I の積分イデアルの生成元である.

(c) $\int_0^{+\infty} e^{-t-xt^3}dt$ (Airy 関数もどき) のみたす微分方程式を計算せよ.

$A(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t-xt^3}dt$ とおく. (b) で計算した $F(P)=27x^3\partial_x^2+54x^2\partial_x+6x+t^3+3t^2+3t+1\in F(I)$ の逆 Fourier 変換 は

$$\begin{aligned} P &= 27x^3\partial_x^2+54x^2\partial_x+6x+\partial_t^3+3\partial_t^2+3\partial_t+1 \\ &= (27x^3\partial_x^2+54x^2\partial_x+6x+1)+\partial_t(\partial_t^2+3\partial_t+3)\in I \end{aligned}$$

である. 従って,

$$
\begin{aligned}
(27x^3\partial_x^2 + 54x^2\partial_x + 6x + 1) \bullet A(x) &= -\partial_t(\partial_t^2 + 3\partial_t + 3) \bullet A(x) \\
&= -\int_0^{+\infty} \partial_t(\partial_t^2 + 3\partial_t + 3) \bullet e^{-t-xt^3} dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial((\partial_t^2 + 3\partial_t + 3) \bullet e^{-t-xt^3})}{\partial t} dt \\
&= -\left[(\partial_t^2 + 3\partial_t + 3) \bullet e^{-t-xt^3}\right]_0^{+\infty} \\
&= -\left[(9x^2t^4 - 3xt^2 - 6xt + 1)e^{-t-xt^3}\right]_0^{+\infty} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

つまり, $A(x)$ は微分方程式

$$(27x^3\partial_x^2 + 54x^2\partial_x + 6x + 1) \bullet A(x) = 1$$

を満たす.

(d) (Maple が使えたら) 上の微分方程式の解の $t = 0$ での漸近展開を求めよ. この結果と数値計算で上の積分の漸近展開の (近似を) 決定せよ.

3. $f(t) = t(1-t)$ とおく.

(a) $\mathrm{Ann}\, f^s$ を求めよ.

Risa/Asir
```
[1208] ann(t*(1-t));
[(-t^2+t)*dt+(2*t-1)*s]
```

$\mathrm{Ann}\, f^s = \langle (-t^2+t)\partial_t + (2t-1)s \rangle$

(b) $(E_s - f) \bullet f^s = 0$ である. ここで $E_s \bullet F(s) = F(s+1)$ となる差分作用素. $E_s \leftrightarrow p$, $s+1 \leftrightarrow -p\partial_p$ なる Mellin 変換で, $E_s - f$, $\mathrm{Ann}\, f^s$ を 変換したイデアル J は p, t 空間での holonomic なイデアルであることを示せ.

$J = \langle p - t(1-t), (-t^2+t)\partial_t + (2t-1)(-p\partial_p - 1) \rangle$.

J が holonomic であるかどうか調べるために $\mathrm{ch}(J)$ の Hilbert 多項式を計算してみる.

Risa/Asir
```
[1209] J=[p-t*(1-t),(-t^2+t)*dt+(2*t-1)*(-p*dp-1)];
[p+t^2-t,(-2*t+1)*p*dp+(-t^2+t)*dt-2*t+1]
[1210] V=[p,t,dp,dt];
[p,t,dp,dt]
[1211] M=newmat(5,4,[[0,0,1,1],[1,1,1,1],[0,0,0,-1],[0,0,-1],[0,-1]]);
[ 0 0 1 1 ]
[ 1 1 1 1 ]
[ 0 0 0 -1 ]
[ 0 0 -1 0 ]
```

```
[ 0 -1 0 0 ]
[1212] G=nd_weyl_gr(J,V,0,M);
[p+t^2-t,(-2*t+1)*p*dp+p*dt,(4*p^2-p)*dp+(2*t-1)*p*dt+4*p]
[1213] IN=[p+t^2-t,(-2*t+1)*p*dp+p*dt,(4*p^2-p)*dp+(2*t-1)*p*dt];
[p+t^2-t,(-2*t+1)*p*dp+p*dt,(4*p^2-p)*dp+(2*t-1)*p*dt]
[1214] DIN=map(dp_ptod,IN,V);
[(1)*<<0,2,0,0>>+(1)*<<1,0,0,0>>+(-1)*<<0,1,0,0>>,
(-2)*<<1,1,1,0>>+(1)*<<1,0,1,0>>+(1)*<<1,0,0,1>>,
(4)*<<2,0,1,0>>+(2)*<<1,1,0,1>>+(-1)*<<1,0,1,0>>+(-1)*<<1,0,0,1>>]
[1215] HDIN=map(dp_ht,DIN);
[(1)*<<0,2,0,0>>,(1)*<<1,1,1,0>>,(1)*<<2,0,1,0>>]
[1216] HIN=map(dp_dtop,HDIN,V);
[t^2,t*p*dp,p^2*dp]
[1214] sm1.hilbert([HIN,V]);
5/2*h^2+3/2*h+1
```

Hilbert 多項式の次数が 2 であるので J が holonomic であることが分かった.

(c) D/J の 変数 t についての D-加群としての積分を計算し, $B(s) = \int_0^1 f^s dt$ のみたす s についての漸化式 (contiguity relation) を求めよ.

Risa/Asir

```
[1384] load("nk_restriction.rr");
[1519] J=[p-t*(1-t),(-t^2+t)*dt+(2*t-1)*(-p*dp-1)];
[p+t^2-t,(-2*t+1)*p*dp+(-t^2+t)*dt-2*t+1]
[1520] FJ=nk_restriction.integration_ideal(J,[t,p],[dt,dp],[1,0]);
-- generic_bfct_and_gr :0.004sec(0.007393sec)
generic bfct : [[1,1],[s,1],[s-1,1]]
S0 : 1
B_{S0} length : 2
-- fctr(BF) + base :0sec(0.004466sec)
-- integration_ideal_internal :0.008001sec(0.005727sec)
[(4*p^2-p)*dp+2*p]
```

この積分計算より, $4p^2\partial_p - p\partial_p + 2p$ に逆 Mellin 変換を施した作用素

$$4E_s(-s-1) + (s+1) + 2E_s = -4(s+2)E_s + (s+1) + 2E_s = -2(2s+3)E_s + (s+1)$$

は $B(s) = \int_0^1 f^s dt$ を annihilate することが分かる. つまり, $-(2(2s+3)E_s - (s+1)) \bullet B(s) = 0$ が成り立つ. 従って, 求める漸化式は

$$2(2s+3)B(s+1) = (s+1)B(s).$$

(d) この漸化式を用いて $B(10000)$ の値を求めよ.

(c) で得られた漸化式から, s が自然数なら

$$B(s) = \frac{s}{2(2s+1)}B(s-1) = \cdots = \frac{s!}{2^s(2s+1)!!}B(0)$$

が成り立つ. ここで, $B(0)=\int_0^1 dt=1$ なので

$$B(s)=\frac{s!}{2^s(2s+1)!!}=\frac{(s!)^2}{(2s+1)!}.$$

$B(10000)$ の逆数を安直に計算させてみるには以下のようにする.

Risa/Asir

```
[1217] for (B=1, S=1; S<=10000; S++) B*=2*(2*S+1)/S;
[1218] B;
結果は省略（10 進 6023 桁の整数）
```

4. $f(t)=t_1t_2(1-t_1-t_2)$ について上と同様な問題.

   $B_2(s)=\int_{D_2} f^s dt$, $(D_2=\{(t_1,t_2)\mid 0\le t_1\le 1, 0\le t_2\le 1-t_1\})$ について考える (特に, D_2 はサイクル).

Risa/Asir

```
[1384] load("nk_restriction.rr");
[1519] F=t1*t2*(1-t1-t2);
-t1*t2^2+(-t1^2+t1)*t2
[1520] A=ann(F);
[-2*t1*t2*dt2+(3*t1*t2+t1^2-t1)*dt1-3*s*t2+s,t1*t2*dt2+(t1^2-t1)*dt1-3*s*t1+s,
(t2^2+(2*t1-1)*t2)*dt2+(-2*t1*t2-t1^2+t1)*dt1]
[1521] MA=map(subst,A,s,-p*dp-1);   /* s は 1 次なので単なる代入で処理 */
[-2*t1*t2*dt2+(3*t1*t2+t1^2-t1)*dt1+(3*p*t2-p)*dp+3*t2-1,t1*t2*dt2+(t1^2-t1)*
dt1+(3*p*t1-p)*dp+3*t1-1,(t2^2+(2*t1-1)*t2)*dt2+(-2*t1*t2-t1^2+t1)*dt1]
[1522] MA=cons(p-F,MA);
[t1*t2^2+(t1^2-t1)*t2+p,-2*t1*t2*dt2+(3*t1*t2+t1^2-t1)*dt1+(3*p*t2-p)*dp+3*t2-
1,t1*t2*dt2+(t1^2-t1)*dt1+(3*p*t1-p)*dp+3*t1-1,(t2^2+(2*t1-1)*t2)*dt2+(-2*t1*t
2-t1^2+t1)*dt1]
[1523] nk_restriction.integration_ideal(MA,[t1,t2,p],[dt1,dt2,dp],[1,1,0]);
-- generic_bfct_and_gr :0.016sec + gc : 0.004sec(0.02054sec)
generic bfct : [[1,1],[s,1],[s-1,2]]
S0 : 1
B_{S0} length : 3
-- fctr(BF) + base :0.004sec(0.004sec)
-- integration_ideal_internal :0.004sec(0.002161sec)
[(27*p^3-p^2)*dp^2+(54*p^2-p)*dp+6*p]
```

$(27p^3-p^2)\partial_p^2+(54p^2-p)\partial_p+6p$ の逆 Mellin 変換は

$$\begin{aligned}(27p-1)p^2\partial_p^2+(54p-1)p\partial_p+6p &= (27p-1)p\partial_p(p\partial_p-1)+(54p-1)p\partial_p+6p\\ &= (27p-1)(p\partial_p)^2+27p\partial_p+6p\\ &\to (27E_s-1)(-s-1)^2+27E_s(-s-1)+6E_s\\ &= (27(s+2)^2-27(s+2)+6)E_s-(s+1)^2\\ &= 3(3s+4)(3s+5)E_s-(s+1)^2\end{aligned}$$

であるから, $B_2(s)$ の満たす漸化式は

$$3(3s+4)(3s+5)B_2(s+1)=(s+1)^2B_2(s).$$

従って, $B(0)=1/2$ であるので s が自然数なら,

$$\begin{aligned}B_2(s) &= \frac{s^2}{3(3s+1)(3s+2)}\cdot\cdots\cdot\frac{2^2}{3\cdot7\cdot8}\cdot\frac{1^2}{3\cdot4\cdot5}\cdot B_2(0)\\ &= \frac{s^2}{3(3s+1)(3s+2)}\cdot\cdots\cdot\frac{2^2}{3\cdot7\cdot8}\cdot\frac{1^2}{3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{1\cdot2}\\ &= \frac{(s!)^2}{3^s(3s+1)!!!(3s+2)!!!}\\ &= \frac{(s!)^3}{(3s+2)!}.\end{aligned}$$

ちなみに, $B_2(10000)$ の逆数は 10 進 14,319 桁の整数.

(**推測**) $f(t)=(\prod_{i=1}^n t_i)\cdot(1-\sum_{i=1}^n t_i)$ の領域 $D_n=\{(t_1,\dots,t_n)\mid 0\le t_i\le 1-\sum_{j=1}^{i-1}t_j\ (1\le i\le n)\}$ に対する積分 $B_n(s)=\int_{D_n}f^s dt$ は s が自然数の時,

$$B_n(s)=\frac{(s!)^{n+1}}{((n+1)s+n)!}.$$

5. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$ とおく.

(a) A に付随する A-超幾何系の生成系 J を求めよ.

Risa/Asir

```
[1236] A=[[1,1,1,1,1],[0,1,1,0,-1],[0,0,1,1,-1]];
[[1,1,1,1,1],[0,1,1,0,-1],[0,0,1,1,-1]]
[1237] B=[b1,b2,b3];
[b1,b2,b3]
[1238] G=sm1.gkz([A,B]);
[[x5*dx5+x4*dx4+x3*dx3+x2*dx2+x1*dx1-b1,-x5*dx5+x3*dx3+x2*dx2-b2,
-x5*dx5+x4*dx4+x3*dx3-b3,dx2*dx4-dx1*dx3,dx3*dx5-dx1^2,dx3^2*dx5-
dx1*dx2*dx4,dx3^3*dx5-dx2^2*dx4^2],[x1,x2,x3,x4,x5]]
```

(b) β_i をパラメータとするとき J と ∂_i で生成されるイデアルの生成元を求めよ (β_i の多項式となる). A の決める多面体との関係は?

Risa/Asir

```
[1239] J=G[0]$
[1240] VDV=[x1,x2,x3,x4,x5,b1,b2,b3,dx1,dx2,dx3,dx4,dx5,db1,db2,db3];
[x1,x2,x3,x4,x5,b1,b2,b3,dx1,dx2,dx3,dx4,dx5,db1,db2,db3]
[1241] M=newmat(17,16,[[1,1,1,1,1,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1]])$
[1242] for (I=0;I<16;I++) M[1][I]=1;
[1243] for (I=0;I<15;I++) M[2+I][15-I]=-1;
[1244] M;
(略)
[1245] J1=nd_weyl_gr(cons(dx1,J),VDV,0,M);
[b1^4+(-3*b2^2+4*b3*b2-3*b3^2)*b1^2+(2*b2^3-2*b3*b2^2-2*b3^2*b2+2*b3^3)
*b1-2*b3*b2^3+5*b3^2*b2^2-2*b3^3*b2,dx1,…(略)
…,-2*x5*dx2*dx5+(b1-b2)*dx2]
[1246] P1=J1[0];
b1^4+(-3*b2^2+4*b3*b2-3*b3^2)*b1^2+(2*b2^3-2*b3*b2^2-2*b3^2*b2+2
*b3^3)*b1-2*b3*b2^3+5*b3^2*b2^2-2*b3^3*b2
[1247] fctr(P1);
[[1,1],[b1-b3,1],[b1-b2,1],[b1-b2+2*b3,1],[b1+2*b2-b3,1]]
```

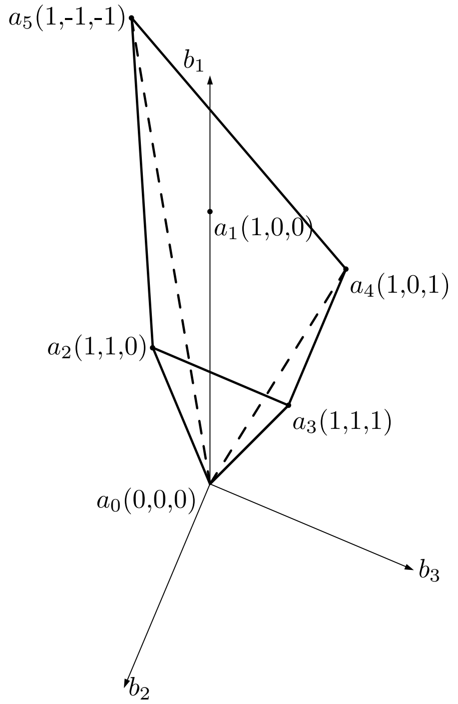
$$(J + \langle \partial_1 \rangle) \cap \mathbf{C}[b_1, b_2, b_3] = \langle (b_1 - b_2)(b_1 - b_3)(b_1 - b_2 + 2b_3)(b_1 + 2b_2 - b_3) \rangle$$

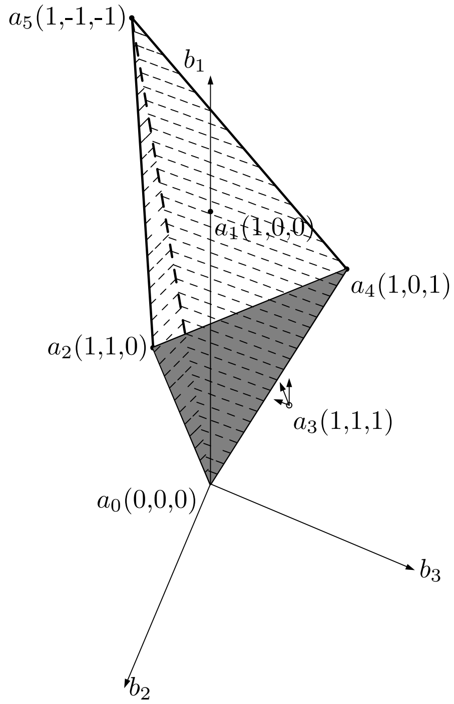
他も同様にすれば,

$$\begin{aligned}
(J + \langle \partial_2 \rangle) \cap \mathbf{C}[b_1, b_2, b_3] &= \langle (b_1 - b_3)(b_1 + 2b_2 - b_3)(b_1 + 2b_2 - b_3 - 1)(b_1 + 2b_2 - b_3 - 2) \rangle \\
(J + \langle \partial_3 \rangle) \cap \mathbf{C}[b_1, b_2, b_3] &= \langle (b_1 - b_2 + 2b_3)(b_1 - b_2 + 2b_3 - 1)(b_1 + 2b_2 - b_3)(b_1 + 2b_2 - b_3 - 1) \rangle \\
(J + \langle \partial_4 \rangle) \cap \mathbf{C}[b_1, b_2, b_3] &= \langle (b_1 - b_2)(b_1 - b_2 + 2b_3)(b_1 - b_2 + 2b_3 - 1)(b_1 - b_2 + 2b_3 - 2) \\
(J + \langle \partial_5 \rangle) \cap \mathbf{C}[b_1, b_2, b_3] &= \langle (b_1 - b_2)(b_1 - b_2 - 1)(b_1 - b_3)(b_1 - b_3 - 1) \rangle.
\end{aligned}$$

- **幾何的な意味**

行列 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の各列を (b_1, b_2, b_3)-空間の点とみなし, 原点 a_0 を頂点とする下図左のような cone を考える. 例として, ∂_3 を追加した場合を考える. 点 a_3 を除いてできる下図右のような cone を作り, a_3 の位置に光源を置く. このとき, 光が当たらない facet は $a_0a_2a_5$ と $a_0a_4a_5$ の 2 つである (図の斜線部). この 2 つの facet を通る平面の方程式はそれぞれ, $b_1 - b_2 + 2b_3 = 0$, $b_1 + 2b_2 - b_3 = 0$ であり, これらは上で求めたイデアルの生成元の因子として表れており, 残りの因子はこれらの整数差である. 整数差の因子の表れ方等の詳細は [SST2] を参照.





6. Appell の方程式 F_1 を Pfaffian 形式に変換せよ.

$$\theta_x(\theta_x+\theta_y+c-1)-x(\theta_x+\theta_y+a)(\theta_x+b)$$
$$\theta_y(\theta_x+\theta_y+c-1)-y(\theta_x+\theta_y+a)(\theta_y+b')$$

Risa/Asir

```
[1221] load("yang.rr");
[1625] yang.define_ring([x,y]);
{[euler,[x,y]],[x,y],[0,0],[0,0],[dx,dy]}
[1626] S=dx+dy;
dx+dy
[1627] L1=yang.mul(dx,S+c-1)-x*yang.mul(S+a,dx+b1);
(-x+1)*dx^2+((-x+1)*dy+(-a-b1)*x+c-1)*dx-b1*x*dy-b1*a*x
[1628] L2=yang.mul(dy,S+c-1)-y*yang.mul(S+a,dy+b2);
((-y+1)*dy-b2*y)*dx+(-y+1)*dy^2+((-a-b2)*y+c-1)*dy-b2*a*y
[1629] G=yang.gr([L1,L2]);
[((b2*y*x-b2*y)*dx+((y-1)*x-y^2+y)*dy^2+(((a-b1+b2)*y-c+b1+1)
*x+(-a-b2)*y^2+(c-1)*y)*dy+b2*a*y*x-b2*a*y^2)/((y-1)*x-y^2+y),
(((-x+y)*dy+b2*y)*dx-b1*x*dy)/(-x+y),((-x^2+(y+1)*x-y)*dx^2+(
(-a-b1)*x^2+((a+b1-b2)*y+c-1)*x+(-c+b2+1)*y)*dx+(b1*y-b1)*x*dy
-b1*a*x^2+b1*a*y*x)/(-x^2+(y+1)*x-y)]
[1630] yang.stdmon(G);
[dx,dy,1]
[1631] Base=[1,dx,dy];
[1,dx,dy]
```

```
[1632] Pf=yang.pf(Base,G)$
[1633] Pf[0];
[ 0 (1)/(x) 0 ]
[ (-b1*a)/(x-1) ((-a-b1)*x^2+((a+b1-b2)*y+c-1)*x+(-c+b2+1)*y)/(x^3+(-y-1)*x^2+y*x) (b
[ 0 (b2*y)/(x^2-y*x) (-b1)/(x-y) ]
[1634] Pf[1];
[ 0 0 (1)/(y) ]
[ 0 (b2)/(x-y) (-b1*x)/(y*x-y^2) ]
[ (-b2*a)/(y-1) (-b2*x+b2)/((y-1)*x-y^2+y) (((-a+b1-b2)*y+c-b1-1)*x+(a+b2)*y^2+(-c+1)*
```

基底を $F=(f,\theta_x f,\theta_y f)^T$ とした時,

$$\partial_x F = \texttt{Pf}[0]F, \quad \partial_y F = \texttt{Pf}[1]F$$

を満たすことを意味する.

7. (研究課題, (modified) marginal likelihood integral)

$$f_2=(px_1x_2+(1-p)y_1y_2)(px_1(1-x_2)+(1-p)y_1(1-y_2))$$

とおくとき, $\int_C f_2^s dp dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$ が s についてみたす漸化式を積分アルゴリズムで求めよ. 参考: `ml1.rr`

参考文献

[CLO] D.Cox, J.Little, D.O'shea, グレブナ基底と代数多様体入門, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, (1992, 1997), Springer.

[CLO2] D.Cox, J.Little, D.O'shea, グレブナー基底, *Using Algebraic Geometry*, (1998), Springer.

[Oaku] 大阿久俊則, D 加群と計算数学, 2002, 朝倉書店.

[SST] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, 2000, Springer.

[SST2] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, Hypergeometric polynomials and Integer Programming, Compositio Mathematica, **115**, (1999) 185–204.