D-加群とグレブナ基底, 例題集, 問題集.

2009.09.16

1. 準備体操.
   (a) $x\partial_x(x\partial_x - 1)$ を 微分作用素環で展開せよ (手計算および計算機)
   (b) $x\partial_x(x\partial_x - 1)\cdots(x\partial - k)$ を 微分作用素環で展開せよ. $k = 2, 3, 4, 5$.
   (c) a, b, c を数字パラメータ, $\theta_x = x\partial_x$, $\theta_y = y\partial_y$ とするとき, $\theta_x(\theta_x + \theta_y + c - 1) - x(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_x + b)$ を微分作用素環で展開せよ.
   (d) $x \mapsto -\partial_x$, $\partial_x \mapsto x$ を微分作用素の Fourier 変換と呼ぶ. a をパラメータとするとき, $L = \partial_x + 2ax$ の Fourier 変換 $F(L)$ を求めよ. $F(F(L))$ を計算せよ.

2. (a) $I \cdot e^{-t-xt^3} = 0$ となる holonomic なイデアル I を求めよ. holonomic であることをどのように確かめればよいか?
   (b) D/I の t についての D-加群としての積分 $D/(I + \partial_t D)$ を計算せよ. (一行コマンドでの実行 および Gröbner basis の計算へ分解しての実行.)
   (c) $\int_0^{+\infty} e^{-t-xt^3}dt$ (Airy 関数もどき) のみたす微分方程式を計算せよ.
   (d) (Maple が使えたら) 上の微分方程式の解の $x = 0$, $x = \infty$ での漸近展開を求めよ. この結果と数値計算で上の積分の漸近展開の (近似を) 決定せよ.

3. $f(t) = t(1 - t)$ とおく.
   (a) $\mathrm{Ann}\, f^s$ を求めよ.
   (b) $(E_s - f) \bullet f^s = 0$ である. ここで $E_s \bullet F(s) = F(s + 1)$ となる差分作用素. $E_s \leftrightarrow p$, $s + 1 \leftrightarrow -p\partial_p$ なる Mellin 変換で, $E_s - f$, $\mathrm{Ann}\, f^s$ を 変換したイデアル J は p, t 空間での holonomic なイデアルであることを示せ.
   (c) D/J の 変数 t についての D-加群としての積分を計算し, $B(s) = \int_0^1 f^s dt$ のみたす s についての漸化式 (contiguity relation) を求めよ.
   (d) この漸化式を用いて $B(10000)$ の値を求めよ.

4. $f(t) = t_1 t_2(1 - t_1 - t_2)$ について上と同様な問題.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく.

(a) A に付随する A-超幾何系の生成系 J を求めよ.

(b) β_i をパラメータとするとき J と ∂_i で生成されるイデアルの生成元を求めよ (β_i の多項式となる). A の決める多面体との関係は?

6. Appell の方程式 F_1 を Pfaffian 形式に変換せよ.

$$\theta_x(\theta_x+\theta_y+c-1)-x(\theta_x+\theta_y+a)(\theta_x+b)$$
$$\theta_y(\theta_x+\theta_y+c-1)-y(\theta_x+\theta_y+a)(\theta_y+b')$$

7. (研究課題, (modified) marginal likelihood integral)

$$f_2=(px_1x_2+(1-p)y_1y_2)(px_1(1-x_2)+(1-p)y_1(1-y_2))$$

とおくとき, $\int_C f_2^s dpdx_1dx_2dy_1dy_2$ が s についてみたす漸化式を積分アルゴリズムで求めよ. 参考: `ml1.rr`

参考文献

[CLO] D.Cox, J.Little, D.O'shea, グレブナ基底と代数多様体入門, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, (1992, 1997), Springer.
グレブナ基底, Buchberger アルゴリズムの入門. 消去法. なお効率的な計算な計算法については, 野呂, 横山, グレブナ基底の計算 基礎編 – 計算代数入門, 東大出版会, 2003. どちらの本も Weyl 代数でそのまま通用することが沢山書いてある.

[CLO2] D.Cox, J.Little, D.O'shea, グレブナー基底, *Using Algebraic Geometry*, (1998), Springer
続編. 自由加群の部分加群のグレブナ基底についてはこちらを参照.

[Oaku] 大阿久俊則, D 加群と計算数学, 2002, 朝倉書店.
D 加群のアルゴリズムについての入門書. とはいいつつ, 本質的なアイディアはすべて書いてあると思う.

[SST] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, 2000, Springer.
積分のみたす微分方程式系のグレブナ基底を活用した, 積分の漸近展開の理論とアルゴリズム. とくに, $\mathcal{A}$-超幾何系について詳しい. 不確定特異点を持つ場合, 積分領域がサイクルでない場合は未開拓. この本を読みきるには, 常微分方程式 (高野, 常微分方程式, 朝倉), 多面体の幾何 (G.Ziegler, Lectures on Polytopes, Springer), グレブナ基底, 可換環論などに, ある程度の経験が必要. ☆☆

[1] C.M.Bishop, パターン認識と機械学習 — ベイズ理論による統計的予測 (*Pattern Recognition and Machine Learning*), 2006, Springer
第 2 章 確率分布 には, 応用上重要な marginal likelihood 積分の数多くの計算例が掲載されている.

[2] 渡辺澄夫, 代数幾何と学習理論, 2006, 森北出版.
特異点解消を用いた分配関数 (marginal likelihood 積分) の漸近展開法の解説が含まれている. この方法を利用して, 学習理論の汎化誤差の評価を行なっている. ☆

[3] 伊庭幸人, マルコフ連鎖モンテカルロ法の基礎, 統計科学のフロンティア 12, 計算統計 II, 2005, 岩波書店, 1–106.
Markov chain monte carlo (MCMC) 法の入門, MCMC を利用した分配関数の数値計算法など興味深い解説. 微分方程式で step by step に値を計算できる範囲を広げていく方法に似ている.