マルコフ基底と実験計画, 問題集その 2, 解答例 2009.09.15

1 計画 (design) と計画イデアル (design ideal)

問 1 次の実施計画の計画点を具体的に書け.

1. D_1 : 2^2-完全実施計画 (水準 $\{-1,1\}$)
2. D_2 : 2^2-完全実施計画 (水準 $\{0,1\}$)
3. D_3 : 3^3-完全実施計画 (水準 $\{-1,0,1\}$) の中で少なくとも 1 つの変数が 0 であるもの.
4. D_4 : 別名関係 $ACD = I$ をもつ 2^{4-1}-一部実施計画 (水準 $\{-1,1\}$)
5. D_5 : 別名関係 $ABC^2 = BCD = I$ $(a+b+2c \equiv 0 \pmod 3), b+c+d \equiv 0 \pmod 3)$ を持つ 3^{4-2}-一部実施計画 (水準 $\{-1,0,1\}$)
6. D_6 : 別名関係 $ABDE = ACDF = BCDG = I$ を持つ 2^{7-3}-一部実施計画 (水準 $\{-1,1\}$)

解答 ファイル `design_data.rr` に点のデータを用意してある.

問 2 次の実施計画の計画イデアル (のグレブナ基底) を計算せよ.

1. 問 1. の D_1
2. 問 1. の D_2 〜 D_6
3. $D_7 = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2)\} \subset \mathbf{Q}^2$ (Echelon design)

解答 $\mathbf{I}(D_4)$, $\mathbf{I}(D_5)$, $\mathbf{I}(D_6)$ は lex 順, それ以外は grevlex 順 に関するグレブナ基底.

- $\mathbf{I}(D_1) = \langle x^2-1, y^2-1 \rangle$
- $\mathbf{I}(D_2) = \langle x^2-x, y^2-y \rangle$
- $\mathbf{I}(D_3) = \langle x^3-x, y^3-y, z^3-z, xyz \rangle$
- $\mathbf{I}(D_4) = \langle a-cd, b^2-1, c^2-1, d^2-1 \rangle$
- $\mathbf{I}(D_5) = \langle 2a-(2d^2-d)c^2-(3d^2-2)c+2d^2, 2b-3dc^2-(3d^2-2)c+2d, c^3-c, d^3-d \rangle$
- $\mathbf{I}(D_6) = \langle a-ceg, b-cef, c^2-1, d-efg, e^2-1, f^2-1, g^2-1 \rangle$
- $\mathbf{I}(D_7) = \langle x^4-6x^3+11x^2-6x, x^3y-3x^2y+2xy, xy^2-xy, y^3-3y^2+2y \rangle$

問 3 (計算機に詳しい人向け) Singular の `eliminate()` や `intersect()` に相当する関数を Risa/Asir で実装せよ.

解答 `design.rr` の関数 `eliminate()` や `intersects()` 等が一つの解答例.

問 4 (計算機に詳しい人向け) 計画 D (例えば点のリスト) を入力とし, その計画イデアル $\mathbf{I}(D)$ を返す関数を Risa/Asir, Singular 等で実装せよ.

解答 `design.rr` の関数 `design_ideal()` が一つの解答例.

2 別名関係とイデアル所属問題

問 5 D_4 において, 共変量行列を考える.

1. このとき, 主効果 C と交互作用 AD は同じ列を生成することを確かめよ.
   主効果の共変量行列 M の転置行列 M' は
$$M' = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   であるので, AD に対する列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ となり, C と AD は同じ列を生成することが分かる.

2. 主効果 C と交互作用 AD が別名関係にあることをイデアル所属を判定することで確かめよ.

   Risa/Asir
```
[189] I4=[a-c*d,b^2-1,c^2-1,d^2-1];
[a-d*c,b^2-1,c^2-1,d^2-1]
[190] p_nf(c-a*d,I4,[a,b,c,d],2);
0
```

3. $\{A^{e_1}B^{e_2}C^{e_3}D^{e_4} \mid e_i = 0, 1\}$ の間の別名関係を全て列挙せよ.
   $I = ACD, A = CD, B = ABCD, C = AD, D = AC, AB = BCD, BC = ABD, BD = ABC$ の 8 つの別名関係があることが分かる. プログラム `alias-1.rr` を参照.

問 6 D_6 について,

1. AB と AC, AB と DE, AC と $ABEF$ がそれぞれ別名関係にあるかどうか判定せよ.

Risa/Asir

```
[211] I6=[a-c*e*g,b-c*e*f,c^2-1,d-e*f*g,e^2-1,f^2-1,g^2-1];
[a-g*e*c,b-f*e*c,c^2-1,d-g*f*e,e^2-1,f^2-1,g^2-1]
[212] p_nf(a*b-a*c,I6,[a,b,c,d,e,f,g],2);
-g*e+g*f
[213] p_nf(a*b-d*e,I6,[a,b,c,d,e,f,g],2);
0
[214] p_nf(a*c-a*b*e*f,I6,[a,b,c,d,e,f,g],2);
0
```

従って, AB と AC は別名関係にないが, AB と DE, AC と $ABEF$ は別名関係にある.

2. 別名関係を全て列挙するプログラムを書け.
各単項式に対して, 計画イデアルで割った余りが同じという同値関係で同値類を取ればよい. プログラム `alias-2.rr` を参照.

問 7 D_4 について, 主効果のみからなるモデル $M : A/B/C/D$ を考える.

1. 問 5 で列挙した別名関係に注意して, M に 2 因子交互作用を 1 つ追加した識別可能な階層モデルを全て挙げよ.
主効果と交絡していない 2 因子交互作用は AB, BC, BD の 3 つなので,
$$AB/C/D, \quad A/BC/D, \quad A/BD/C$$
の 3 つが求める識別可能な階層モデルである.

2. M に 3 因子交互作用を追加して識別可能な階層モデルを作ることができるか.
3 因子交互作用を追加すると, それに含まれる 2 因子交互作用が 3 つ追加されることになる. 主効果の 4 つと定数項とを合わせると全部で 9 つになるが, 計画は 8 点であるので必ず少なくとも 1 組が交絡する. したがって, M に 3 因子交互作用を追加した形の識別可能な階層モデルは作れない.

3. M に交互作用を追加して得られる識別可能な階層モデルのグラフを作れ. (1. の続きを飽和モデルになるまで行え.)

$$\begin{tikzcd}
4: & & A/B/C/D \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
5: & AB/C/D \arrow[d] \arrow[dr] & A/BC/D \arrow[dl] \arrow[dr] & A/BD/C \arrow[dl] \arrow[d] \\
6: & AB/BC/D \arrow[dr] & AB/C/BD \arrow[d] & A/BC/BD \arrow[dl] \\
7: & & AB/BC/BD &
\end{tikzcd}$$