

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

について、

(a) トーリックイデアル I_A を求めよ。

$$I_A = \langle x_0x_2 - x_1^2 \rangle$$

Asir のプログラム `toric.rr` を使って、トーリックイデアルの計算を行うには次のようにする。

```
Asir
[1237] load("toric.rr");
[1250] toric_ideal([[1,1,1],[0,1,2]]);
ideal :
[x2-t0*t1^2,x1-t0*t1,x0-t0,t0*t1*t2-1]
gb :
[x0*x2-x1^2,-t2*x1+1,t2*x0*x2-x1,-t2*x2+t1,x0-t0]
[x0*x2-x1^2]
```

参考:

Asir のプログラム `toric.rr`, `4ti2`, Macaulay2 のプログラム `toric.m2`

(b) $w = (2, 1, 2)$ について $\text{in}_w(I_A)$ を求めよ。

$$\text{in}_w(I_A) = \langle x_0x_2 \rangle$$

(c) $w = (2, 1, 2)$ について regular triangulation を求めよ。

$$I_{\Delta_w} = \sqrt{\text{in}_w(I_A)} = \langle x_0x_2 \rangle = \langle x_0 \rangle \cap \langle x_2 \rangle$$

regular triangulation Δ_w の maximal face は $12, 01$ 。

$$\Delta_w = \{01, 12, 0, 1, 2\}$$

もしくは、重みについて持ち上げた点たちの下側凸包から求める方法

(d) $w = (1, 2, 1)$ について regular triangulation を求めよ。

$$\text{in}_w(I_A) = \langle x_1^2 \rangle$$

$$I_{\Delta_w} = \sqrt{\text{in}_w(I_A)} = \langle x_1 \rangle$$

regular triangulation Δ_w の maximal face は 02 。

$$\Delta_w = \{02, 0, 2\}$$

もしくは、重みについて持ち上げた点たちの下側凸包から求める方法

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について、

(a) トーリックイデアル I_A を求めよ。

$$I_A = \langle x_0x_3 - x_1x_2 \rangle$$

(b) $w = (1, 0, 0, 2)$ について $\text{in}_w(I_A)$ を求めよ。

$$\text{in}_w(I_A) = \langle x_0x_3 \rangle$$

(c) 上の w について regular triangulation を求めよ。

$$I_{\Delta_w} = \sqrt{\text{in}_w(I_A)} = \langle x_0x_3 \rangle = \langle x_0 \rangle \cap \langle x_3 \rangle$$

regular triangulation Δ_w の maximal face 123, 012

$$\Delta_w = \{123, 012, 12, 13, 31, 01, 02, 0, 1, 2, 3\}$$

もしくは、重みについて持ち上げた点たちの下側凸包から求める方法

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について、

(a) トーリックイデアル I_A を求めよ。

$$I_A = \langle x_0x_3 - x_1x_2, -x_1x_3^2 + x_2^3, -x_1^2x_3 + x_0x_2^2, -x_0^2x_2 + x_1^3 \rangle$$

(b) $w = (1, 0, 0, 2)$ について regular triangulation を求めよ。

$$\text{in}_w(I_A) = \langle -x_1^2x_3, x_0x_3, x_1x_3^2, x_0^2x_2 \rangle$$

Asir のプログラム toric.rr 中の gr_w, in_w を使って、上の計算を行うには次のようにする。

```
Asir
[1220] load("toric.rr");
[1233] Id=toric_ideal([[1,1,1,1],[0,1,3,4]]);
ideal :
[x3-t0*t1^4,x2-t0*t1^3,x1-t0*t1,x0-t0,t0*t1*t2-1]
gb :
[x0*x3-x1*x2,-x1*x3^2+x2^3,-x1^2*x3+x0*x2^2,-x0^2*x2+x1^3,
-t2*x1+1,t2*x0*x3-x2,-t2*x0^2*x2+x1^2,t1*x3-t2*x2^2,-x3+t1*x2,
t2*x0*x2-t1*x1,-x1+t1*x0,x0-t0,t2^2*x0*x2-t1,-t2*x2+t1^2]
[x0*x3-x1*x2,-x1*x3^2+x2^3,-x1^2*x3+x0*x2^2,-x0^2*x2+x1^3]
[1234] G=gr_w(Id,[x0,x1,x2,x3],[1,0,0,2]);
[-x1^2*x3+x0*x2^2,-x0^2*x2+x1^3,x0*x3-x1*x2,-x1*x3^2+x2^3]
[1235] InW=map(in_w,G,[x0,x1,x2,x3],[1,0,0,2]);
[-x1^2*x3,-x0^2*x2,x0*x3,-x1*x3^2]
[1236] primedec(InW,[x0,x1,x2,x3]);
[[x1,x0],[x3,x0],[x3,x2]]
```

$$I_{\Delta_w} = \sqrt{\text{in}_w(I_A)} = \langle x_1x_3, x_0x_3, x_0x_2 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_3 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle$$

regular triangulation Δ_w の maximal face が 23, 12, 01。

$$\Delta_w = \{23, 12, 01, 0, 1, 2\}$$

もしくは、重みについて持ち上げた点たちの下側凸包から求める方法

4. $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ とする。

(a) 次の $w_i \in \mathbb{R}^2$ について、 $F_i := \text{face}_{w_i}(P)$ を計算せよ。

$$w_1 = (1, 1), w_2 = (-1, -1), w_3 = (-1, 0), w_4 = (0, -1), w_5 = (0, 0)$$

- $F_1 := \text{face}_{w_1}(P) = \emptyset$
- $F_2 := \text{face}_{w_2}(P) = \{(0, 0)\}$
- $F_3 := \text{face}_{w_3}(P) = (0, 1) \times \mathbf{R}_{\geq 0}$
- $F_4 := \text{face}_{w_4}(P) = (1, 0) \times \mathbf{R}_{\geq 0}$
- $F_5 := \text{face}_{w_5}(P) = P$

(b) F_i の normal cone $N_P(F_i)$ を求めよ.

- $N_P(F_1) = \{(w_1, w_2) \mid w_1 > 0 \text{ or } w_2 > 0\}$
- $N_P(F_2) = \{(w_1, w_2) \mid w_1 < 0, w_2 < 0\}$
- $N_P(F_3) = \{(w_1, 0) \mid w_1 < 0\}$
- $N_P(F_4) = \{(0, w_2) \mid w_2 < 0\}$
- $N_P(F_5) = \{(0, 0)\}$

5. $I = \langle x^2 + y^2 - 4, xy - 1 \rangle$ とする.

(a) $y < x$ なる lexicographic order $<$ に対して, $C_{I, <}$ ($<$ できまる I の Gröbner cone) を求めよ.

I の $<$ に関する簡約グレブナ基底は $\{y^4 - 4y^2 + 1, x + y^3 - 4y\}$ であるので, $w = (w_1, w_2)$ に関する次の不等式系の解を計算する.

$$\begin{aligned} (0, 2) \cdot w > 0, & \quad (0, 4) \cdot w > 0, \\ (1, -3) \cdot w > 0, & \quad (1, -1) \cdot w > 0, \\ (1, 0) \cdot w > 0, & \quad (0, 1) \cdot w > 0 \end{aligned}$$

故に, $C_{I, <} = \{(w_1, w_2) \mid w_2 > 0, w_2 < 1/3w_1\}$.

polymake で計算するには以下のファイル

```
cone1.txt
INEQUALITIES
0 0 2
0 0 4
0 1 -3
0 1 -1
0 1 0
0 0 1
```

を用意して, シェルから次のコマンドを実行する.

```
$ polymake cone1.txt FACETS
FACETS
0 0 2
0 1 -3
1 0 0
```

(b) $C_I[3, 1] = \{w \in \mathbf{R}_{\geq 0}^2 \mid \text{in}_w(I) = \text{in}_{(3,1)}(I)\}$ を計算せよ.

I の $<_{(3,1)}$ に関する簡約グレブナ基底は $\{y^4 - 4y^2 + 1, x + y^3 - 4y\}$ であるので, $w = (w_1, w_2)$ に関する次の方程式系の解を計算する.

$$\begin{aligned} (1, -3) \cdot w = 0, & \quad (1, -1) \cdot w > 0, \\ (0, 2) \cdot w > 0, & \quad (0, 4) \cdot w > 0, \\ (1, 0) \cdot w > 0, & \quad (0, 1) \cdot w > 0 \end{aligned}$$

故に, $C_I[(3, 1)] = \{(w_1, w_2) \mid w_2 > 0, w_2 = 1/3w_1\}$.

polymake で計算するには以下のファイル

```
cone2.txt
INEQUALITIES
0 1 -3
0 -1 3
0 1 -1
0 0 2
0 0 4
0 1 0
0 0 1
```

を用意して, シェルから次のコマンドを実行する.

```
$ polymake cone2.txt FACETS AFFINE_HULL
FACETS
0 1 -1
1 0 0

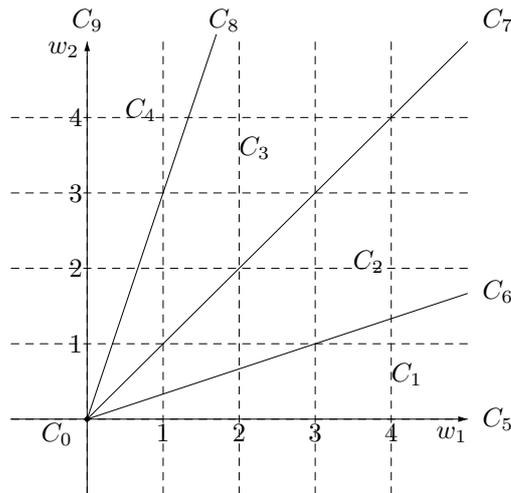
AFFINE_HULL
0 1 -3
```

(c) I の $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ における Gröbner fan 計算し, 図示せよ.

$\overline{C_{I, \prec}}$ に属さないが十分近い w を一つとる. 今, (b) より, $(3, 1)$ が境界であることが分かっているので, $w = (3, 2)$ を取ってみる. このとき, C_{I, \prec_w} を計算すると,

$$C_{I, \prec_w} = \{(w_1, w_2) \mid w_2 < w_1, w_2 > 1/3w_1\}$$

であり, $C_{I, \prec}$ と境界を共有している. (境界を共有しなかった場合はもっと近くの w を取り直す.) これを $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ を尽くすまで繰り返す. 今は x と y の対称性から残りの部分はすぐに分かる. 図示すると以下のようなになる.



(d) 各 cone におけるグレブナ基底を計算し, $\text{in}_w(I)$ を求めよ.

各 cone に属する w を用いて \prec_w に関するグレブナ基底を計算した. 下線部が先頭項である.

- $C_1 : \{\underline{x} + y^3 - 4y, \underline{y^4} - 4y^2 + 1\}$
- $C_2 : \{\underline{x^2} + y^2 - 4, \underline{xy} - 1, \underline{y^3} + x - 4y\}$

- $C_3 : \{\underline{y^2 + x^2 - 4}, \underline{xy - 1}, \underline{x^3 - 4x + y}\}$
- $C_4 : \{\underline{x^4 - 4x^2 + 1}, \underline{y + x^3 - 4x}\}$
- $C_5 : \{\underline{x + y^3 - 4y}, \underline{y^4 - 4y^2 + 1}\}$
- $C_6 : \{\underline{x + y^3 - 4y}, \underline{y^4 - 4y^2 + 1}\}$
- $C_7 : \{\underline{x^2 + y^2 - 4}, \underline{xy - 1}, \underline{y^3 + x - 4y}\}$
- $C_8 : \{\underline{y^2 + x^2 - 4}, \underline{xy - 1}, \underline{x^3 + y - 4x}\}$
- $C_9 : \{\underline{x^4 - 4x^2 + 1}, \underline{y + x^3 - 4x}\}$
- $C_0 : \{\underline{x + y^3 - 4y}, \underline{y^4 - 4y^2 + 1}\}$

6. $J = \langle x + y + z, y + 2z \rangle$ とする.

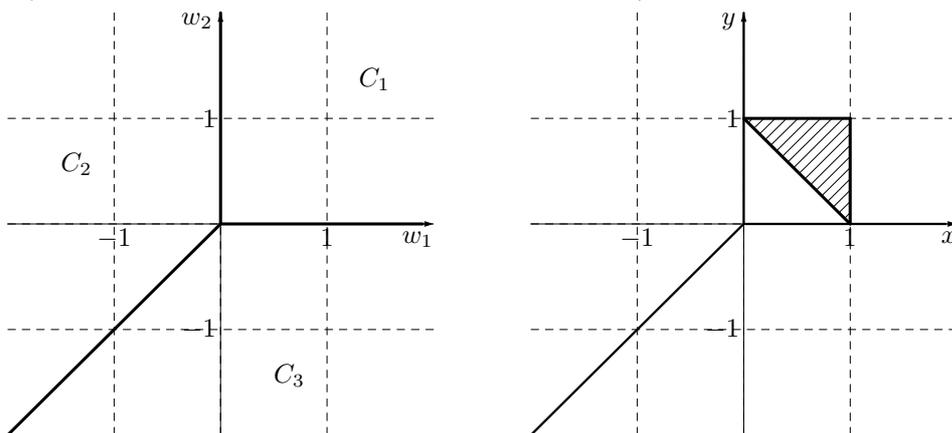
(a) J の Gröbner fan を計算せよ.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_1 > w_3, w_2 > w_3\} \\
 C_2 &= \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_1 < w_2, w_1 < w_3\} \\
 C_3 &= \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_1 > w_2, w_2 < w_3\}
 \end{aligned}$$

の3つを最大次元の cone とする fan が J の Gröbner fan である.

(b) (a) において z の重みを 0 に制限して得られる fan を考える. この fan を normal fan として持つような polytope を与えよ.

$w_3 = 0$ 平面での切り口を図示すると左下のようになり, 右下の図の斜線部が求める polytope である.

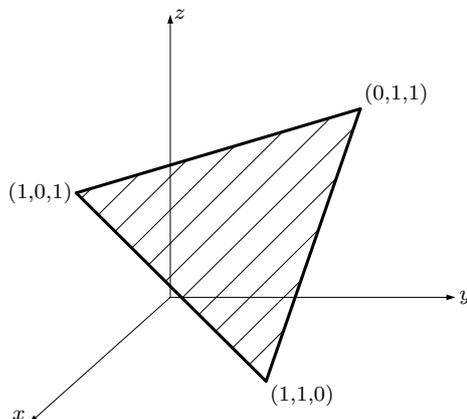


(c) J の Gröbner fan を normal fan として持つような polytope (i.e. state polytope) を計算せよ.

今, J は線型多項式によって生成されているので,

$$\begin{aligned}
 \text{State}(J) &= \text{Mat}(J) \\
 &= \text{conv}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}
 \end{aligned}$$

である. 図示すると以下ようになる.



7. $\Delta_2 \times \Delta_2$ つまり

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

- (a) A の triangulation をひとつ, グレブナ基底を求めることにより求めよ.

I_A の生成元は

$[x_4*x_8-x_5*x_7, x_1*x_8-x_2*x_7, x_3*x_8-x_5*x_6, x_3*x_7-x_4*x_6, x_0*x_8-x_2*x_6, x_0*x_7-x_1*x_6, x_1*x_5-x_2*x_4, x_0*x_5-x_2*x_3, x_0*x_4-x_1*x_3]$

たとえば, $w = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 3, 1)$ として, $\text{in}_w(I_A)$ を計算すると,

$[x_3*x_8, x_0*x_5, -x_2*x_4, x_0*x_8, x_0*x_4, -x_5*x_7, x_3*x_7, -x_2*x_7, x_0*x_7]$

となり, これの radical を 準素分解した結果は

$\{\text{ideal}(x_8, x_7, x_5, x_4), \text{ideal}(x_5, x_3, x_2, x_0), \text{ideal}(x_7, x_3, x_2, x_0), \text{ideal}(x_8, x_7, x_2, x_0), \text{ideal}(x_8, x_7, x_4, x_0), \text{ideal}(x_7, x_4, x_3, x_0)\}$

となって, regular triangulation Δ_w の maximal face は

01236, 14678, 14568, 13456, 12356, 12568

となる.

- (b) I_A の Gröbner fan を求めよ.

gfan を用いて Gröbner fan を計算させる。上で計算したイデアルから次のような入力ファイルを作る。(x0, ..., x8 を a, b, ..., i に置き換える)

```
gfan_d2xd2.txt
{
  i*e-h*f, i*b-h*c, i*d-g*f, h*d-g*e, i*a-g*c,
  h*a-g*b, f*b-e*c, f*a-d*c, e*a-d*b
}
```

gfan コマンドを実行し, 出力を gfan_d2xd2.out に出す。

```
$ gfan < gfan_d2xd2.txt > gfan_d2xd2.out
```

全ての reduced Gröbner basis を出力してくれる。その reduced Gröbner basis から Gröbner cone を計算するには, gfan_groebnercone を用いる。例として, gfan_d2xd2.out から reduced Gröbner basis $\{e*i-f*h, d*i-f*g, d*h-e*g, b*i-c*h, b*f-c*e, a*i-c*g, a*h-b*g, a*f-c*d, a*e-b*d\}$ を取り出し, これについての Gröbner cone を計算する。まず, 入力ファイル d2xd2_1.gb を用意。

```
d2xd2_1.gb
{
  e*i-f*h, d*i-f*g, d*h-e*g, b*i-c*h, b*f-c*e, a*i-c*g,
  a*h-b*g, a*f-c*d, a*e-b*d
}
```

gfan_groebnercone を次のように実行する。

```

$ gfan_groebnercone < d2xd2_1.gb
LP algorithm being used: "cddgmp".
_application PolyhedralCone
_version 2.2
_type PolyhedralCone

AMBIENT_DIM
9

DIM
9

IMPLIED_EQUATIONS

LINEALITY_DIM
5

LINEALITY_SPACE
1 0 0 0 -1 -1 0 -1 -1
0 1 0 0 1 0 0 1 0
0 0 1 0 0 1 0 0 1
0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 1 1

FACETS
0 0 0 0 1 -1 0 -1 1
0 0 0 1 -1 0 -1 1 0
0 1 -1 0 -1 1 0 0 0
1 -1 0 -1 1 0 0 0 0

RELATIVE_INTERIOR_POINT
4 2 0 2 1 0 0 0 0

```

最後に出力される 4 つのベクトルが、cone を定義する各半空間の法線ベクトルを表している。すなわち、この cone を定義する線形不等式系は

$$w_5 - w_6 - w_8 + w_9 > 0$$

$$w_4 - w_5 - w_7 + w_8 > 0$$

$$w_2 - w_3 - w_5 + w_6 > 0$$

$$w_1 - w_2 - w_4 + w_5 > 0$$

9. (a) 次の凸多面体について原点を内点として含むかどうかを polymake などを使って判定せよ。

$$P_1 = \text{conv}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, -1, -1)\})$$

$$P_2 = \text{conv}(\{(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 1)\})$$

P_1 を入力とするため次のようなファイルを用意。

```

ip-p1.txt
POINTS
1 1 0 0
1 0 1 0
1 0 0 1
1 -1 -1 -1

```

P_1 の facet を計算するため、次のようなコマンドを入力

```

$ polymake ip_p1.txt FACETS
FACETS
1 -1 -1 -1
1 -1 -1 3
1 -1 3 -1
1 3 -1 -1

```

だから P_1 を定義する線形不等式系は

$$\begin{aligned}
1 - x_1 - x_2 - x_3 &\geq 0 \\
1 - x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 0 \\
1 - x_1 + 3x_2 - x_3 &\geq 0 \\
1 + 3x_1 - x_2 - x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ を代入すれば、いずれも $1 > 0$ となり、原点が内点とわかる。結局、facet の計算結果の第 1 成分の部分が正であれば、原点が内点であることがわかる。

P_2 についても同様の計算を行えば、

```

$ polymake ip_p2.txt FACETS
FACETS
1 -1 -1 -1
-1 -1 1 3
1 1 1 -1
1 1 -1 -1

```

となり、原点は内点でないことがわかる。

(b) 次の凸多面体について双対凸多面体を polymake などを用いて計算せよ。

$$\begin{aligned}
P_1 &= \text{conv}(\{(1, 0), (0, 1), (-1, -1)\}) \\
P_2 &= \text{conv}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}) \\
P_3 &= \text{conv}(\{(1, -1, -1), (-1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}) \\
P_4 &= \text{conv}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\})
\end{aligned}$$

凸多面体 $P = \text{conv}(\{u_1, \dots, u_m\})$ について、その双対凸多面体は

$$P^* = \{v \mid \langle v, u \rangle \geq -1 \ (\forall u \in P)\}$$

である。任意の $u \in P$ について、ある非負実数 t_i で $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ を満たすものが存在して、

$$u = \sum_{i=1}^m t_i u_i$$

とかけるから、

$$\langle v, u \rangle \geq -1 \ (\forall u \in P)$$

の条件は、

$$\langle v, u_i \rangle \geq -1 \ (1 \leq i \leq m) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と同値になる。この線形不等式系により定まる凸多面体が双対凸多面体である。

P_1 の場合、上の線形不等式系にあたるものは

$$\begin{aligned}1 + x_1 &\geq 0 \\1 + x_2 &\geq 0 \\1 - x_1 - x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

であるから、次のような入力を用意する。

```
dual_p1.txt
INEQUALITIES
1 1 0
1 0 1
1 -1 -1
```

この入力は P_1 の頂点をそのまま書いたものに等しい。この線形不等式系の定義する凸多面体の頂点を計算したいので、

```
$ polymake dual_p1.txt VERTICES
VERTICES
1 2 -1
1 -1 -1
1 -1 2
```

だから、 P_1 の双対凸多面体は

$$P_1^* = \text{conv}(\{(2, -1), (-1, -1), (-1, 2)\})$$

同様の計算を P_2, P_3, P_4 について行えば、

$$\begin{aligned}P_2^* &= \text{conv}(\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)\}) \\P_3^* &= \text{conv}(\{(3, -2, -1), (-4, -2, -1), (-1/2, 3/2, -1), (2/3, 1/3, 4/3)\}) \\P_4^* &= \text{conv}(\{(1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, -1), (-1, 1, 1), \\&\quad (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)\})\end{aligned}$$

10. (研究課題) 与えられた Z^d の点集合できまる凸多面体 P に対してその双対多面体の頂点を計算するプログラムを作成せよ。 P が smooth fano 多面体かどうか判定するプログラムを作成せよ。 (P が原点を内点にもつか?, P の facet の頂点が Z^d の基底か判定する.)

参考: sfano.rr, polymake.rr, dual_p.rr

参考文献

- [Stu] B.Sturmfels, Gröbner Bases and Convex Polytopes, 1995, American Mathematical Society, University lecture series 8.
- [SST] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations, 2000, Springer.
- [GBN] 日比孝之編, グレブナー基底の現在, 数学書房, 2006