

凸多面体とグレブナ基底, 問題集. 2009.09.17

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

について、

- (a) トーリックイデアル I_A を求めよ。
- (b) $w = (2, 1, 2)$ について $\text{in}_w(I_A)$ を求めよ。
- (c) $w = (2, 1, 2)$ について regular triangulation を求めよ。
- (d) $w = (1, 2, 1)$ について regular triangulation を求めよ。
- (e) 上の regular triangulation を $\sqrt{\text{in}_w(I_A)}$ の準素分解から計算せよ。

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について、

- (a) トーリックイデアル I_A を求めよ。
- (b) $w = (1, 0, 0, 2)$ について $\text{in}_w(I_A)$ を求めよ。
- (c) 上の w について regular triangulation を求めよ。

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について、

- (a) トーリックイデアル I_A を求めよ。
- (b) $w = (1, 0, 0, 2)$ について regular triangulation を求めよ。

4. $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ とする.

- (a) 次の $w_i \in \mathbf{R}^2$ について, $F_i := \text{face}_{w_i}(P)$ を計算せよ.

$$w_1 = (1, 1), w_2 = (-1, -1), w_3 = (-1, 0), w_4 = (0, -1), w_5 = (0, 0)$$

- (b) F_i の normal cone $N_P(F_i)$ を求めよ.

5. $I = \langle x^2 + y^2 - 4, xy - 1 \rangle$ とする.

- (a) $y \prec x$ なる lexicographic order \prec に対して, $C_{I, \prec}$ (\prec できる I の Gröbner cone) を求めよ.

- (b) $C_I[(3,1)] = \{w \in \mathbf{R}_{\geq 0}^2 \mid \text{in}_w(I) = \text{in}_{(3,1)}(I)\}$ を計算せよ。
 (c) I の $\mathbf{R}_{\geq 0}^2$ における Gröbner fan 計算し, 図示せよ。
 (d) 各 cone におけるグレブナ基底を計算し, $\text{in}_w(I)$ を求めよ。

6. $J = \langle x + y + z, y + 2z \rangle$ とする。

- (a) J の Gröbner fan を計算せよ。
 (b) (a) において z の重みを 0 に制限して得られる fan を考える。この fan を normal fan として持つような polytope を与えよ。
 (c) J の Gröbner fan を normal fan として持つような polytope (i.e. state polytope) を計算せよ。

7. $\Delta_2 \times \Delta_2$ つまり

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。

- (a) A の triangulation をひとつ, グレブナ基底を求めることにより求めよ。
 (b) I_A の Gröbner fan を求めよ。
8. (a) 次の凸多面体について原点を内点として含むかどうかを polymake などを使って判定せよ。

$$P_1 = \text{conv}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, -1, -1)\})$$

$$P_2 = \text{conv}(\{(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 1)\})$$

- (b) 次の凸多面体について双対凸多面体を polymake などを用いて計算せよ。

$$P_1 = \text{conv}(\{(1, 0), (0, 1), (-1, -1)\})$$

$$P_2 = \text{conv}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\})$$

$$P_3 = \text{conv}(\{(1, -1, -1), (-1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\})$$

$$P_4 = \text{conv}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\})$$

9. (研究課題) 与えられた \mathbb{Z}^d の点集合で定まる凸多面体 P に対してその双対多面体の頂点を計算するプログラムを作成せよ. P が smooth fano 多面体かどうか判定するプログラムを作成せよ. (P が原点を内点にもつか?, P の facet の頂点が \mathbb{Z}^d の基底か判定する.)

参考文献