http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Math/dojo, 2012 年 2 月 24 日.

CREST スクール 5 日目

氏名
西山 絢太 (大阪大・情報, JST CREST)

必要があれば紙を追加して下さい.

問 1.1 $k = 2, 3, 4, 5$ のとき, $x\partial_x(x\partial_x - 1)\cdots(x\partial_x - k)$ を Macaulay2, Singular, Risa/Asir を用いて展開せよ. 一般の k についての展開を推測し, 帰納法で証明せよ.

解答

- $k = 1$ のとき, $\quad x\partial_x(x\partial_x - 1) = x(\partial_x x)\partial_x - x\partial_x = x(x\partial_x + 1)\partial_x - x\partial_x = x^2\partial_x^2.$
- $k = 2$ のとき,

$$
\begin{aligned}
x\partial_x(x\partial_x - 1)(x\partial_x - 2) &= x^2\partial_x^2(x\partial_x - 2) = x^2\partial_x^2 x\partial_x - 2x^2\partial_x \\
= x^2\partial_x(x\partial_x + 1)\partial_x - 2x^2\partial_x^2 &= x^2\{(x\partial_x + 1)\partial_x + \partial_x\}\partial_x - 2x^2\partial_x^2 = x^3\partial_x^3.
\end{aligned}
$$

- k のとき,

$$x\partial_x(x\partial_x - 1)\cdots(x\partial_x - k) = x^{k+1}\partial_x^{k+1}$$

が成り立つことを帰納法で示す.
$k - 1$ まで正しいと仮定したとき,

$$
\begin{aligned}
x\partial_x(x\partial_x - 1)\cdots(x\partial_x - k) &= x^k\partial_x^k(x\partial_x - k) \\
&= x^{k+1}\partial_x^{k+1} + kx^k\partial_x^k - kx^k\partial_x^k \\
&= x^{k+1}\partial_x^{k+1}.
\end{aligned}
$$

よって, 成り立つ. (2 行目への変形にはライプニッツの公式 [dojo, 定理 6.1.2] を用いた.)

Macaulay2, Singular, Risa/Asir における計算法は, ファイル toi1-1.{m2, sing, rr} をそれぞれ参照せよ. 各システムにおけるファイルの読み込みは以下のように行う. 他の解答のファイルも同様に読み込めばよい.

Macaulay2: ファイルの読み込み

```
i1 : load "toi1-1.m2";
  2  2   3  3   4  4   5  5   6  6
[x dx , x dx , x dx , x dx , x dx ]
```

Singular: ファイルの読み込み

```
> < "toi1-1.sing";
x^2*dx^2 x^3*dx^3 x^4*dx^4 x^5*dx^5 x^6*dx^6
```

Risa/Asir: ファイルの読み込み

```
[1824] load("toi1-1.rr");
[x^2*dx^2,x^3*dx^3,x^4*dx^4,x^5*dx^5,x^6*dx^6]
```

問 1.2 β を適当にとって, 次の行列 A に付随する A-超幾何系 $H_A(\beta)$ を求めよ. [dojo, p.388]

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. $A : 2 \times 3$ 分割表に付随する行列
3. $A : 3 \times 3$ 分割表に付随する行列

解答 Macaulay2, Singular, Risa/Asir における計算法は, ファイル `toi1-2.`{`m2, sing, rr`} をそれぞれ参照せよ.

問 1.3 次の定理を示せ.

定理 1 (グレブナー道場 定理 6.9.3) $\prec$ を D における $\partial \succ x$ を満たすブロック順序であるとする. このとき, I の D における $\prec$ に関するグレブナー基底 G は, R における $\prec'$ 順序に関する RI のグレブナー基底である. ここで, $\prec'$ は $\partial^\alpha \prec' \partial^\beta \Leftrightarrow \partial^\alpha \prec \partial^\beta$ で定義する.

解答 G が RI を生成することは明らかであるから, $G := \{g_1, \ldots, g_s\} \subset D$ とおいて,
$\mathrm{in}_{\prec'}(RI) = \langle \mathrm{in}_{\prec'}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\prec'}(g_s) \rangle$ を示そう.
RI の元 p を任意にとる. 適当な多項式 f を左から掛けることにより $fp \in I$ とできる. G は I のグレブナー基底であるから, 定義により, ある i について $\mathrm{in}_\prec(g_i)$ は $\mathrm{in}_\prec(fp)$ を割り切る. ここで,
$\mathrm{in}_\prec(g_i) = c_i x^{\alpha_i} \xi^{\beta_i}$, $(c_i \in \mathbf{C})$, $\mathrm{in}_\prec(fp) = c x^\alpha \xi^\beta$, $(c \in \mathbf{C})$ と書けていたとする. 特に ξ^{β_i} は ξ^β を割り切っていることに注意しよう. また, ブロック順序の定義により, $\mathrm{in}_{\prec'}(g_i) = c_i(x)\xi^{\beta_i}$, $(c_i(x) \in \mathbf{C}[x])$,
$\mathrm{in}_{\prec'}(p) = c(x)\xi^\beta$, $(c(x) \in \mathbf{C}(x))$ と書けるので, $\mathrm{in}_{\prec'}(p) \in \langle \mathrm{in}_{\prec'}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\prec'}(g_s) \rangle$ が言えた.

問 1.4 問 1.3 を使って, 次のイデアルの指定された順序に関する R におけるグレブナー基底を Macaulay2, Singular, Risa/Asir で計算せよ. また, そのとき用いた項順序を行列で表現せよ. [dojo, p.523]

1. $I = \langle y\partial_x - x\partial_y, \partial_x\partial_y + 4xy \rangle$, $(\partial_x \succ \partial_y$ なる (次数) 辞書式順序)
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = (0, 1/2, 1/2)^T$ とする $H_A(\beta)$, $(\partial_1 \succ \partial_2 \succ \partial_3 \succ \partial_4$ なる (次数) 逆辞書式順序)

解答 用いる項順序を表現する行列はそれぞれ,

1. $$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & \partial_x & \partial_y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & \partial_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

である. (左下のブロックは変数 x, y や $x_1, \ldots, x_4$ に項順序を定める行列なら何でもよいが, ここでは ∂ に入れた順序と同じものを採用した.) Macaulay2, Singular, Risa/Asir における計算法は, ファイル `toi1-4.`{`m2, sing, rr`} をそれぞれ参照せよ.

問 1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする. 次を求めよ. [dojo, 例題 7.4.21]

1. 正規化体積 VOL(A)
2. $\beta = (1,2)^T$ のとき, $H_A(\beta)$ の rank (holonomic rank)
3. $\beta = (1,3)^T$ のとき, $H_A(\beta)$ の rank (holonomic rank)

解答

1. VOL(A) = 4

   行列式を用いた定義 ([dojo, p.305]) に従うと, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ であるから, 2×2-小行列式の最大公約数 $\delta = 1$ である. また, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$ であるから, $\mathrm{VOL}(A) = 4/1 = 4$.

   (参考) 計算機で正規化体積を計算できませんか? という質問があったので Normaliz による計算方法を紹介します. まず, 凸多面体の頂点を表す次の入力ファイル `toi1-5-1.in` を作成する. 拡張子は `in` としなければばならない.

   Normaliz 入力ファイル: `toi1-5-1.in`

   ```
   4
   2
   1 0
   1 1
   1 3
   1 4
   2
   ```

   1,2 行目の 4, 2 はそれぞれ入力する行列の行と列の数であり, その下に A の各列を順に並べる. 最終行の 2 は Normaliz のデータタイプを表しており, 2 は polytope のことである. 2 の代わりに `polytope` と書いてもよい. ファイルが用意できたら, シェルから次のように実行する.

   Normaliz の実行

   ```
   $ norm32 toi1-5-1.in
   ```

   `norm32` は 32bit 版であり, 64bit 版は `norm64` である. これにより, 結果がファイル `toi1-5-1.out` に書き出される.

Normaliz 出力ファイル: toi1-5-1.out

```
5 generators of Ehrhart ring:
 1 0 1
 1 1 1
 1 2 1
 1 3 1
 1 4 1

5 lattice points in polytope:
 1 0
 1 1
 1 2
 1 3
 1 4

2 extreme points of polytope:
 1 0
 1 4

normalized volume = 4
```

最終行に正規化体積 (normalized volume) の値が表示されている.

2. rank $H_A((1,2)^T) = 5$
問 1.4 に倣って, R におけるグレブナー基底を計算し, 標準単項式集合の元の数をチェックすればよい. Macaulay2, Singular, Risa/Asir における計算法は, ファイル `toi1-5-2.{m2, sing, rr}` をそれぞれ参照せよ. Macaulay2, Risa/Asir (正確には Kan/sm1) には holonomic rank を計算する関数も実装されている.

3. rank $H_A((1,3)^T) = 4$
Macaulay2, Singular, Risa/Asir における計算法は, ファイル `toi1-5-3.{m2, sing, rr}` をそれぞれ参照せよ.

正規化体積と holonomic rank の関係については [SST, Section 4] を参照せよ.

問 1.6 問 1.4 のイデアル (微分方程式系) を Pfaffian 系に変換せよ. また, Pfaffian 行列の特異点集合を求めよ. [dojo, p.340, 496]

解答

1. $I = \langle y\partial_x - x\partial_y, \partial_x\partial_y + 4xy \rangle$, ($\partial_x \succ \partial_y$ なる (次数) 辞書式順序)
微分作用素 $L_1 = y\partial_x - x\partial_y, L_2 = \partial_x\partial_y + 4xy$ の生成するイデアル $I = \langle L_1, L_2 \rangle$ に対して, $\partial_x \succ \partial_y$ なる (次数) 逆辞書式順序 $\prec$ についてのグレブナー基底 G を計算する.

Risa/Asir: R_2 でのグレブナー基底計算

```
[1407] load("nf_r2.rr");
[1431] L1=y*dx-x*dy;
[1432] L2=dx*dy+4*x*y;
[1434] GB=buchberger2([L1,L2],[dx,dy],0);
[y*dx-x*dy,dy*dx+4*y*x,(-y*x*dy^2+x*dy-4*y^3*x)/(y)]
```

グレブナー基底 $G = \{y\partial_x - x\partial_y, \partial_x\partial_y + 4xy, -x\partial_y^2 + \frac{x}{y}\partial_y - 4xy^2\}$ が得られる.

I のイニシャルイデアルは $\mathrm{in}_\prec(I) = \langle \xi_x, \xi_x\xi_y, \xi_y^2 \rangle \subset \mathbf{C}(x,y)[\xi_x, \xi_y]$ であるから, $\{1, \partial_y\}$ が I の標準単項式の集合である. Pfaffian 系を求めるため, $\partial_x, \partial_x\partial_y, \partial_y, \partial_y\partial_y$ の G による正規形を計算する.

Risa/Asir: R_2 での正規形計算

```
[1435] normal_form2(dx,GB,VL=[dx,dy],0);
[(x*dy)/(y),[ (1)/(y) 0 0 ]]
[1436] normal_form2(dx*dy,GB,VL=[dx,dy],0);
[-4*y*x,[ (y*dy-1)/(y^2) 0 (-1)/(y) ]]
[1437] normal_form2(dy,GB,VL=[dx,dy],0);
[dy,[ 0 0 0 ]]
[1438] normal_form2(dy*dy,GB,VL=[dx,dy],0);
[(dy-4*y^3)/(y),[ 0 0 (-1)/(x) ]]
```

この計算結果は,

$$
\begin{array}{cccc}
\partial_x & \longrightarrow^* & \frac{x}{y}\partial_y & \text{by } G \\
\partial_x\partial_y & \longrightarrow^* & -4xy & \text{by } G \\
\partial_y & \longrightarrow^* & \partial_y & \text{by } G \\
\partial_y\partial_y & \longrightarrow^* & -4y^2 + \frac{1}{y}\partial_y & \text{by } G
\end{array}
$$

ということを表す. これより, Pfaffian 系は, $F = \begin{pmatrix} f \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ とおけば,

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x}{y} \\ -4xy & 0 \end{pmatrix} F, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4y^2 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} F
$$

である.

Risa/Asir: `yang.rr` による Pfaffian 系の計算

```
[1824] import("yang.rr");
0
[2307] yang.define_ring([x,y]);
{[euler,[x,y]],[x,y],[0,0],[0,0],[dx,dy]}
[2308] L=[y*dx-x*dy,dx*dy+4*x*y];
[y*dx-x*dy,dy*dx+4*y*x]
[2309] LL=yang.util_pd_to_euler(L,[x,y]);
[(y^2*dx-x^2*dy)/(y*x),(dy*dx+4*y^2*x^2)/(y*x)]
[2310] G=yang.gr(LL);
[(y^2*dx-x^2*dy)/(y^2),dy^2-2*dy+4*y^4]
[2311] S=yang.stdmon(G);
[dy,1]
[2312] PF=yang.pf([1,dy],G)$
[2313] PF[0];
[ 0 (x)/(y^2) ]
[ -4*y^2*x 0 ]
[2314] PF[1];
[ 0 (1)/(y) ]
[ -4*y^3 (2)/(y) ]
```

これより, Pfaffian 系は, $F = \begin{pmatrix} f \\ y\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ とおけば, (基底の取り方が上と異なることに注意)

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x}{y^2} \\ -4xy^2 & 0 \end{pmatrix} F, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ -4y^3 & \frac{2}{y} \end{pmatrix} F
$$

である.

Pfaffian 系の特異点集合は, Pfaffian 行列の各成分の分母に現れる多項式の零点集合のことである. したがって, この場合は $\mathrm{V}(y) := \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid y = 0\}$ である.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = (0, 1/2, 1/2)^T$ とする $H_A(\beta)$, ($\partial_1 \succ \partial_2 \succ \partial_3 \succ \partial_4$ なる (次数) 逆辞書式順序)

yang.rr による結果のみ記す．詳細は toi1-6-2.rr を参照．

Risa/Asir: yang.rr による Pfaffian 系の計算

```
[2384] load("toi-1-6-2.rr");
Pfaffian matrix for x1
[ 0 (1)/(x1) ]
[ (-1/4*x4)/(x1*x4-x2*x3) (x4)/(x1*x4-x2*x3) ]

Pfaffian matrix for x2
[ (1/2)/(x2) (-1)/(x2) ]
[ (1/4*x1*x4)/(x1*x2*x4-x2^2*x3) (-1/2*x1*x4-1/2*x2*x3)/(x1*x2*x4-x2^2*x3) ]

Pfaffian matrix for x3
[ (1/2)/(x3) (-1)/(x3) ]
[ (1/4*x1*x4)/(x1*x3*x4-x2*x3^2) (-1/2*x1*x4-1/2*x2*x3)/(x1*x3*x4-x2*x3^2) ]

Pfaffian matrix for x4
[ 0 (1)/(x4) ]
[ (-1/4*x1)/(x1*x4-x2*x3) (x1)/(x1*x4-x2*x3) ]
```

Pfaffian 行列の特異点集合は $V(x_1x_2x_3x_4(x_1x_4 - x_2x_3))$ である．Pfaffian 行列の特異点集合と微分方程式系の特異点集合との関係は [数セミ, 2 月号] に解説があるので参照されたい．

問 1.7 問 1.4 の I に関して $I \bullet f = 0$ を満たす関数 f を考える．$(f(x,y), f_y(x,y))$ の点 $(1,1)$ における値 $(0.41614683, 1.81859485)$ を初期値として，$f(2,4)$ の値を Pfaffian 系を数値的に解くことによって求めよ．(Risa/Asir のプログラム hg0.rr を少し修正すればよい.)

解答　まず，hg0.rr を my_hg0.rr とでもコピーして，内容を次のように変更する．(変更箇所は青文字で表示させてある.) Px, Py は 問 1.6 で求めた Pfaffian 行列である．また，点 $(1,1)$ から点 $(2,4)$ へ動くので，この 2 点を結ぶ線分を変数 t で媒介変数表示させると $x = t+1, y = 3t+1$ $(0 \leq t \leq 1)$ であるから，6 行目と 8 行目の T0, T1 が決まる．刻み幅 DT を 0.005 に設定したが，これをいろいろと変えてどのくらいの精度が出るか見てみるのもよいだろう．

hg0.rr -> my_hg0.rr の書き換え

```
def hg0() {
 Px = newmat(2,2,
  [[0,y/x],[-x*y,1/x]]);
 Py = newmat(2,2,
  [[0,1],[-x^2,0]]);
 A=1; B=2; X=A*t; Y=B*t;
 P = base_replace(Px*A+Py*B,[[x,X],[y,Y]]);
 T0 = 0.1; T1 = 2; DT=0.05;
 Y0 = initv(A*T0,B*T0);
 T=tk_rk.runge_kutta_4_linear(P,t,[],
   T0,Y0,T1,DT);
 taka_plot_auto(T);
 return(T);
}
```

```
def hg0() {
 Px = newmat(2,2,
  [[0,x/y],[-4*x*y,0]]);
 Py = newmat(2,2,
  [[0,1],[-4*y^2,1/y]]);
 A=1; B=3; X=A*t+1; Y=B*t+1;
 P = base_replace(Px*A+Py*B,[[x,X],[y,Y]]);
 T0 = 0; T1 = 1; DT=0.005;
 Y0 =[0.41614683, 1.81859485];
 T=tk_rk.runge_kutta_4_linear(P,t,[],
   T0,Y0,T1,DT);
 taka_plot_auto(T);
 return(T);
}
```

実行は，Risa/Asir で次のように行う．

Risa/Asir: hg0.rr の実行

```
[1824] load("my_hg0.rr");
[2058] A=hg0();
Plot_auto: screen size is [0,-0.999521,1,0.999999]
[[1,-0.408099,7.30346],...(略)...
[2059] A[0];
[1,-0.408099,7.30346]
[2060] deval(-cos(2^2+4^2));
-0.408082
[2061] deval(-cos(1^2+1^2));
0.416147
```

`A[0]` に $t=1$, つまり点 $(2,4)$ の値が格納されている. `A[0][0]` が t の値, `A[0][1]` が $f(2,4)$ の値, `A[0][2]` が $f_y(2,4)$ の値である.

(注意) 演習の際に $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$ として符号が合わないと言っていましたが, この例は, $f(x,y)=-\cos(x^2+y^2)$ として作成したものでした. 初期点 $(1,1)$ での値 (`[2061]` の出力) も問題で与えたものと一致しています.

参考文献

[dojo] JST CREST 日比チーム (編), “グレブナー道場”, 共立出版, 576p., 2011. (ISBN: 978-4-320-01976-8)

[SST] M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, 2000, Springer.

[数セミ, 2 月号] 数学セミナー 2012 年 2 月号 (604 号), 日本評論社.

[Asir] M. Noro, et al., Risa/Asir,
`http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir-ja.html`

[M2] D.R. Grayson, M.E. Stillman, Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry,
`http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`

[Nmz] W. Bruns, B. Ichim, C. Söger, Normaliz,
`http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/normaliz/`

[Sing] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, Singular 3-1-2 — A computer algebra system for polynomial computations,
`http://www.singular.uni-kl.de/`

[sm1] N. Takayama, Kan/sm1,
`http://www.math.kobe-u.ac.jp/KAN/`