

CREST スクール 5 日目

氏名

必要があれば紙を追加して下さい.

問 1.1 $k = 2, 3, 4, 5$ のとき, $x\partial_x(x\partial_x - 1) \cdots (x\partial_x - k)$ を Macaulay2, Singular, Risa/Asir を用いて展開せよ. 一般の k についての展開を推測し, 帰納法で証明せよ.

解答

問 1.2 β を適当にとって, 次の行列 A に付随する A -超幾何系 $H_A(\beta)$ を求めよ. [dojo p.388]

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A : 2 \times 3$ 分割表に付随する行列

3. $A : 3 \times 3$ 分割表に付随する行列

解答

問 1.3 次の定理を示せ.

定理 1 (グレブナー道場 定理 6.9.3) \prec を D における $\partial \succ x$ を満たすブロック順序であるとする. このとき, I の D における \prec に関するグレブナー基底 G は, R における \prec' 順序に関する RI のグレブナー基底である. ここで, \prec' は $\partial^\alpha \prec' \partial^\beta \Leftrightarrow \partial^\alpha \prec \partial^\beta$ で定義する.

解答

問 1.4 問 1.3 を使って, 次のイデアルの指定された順序に関する R におけるグレブナー基底を Macaulay2, Singular, Risa/Asir で計算せよ. また, そのとき用いた項順序を行列で表現せよ. [dojo p.523]

1. $I = \langle y\partial_x - x\partial_y, \partial_x\partial_y + 4xy \rangle$, $(\partial_x \succ \partial_y$ なる (次数) 辞書式順序)

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = (0, 1/2, 1/2)^T$ とする $H_A(\beta)$, $(\partial_1 \succ \partial_2 \succ \partial_3 \succ \partial_4$ なる (次数) 逆辞書式順序)

解答

問 1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする. 次を求めよ. [dojo 例題 7.4.21]

1. 正規化体積 $\text{VOL}(A)$
2. $\beta = (1, 2)^T$ のとき, $H_A(\beta)$ の rank (holonomic rank)
3. $\beta = (1, 3)^T$ のとき, $H_A(\beta)$ の rank (holonomic rank)

解答

問 1.6 問 1.4 のイデアル (微分方程式系) を Pfaffian 系に変換せよ. また, Pfaffian 行列の特異点集合を求めよ. [dojo p.340, 496]

解答

問 1.7 問 1.4 の I に関して $I \bullet f = 0$ を満たす関数 f を考える. $(f(x, y), f_y(x, y))$ の点 $(1, 1)$ における値 $(0.41614683, 1.81859485)$ を初期値として, $f(2, 4)$ の値を Pfaffian 系を数値的に解くことによって求めよ. (Risa/Asir のプログラム hg0.rr を少し修正すればよい.)

解答