RIMS 研究集会「確率論シンポジウム」

日程： 2016 年 12 月 19 日（月）〜22 日（木）
会場： 京都大学数理解析研究所 420 号室
世話人：中島誠（名古屋大学）、福島竜輝（京都大学）、福山克司（神戸大学）、
矢野孝次（京都大学）、矢野裕子（京都産業大学）

12 月 19 日（月）

10:00–10:40 岡村 和樹 （京都大学）
Long time behavior of the volume of the Wiener sausage on Dirichlet spaces
10:45–11:25 David Croydon （University of Warwick）
Scaling limits of stochastic processes associated with resistance forms
11:30–12:10 石渡 聡 （山形大学），河備 浩司 （岡山大学），難波 隆弥 （岡山大学）
Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
13:10–13:50 岡田 いず海 （東京工業大学）
Exponents for the number of high points of simple random walks in two dimensions
13:55–14:35 中島 秀太 （京都大学）
Maximal edge-traversal time in First Passage Percolation
14:40–15:20 一場 知之 （カリフォルニア大学サンタバーバラ）
On mean-field approximation of particle systems with annihilation and spikes
15:35–16:15 井上 昭彦 （広島大学），仲村 勇祐 （広島大学）
移動平均型定常増分過程に対する新生過程によるセミマルチンゲール表現
16:20–17:00 高橋 勇人
Recent progress on conditional randomness

12 月 20 日（火）

9:00–9:40 琉 佳勳 （立命館大学）
A category of probability spaces and a conditional expectation functor
9:45–10:25 江崎 翔太 （九州大学），種村 秀紀 （千葉大学）
Stochastic differential equations for infinite particle systems of jump types with long range interactions
10:30–11:10 長田 博文 （九州大学）
Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性と Alder 型転移
11:15–11:55 長田 博文 （九州大学），河本 陽介 （九州大学）
Dynamic Universality for Random Matrices
13:10–13:50 長田 翔太 （九州大学）
Fourier expansion and discritizations of determinantal point processes
13:55–14:35 Sergio Andraus （中央大学）
Limit distributions of random matrix eigenvalue densities and the Benjamini-Schramm convergence
14:40–15:20 野場 啓 （京都大学），矢野 孝次 （京都大学）
屈折 Levy 過程の一般化と脱出問題
15:25–16:05 塚田 大史 （大阪市立大学）
レヴィ過程に対する田中の公式
16:20–16:50 Short Communications

12月21日（水）

9:00–9:40 中津 智則 （立命館大学）
On density function concerning maxima of some one-dimensional diffusion processes

9:45–10:25 稲浜 譲 （九州大学）
Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus (with Setsuo Taniguchi)

10:30–11:10 会田 茂樹 （東北大学）
Support theorem for reflected diffusion processes

11:15–11:55 角田 謙吉 （九州大学）
Large deviations and its application for a reaction-diffusion model

13:10–13:50 半田 悟 （北海道大学）
高次元イジング模型における「1-arm 指数」の上限評価

13:55–14:35 上島 芳倫 （北海道大学）
体心立方格子上の最近接モデルに対するレース展開

14:40–15:20 畑 宏明 （静岡大学）
An optimal investment strategy for insurance companies with a linear Gaussian stochastic factor model

15:35–16:45 Short Communications

12月22日（木）

9:00–9:40 湯浅 智意 （立命館大学）
Parametrix expansions for simulation of stochastic differential equations （Patrik Andersson 氏と Arturo Kohatsu-Higa 氏との共同研究）

9:45–10:25 和田 正樹 （東北大学）
Ergodic type limit theorem for fundamental solutions of critical Schrdinger operators

10:30–11:10 Panki Kim （Seoul National University）
Potential theory of subordinate killed processes

11:15–11:55 鈴木 由紀 （慶應義塾大学）
縮小されたブラウン媒質中の拡散過程

13:10–13:50 横山 聡 （東京大学）
Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation

13:55–14:35 李 嘉衣 （東京大学）
Sharp interface limit for stochastic Allen-Cahn equations

14:50–15:30 星野 壮登 （東京大学），稲浜 譲 （九州大学），永沼 伸顕 （大阪大学）
Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise

15:35–16:15 星野 壮登 （東京大学）
Global solution of the coupled KPZ equations

本研究集会は数理解析研究所の他、次の科研費の援助を受けます。
基盤研究 (S) 課題番号 16H06338 「無限粒子系の確率解析学」（代表者：長田博文（九州大学））
基盤研究 (A)（一般） 課題番号 25247007 「複雑な系の上の確率解析一離散モデルとそのスケール極限の解析」（代表者：熊谷隆（京都大学））
基盤研究 (A)（一般） 課題番号 26247008 「ディリクレ形式によるマルコフ過程の確率解析とその応用」（代表者：竹田雅好（東北大学））

Long time behavior of the volume of the Wiener sausage on Dirichlet spaces

Kazuki Okamura*

In this talk, we consider the long time behavior of the volume of the Wiener sausage on Dirichlet spaces. Here the Wiener sausage $W_{t,\epsilon}$ is the ϵ-neighborhood of the trajectory of a process until time t. We focus on the volume of $W_{t,\epsilon}$, denoted by $V_{t,\epsilon}$, for diffusion process on metric measure space other than the Euclid space. We review known results. Chavel-Feldman [CF86-1, CF86-2, CF86-3] considered $V_{t,\epsilon}$ for Brownian motion on Riemannian manifolds. [CF86-1] shows radial asymptotic results (i.e. $\epsilon \to 0$) on hyperbolic 3-spaces, and a time asymptotic result on Riemannian symmetric spaces of non-positive curvature. [CF86-2] shows radial asymptotic results on complete Riemannian manifolds for the dimension $d \geq 3$. [CF86-3] shows a radial asymptotic result for the Wiener sausage of reflected Brownian motion on a domain in $\mathbb{R}^d, d \geq 2$. Sznitman [Sz89] obtained a time asymptotic result of negative exponentials of Brownian bridge on hyperbolic space, similar to Donsker-Varadhan [DV75]. Chavel-Feldman-Rosen [CFR91] obtained second order radial asymptotic result for 2-dimensional Riemannian manifold, extending Le Gall's expansion [Le88, Theorem 2.1] in $\mathbb{R}^2$. Recently, Gibson-Pivarski [GP15] obtained a time asymptotic result similar to [DV75] for diffusions on local Dirichlet spaces.

Our results are time asymptotics for the volume of the Wiener sausage on *non-symmetric* spaces. First, we will give growth rate of the means on some spaces containing some fractal spaces such as infinite Sierpinski gaskets and carpets. (We state it later.) Second, we will show that the exact growth rate of the means on "finitely modified" Euclidian spaces is identical with the one of the original Euclidian space. Third, we will give an example of a space on which the sequence of the means largely fluctuates. Some analogous results for a discrete framework, specifically, range of random walk on graphs, were obtained by [O14]. Difficulties are that we cannot use symmetries and scalings of spaces and processes. On the Euclid spaces, by Brownian scaling, time asymptotic results can be derived from radial asymptotic results. The time asymptotic results in [Sp64] and [CF86-1] uses such symmetries and scalings of spaces and processes.

Now we state our framework and *one of* our main results. Let (M, d) be a metric space. Assume that any open ball is relatively compact. Let μ be a Borel measure on M such that for any relatively compact open subset U of M, $0 < \mu(U) \leq \mu(\overline{U}) < +\infty$. Here $\overline{U}$ is the closure of U. Let $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ be a strongly-local regular symmetric conservative Dirichlet form on $L^2(M, \mu)$ and (X_t, P^x) be the associated Hunt process. We call a pair $(M, d, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ a metric measure Dirichlet

*Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, JAPAN. kazukio@kurims.kyoto-u.ac.jp

space. Let $B(x,r) := \{y \in M : d(x,y) < r\}$. For a Borel measurable set B, let $T_B := \inf\{t > 0 : X_t \in B\}$. Let the volume of the Wiener sausage:

$$V_{t,\epsilon} = V_{t,\epsilon}(X) := \mu\left(\bigcup_{s\in[0,t]} B(X_s,\epsilon)\right).$$

$f \asymp g$ if and only if there are two constants c and C such that $cg(x) \le f(x) \le Cg(x)$ for any x.

Theorem 0.1 (Growth rates)**.** *Fix $\epsilon > 0$. Assume the following:*
(i) There is $C > 0$ such that for any $r \in [0,\epsilon)$,

$$\sup_{x\in M} V(x,r) \le C \inf_{x\in M} V(x,r).$$

(ii) There are an increasing function $f(t)$ and constants $c_1 \in (0,1), c_2 > 1, c_3, c_4 > 0$ such that

$$c_3 f(t) \le \int_0^t p(s,x,y)ds \le c_4 f(t), \quad t \ge 1, c_1\epsilon \le d(x,y) \le c_2\epsilon.$$

Then, there exist constants C_1, C_2 depending on ϵ such that for any $x \in M$,

$$C_1 \le \liminf_{t\to\infty} \frac{E^x[V_{t,\epsilon}]}{t/f(t)} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{E^x[V_{t,\epsilon}]}{t/f(t)} \le C_2.$$

The assumptions in the above result are satisfied if the following hold:

(Ahlfors regularity) (V_α): There exist C_1, C_2 such that $C_1 r^\alpha \le V(x,r) \le C_2 r^\alpha$ holds for any x, $r \in (0,\epsilon)$.

fHK(β): There exist c_i, $1 \le i \le 4$, such that for any $t > 0, x, y \in M$,

$$\frac{c_1}{V(x,t^{1/\beta})} \exp\left(-c_2\left(\frac{d(x,y)^\beta}{t}\right)^{1/(\beta-1)}\right) \le p(t,x,y)$$

$$\le \frac{c_3}{V(x,t^{1/\beta})} \exp\left(-c_4\left(\frac{d(x,y)^\beta}{t}\right)^{1/(\beta-1)}\right).$$

Then, for $t \ge 1$,

$$f(t) = 1,\ \alpha > \beta,$$
$$f(t) = \log t,\ \alpha = \beta,$$
$$f(t) = t^{1-\alpha/\beta},\ \alpha < \beta.$$

Other results will be stated in talk.

References

[CF86-1] I. Chavel and E. A. Feldman, The Wiener sausage and a theorem of Spitzer in Riemannian manifolds. *Probability theory and harmonic analysis (Cleveland, Ohio, 1983)*, 45-60, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 98, Dekker, New York, 1986.

[CF86-2] I. Chavel and E. A. Feldman, The Lenz shift and Wiener sausage in Riemannian manifolds. *Compositio Math.* 60 (1986), no. 1, 65-84.

[CF86-3] I. Chavel and E. A. Feldman, The Lenz shift and Wiener sausage in insulated domains. *From local times to global geometry, control and physics (Coventry, 1984/85)*, 47-67, Pitman Res. Notes Math. Ser., 150, Longman Sci. Tech., Harlow, 1986.

[CFR91] I. Chavel, E. A. Feldman and J. Rosen, Fluctuations of the Wiener sausage for surfaces. *Ann. Probab.* 19 (1991) 83-141.

[DV75] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotics for the Wiener sausage, *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 525-565.

[GP15] L. R. Gibson and M. Pivarski, The Rate of Decay of the Wiener Sausage in Local Dirichlet Space, *J. Theor. Probab.* 28 (2015) 1253-1270.

[Le88] J.-F. Le Gall, Fluctuation results for the Wiener sausage, *Ann. Probab.* 16 (1988) 991-1018.

[O14] K. Okamura, On the range of random walk on graphs satisfying a uniform condition, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 11 (2014), no. 1, 341-357.

[Sp64] F. Spitzer, Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion, *Z. Wahr. Verw. Gebiete*, 3 (1964) 110-121.

[Sz89] A.-S. Sznitman, Lifschitz tail and Wiener sausage on hyperbolic space, *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 (1989) 1033-1065.

Scaling limits of stochastic processes associated with resistance forms

D. A. Croydon (University of Warwick)

NB. This talk is based on the preprints [1] and [2]; the latter work is joint with B. M. Hambly (University of Oxford), and T. Kumagai (Kyoto University).

The connections between electricity and probability are deep, and have provided many tools for understanding the behaviour of stochastic processes. In this talk, I will describe a new result in this direction, which states that if a sequence of spaces equipped with so-called 'resistance metrics' and measures converge with respect to the Gromov-Hausdorff-vague topology, and a certain non-explosion condition is satisfied, then the associated stochastic processes also converge. This result generalises previous work on trees, fractals, and various models of random graphs. Moreover, it is useful in the study of time-changed processes, including Liouville Brownian motion, the Bouchaud trap model and the random conductance model, on such spaces. I further conjecture that the result will be applicable to the random walk on the incipient infinite cluster of critical bond percolation on the high-dimensional integer lattice.

To present the main result, the objects of study will now be introduced in more detail. A resistance metric on a space F is a function $R : F \times F \to \mathbb{R}$ such that, for every finite $V \subseteq F$, one can find a weighted graph with vertex set V (here, 'weighted' means edges are equipped with conductances) for which $R|_{V\times V}$ is the associated effective resistance; this definition was introduced by Kigami in the study of analysis on low-dimensional fractals, see [3] for background. We write $\mathbb{F}$ for the collection of quadruples of the form (F, R, μ, ρ), where: F is a non-empty set; R is a resistance metric on F such that closed bounded sets in (F, R) are compact (note this implies (F, R) is complete, separable and locally compact); μ is a locally finite Borel regular measure of full support on (F, R); and ρ is a marked point in F. Note that the resistance metric is associated with a so-called 'resistance form' $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ (another concept introduced by Kigami, see [3, 4]), and we will further assume that for elements of $\mathbb{F}$ this form is 'regular'. Whilst we do not give precise definitions for this terminology here, we note that it ensures the existence of a related regular Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ on $L^2(F,\mu)$, which we suppose is recurrent, and also a Hunt process $((X_t)_{t\geq 0},(P_x)_{x\in F})$. Writing $B_R(\rho,r)$ for the ball of radius r in (F,R) centred at ρ, and $R(\rho,B_R(\rho,r)^c)$ for the resistance from ρ to the complement of $B_R(\rho,r)$, we then have the following. Note that the condition at (1) below ensures non-explosion, and is natural in the context of recurrent processes.

Theorem 1 *Suppose that the sequence $(F_n,R_n,\mu_n,\rho_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{F}$ satisfies*

$$(F_n,R_n,\mu_n,\rho_n)\to(F,R,\mu,\rho)$$

in the Gromov-Hausdorff-vague topology for some $(F,R,\mu,\rho)\in\mathbb{F}$, and also it holds that

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty}R_n\left(\rho_n,B_{R_n}\left(\rho_n,r\right)^c\right)=\infty. \tag{1}$$

It is then possible to isometrically embed $(F_n,R_n)_{n\geq 1}$ and (F,R) into a common metric space (M,d_M) in such a way that

$$P^n_{\rho_n}\left((X^n_t)_{t\geq 0}\in\cdot\right)\to P_\rho\left((X_t)_{t\geq 0}\in\cdot\right)$$

weakly as probability measures on $D(\mathbb{R}_+,M)$ (that is, the space of cadlag processes on M, equipped with the usual Skorohod J_1-topology), where we have denoted by $((X^n_t)_{t\geq 0},(P^n_x)_{x\in F_n})$ the Markov process corresponding to (F_n,R_n,μ_n,ρ_n).

References

[1] Croydon, D. A. (2016). *Scaling limits of stochastic processes associated with resistance forms.* Preprint available at arXiv:1609.05666.

[2] Croydon, D. A., B. M. Hambly and T. Kumagai (2016). *Time-changes of stochastic processes associated with resistance forms.* Preprint available at arXiv:1609.02120.

[3] Kigami, J. (2001). *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 143, Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Kigami, J. (2012). *Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates*, Mem. Amer. Math. Soc. **216**, no. 1015, vi+132.

Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs

Ryuya Namba (Okayama Univ.) e-mail: `sc422113@s.okayama-u.ac.jp`
(Joint work with S. Ishiwata (Yamagata Univ.) and H. Kawabi (Okayama Univ.))

As a fundamental problem in the theory of random walks (RWs), Donsker's invariance principle or the functional central limit theorem has been studied intensively and extensively. In particular, Ishiwata, Kawabi and Kotani [2] studied this problem for non-symmetric RWs on a crystal lattice from a viewpoint of *discrete geometric analysis* initiated by Sunada [3]. On the other hand, Ishiwata [1] also discussed this problem for symmetric RWs on a *nilpotent covering graph* X, a (locally finite and connected) covering graph of a finite graph X_0 whose covering transformation group Γ is a torsion free and finitely generated nilpotent group. In this talk, we consider a class of non-symmetric RWs on X and discuss Donsker's invariance principle for them as an extension of [1, 2].

Let $X = (V, E)$ be a nilpotent covering graph. Here V is a set of all vertices and E a set of all oriented edges in X. For $e \in E$, we denote the origin, terminus and inverse edge of e by $o(e), t(e)$ and $\overline{e}$, respectively. $E_x := \{e \in E \,|\, o(e) = x\}$ denotes the set of all edges whose origin is $x \in V$. In the following, we introduce basic materials for RWs on X. Now let $p : E \longrightarrow (0, 1]$ be a (Γ-invariant) 1-step transition probability and $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ a RW on X associated with p. We may also consider the RW $\{\pi(w_n)\}_{n=0}^{\infty}$ on the quotient $X_0 = (V_0, E_0)$ due to the Γ-invariance of p. Here $\pi : X \longrightarrow X_0$ is a covering map. Let $m : V_0 \longrightarrow (0, 1]$ be a normalized invariant measure on X_0 and we also write $m : V \longrightarrow (0, 1]$ for the Γ-invariant lift of m to X. Let $\mathrm{H}_1(X_0, \mathbb{R})$ and $\mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{R})$ be the first homology group and the first cohomology group of X_0, respectively. We define the *homological direction* of the RW on X_0 by $\gamma_p := \sum_{e \in E_0} p(e)m\big(o(e)\big)e \in \mathrm{H}_1(X_0, \mathbb{R})$. We call the RW on X_0 (m-)*symmetric* if $p(e)m\big(o(e)\big) = p(\overline{e})\big(t(e)\big)$ $(e \in E_0)$. It easily follows that the RW is (m-)symmetric if and only if $\gamma_p = 0$.

Thanks to the celebrated theorem of Malćev, we find a connected and simply connected nilpotent Lie group G such that Γ is isomorphic to the lattice in G. In what follows, we always assume that ***G* is free of step 2**. Namely, its Lie algebra $\mathfrak{g}$ has the direct sum decomposition of the form $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$. Now we take a canonical surjective linear map $\rho_{\mathbb{R}} : \mathrm{H}_1(X_0, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{g}^{(1)}$ through π. By the discrete Hodge–Kodaira theorem, an inner product

$$\langle\!\langle \omega, \eta \rangle\!\rangle_p := \sum_{e \in E_0} p(e)m\big(o(e)\big)\omega(e)\eta(e) - \langle \omega, \gamma_p \rangle \langle \eta, \gamma_p \rangle \quad \big(\omega, \eta \in \mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{R})\big)$$

associated with the transition probability p is induced from the space of (modified) harmonic 1-forms on X_0 to $\mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{R})$. Using the map $\rho_{\mathbb{R}}$, we construct a flat metric g_0 on $\mathfrak{g}^{(1)}$ from the inner product $\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle_p$ and this is called the *Albanese metric*. A periodic realization $\Phi_0 : X \longrightarrow G$ is said to be *modified harmonic* if

$$\sum_{e\in E_x} p(e)\log\Big(\Phi_0\big(o(e)\big)^{-1}\cdot\Phi_0\big(t(e)\big)\Big)\Big|_{\mathfrak{g}^{(1)}} = \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \quad (x\in V). \tag{$\spadesuit$}$$

The quantity on the right-hand side of ($\spadesuit$) is called the *asymptotic direction*. It should be noted that $\gamma_p = 0$ implies $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$, however, the converse does not hold in general.

We fix a reference point $x_* \in V$ and take a modified harmonic realization $\Phi_0 : X \longrightarrow G$ such that $\Phi_0(x_*) = \mathbf{1}_G$. Now consider the RW on $\mathfrak{g}$ given by $\Xi_n := \log\big(\Phi_0(w_n)\big)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ and the sequence of G-valued continuous stochastic processes $\{\mathcal{Y}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ given by $\mathcal{Y}^{(n)}_t := \tau_{n^{-1/2}}\big(\exp(\mathfrak{X}^{(n)}_t)\big)$ $(t\in[0,1])$. Here τ_ε $(0\le\varepsilon\le 1)$ is the dilation operator acting on G and $\mathfrak{X}^{(n)}_t := \Xi_{[nt]} + (nt-[nt])\big(\Xi_{[nt]+1}-\Xi_{[nt]}\big)$. Let $\{V_1,\dots,V_d\}$ be an orthonormal basis of $(\mathfrak{g}^{(1)}, g_0)$. We note that $\{[V_i,V_j] : 1\le i<j\le d\}$ forms a basis of $\mathfrak{g}^{(2)}$ by the assumption that G is free. Here we put

$$\beta(\Phi_0) := \sum_{e\in E_0} p(e)m\big(o(e)\big)\log\Big(\Phi_0\big(o(e)\big)^{-1}\cdot\Phi_0\big(t(e)\big)\Big)\Big|_{\mathfrak{g}^{(2)}} = \sum_{1\le i<j\le d}\beta(\Phi_0)^{ij}[V_i,V_j]\in\mathfrak{g}^{(2)}.$$

Note that $\gamma_p = 0 \Longrightarrow \beta(\Phi_0) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$. Let $(Y_t)_{t\ge0}$ be the G-valued diffusion process starting from the unit $\mathbf{1}_G$ which solves a stochastic differential equation

$$dY_t = \sum_{1\le i\le d} V_i(Y_t)\circ dB^i_t + \beta(\Phi_0)(Y_t)\,dt,$$

where $(B_t)_{t\ge0} = (B^1_t,\dots,B^d_t)_{t\ge0}$ is an $\mathbb{R}^d$-valued standard BM. Let $\mathcal{A} := (1/2)\sum_{1\le i\le d}V_i^2 + \beta(\Phi_0)$ be the infinitesimal generator of $(Y_t)_{t\ge0}$. Then we obtain

Theorem. *Assume $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$. For $t\ge0$ and $f\in C_\infty(G)$, we have*

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|L^{[nt]}P_{n^{-1/2}}f - P_{n^{-1/2}}\mathrm{e}^{-t\mathcal{A}}f\Big\|^X_\infty = 0$$

Moreover, we obtain $(\mathcal{Y}^{(n)}_t)_{t\ge0}\Longrightarrow(Y_t)_{t\ge0}$ in $C_{\mathbf{1}_G}([0,1];G)$ as $n\to\infty$.

If time permits, we will discuss a rough path theoretic interpretation of this theorem and give an example of a RW on a nilpotent covering graph with $\Gamma = \mathbb{H}^3(\mathbb{Z})$.

References

[1] S. Ishiwata: *A central limit theorem on a covering graph with a transformation group of polynomial growth*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), pp. 837–853.

[2] S. Ishiwata, H. Kawabi and M. Kotani: *Long time asymptotics of non-symmetric random walks on crystal lattices*, To appear in J. Funct. Anal.

[3] T. Sunada: Topological Crystallography with a Viewpoint Towards Discrete Geometric Analysis, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences **6**, Springer Japan, 2013.

Exponents for the number of high points of simple random walks in two dimensions

Izumi OKADA (Tokyo institute of Technology)*

1. Introduction

本講演では、２次元 (整数格子上) の単純ランダムウォーク (SRW) の local time に関する極限定理を扱う．特に、これまで２次元の favorite point (SRW の local time が他点と比べて極端に大きい点) という特異点に対して研究を進めてきた．また、その拡張として favorite domain (他の領域と比べて SRW の local time が極端に大きい領域) に着目している．近年この分野の第一人者である A.Dembo, Y.Peres, O.Zeitouni, J.Rosen 氏らによって、 [2] では favorite point と local time の汎関数の極限定理と密接な関係を持つことが示されており、従って重要な研究対象と考えている．

2. Known results

local time を $K(n,x) := \sum_{i=0}^{n} 1_{\{S_i=x\}}$ と定義する．さらに、$\tau_n := \inf\{m \geq 0 : |S_m| \geq n\}$ とする．もともと A.Dembo 氏らによって、 [1] では次が示されていた：$\mathbb{Z}^2$ 上の SRW に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{x\in\mathbb{Z}^2} K(\tau_n,x)}{(\log n)^2} = \frac{4}{\pi} \quad a.s.$$

これに基づき、$0<\alpha<1$ に対して、α-favorite points の集合を次のように定義する：

$$\Psi_n(\alpha) := \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 : K(\tau_n,x) \geq \frac{4\alpha}{\pi}(\log n)^2 \right\}.$$

さらに、$j \in \mathbb{N}$ に対して、次の量を定義する：

$$|\{(x_1,...,x_j) \in \Psi_n(\alpha)^j : d(x_i,x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i,l \leq j\}|.$$

この量について、[1] では $j=1$ の値を、講演者は $j \geq 2$ のときを評価した．$j \geq 2$ の場合は、Green 関数から構成される行列の逆行列の全ての成分の和という新しい量が、評価において重要になることが得られた．その後、Green 関数から構成される行列が、ある意味で超距離行列に近づくということを示し、さらには超距離行列 (の逆行列の全ての成分の和) の新たな性質を解明することで、新しい量に関する解析をすることができた．

これを踏まえて、$0<\alpha<1$ に対して、favorite domain を定義する：

$$\mathcal{R}_{j,n}(\alpha) := \{(x_1,...,x_j) \in (\mathbb{Z}^2)^j : \sum_{i=1}^{j} K(\tau_n,x_i) \geq \frac{4\alpha j}{\pi}(\log n)^2\}.$$

3. Main result

favorite domain の長時間挙動での個数を評価した．

This work was supported by JSPS KAKENHI (15J11183).
2010 Mathematics Subject Classification: 60G.
Keywords: simple random walk, local time.
*e-mail: okada.i.aa@m.titech.ac.jp

Theorem 3.1 (0.2016)**.** $0 < \alpha, \beta < 1$ に対して、次が成立する：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log E[|\{(x_1, ..., x_j) \in \mathcal{R}_{j,n}(\alpha) : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \textit{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|]}{\log n} = \hat{\rho}_j(\alpha, \beta).$$

ただし、

$$\hat{\rho}_j(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \leq 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}), \\ 2(j+1-2\sqrt{j\alpha}) & (\beta \geq 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}). \end{cases}$$

この補題として、Green 関数から構成された行列の最大固有値が、favorite domain に関する重要な量に相当することが得られた. その後、Green 関数から構成される行列が、ある意味で超距離行列に近づくということを踏まえ、さらには超距離行列 (の最大固有値) の新たな性質を解明することで、Green 関数から構成された行列の最大固有値に関する解析をすることができた. 本講演では、時間の許す限りこの補題の証明や、favorite domain を扱う動機を述べる予定である.

References

[1] Dembo, A. , Peres, Y. , Rosen, J. and Zeitouni, O. (2001). Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk. Acta Math., **186**, 239–270.

[2] Dembo, A. , Peres, Y. , Rosen, J. and Zeitouni, O. (2004). Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. Ann. Math., **160**, 433–464.

MAXIMAL EDGE-TRAVERSAL TIME IN FIRST PASSAGE PERCOLATION

SHUTA NAKAJIMA

First passage percolation (FPP) was first introduced by Hammersley and Welsh in 1965. It can be thought of as a model for the speed to percolate some material. In this talk, we focus on the maximal edge-traversal time of optimal paths in FPP and investigate the order of the growth. We shall give precise definitions below.

Let $E(\mathbb{Z}^d)$ be the set of undirected nearest-neighbor edges. We place a non-negative random variables τ_e on each edge e as the passage time. Assume $\{\tau_e\}_{e\in E(\mathbb{Z}^d)}$ are i.i.d. random variables with distribution F. We say $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^k \subset \mathbb{Z}^d$ is a path from x to y (we write $\Gamma : x \to y$) if $x_0 = x,\ x_k = y$ and $|x_i - x_{i-1}|_1 = 1$ for $i = 1, \cdots, k$. Given a path $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^k$, the passage time of Γ is defined as $t(\Gamma) = \sum_{i=1}^k \tau_{\{x_{i-1},x_i\}}$ and we set first passage time $T(x,y)$ as $T(x,y) = \inf_{\Gamma:x\to y} t(\Gamma)$ for $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Let Opt_n be the set of optimal paths from origin to ne_1 and $\Xi(\Gamma) = \max\{\tau_{\{x_{i-1},x_i\}} :\ 1 \le i \le k\}$ for $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^k \in Opt_n$.

Let $\underline{F}$ be the infimum of the support of F and $p_c(d)$, $\vec{p}_c(d)$ the critical probability of d-dim percolation, oriented precolation model, respectively. Then F is said to be useful if either holds;

$$\text{(i) } \underline{F} = 0,\ F(\{0\}) < p_c(d),\ \text{(ii) } \underline{F} > 0,\ F(\{\underline{F}\}) < \vec{p}_c(d).$$

It is easy to check that if F is useful, Opt_n is not empty almost surely. It is known from the result of van den Berg and Kesten in [1] that if F is unbounded and useful,

$$\min_{\Gamma\in Opt_n} \Xi(\Gamma) \to \infty \quad a.s.$$

Our purpose is to investigate the actual order of the growth of $\Xi(Opt_n)$.

Theorem 1. *Suppose $d \ge 2$, F is useful, and there exist $a > 1$, $c_1 - c_4$, t_1, $r > 0$ such that for any $t \ge t_1$, $c_1 e^{-c_2 t^r} \le F([t, at]) \le c_3 e^{-c_4 t^r}$. Then, there exists $K > 0$ such that,*

$$\mathbb{P}\left(K^{-1} f_{d,r}(n) \le \min_{\Gamma\in \mathrm{Opt}_n} \Xi(\Gamma) \le \max_{\Gamma\in \mathrm{Opt}_n} \Xi(\Gamma) \le K f_{d,r}(n)\right) \to 1,$$

where, we set

$$f_{d,r}(n) := \begin{cases} (\log n)^{\frac{1}{1+r}} & \text{if } 0 < r < d-1 \\ (\log n)^{\frac{1}{d}} (\log\log n)^{\frac{d-2}{d}} & \text{if } r = d-1 \\ (\log n)^{\frac{1}{d}} & \text{if } d-1 < r < d \\ (\log n)^{\frac{1}{d}} (\log\log n)^{-\frac{1}{d}} & \text{if } r = d \\ (\log n)^{\frac{1}{r}} & \text{if } d < r. \end{cases}$$

Theorem 2. *Suppose $d \ge 2$, F is useful, $\mathbb{E}[\tau_e^4] < \infty$ and there exist $0 < \alpha$, c, t_1 and $a > 1$ such that for any $t \ge t_1$, $F([t, at]) \ge ct^{-\alpha}$. Then, there exists $K > 0$ such that,*

$$\mathbb{P}\left(K^{-1} \frac{\log n}{\log\log n} \le \min_{\Gamma\in \mathrm{Opt}_n} \Xi(\Gamma) \le \max_{\Gamma\in \mathrm{Opt}_n} \Xi(\Gamma) \le K \frac{\log n}{\log\log n}\right) \to 1.$$

References

[1] J. van den Berg and H. Kesten. Inequalities for the time constant in first-passage percolation. *Annals Applied Probability*, 56-80, 1993

(Shuta Nakajima) Research Institute in Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, Japan
E-mail address: `njima@kurims.kyoto-u.ac.jp`

On mean-field approximation of particle systems with annihilation and spikes

TOMOYUKI ICHIBA [1]

On a filtered probability space let us consider the following interactions of $N (\geq 2)$ Brownian particles each of which diffuses on the nonnegative half line $\mathbb{R}_+$ and is attracted towards the average position of all the particles. When a particle i attains the boundary 0, it is annihilated (default) and a new particle (also called i) spikes immediately in the middle of particles. More precisely, let us denote by $X_t := (X_t^1, \ldots, X_t^N)$ the positions of these particles, where $X_t^i (\geq 0)$ is the position of particle i at time $t \geq 0$ for $i = 1, \ldots, N$. With the average $\overline{X}_t := (X_t^1 + \cdots + X_t^N) / N$ the dynamics of the system is determined by

$$\begin{aligned} X_t^i \,&=\, X_0^i + \int_0^t b(X_s^i, \overline{X}_s) \mathrm{d}s + W_t^i + \int_0^t \overline{X}_{s-} \Big(\mathrm{d}M_s^i - \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \mathrm{d}M_s^j \Big) \, ; \quad t \geq 0 \, , \\ M_t^i \,&:=\, \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau_k^i \leq t\}} \, , \quad \tau_k^i \,:=\, \inf \Big\{ s > \tau_{k-1}^i \,:\, X_{s-}^i - \frac{\overline{X}_{s-}}{N} \sum_{j \neq i} (M_s^j - M_{s-}^j) \,\leq\, 0 \Big\} \, , \end{aligned} \tag{1}$$

for $i = 1, \ldots, N$, $k \in \mathbb{N}$, where $W_t := (W_t^1, \ldots, W_t^N)$, $t \geq 0$ is an N-dimensional Brownian motion, M_t^i is the cumulative number of defaults by time $t \geq 0$, τ_k^i is the k-th default time with $\tau_0^i = 0$ of particle i. Here we assume that $b : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ is (globally) Lipschitz continuous, i.e., there exists a constant $\kappa > 0$ such that

$$|b(x_1, m_1) - b(x_2, m_2)| \leq \kappa \big(|x_1 - x_2| + |m_1 - m_2| \big) \tag{2}$$

for all $x_1, x_2, m_1, m_2 \in \mathbb{R}_+$, and we also impose the condition

$$\sum_{i=1}^{N} b(x^i, \overline{x}) \,\equiv\, 0 \tag{3}$$

for every $x := (x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}_+^N$ and $\overline{x} := (x^1 + \cdots + x^N) / N$ on the drift function $b(\cdot, \cdot)$.

Given a standard Brownian motion $W_\cdot$ we shall consider a system $X_\cdot := (X_\cdot^1, \ldots, X_\cdot^N)$, $M_\cdot := (M_\cdot^1, \ldots, M_\cdot^N))$ described by (1) with (2)-(3) on a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ with filtration $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. In particular, we are concerned with (1) that there might be multiple defaults at the same time with positive probability, i.e.,

$$\mathbb{P} \big(\exists (i,j) \; \exists t \in [0, \infty) \; \text{ such that } \; X_t^i \,=\, X_t^j \,=\, 0 \big) > 0 \, .$$

We shall construct a solution to (1) with a specific boundary behavior of defaults until the time $\overline{\tau}_0 := \inf\{ s > 0 \,:\, \max_{1 \leq i \leq N} X_s^i \,=\, 0 \}$. Let us define the following map $\Phi(x) := (\Phi^1(x), \ldots, \Phi^N(x)) \,:\, [0, \infty)^N \mapsto [0, \infty)^N$ and set-valued function $\Gamma \,:\, \mathbb{R}_+^N \to \{1, \ldots, N\}$ defined by $\Gamma_0(x) := \{ i \in \{1, \ldots, N\} : x^i \,=\, 0 \}$,

$$\Gamma_{k+1}(x) \,:=\, \Big\{ i \in \{1, \ldots, N\} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{k} \Gamma_\ell(x) \,:\, x^i - \frac{\overline{x}}{N} \cdot \Big| \bigcup_{\ell=1}^{k} \Gamma_\ell(x) \Big| \leq 0 \Big\} \, ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-3$$

[1] Department of Statistics and Applied Probability, South Hall, University of California, Santa Barbara, CA 93106 (E-mail: *ichiba@pstat.ucsb.edu*). Research supported in part by the National Science Foundation under grant NSF-DMS-13-13373 and DMS-16-15229. Part of research is joint work with Romuald Elie and Mathieu Lauriere.

$$\Gamma(x) := \bigcup_{k=0}^{N-2} \Gamma_k(x) , \quad \Phi^i(x) := x^i + \overline{x} \Big(\Big(1 + \frac{1}{N} \Big) \cdot \mathbf{1}_{\{ i \in \Gamma(x) \}} - \frac{1}{N} \cdot \lvert \Gamma(x) \rvert \Big) \tag{4}$$

for $x = (x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}_+^N$, $i = 1, \ldots, N$ with $\overline{x} := (x^1 + \cdots + x_N) / N \ge 0$. Note that $\Phi([0,\infty)^N \setminus \{\mathbf{0}\}) \subseteq [0,\infty)^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ and $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

Lemma 1. *Given a standard Brownian motion* $W.$ *and the initial configuration* $X_0 \in (0,\infty)^N$ *one can construct the process* $(X., M.)$ *which is the unique, strong solution to (1) with (2), (3) on* $[0, \overline{\tau}_0]$, *such that if there is a default, i.e.,* $\lvert \Gamma(X_{t-}) \rvert \ge 1$ *at time* t, *then the post-default behavior is determined by the process with* $X_t^i = \Phi^i(X_{t-})$ *for* $i = 1, \ldots, N$.

Now let us discuss the system (1) with (2)-(3) as a mean-field approximation for nonlinear equation of McKEAN-VLASOV type. For the sake of concreteness, let us assume $b(x,m) = -a(x-m)$, $x, m \in [0,\infty)$ for some $a > 0$. By the theory of propagation of chaos (e.g., TANAKA (1984), SHIGA & TANAKA (1985) and SZNITMAN (1991)) as $N \to \infty$, the dynamics of the finite-dimensional marginal distribution of limiting representative process is expressed by

$$\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_0 - a \int_0^t (\mathcal{X}_s - \mathbb{E}[\mathcal{X}_t]) \mathrm{d}s + W_t + \int_0^t \mathbb{E}[\mathcal{X}_{s-}] \mathrm{d}(\mathcal{M}_s - \mathbb{E}[\mathcal{M}_s]) ; \quad t \ge 0 , \tag{5}$$

where $W.$ is the standard Brownian motion, $\mathcal{M}_t := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau^k \le t\}}$, $\tau^k := \inf\{ s > \tau^{k-1} : \mathcal{X}_{t-} \le 0\}$, $k \ge 1$, $\tau^0 = 0$. Then taking expectations of both sides of (5), we obtain $\mathbb{E}[\mathcal{X}_t] = \mathbb{E}[\mathcal{X}_0]$, $t \ge 0$. When $\mathcal{X}_0 = x_0$ a.s. for some $x_0 > 0$, substituting this back into (5), we obtain

$$\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_0 - a \int_0^t (\mathcal{X}_s - \mathcal{X}_0) \mathrm{d}s + W_t + \mathcal{X}_0 (\mathcal{M}_t - \mathbb{E}[\mathcal{M}_t]) ; \quad t \ge 0 .$$

Transforming the state space from $[0,\infty)$ to $(-\infty, 1]$ by $\widehat{\mathcal{X}}_t := (x_0 - \mathcal{X}_t) / x_0$, we see

$$\widehat{\mathcal{X}}_t = - \int_0^t a \widehat{\mathcal{X}}_s \mathrm{d}s + \widehat{W}_t - \widehat{\mathcal{M}}_t + \mathbb{E}[\widehat{\mathcal{M}}_t] ; \quad t \ge 0 , \tag{6}$$

where we denote $\widehat{W}. = W. / x_0$, $\widehat{\mathcal{M}}. = \mathcal{M}.$.

This transformed process $\widehat{\mathcal{X}}.$ is similar to the nonlinear McKEAN-VLASOV-type stochastic differential equation

$$\widetilde{\mathcal{X}}_t = \widetilde{\mathcal{X}}_0 + \int_0^t \mathrm{b}(\widetilde{\mathcal{X}}_s) \mathrm{d}s + \widetilde{W}_t - \widetilde{\mathcal{M}}_t + \alpha \mathbb{E}[\widetilde{\mathcal{M}}_t] ; \quad t \ge 0 , \tag{7}$$

studied by DELARUE, INGLIS, RUBENTHALER & TANRÉ (2015 a,b). Here $\widetilde{\mathcal{X}}_0 < 1$, $\alpha \in (0,1)$, $\mathrm{b} : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ is assumed to be Lipschitz continuous with at most linear growth. $\widetilde{W}.$ is the standard Brownian motion, $\widetilde{\mathcal{M}}. = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\widetilde{\tau}^k \le \cdot\}}$ with $\widetilde{\tau}^k := \inf\{ s > \tau^{k-1} : \widetilde{\mathcal{X}}_{s-} \ge 1\}$, $k \ge 1$, $\widetilde{\tau}^0 = 0$. When we specify $\widetilde{\mathcal{X}}_0 = 0$, $\mathrm{b}(x) = -ax$, $x \in \mathbb{R}_+$, and $\alpha = 1$, the solution $(\widehat{\mathcal{X}}., \widehat{\mathcal{M}}.)$ to (7) reduces to the solution $(\widetilde{\mathcal{X}}., \widetilde{\mathcal{M}}.)$ to (6), however, the previous study of (7) does not guarantee the uniqueness of solution to (7) in the case $\alpha = 1$.

Proposition 1. *Assume* $x_0 > 1$ *and* $b(x,m) = -a(x-m)$, $x, m \in [0,\infty)$ *for some* $a > 0$. *There exists a unique strong solution to (6) on* $[0,T]$. *Moreover, for every* $T > 0$, *there exists a constant* c_T *such that every solution to (6) satisfies* $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\mathbb{E}[\widehat{\mathcal{M}}_t] \le c_T$ *for* $0 \le t \le T$.

The proof is based on a fixed point argument. For example, when $a = 0$, we may reformulate the solution $(\widehat{\mathcal{X}}_\cdot, \widehat{\mathcal{M}}_\cdot)$ in (6) as

$$\widehat{\mathcal{Z}}_t = \widehat{\mathcal{X}}_t + \widehat{\mathcal{M}}_t = \widehat{W}_t + \mathbb{E}[\widehat{\mathcal{M}}_t], \quad \widehat{M}_t = \lfloor \sup_{0\le s\le t} (\widehat{\mathcal{Z}}_s)^+ \rfloor; \quad t \ge 0, \tag{8}$$

where $\lfloor x \rfloor$ is the integer part. Given a candidate solution e_t for $\mathbb{E}[\widehat{\mathcal{M}}_t]$, $t \ge 0$, we shall consider

$$\widehat{Z}^e_t := \widehat{W}_t + e_t, \quad \widehat{\mathcal{M}}^e_t := \lfloor \sup_{0\le s\le t} (\widehat{Z}^e_s)^+ \rfloor; \quad t \ge 0, \tag{9}$$

where the superscripts e of $\widehat{Z}^e_\cdot$ and $\widehat{\mathcal{M}}^e_\cdot$ represent the dependence on $e_\cdot$. Then uniqueness of the solution to (6) is reduced to uniqueness of the fixed point $e^*_\cdot = \mathfrak{M}_\cdot(e^*)$ of the map $\mathfrak{M} : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ defined by

$$\mathfrak{M}_t(e) := \mathbb{E}\big[\lfloor \sup_{0\le s\le t} (\widehat{Z}^e_s)^+ \rfloor\big] = \mathbb{E}[\widehat{\mathcal{M}}^e_t]; \quad t \ge 0. \tag{10}$$

By utilizing the monotone property of the map $\mathfrak{M}_t$ and the first passage time distribution for diffusions, we show contraction and then find a unique fixed point in the class of continuously differentiable, nonnegative functions bounded by a linear line with slope $1/x_0$.

It follows from Proposition 1 that the propagation-of-chaos result holds for the reformulated solution $(\mathcal{Z}_\cdot, \mathcal{M}_\cdot)$ from the original $X_\cdot$ in (1). Thus we have the following.

Proposition 2. *Under the same assumption as in Proposition 1, for every* $k \ge 1$, $\ell \ge 1$, $t_1, \dots t_\ell$, *as* $N \to \infty$ *the vector* $(X^i_{t_j}, M^i_{t_j})$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le \ell$ *defined from (1) converges towards the finite dimensional marginals at times* $t_1, \dots, t_\ell$ *of* k *independent copies of* $(\mathcal{X}_\cdot, \mathcal{M}_\cdot)$ *in (5).*

We shall also discuss the invariant distribution of $\mathcal{X}_\cdot$ in (5) and relation to the mean field games.

Bibliography

[1] F. DELARUE, J. INGLIS, S. RUBENTHALER, AND E. TANRÉ. (2015a) Global solvability of a networked integrate-and-fire model of Mckean–Vlasov type, *Ann. Appl. Probab.*, 25, pp. 2096–2133.

[2] F. DELARUE, J. INGLIS, S. RUBENTHALER, AND E. TANRÉ. (2015b) Particle systems with a singular mean-field self-excitation. Application to neuronal networks, *Stochastic Process. Appl.*, 125, pp. 2451–2492.

[3] T. SHIGA & H. TANAKA. (1985) Central limit theorem for a system of Markovian particles with mean field interactions, *Probab. Theory Related Fields* 69 (3) (1985) 439–459.

[4] A.-S. SZNITMAN. (1991) Topics in propagation of chaos, in: *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX* –1989, Springer, pp. 165–251.

[5] H. TANAKA. (1984) Limit theorems for certain diffusion processes with interaction, in *Stochastic Analysis* (Katata/Kyoto, 1982), North-Holland Math. Library 32, 469–488.

移動平均型定常増分過程に対する
新生過程によるセミマルチンゲール表現

井上 昭彦 (広島大学)
仲村 勇祐 (広島大学)

これは, 時系列解析の手法と伊藤解析の枠組みの融合という方向の研究である. $n \in \mathbb{N}$ とし，$r_k \in (0, \infty)$ $(k = 1, \ldots, n)$ と $\theta_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ に対し，

$$c(t) := \sum_{k=1}^{n} \theta_k e^{-r_k t} \qquad (t > 0) \tag{1}$$

とおく．$\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ を完備な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された $W(0) = 0$ を満たす 1 次元ブラウン運動とし，ガウス型定常増分過程 $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ を次で定義する：

$$Z(t) := W(t) - \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{s} c(s-u) dW(u) \right\} ds \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

P-零集合の全体 $\mathcal{N}$ に対し, $\mathcal{F}_t := \sigma(Z(s) : 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$ で $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ を定める. $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ の**新生過程** $\{\overline{W}(t)\}_{t \geq 0}$ は, 次で定義される：

$$\overline{W}(t) := Z(t) + \int_0^t E\left[\int_{-\infty}^{s} c(s-u) dW(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] ds \qquad (t \geq 0).$$

$\{\overline{W}(t)\}_{t \geq 0}$ は 1 次元ブラウン運動で, $\sigma(\overline{W}(s) : 0 \leq s \leq t) = \sigma(Z(s) : 0 \leq s \leq t)$ を満たす．我々は，確定的な関数 $\ell(s, u)$ で次を満たすものを**明示的**に求めたい：

$$Z(t) = \overline{W}(t) - \int_0^t \left\{ \int_0^s \ell(s, u) d\overline{W}(u) \right\} ds \qquad (t \geq 0). \tag{3}$$

このような結果は，$\{Z(t)\}$ という記憶を持つノイズで駆動される確率モデルに対して，ブラウン運動 $\{\overline{W}(t)\}_{t \geq 0}$ に関する通常の伊藤解析を適用することを可能にする．

実係数有理関数 Θ を

$$\Theta(\xi) := 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{r_k + \xi}$$

により定義する．次の (定常時系列の純非決定性に対応する) 仮定を考える：

$$\Theta(-\xi) \text{ は } n \text{ 個の相異なる正の零点 } q_1, \ldots, q_n \text{ を持つ.} \tag{A}$$

仮定 (A) のもと，$\psi_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ を

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_k}{q_k + \xi} = \frac{1}{\Theta(\xi)}$$

により定義する．$t > 0$ に対し，$G(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を次で定義する：

$$G(t) := \begin{pmatrix} \frac{\psi_1 \Theta(q_1)}{q_1 + q_1} e^{-q_1 t} & \frac{\psi_2 \Theta(q_2)}{q_1 + q_2} e^{-q_2 t} & \cdots & \frac{\psi_n \Theta(q_n)}{q_1 + q_n} e^{-q_n t} \\ \frac{\psi_1 \Theta(q_1)}{q_2 + q_1} e^{-q_1 t} & \frac{\psi_2 \Theta(q_2)}{q_2 + q_2} e^{-q_2 t} & \cdots & \frac{\psi_n \Theta(q_n)}{q_2 + q_n} e^{-q_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\psi_1 \Theta(q_1)}{q_n + q_1} e^{-q_1 t} & \frac{\psi_2 \Theta(q_2)}{q_n + q_2} e^{-q_2 t} & \cdots & \frac{\psi_n \Theta(q_n)}{q_n + q_n} e^{-q_n t} \end{pmatrix}.$$

また，$D(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を

$$D(s) := \{1 - G(s)^2\}^{-1} \qquad (s > 0)$$

により定める (逆行列の存在は保証されている)．さらに，$s > 0$ に対し，$v_1(s) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ および $F(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ をそれぞれ次で定める：

$$v_1(s) := \left(\psi_1\Theta(q_1)e^{-q_1 s}, \psi_2\Theta(q_2)e^{-q_2 s}, \ldots, \psi_n\Theta(q_n)e^{-q_n s}\right),$$

$$F(s) := \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \frac{G_{1,j}(s)e^{r_1 s}}{r_1 - q_j} & \frac{G_{1,j}(s)e^{r_2 s}}{r_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{1,j}(s)e^{r_n s}}{r_n - q_j} \\ \frac{G_{2,j}(s)e^{r_1 s}}{r_1 - q_j} & \frac{G_{2,j}(s)e^{r_2 s}}{r_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{2,j}(s)e^{r_n s}}{r_n - q_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{G_{n,j}(s)e^{r_1 s}}{r_1 - q_j} & \frac{G_{n,j}(s)e^{r_2 s}}{r_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{n,j}(s)e^{r_n s}}{r_n - q_j} \end{pmatrix}.$$

ただし，$G_{i,j}(s)$ は行列 $G(s)$ の (i,j) 成分を表す．$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$\ell_k(s) := \theta_k e^{r_k s} - \theta_k [v_1(s)D(s)F(s)]_k \qquad (s > 0) \tag{4}$$

とおく．ただし，$[v_1(s)D(s)F(s)]_k$ は，$1 \times n$ 行列 $v_1(s)D(s)F(s)$ の第 k 成分を表す．

Theorem 1. (A) を仮定する．このとき，(3) が次の $\ell(s,u)$ で成り立つ：

$$\ell(s,u) := \sum_{k=1}^{n} e^{-r_k s}\ell_k(u). \tag{5}$$

この定理より特に次が分かる：与えられたブラウン運動 $\{\overline{W}(t)\}_{t\geq 0}$ と (5) の $\ell(s,u)$ により (3) で与えられる $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ は，(1), (2) で定義される $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ と同じ分布を持つ定常増分過程である．Theorem 1 の $n = 1$ の場合は，[AIK, INA] で示されている．Theorem 1 の $n \geq 2$ の場合を [AIK, INA] の方法で示すのは困難で，[IKP] で導入された新しい手法が鍵となる．

今，n 個の過程 $\{X_k(t)\}_{t\geq 0}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ を, 次により定める：

$$X_k(t) := \int_0^t \ell_k(s)d\overline{W}(s) \qquad (t \geq 0).$$

次の定理より，$Z(t)$ は $n+1$ 次元マルコフ過程の成分として埋め込めることが分かる．

Theorem 2. (A) を仮定する．このとき，$(Z(t), X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ は次のマルコフ型 SDE の解である：$t \geq 0$ に対し，

$$\begin{cases} dZ(t) = \left\{-\sum_{k=1}^{n} e^{-r_k t}X_k(t)\right\}dt + d\overline{W}(t), \\ dX_k(t) = \ell_k(t)d\overline{W}(t) \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

上の結果の応用例として, 短期金利過程 $\{r(t)\}_{t\geq 0}$ が確率微分方程式

$$dr(t) = \{a - br(t)\}dt + \sigma dZ(t) \quad (t \geq 0), \quad r(0) \in [0, \infty) \tag{6}$$

により記述される Vasicek タイプのモデルを考える．ここで, $a, b, \sigma \in (0, \infty)$ とする．P は同値マルチンゲール測度とみなし, モデルのフィルトレーションは上の $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ を

となる．(6) の $\{Z(t)\}$ は (3) の形の伊藤過程であるから, (6) は通常の伊藤解析の枠組みに入る．一方, $\{Z(t)\}$ は定常増分過程であり, その意味でノイズとして自然である．$\{Z(t)\}$ は $2n$ 個のパラメータ r_k, θ_k を含むので, モデルの fitting で柔軟性が高い．

満期が T (>0) で額面 1 の割引き債の時刻 $t \in [0,T]$ における価格 $P(t,T)$ は

$$P(t,T) = E\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

により与えられる．Theorem 2 により, [IMN] の結果を拡張した次が得られる．

Theorem 3 (**アフィン期間構造の類似物**)**.** $P(t,T)$ は

$$P(t,T) = F(t, r(t), X_1(t), \ldots, X_n(t); T) \qquad (0 \le t \le T)$$

で与えられる．ここで，$\ell_0(s) := \sigma$ として，

$$\begin{aligned}
F(t, x_0, x_1, \ldots, x_n; T) &:= \exp\left\{-A(t,T) - C_0(t,T)x_0 - \sum_{k=1}^{n} C_k(t,T)x_k\right\},\\
C_0(t,T) &:= \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b},\\
C_k(t,T) &:= -\frac{\sigma}{b}\int_t^T e^{-p_k s}\{1-e^{-b(T-s)}\}ds \quad (k=1,2,\ldots,n),\\
A(t,T) &:= \frac{a}{b}\left\{T - t - \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}\right\} - \frac{1}{2}\int_t^T \left\{\sum_{k=0}^{n} \ell_k(s) C_k(s,T)\right\}^2 ds.
\end{aligned}$$

次に期間構造方程式に関する結果を述べる．$G(t, r(t), X_1(t), \ldots, X_n(t))$ を満期が S ($\le T$) で，ペイオフが $H = h(P(S,T))$ のヨーロピアン・タイプの派生証券の時間 t における価格とする．すると, G の数値計算は次の PDE の数値計算に帰着される：

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}G(t,x) = 0 & ((t,x) \in [0,S) \times \mathbb{R}^{n+1}),\\
G(S,x) = h(F(S,x;T)) & (x \in \mathbb{R}^{n+1}).
\end{cases}$$

ここで，$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\ell_0(t) := \sigma$, そして

$$\mathcal{L}G := \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \ell_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 G + \left\{a - bx_0 - \sigma\sum_{k=1}^{n} e^{-p_k t}x_k\right\}\frac{\partial G}{\partial x_0} - x_0 G.$$

即ち, (6) の非マルコフ的金利モデルは, PDE による通常の数値計算法が可能である．

参考文献

[AIK] V. V. Anh, A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization, *Stochastic Anal. Appl.* **23** (2005), 301–328.

[IKP] A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes, *Bernoulli*, to appear. arXiv:1507.02848.

[IMN] A. Inoue, S. Moriuchi and Y. Nakamura, A Vasicek-type short rate model with memory effect, *Stochastic Anal. Appl.* **33** (2016), 1068–1082.

[INA] A. Inoue, Y. Nakano and V. Anh, Linear filtering of systems with memory and application to finance, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* 2006, Art. ID 53104, 26 pp.

Probability Symposium, RIMS Workshop
Dec. 19-22, 2016

Recent progress on conditional randomness

Hayato Takahashi[1]

The set of Hippocratic random sequences w.r.t. P is defined as the compliment of the effective null sets w.r.t. P and denote it by $\mathcal{R}^P$. In particular if P is computable it is called Martin-Löf random sequences.

Lambalgen's theorem (1987) [9] says that a pair of sequences $(x^\infty, y^\infty) \in \Omega^2$ is Martin-Löf (ML) random w.r.t. the product of uniform measures iff x^∞ is ML-random and y^∞ is ML-random relative to x^∞, where Ω is the set of infinite binary sequences. In [10, 5, 6, 7], generalized Lambalgen's theorem is studied for computable correlated probabilities.

Let S be the set of finite binary strings and $\Delta(s) := \{sx^\infty | x^\infty \in \Omega\}$ for $s \in S$, where sx^∞ is the concatenation of s and x^∞. Let $X = Y = \Omega$ and P be a computable probability on $X \times Y$. P_X and P_Y are marginal distribution on X and Y, respectively. In the following we write $P(x, y) := P(\Delta(x) \times \Delta(y))$ and $P(x|y) := P(\Delta(x)|\Delta(y))$ for $x, y \in S$.

Let $\mathcal{R}^P$ be the set of ML-random points and $\mathcal{R}^P_{y^\infty} := \{x^\infty \mid (x^\infty, y^\infty) \in \mathcal{R}^P\}$. In [5, 6], it is shown that conditional probabilities exist for all random parameters, i.e.,

$$\forall x \in S,\ y^\infty \in \mathcal{R}^{P_Y} \quad P(x|y^\infty) := \lim_{y \to y^\infty} P(x|y) \text{ (the right-hand-side exist)}$$

and $P(\cdot|y^\infty)$ is a probability on $(\Omega, \mathcal{B})$ for each $y^\infty \in \mathcal{R}^{P_Y}$.

Let $\mathcal{R}^{P(\cdot|y^\infty), y^\infty}$ be the set of Hippocratic random sequences w.r.t. $P(\cdot|y^\infty)$ with oracle y^∞.

Theorem 1 ([5, 6, 7]) *Let P be a computable probability on $X \times Y$. Then*

$$\mathcal{R}^P_{y^\infty} \supseteq \mathcal{R}^{P(\cdot|y^\infty), y^\infty} \text{ for all } y^\infty \in \mathcal{R}^{P_Y}. \tag{1}$$

Fix $y^\infty \in \mathcal{R}^{P_Y}$ and suppose that $P(\cdot|y^\infty)$ is computable with oracle y^∞. Then

$$\mathcal{R}^P_{y^\infty} = \mathcal{R}^{P(\cdot|y^\infty), y^\infty}. \tag{2}$$

---

[1] hayato.takahashi@ieee.org
This work was done when the author was with Gifu University and supported by KAKENHI (24540153).

It is known that there is a non-computable conditional probabilities [4] and in [2] Bauwens showed an example that violates the equality in (2) when the conditional probability is not computable with oracle y^∞. In [8], an example that for all y^∞, the conditional probabilities are not computable with oracle y^∞ and (2) holds. A survey on the randomness for conditional probabilities is shown in [1].

Next we study mutually singular conditional probabilities. In [3], Hanssen showed that for Bernoulli model $P(\cdot|\theta)$,

$$\mathcal{R}^{P(\cdot|\theta)} = \mathcal{R}^{P(\cdot|\theta),\theta} \text{ for all } \theta. \tag{3}$$

We generalize Hanssen's theorem (3) for mutually singular conditional probabilities. In [5, 7], equivalent conditions for mutually singular conditional probabilities are shown.

Theorem 2 ([5, 7]) *Let P be a computable probability on $X \times Y$, where $X = Y = \Omega$. The following six statements are equivalent:*
(1) $P(\cdot\,|\,y) \perp P(\cdot\,|\,z)$ if $\Delta(y) \cap \Delta(z) = \emptyset$ for $y, z \in S$.
(2) $\mathcal{R}^{P(\cdot\,|\,y)} \cap \mathcal{R}^{P(\cdot\,|\,z)} = \emptyset$ if $\Delta(y) \cap \Delta(z) = \emptyset$ for $y, z \in S$.
(3) $P_{Y|X}(\cdot\,|\,x)$ converges weakly to I_{y^∞} as $x \to x^\infty$ for $(x^\infty, y^\infty) \in \mathcal{R}^P$, where I_{y^∞} is the probability that has probability of 1 at y^∞.
(4) $\mathcal{R}^P_{y^\infty} \cap \mathcal{R}^P_{z^\infty} = \emptyset$ if $y^\infty \neq z^\infty$.
(5) There exists $f : X \to Y$ such that $f(x^\infty) = y^\infty$ for $(x^\infty, y^\infty) \in \mathcal{R}^P$.
(6) There exists $f : X \to Y$ and $Y' \subset Y$ such that $P_Y(Y') = 1$ and $f = y^\infty,\ P(\cdot\,;y^\infty) - a.s.$ for $y^\infty \in Y'$.

Generalized form of Hanssen's theorem (3) is as follows.

Theorem 3 *Let P be a computable probability on $X \times Y$, where $X = Y = \Omega$. Under one of the condition of Theorem 2, we have*

$$\mathcal{R}^P_{y^\infty} \supseteq \mathcal{R}^{P(\cdot|y^\infty)} \text{ for all } y^\infty \in \mathcal{R}^{P_Y}.$$

Fix $y^\infty \in \mathcal{R}^{P_Y}$ and suppose that $P(\cdot|y^\infty)$ is computable with oracle y^∞. Then

$$\mathcal{R}^P_{y^\infty} = \mathcal{R}^{P(\cdot|y^\infty)} = \mathcal{R}^{P(\cdot|y^\infty),y^\infty}.$$

References

[1] B. Bauwens, A. Shen, and H. Takahashi. Conditional probabilities and van Lambalgen theorem revisited. arxiv:1607.04240, 2016.

[2] Bruno Bauwens. Conditional measure and the violation of van Lambalgen's theorem for Martin-löf randomness. http://arxiv.org/abs/1103.1529, 2015.

[3] Bjørn Kjos Hanssen. The probability distribution as a computational resource for randomness testing. *Journal of Logic and Analysis*, 2(10):1–13, 2010.

[4] D. M. Roy. *Computability, inference and modeling in probabilistic programming.* PhD thesis, MIT, 2011.

[5] H. Takahashi. Bayesian approach to a definition of random sequences and its applications to statistical inference. In *2006 IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 2180–2184, July 2006.

[6] H. Takahashi. On a definition of random sequences with respect to conditional probability. *Inform. and Compt.*, 206:1375–1382, 2008.

[7] H. Takahashi. Algorithmic randomness and monotone complexity on product space. *Inform. and Compt.*, 209:183–197, 2011.

[8] H. Takahashi. Generalization of van lambalgen's theorem and blind randomness for conditional probabilities, 2014. arxiv:1310.0709v3.

[9] M. van Lambalgen. *Random sequences.* PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 1987.

[10] V. G. Vovk and V. V. V'yugin. On the empirical validity of the Bayesian method. *J. R. Stat. Soc. B*, 55(1):253–266, 1993.

A category of probability space and a conditional expectation functor

Yoshihiro Ryu (Ritsumeikan University)
joint work with
Takanori Adachi (Ritsumeikan University)

An advantage of using category theory is that it can visualize relations between different mathematical fields. Further, when we find a relation between different mathematical fields, it sometimes helps for developings a theory in a new direction. This fact motivates us to use category theory for studying probability theory.

One of the most prominent trials of applying category theory to probability theory so far is Lawvere and Giry's approach of formulating transition probabilities in a monad framework ([Lawvere, 1962], [Giry, 1982]). However, their approach is based on two categories, the category of measurable spaces and the category of measurable spaces of a Polish space , not a category of probability spaces. Further, there are few trials of making categories consisting of all probability spaces due to a difficulty of finding an appropriate condition of their arrows.

Our approach is one of this simple-minded trials. We introduce a category **Prob** of all probability spaces in order to see a possible generalization of some classical tools in probability theory including conditional expectations. Actually, [Adachi, 2014] provides a simple category for formulating conditional expectations, but its objects and arrows are so limited that we cannot use it as a foundation of categorical probability theory.

Definition 1. A category **Prob** is the category whose objects are all probability spaces and the set of arrows between them are defined by

$$\begin{aligned}&\mathbf{Prob}((X,\Sigma_X,\mathbb{P}_X),(Y,\Sigma_Y,\mathbb{P}_Y))\\&:=\{f^- \mid f:(Y,\Sigma_Y,\mathbb{P}_Y)\to(X,\Sigma_X,\mathbb{P}_X):\text{measurable with }\mathbb{P}_Y\circ f^{-1}\ll\mathbb{P}_X\},\end{aligned}$$

where f^- is a symbol corresponding uniquely to a measurable function f.

We write $(X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X) \xrightarrow{f^-} (Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y)$ in **Prob**, however, note that the arrow f^- has an opposite direction of the function f.

From now on, $f^- : (X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X) \to (Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y)$ is an arbitrary arrow in **Prob**. For any $v \in \mathcal{L}^1(Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y)$, thanks to Radon-Nikodym theorem, we can find $E^{f^-}(v) \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X)$, a (version of) conditional expectation of v along f^-, satisfying

$$\int_A E^{f^-}(v)\, d\mathbb{P}_X = \int_{f^{-1}(A)} v\, d\mathbb{P}_Y$$

for all $A \in \Sigma_X$. This is a generalization of conditional expectation. Because if $f = id_\Omega : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ and $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, then $E^{id_\Omega^-}(v)$ becomes a usual conditional expectation $\mathbb{E}(v|\mathcal{G})$. Since the arrow $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{id_\Omega} (\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ is identified as a sub σ-algebra $\mathcal{G}$ of $\mathcal{F}$, we can think of an arrow f^- in **Prob** as a σ-algebra.

Additionally, one can show the well-definedness of $[v]_{\sim_{\mathbb{P}_Y}} \mapsto [E^{f^-}(v)]_{\sim_{\mathbb{P}_X}}$, here $\sim_\mathbb{P}$ is $\mathbb{P}$-a.s. equivalence relation. So we have the first theorem:

Theorem 2. *There exists a contravariant functor $\mathcal{E}$ from* **Prob** *to* **Set** *(the category of all sets and all functions) as following:*

$$\begin{array}{ccccccc}
X & (X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X) & \overset{\mathcal{E}}{\longmapsto} & \mathcal{E}(X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X) & := L^1(X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X) & \ni & [E^{f^-}(v)]_{\sim_{\mathbb{P}_X}} \\
{\scriptstyle f}\big\uparrow & {\scriptstyle f^-}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathcal{E}f^-} & & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathcal{E}f^-} \\
Y & (Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y) & \overset{\mathcal{E}}{\longmapsto} & \mathcal{E}(Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y) & := L^1(Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y) & \ni & [v]_{\sim_{\mathbb{P}_Y}}.
\end{array}$$

Continually, we define a concept of measurability.

Definition 3. A random variable $v \in \mathcal{L}^\infty(Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y)$ is called f^--measurable if there exists $w \in \mathcal{L}^\infty(X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X)$ such that $v \sim_{\mathbb{P}_Y} w \circ f$.

It seems natural because f^- is a "σ-algebra". Due to this definition, our second theorem is obtained.

Theorem 4. *Let u be an element of $\mathcal{L}^1(Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y)$ and v be a random variable in $\mathcal{L}^\infty(Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y)$, and assume that v is f^--measurable. Then we have*

$$E^{f^-}(v \cdot u) \sim_{\mathbb{P}_X} w \cdot E^{f^-}(u),$$

where $w \in \mathcal{L}^\infty(X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X)$ is a random variable satisfying $v \sim_{\mathbb{P}_Y} w \circ f$.

This theorem shows that our "conditional expectation" still has a similar property about measurability.

Next definition is a modification of [Franz, 2003].

Definition 5. We say $v \in \mathcal{L}^1(Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y)$ is independent of f^- if there exists a measure preserving map q which makes the following diagram commute:

$$\begin{tikzcd} & (Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y) \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "f"] & \\ (\mathbf{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_Y \circ v^{-1}) & (\mathbf{R} \times X, \mathcal{B} \otimes \Sigma_X, (\mathbb{P}_Y \circ v^{-1}) \otimes (\mathbb{P}_Y \circ f^{-1})) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & (X, \Sigma_X, \mathbb{P}_X). \end{tikzcd}$$

By a straightforward calculation, we see that this definition means usual independence in the case of two σ-algebras.

Finally, we encounter our last theorem.

Theorem 6. *Let $v \in \mathcal{L}^1(Y, \Sigma_Y, \mathbb{P}_Y)$ be a random variable that is independent of f^-. Then we have,*

$$E^{f^-}(v) \sim_{\mathbb{P}_X} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_Y}[v] E^{f^-}(1_Y).$$

When f is measure preserving, $E^{f^-}(1_Y) \sim_{\mathbb{P}_X} 1$, then the above formula turns well known formula of conditional expectation with independence since $E^{f^-}(1_Y)$ is the Radon-Nikodym derivative $d(\mathbb{P}_Y \circ f^{-1})/d\mathbb{P}_X$.

References

[Adachi, 2014] Adachi, T. (2014). Toward categorical risk measure theory. *Theory and Applications of Categories*, 29(14):389–405.

[Franz, 2003] Franz, U. (2003). What is stochastic independence? In *Quantum probability and White Noise Analysis, Non-commutativity, Infinite-dimensionality, and Probability at the Crossroads*, pages 254–274. World Sci. Publishing.

[Giry, 1982] Giry, M. (1982). A categorical approach to probability theory. In Banaschewski, B., editor, *Categorical Aspects of Topology and Analysis*, volume 915 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 68–85. Springer-Verlag.

[Lawvere, 1962] Lawvere, F. W. (1962). The category of probabilistic mappings. Preprint.

Stochastic differential equations for infinite particle systems of jump types with long range interactions

Syota Esaki*(Kyushu University),
Hideki Tanemura†(Chiba University)

In this talk we study infinite particle systems with interactions in which each particle is undergoing the jump type process on $\mathbb{R}^d$ with rate function $p_x(y) = p(|x-y|)$ from x to y satisfying conditions (p.1)—(p.2):

(p.1) $p(r) = O(r^{-(d+\alpha)})$ as $r \to \infty$ for some $\alpha > 0$.

(p.2) $p(r) = O(r^{-(d+\beta)})$ as $r \to +0$ for some $0 < \beta < 2$.

Our theorems can be applied to the systems with Dyson, Ginibre, Airy and Bessel interactions. In particular, we can give the SDE representations for the interacting α-stable particle systems for any $\alpha \in (\kappa, 2)$, where κ is the growth order of the density (the 1-correlation function) of μ, that is, $\rho^1(x) = O(|x|^\kappa)$, $|x| \to \infty$.

Suppose that a state space is d-dimensional Euclidian space $\mathbb{R}^d$. Then the configuration space is represented as $\mathfrak{M} = \left\{\xi = \sum_i \delta_{x_i}; \xi(K) < \infty \text{ for all compact sets } K \subset \mathbb{R}^d\right\}$, where δ_a stands for the delta measure at a. We endow $\mathfrak{M}$ with the vague topology. Then $\mathfrak{M}$ is a Polish space. For $x, y \in \mathbb{R}^d$ and $\xi \in \mathfrak{M}$, we write $\xi^{xy} = \xi - \delta_x + \delta_y$ and $\xi \setminus x = \xi - \delta_x$ if $\xi(\{x\}) \geq 1$.

Let μ be a probability measure on $\mathfrak{M}$, which describes an equilibrium measure for the system. We consider a Dirichlet form $\mathfrak{E}$ defined by

$$\mathfrak{E}(f,f) = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{M}} \mu(d\xi)\int_{\mathbb{R}^d} \xi(dx)\int_{\mathbb{R}^d} p(x,y)\{f(\xi^{xy}) - f(\xi)\}^2 dy,$$

with some positive measurable function p on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, which is a jump rate satisfying the above condition (p.1)–(p.2). Under suitable assumptions we can construct the associated unlabeled particle system by using the Dirichlet form technique [1].

*s-esaki@math.kyushu-u.ac.jp
†tanemura@math.s.chiba-u.ac.jp

In this talk, we give the ISDE representations for the unlabeled particle systems by generalizing the method in [2]. We introduce the rate function given by $c(\xi, x; y) = 0$ if $\xi(\{x\}) = 0$, and

$$c(\xi, x; y) = p(|x-y|)\left(1 + \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi \setminus x)\frac{\rho^1(y)}{\rho^1(x)}\right), \quad \text{if } \xi(\{x\}) \geq 1.$$

Here, μ_x is the reduced Palm measure defined by $\mu_x = \mu\left(\cdot - \delta_x \,|\, \xi(\{x\}) \geq 1\right)$ for $x \in \mathbb{R}^d$, $\rho^1(x)$ is the 1-correlation function of μ and $d\mu_y/d\mu_x$ is the Radon-Nikodym derivative of μ_y with respect to μ_x. Then the labeled process $(X_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ solves the following ISDE:

$$X_j(t) = X_j(0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty u\ a\left(u, r, X_j(s-), \sum_{i\neq j} \delta_{X_i(s-)}\right) N_j(dsdudr), \tag{1}$$

where $a(u, r, x, \xi) = \mathbf{1}\left(0 \leq r \leq c(\xi, x; x+u)\right)$, and N_j, $j \in \mathbb{N}$ are independent Poisson random point fields on $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times [0,\infty)$ whose intensity measure is the Lebesgue measure $dsdudr$.

We also discuss the uniqueness of solutions of ISDE (1) by applying the argument in [3], where systems of interacting Brownian motions are studied.

References

[1] Esaki, S., Infinite particle systems of long range jumps with long range interactions. to appear in Tohoku Mathematical Journal arXiv:1508.06795 [math.PR].

[2] Osada, H., Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices. Probab. Theory Related Fields **153** (2012), 471–509.

[3] Osada, H. and Tanemura, H., Infinite dimensional stochastic differential equations and tail σ-fields, (preprint) arXiv:1412.8674 [math.PR].

Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性と *Alder* 型転移

2016/12/20/火：京都大学数理解析研究所　　Hirofumi Osada (Kyushu University)

$\mathbb{R}^d$ における $-(1/2)\Delta$ の基本解の $\sigma(d)$ 倍を d 次元 Coulomb ポテンシャルと呼び Ψ_d と表す。ここで $\sigma(d) = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ は $(d-1)$ 次元単位球面の面積であり、$\nabla\Psi(x) = -x/|x|^d$ となる。d 次元ユークリッド空間内を Coulomb ポテンシャル Ψ_d で相互作用しながら運動する無限個のブラウン運動を考える。逆温度を β とする。この確率力学が平行移動不変なときには、次の無限次元確率微分方程式で記述される [5]。

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\sum_{j\neq i,\,|X_t^i-X_t^j|<r}\frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^d}dt \quad (i\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

現在、$d=2$ かつ $\beta=2$ の時だけ、この確率力学およびその平衡分布は構成されており、それぞれ「Ginibre 干渉ブラウン運動」、「Ginibre 点過程」と呼ばれる。尚、この点過程は、非エルミート Gaussian ランダム行列の固有値の分布の極限である。$\mathbb{R}^d$ において d 次元 Coulomb ポテンシャルは、Ruelle クラスのポテンシャルではない。従って、DLR 方程式に基づく、従来の Gibbs 測度の理論をそのまま適用できない。Gibbs 測度は、Poisson 点過程に近いクラスである。一方、Coulomb ポテンシャルは、その遠方での相互作用の強烈さのために、付随する無限粒子系は異なる様相を見せる。

次式 (2) で与えられる $\mathbb{R}^d$ 上の平行移動不変かつ回転不変な点過程 $\mu_{d,\beta}$ が存在するとする。(2) は、形式的だが、対数微分の概念を用いて、定義は厳密化できる。$(d,\beta) = (2,2)$ 以外は、存在は未解決である。

$$\mu_{d,\beta}(d\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{Z}}\exp\{-\beta\sum_{i<j}^{\infty}\Psi_d(x_i - x_j)\}\prod_k^{\infty}dx_k \tag{2}$$

この講演では、Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性を示す。さらに、$d=2$ のとき、**一般の逆温度 β に対して、**(2) の形の **Ginibre$_\beta$ 点過程が存在する**という仮定のもとで、自己拡散行列に対する相転移が起こることを示す。実際、周期的クーロン媒質のホモジナイゼーション、つまり結晶格子の各点が電荷を持つとし、それからクーロン力を受けるブラウン運動粒子のホモジナイゼーションに対する有効伝導率 γ の関数によって、臨界点を下から評価する。このように、臨界点が正かつ有限の値を持つことを示す。この結果は、Alder 型相転移（後述）を 2 次元クーロンポテンシャルに対して証明したものと解釈できる。

$\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}$ とも見なす) の配置空間を S とおく。μ を Ginibre 点過程とする。つまり、行列式点過程でガウス分布 $g(dx) = (1/\pi)e^{-|x|^2}dx$ を基礎の測度としたとき、核関数 $K(x,y)$ 次式で与えられるものである。

$$K(x,y) = e^{x\bar{y}}$$

$\ell = (\ell_i)_{i\in\mathbb{N}}$ をラベル、$\ell(\mathsf{s})$ を出発する SDE(1) の解 $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ の分布を $P_{\ell(\mathsf{s})}$、平均を $E_{\ell(\mathsf{s})}$ と表す。

Theorem 1 ([6]). $P_{\ell(\mathsf{s})}$ の下で、すべての $i\in\mathbb{N}$ に対して、$\forall F\in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^2))$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mu\Big(\Big\{\mathsf{s};\big|E_{\ell(\mathsf{s})}[F(\epsilon X^i_{\cdot/\epsilon^2})] - F(0)\big| \geq \delta\Big\}\Big) = 0 \quad \text{for all } \delta > 0. \tag{3}$$

Tagged 粒子の極限の係数行列の初期条件についての平均を自己拡散行列と $\alpha_{d,\beta}$ いう。ここで、β は逆温度、d は空間の次元である。もし、逆温度 β をもつ d 次元厳密クーロン点過程が存在すれば、一般論から、自己拡散行列が存在し更に、変分表現を持つ [3]。Theorem 1 は、$\alpha_{2,2} = 0$、つまり、$(\beta,d) = (2,2)$ の場合に、下記の関数 $\chi_{r,R}$ を用いて、この変分表現が消滅することを示したものである。

$$\chi_{\epsilon,R}(x) = \begin{cases} -\epsilon^{-2}r\cos\theta & (r\leq\epsilon) \\ -\epsilon^{-1}\{\frac{\epsilon+R-r}{R}\}\cos\theta & (\epsilon\leq r\leq\epsilon+R) \\ 0 & (\epsilon+R\leq r) \end{cases}$$

ただし、$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ 、また、(r,θ) は極座標、$r=|x|, \cos\theta = x_1/|x|$.
• $\mathbb{L}=\mathbb{L}(d)$ を d 次元格子 (結晶) とする。簡単のため格子は原点を含むとし $\mathbb{L}_0=\mathbb{L}\backslash\{0\}$ する。立方格子以外に、例えば 2 次元では、3 角格子も考える。格子 $\mathbb{L}$ が与えられたとき、周期関数 b と b_0 を次で定義する。

$$b(x)=\lim_{r\to\infty} c_d \sum_{j\in\mathbb{L};\,|x-j|<r} \frac{x-j}{|x-j|^d}, \quad b_0(x)=b(x)-c_d\frac{x}{|x|^d}$$

逆温度 β を含む形で、それぞれに対応する SDE を、次で与える。

$$dY_t = dB_t + \frac{\beta}{2}b(Y_t)dt, \quad dZ_t = dB_t + \frac{\beta}{2}b_0(Z_t)dt$$

拡散的スケーリング $Y^\epsilon_t = \epsilon Y_{t/\epsilon^2}$ と $Z^\epsilon_t = \epsilon Z_{t/\epsilon^2}$ を取ると、これらは次式を満たす。

$$dY^\epsilon_t = dB_t + \frac{\beta}{2}\frac{1}{\epsilon}b(\frac{1}{\epsilon}Y^\epsilon_t)dt, \quad dZ^\epsilon_t = dB_t + \frac{\beta}{2}\frac{1}{\epsilon}b(\frac{1}{\epsilon}Z^\epsilon_t)dt - \frac{\beta}{2}c_d\epsilon^{d-2}\frac{Z^\epsilon_t}{|Z^\epsilon_t|^d}dt$$

Lemma 1. 有効伝導率とよばれる定数 $\gamma=\gamma_{d,\beta}$ が存在し、次のホモジナイゼーションが成立する。

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon Y_{t/\epsilon^2} = \sqrt{\gamma}B_t$$

Proof. 退化はするが、周期的ホモジナイゼーションである。非退化性は、反射壁ブラウン運動のホモジナイゼーションと比べることにより示され、$0<\gamma<1$ となる。 □

2 次元の場合は、Z^ϵ に対して、次の収束定理と相転移が成立する。

Theorem 2. $d=2$ とする。初期条件が $\lim_\epsilon x_\epsilon = x$ を満たすとする。このとき $\overline{Z}=\lim Z^\epsilon$ が存在し、

$$d\overline{Z}_t = \sqrt{\gamma}dB_t - \frac{\beta}{2}\frac{\overline{Z}_t}{|\overline{Z}_t|^2}dt \quad (0<\beta<\gamma+1) \tag{4}$$

を満たす。更に、$\gamma+1\le\beta<\infty$ では、原点が流出境界となり、$\overline{Z}_t=0$ for $\sigma_0\le t$. とくに Z が、原点（の近傍）から出発するときには、劣拡散的である。特に、$\beta<\gamma+1$ で拡散的、$\beta\ge\gamma+1$ で劣拡散的である。つまり、$\beta_{\mathrm{c}}^{\mathrm{homo}}=1+\gamma$ を臨界点とする、拡散/劣拡散に対する相転移が起こる。

Proof. Chen-Croydon-Kumagai [1] の定理と Saloff-Coste その他による熱核の評価 [7] を用いる。更に、Girsanov の公式、Mosco 収束や [2] の Dirichlet 形式の収束を使う。 □

以上の二つの定理を組み合わせると、拡散行列の非退化性についての臨界点 β_c に対して、2 次元では、次の評価が得られる。**Ginibre 点過程の分布が、格子構造で十分近似できるという仮説の下で**、次の定理が成立する。尚、$\beta=\infty$ の極限では、Ginibre 点過程の分布は、三角格子に収束する。又、格子が満たすべきパラメーターの条件として、粒子の密度（1 相関関数の定数値）が入ることに注意する。

Theorem 3. $d=2$ のとき、$\gamma+1\le\beta_c\le 2$。特に、$1\le\beta_c\le 2$。

Remark • 通常の Ruelle クラスの干渉ポテンシャルの場合は、2 次元以上では常に拡散的になり、退化しないこと [4] が知られている。[4] では凸のハードコアの存在を仮定したが、事実としては 2 次元以上では Ruelle クラスの干渉ポテンシャルの場合は、常に拡散的スケーリングで非退化と思われている。また対応する格子モデルでは、単純排他過程については、Kipnis-Varadhan、また、一般の排他過程については、Spohn によって非退化が示されている。従って、今回の結果は、これらの従来の結果とは、対照的である。このような現象が生じる理由は、Coulomb ポテンシャルがもつ、無限大での効果の強烈さに起因する。このよう

に、 long range の影響のため、この平衡分布に付随する確率力学の tagged 粒子は、通常のブラウン運動とは違う種類の、漸近挙動をすることが分かる。

• γ の値は、格子の構造に依存する。Theorem 3 の下からのバウンドは、適切な γ についての sup と取ることが出来る。ただし、何が適切な格子かはまだ、observation である。

• Alder 転移とは、1957 年に発表された剛体球系の固相-流動相の相転移である。これは有界領域でニュートン力学に従う剛体球系の運動が、境界の影響で密度について相転移を起すことを、計算機シミュレーションによって示したものである。ハードコアポテンシャルという非常に単純かつ斥力しか持たない場合に示された相転移で有り、その後、リースポテンシャル、あるいは、確率力学といった枠組みでも研究された。

• ある時期、ハードコアブラウン運動からなる無限粒子系が、劣拡散的挙動を示すという形で定式化された、無限領域の Alder 転移が予想された。[4] の結果はそれを否定するものだった。尚、[4] は「ガラス転移」を研究する上で、Mode Coupling Theory (MCT) と呼ばれる手法が、低次元の空間では成立しないことを厳密に証明するものとして引用されている。MCT は、空間の次元が無限次元にちかずく時に正しく機能すると言われている。ガラス転移は、液相とガラス相をいかにみわけるかというテーマをあつかい、今も盛んに研究されているが、理論的にはなかなか進展しない。実験にかかるような、時間のスケールで見ると、ガラスと液体は区別できて、その力学的挙動も、スローダウンし液体とは異なっている、ということを示したいのだが、理論的に捉えるのが難しい。hopping、caging、jamming など、様々な現象が取り上げられている。（これらは、[4] を引用する文献を Google Scholar で調べると検索できる）。今回の Theorem 3 は、昔、[4] で否定された予想が、クーロンポテンシャルに話を移せば成立（復活）することを示している。

• 臨界現象とは、干渉が無限遠点まで到達する現象である。クーロンポテンシャルは、臨界点でなくても、それ自身で遠距離強相互作用を持ち、その逆温度についての相転移は、臨界現象の中の臨界現象である（この切り口は、香取さんから教えてていただいた。ただし、私の方が理解せずに間違って話している可能性がある）。元々の Alder 転移を「境界の影響のために生じた相転移だ」と解釈すれば、今回の相転移は、クーロンポテンシャルの遠距離強相互作用によって無限遠点を境界として認識した結果、生じたものであり、これを Alder 型転移というのは、話が整合すると思われる。

参考文献

[1] Chen, Zhen-Qing; Croydon, David A.; Kumagai, Takashi *Quenched invariance principles for random walks and elliptic diffusions in random media with boundary,*. Ann. Probab. 43 (2015), no. 4, 1594-1642.

[2] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions,*, Commun. Math. Phys. **176**, 117-131 (1996).

[3] Osada, H. *An invariance principle for Markov processes and Brownian particles with singular interaction*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **34**, n° 2 (1998), 217-248.

[4] Osada, H., *Positivity of the self-diffusion matrix of interacting Brownian particles with hard core*, Probab. Theory Relat. Fields, **112**, (1998), 53-90.

[5] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields, Vol **153**, (2012) pp 471-509.

[6] Osada, H., *The Ginibre interacting Brownian motion is sub-diffusive*, (preprint/draft)

[7] Tasena, S., Saloff-Coste, L., Dhompongsa, S., Tanemura, H., *Poincaré inequality: From remote balls to all balls*, , Nonlinear Analysis **108** (2014) 161-172

Dynamic Universality for Random Matrices

2016/12/20/火 : 京都大学数理解析研究所: 河本陽介，長田博文 (Kyushu University)

1. ランダム行列の普遍性: ランダム行列とは、典型的な場合、成分がガウス分布であるエルミート行列であり、ガウシアンユニタリーアンサンブル (GUE) と呼ばれる。その固有値の分布は、 Vandermonde 行列式で表示される。固有値を確率変数と思った場合、相関が非常に強くなり、大数の法則および中心極限定理のレベル共に、古典的な結果とは著しく異なる現象が現れる。上述の GUE はいわば、ベルヌイ分布の対応物で、可解モデルとしてすべてを具体的に計算することにより、これらの現象が解明された。従って、古典理論の大数の法則や中心極限定理と同じく、今や、その普遍性が重要な問題となっている。

ランダム行列の普遍性は、ランダム行列理論における中心的課題であり、Tao や Yau を初めとして、これまで様々な設定の下で研究がなされてきた (詳しくは、例えば [1] やその参考文献を参照)。一例を挙げる。

V を $\mathbb{R}$ 上実解析的かつ $\lim_{|x|\to\infty}\frac{V(x)}{\log|x|}=\infty$ を満たす関数とし、$\mathbb{R}^N$ の確率測度 $\mu_V^N(d\mathbf{x}^N)$ を考える。

$$\mu_V^N(d\mathbf{x}^N)\propto\prod_{i<j}^N|x_i-x_j|^2\prod_{k=1}^N e^{-NV(x_k)}\,d\mathbf{x}^N. \tag{1}$$

V に対する平衡測度が存在するので ρ_V と表す。つまり、$\mathsf{x}^N=\sum_{1\le i\le N}\delta_{x_i}$ とおくと、次が成立する。

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_V^N}[\frac{1}{N}\mathsf{x}^N((-\infty,s])]=\int_{-\infty}^s\rho_V(x)\,dx. \tag{2}$$

特に、$V=x^2$ としたとき、μ_V^N は N 次 GUE の固有値の法則を与える。また ρ_V は Wigner の半円分布であり、この収束は Wigner の半円法則と呼ばれる。

ρ_V は決定論的な測度であることから、(2) は大数の法則とみなすことができる。更に大数の法則の次のオーダー、つまり中心極限定理にあたるものを考え、ランダムな無限粒子の配置を与える。$\rho_V(\theta)>0$ なる $\theta\in\mathbb{R}$ を固定し、スケーリング $x\mapsto s$ を、$x=\frac{s}{N\rho_V(\theta)}+\theta$ とし、s に対する確率測度を $\mu_{V,\theta}^N$ とすると、

$$\mu_{V,\theta}^N(d\mathbf{s}^N)\propto\prod_{i<j}^N|s_i-s_j|^2\prod_{k=1}^N\exp(-NV(\frac{s}{N\rho_V(\theta)}+\theta))\,d\mathbf{s}^N. \tag{3}$$

$\rho_V^{N,n}$ を μ_V^N の n 点相関関数とすると、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、局所一様収束が成立する [2] :

$$\lim_{N\to\infty}\rho^{N,n}(\mathbf{x}^n)=\rho_{\sin}^n(\mathbf{x}^n)\text{ compact uniformly,} \tag{4}$$

ここで、$\rho_{\sin}^n(\mathbf{x}^n)$ は Sine 点過程 $\mu_{\sin}$ の n 点相関関数で次式で与えられる。

$$\rho_{\sin}^n(\mathbf{x}^n)=\det\Big[\frac{\sin(x_i-x_j)}{x_i-x_j}\Big]_{1\le i,j\le n}$$

つまり、$\mu_{V,\theta}^N$ は粒子数無限大での極限で Sine 点過程に弱収束する。特に、極限 $\mu_{\sin}$ は V や θ に依らない普遍的な点過程であり、これは、bulk 極限におけるランダム行列理論の普遍性の一例である。

2. 力学的普遍性: 次に力学的対応物を考える。μ_V^N に対し $L^2(S^N,\mu_V^N)$ で次の Dirichlet 形式を考える。

$$\mathcal{E}^N(f,g)=\frac{1}{2}\int_{S^N}\sum_{i=1}^N\nabla_i f\cdot\nabla_i g\,d\mu_V^N.$$

この Dirichlet 形式を部分積分することにより得られる生成作用素に対応する N 次元 SDE は、

$$dX_t^{N,i}=dB^i+\sum_{1\le j\ne i\le N}\frac{1}{X_t^{N,i}-X_t^{N,j}}dt-\frac{1}{2\rho_V(\theta)}V'(\frac{X_t^{N,i}}{N\rho_V(\theta)}+\theta)dt,\quad 1\le i\le N. \tag{5}$$

更に確率力学の N 無限大での極限で得られる無限次元 SDE は、以下の (6) であると予想される。

$$dX_t^i=dB^i+\lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i-X_t^j|<r}\frac{1}{X_t^i-X_t^j}dt,\quad i\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

実際 (6) は $\mu_{\sin}$ に付随する Dirichlet 形式 (distorted ブラウン運動) に対応する確率力学だからである。

まとめると、有限粒子系の点過程の無限系の点過程への収束が、それぞれに付随する確率力学の収束も伴うと期待される。特に、点過程の普遍性は、対応する確率力学の普遍性を導く、つまり、幾何的普遍性の力学的普遍性への伝播が成立すると予想する。本講演では、極限の無限次元 SDE の解の一意性が満たされる条件の下では、この予想が正しいことを示す。つまり、一般に点過程の良い収束（**幾何的強普遍性**）が確率力学の収束（**力学的普遍性**）を保証するということを示す。

3. 設定と主結果: 以下、一般的枠組みを設定し、主結果を述べる。

点過程の有限粒子系近似: $S=\mathbb{R}^d$、$\mathsf{S}=\{\mathsf{s}=\sum_i \delta_{\mathrm{s}_i}; \mathrm{s}_i\in S,$ 任意のコンパクト K に対し、$\mathsf{s}(K)<\infty\}$ を S の配置空間とする. S 上の確率測度 μ を点過程という。$\{\mu^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を, $\lim_{N\to\infty}\mu^N=\mu$ in law, かつ $\mu^N(\mathsf{s}(S)=N)=1$ であるような点過程の列とする。$S_r=\{x\in S\,;\,|x|<r\}$ に対し、$m_{r,n}$ と $m_{r,n}^N$ をそれぞれ μ と μ^N の S_r の n 点密度関数とする。

(A1) $m_{r,n}, m_{r,n}^N\in C^\infty(S_r^n,dx)$ for any $n,r\in\mathbb{N}$, and $\sum_{i=1}^\infty i\mu(S_r^n)<\infty$ for any $r\in\mathbb{N}$.

この条件 **(A1)** は、N 粒子系の確率力学の存在を保証する。極限については Dirichlet 形式の可閉性や準正則性を仮定する。実際これらは、具体的な場合は、示されている。また、準 Gibbs 性というロバストな十分条件が知られている。本質的なのは、次の **(A2)** と後述の **(A3)** の条件である。

(A2) $\lim_{N\to\infty}||m_{r,n}^N-m_{r,n}||_{S_r^n}=0,\quad \mathrm{Cap}^\mu(\{\mathsf{s}; m_{r,n}(\mathsf{s})=0\})=0$ for any $n,r\in\mathbb{N}$.

尚、$\|\cdot\|_A$ は集合 A 上の L^∞ ノルムを表す。$m_{r,n}$ の零点を配置空間の集合とみなし $\{\mathsf{s}; m_{r,n}(\mathsf{s})=0\}$ と表す。

Dirichlet 形式の 2 種類の近似: μ の自然な Dirichlet 形式に付随する、2 種類の近似（領域近似）を導入する。$\mathcal{D}_\circ$ を local smooth な $f:\mathsf{S}\to\mathbb{R}$ 全体とする。$f,g\in\mathcal{D}_\circ$ に対して、2 次場 $\mathbb{D}$ と $\mathbb{D}_r^m$ を次で与える。

$$\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})=\frac{1}{2}\sum_i \nabla_{s_i}\check{f}(\mathsf{s})\cdot\nabla_{s_i}\check{g}(\mathsf{s}),$$

$$\mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s})=\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})\quad(\mathsf{s}\in\mathsf{S}_r^m),\quad \mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s})=0\quad(\mathsf{s}\notin\mathsf{S}_r^m).$$

ここで $\mathsf{s}=\sum_i\delta_{s_i}$, $\mathbf{s}=(s_i)$, $\check{f}$ は $\check{f}(\mathbf{s})=f(\mathsf{s})$ をみたす対称関数、$\mathsf{S}_r^m=\{\mathsf{s}\in\mathsf{S}\,;\,\mathsf{s}(S_r)=m\}$ である。

$\mathcal{D}_\circ^\mu=\{f\in\mathcal{D}_\circ\cap L^2(\mu)\,;\,\mathcal{E}(f,f)<\infty\}$ とおき、$L^2(\mu)$ 上の双線形形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D}_\circ^\mu)$ と $(\mathcal{E}_r^m,\mathcal{D}_\circ^\mu)$ を次で与える。

$$\mathcal{E}(f,g)=\int_{\mathsf{S}}\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})d\mu,\quad \mathcal{E}_r^m(f,g):=\int_{\mathsf{S}}\mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s})d\mu. \tag{7}$$

仮定 **(A1)** から、任意の $m,r\in\mathbb{N}$ に対し、$(\mathcal{E}_r^m,\mathcal{D}_\circ^\mu)$ は $L^2(\mu)$ 上可閉となる。

$\mathcal{E}_r=\sum_{i=1}^\infty\mathcal{E}_r^i$ と定義し、$\mathcal{B}_r^b=\{f\,;\,f$ is bounded and $\sigma[\pi_r]$-measurable$\}$ と置く。そして、$(\underline{\mathcal{E}}_r,\underline{\mathcal{D}}_r)$ と $(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_r)$ をそれぞれ、$(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_\circ^\mu\cap\mathcal{B}_r^b)$ と $(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_\circ^\mu)$ の閉包とする。$\{(\underline{\mathcal{E}}_r,\underline{\mathcal{D}}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ は Dirichlet 形式として単調増大、$\{(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ は単調減少になる。極限をそれぞれ $(\underline{\mathcal{E}},\underline{\mathcal{D}})$ と $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ と書く。各 r で $(\underline{\mathcal{E}}_r,\underline{\mathcal{D}}_r)\le(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_r)$。故に極限でも $(\underline{\mathcal{E}},\underline{\mathcal{D}})\le(\mathcal{E},\mathcal{D})$ である。そこでこの 2 つの Dirichlet 形式の一致を仮定する。

(A3) $(\underline{\mathcal{E}},\underline{\mathcal{D}})=(\mathcal{E},\mathcal{D})$.

Remark 1. $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ に付随する無限次元 SDE の解の一意性が満たされるならば、**(A3)** は成立する [9]。解の一意性は、μ の末尾事象の自明性から従う [8]。さらに、行列式点過程は、常に末尾事象が自明になる [6]。

$(\mathcal{E}^N,\mathcal{D}^N)$ を $(\mathcal{E}^N,\mathcal{D}_\circ^{\mu^N})$ の $L^2(\mu^N)$ での閉包とする。X^N を $(\mathcal{E}^N,\mathcal{D}^N,L^2(\mu^N))$ に、X を $(\mathcal{E},\mathcal{D},L^2(\mu))$ にそれぞれ付随する拡散過程とする。この時、桑江-塩谷型のモスコ収束が成立し SDE の解の収束が従う。

定理 1. **(A1)–(A3)** を仮定すると、$\lim_{N\to\infty}(\mathcal{E}^N,\mathcal{D}^N,L^2(\mu^N))=(\mathcal{E},\mathcal{D},L^2(\mu))$ in Mosco in the sense of 桑江-塩谷 [4]. 特に、初期条件が収束する（$\lim_{N\to\infty}\mathsf{X}_0^N=\mathsf{X}_0$ weakly）とき、

$$\lim_{N\to\infty}\mathsf{X}^N=\mathsf{X}\text{ in distribution in }C([0,\infty),\mathsf{S}). \tag{8}$$

ラベル ℓ^N と ℓ に対して $\ell^N(\mathsf{X}_0^N)$ の分布がが $\ell(\mathsf{X}_0)$ 分布に収束する時（任意の最初の m 粒子の意味で）

$$\lim_{N\to\infty}(X^{N,i})_{i=1}^m=(X^i)_{i=1}^m\text{ in distribution in }C([0,\infty);(\mathbb{R}^d)^m). \tag{9}$$

4. 力学的普遍性 （bulk と soft-edge）：

• **bulk:** $\beta = 1,2,4$ の場合は、**(A2)** が広い範囲で満たされることが、[2] と [3] で示されている。無限次元確率微分方程式の可逆解の一意性が $\beta = 1,2,4$ [8, 10]、また、（可逆かどうかはわからないが一意的非平衡解が）$\beta \geq 1$ について Tsai [10] で得れている。特に次の力学的普遍性が成立する。

定理 2 (bulk 極限)**.** $\mu^N_{V,\theta}$ を (3) で与えられたものとする。V は実解析的かつ $\lim_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{\log|x|} = \infty$ を満たすとする。このとき、**(A1)**–**(A3)** が満たされる。特に、SDE (5) と (6) の解に対して定理 1 の結論が成立する。但し、$\beta = 1,4$ の場合は、(3), (5), (6) は適宜修正する。

• **soft-edge:** $\beta = 2$ とする。(1) を $V(x) = \sum_{i=0}^{2l} \kappa_i x^i$ $(\kappa_{2l} > 0)$ で与えスケーリングを次でとる。

$$x \mapsto N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1 + \frac{s}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}}) + d_N)$$

確率測度 $\mu^N_{V,\mathrm{Ai}}$ は次で与えられる。

$$\mu^N_{V,\mathrm{Ai}}(d\mathbf{s}^N) \propto \prod_{i<j}^N |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^N \exp(-NV(N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1 + \frac{s}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}}) + d_N)))\, d\mathbf{s}^N. \tag{10}$$

ここで、c_N, α_N, d_N は [3] で与えられている N に依る定数。このとき、$\mu^N_{V,\mathrm{Ai}}$ は N 無限大の極限で Airy 点過程 μ_{Ai} に収束し、かつ **(A2)** を満たす [3]。**(A1)** と **(A3)** を満たすことは知られている [7, 8, 6]。

定理 3 (soft-edge 極限)**.** 以上の仮定の下で、次の SDE の解に対して定理 1 の結論が成立する。

$$dX^{N,i}_t = dB^i + \sum_{1\leq j\neq i\leq N} \frac{1}{X^{N,i}_t - X^{N,j}_t} dt - \frac{N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2l}} c_N}{2\alpha_N} V'(N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1 + \frac{X^{N,i}_t}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}}) + d_N))dt,$$

$$dX^i_t = dB^i_t + \lim_{s\to\infty}\{ \sum_{|X^j_t|<s, j\neq i} \frac{1}{X^i_t - X^j_t} - \int_{|x|<s} \frac{\hat{\rho}(x)}{-x} dx\} dt.$$

参考文献

[1] Bourgade, P., Erdös, L., and Yau, H.-T., *Universality of general β-ensembles*, Duke Math. J. **163**, (2014), 1127-1190.

[2] Deift, P., Kriecherbauer, T., McLaughlin, K. T.-R., Venakides, S., Zhou, X., *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory*,, Comm. Pure Appl. Math., **52**, (1999), 1335-1425.

[3] Deift, P., Gioev, D., *Universality at the edge of the spectrum for unitary, orthogonal, and symplectic ensembles of random matrices*,, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), 867-910.

[4] Kuwae, K., Shioya, T., *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*,, Comm. Anal. Geom. **11**, (2003), no. 4, 599673.

[5] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*,, Comm. Math. Phys. **176**, (1996), 117-131.

[6] Osada, H., Osada, S., *Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and the tail triviality*, (preprint)

[7] Osada, H., Tanemura, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from Airy random point fields*, (preprint/draft)

[8] Osada, H., Tanemura, H., *Strong solutions of infinite-dimensional stochastic differential equations and tail theorems*, (preprint/draft)

[9] Osada, H., Tanemura, H., *Uniqueness of quasi-regular Dirichlet forms related to interacting Brownian motions*, (in preparation)

[10] Tsai, Li-Cheng *Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model*, Probab. Theory Relat. Fields (published on line) DOI 10.1007/s00440-015-0672-2 (2015)

Fourier expansion and discritizations of determinantal point processes

Shota OSADA
Kyushu University

1. Introduction

我々は、論文 [3] において行列式点過程の tail σ-field の 0-1 法則（tail 自明性）を示した。本公演では、その証明に用いた行列式点過程の離散化に主眼をおいて説明する。

行列式点過程とは、n 点相関関数がある核関数の行列式で与えられる点過程である。例えば、Bernoulli process は最も単純な $\mathbb{Z}$ 上の行列式点過程である。他には、Uniform spanning tree、Schur process などが離散空間上の行列式点過程の例である。$\mathbb{R}$ 上の行列式点過程の例では Sine_2、Airy_2、Bessel_2 などがある。行列式点過程において、離散空間上の場合のみ知られている性質がいくつかあり tail 自明性もその一つである [5, 1, 2]。我々は、連続空間上の行列式点過程の tail 自明性を示した。

本講演は、九州大学の長田博文氏との共同研究によるものである。

2. Set up

S を局所コンパクトな完備可分距離空間、d を S の距離とする。S 上の非負整数値ラドン測度 s を配置といい、配置全体 S に漠位相を入れたもの $(\mathsf{S}, \mathcal{B}(\mathsf{S}))$ を配置空間という。配置空間上の確率測度 μ を S 上の点過程という。配置空間 S の tail σ-field$\mathsf{Tail}(\mathsf{S})$ は、次のように定義される。

$$\mathrm{Tail}(\mathsf{S}) := \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \sigma[\pi_r^c] \tag{1}$$

ここで、$\pi_r^c : \mathsf{s}(\cdot) \mapsto \mathsf{s}(\cdot \cap B_r^c)$ 、 $B_r = \{|x| \le r\}$ とする。点過程 μ が tail 自明であるとは、すべての $A \in \mathsf{Tail}(\mathsf{S})$ に対し $\mu(A) \in \{0,1\}$ となることである。

m を S に備わったラドン測度とする。点過程 μ の（m についての）n 点相関関数 ρ^n とは、次の等式を満たす S 上の対称関数である。

$$\int_{A_1^{k_1}\times\cdots\times A_j^{k_j}} \rho^n(x_1,\ldots,x_n)\mathsf{m}^n(d\mathbf{x}) = \int_{\mathsf{S}} \prod_{i=1}^{j} \frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i)-k_i)!}\mu(d\mathsf{s}) \tag{2}$$

ここで、$A_i,\ldots,A_j$ は互いに素な可測集合、$k_1,\ldots,k_j$ は $n = k_1+\cdots+k_j$ とする。ρ^n は各 x_m に粒子が存在する「密度」である。ρ^n が S 上のある核関数 $\mathsf{K}(x,y)$ によって次式で表されるとき、μ は行列式点過程 (DPP) であるという。

$$\rho^n(x_1,...,x_n) = \det[\mathsf{K}(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n \tag{3}$$

行列式点過程はその相関関数の定義から多重点を持たないことに注意する。行列式点過程の存在については、十分条件が知られている。

定理 1 (白井-高橋 [4], Soshnikov[6])**.** (K,m) が (A.1) を満たすとき、S 上の行列式点過程が一意に存在する。

$$\begin{cases} K(x,y) = \overline{K(y,x)} \\ \mathsf{K}\ \text{は局所トレースクラス作用素} \\ \mathsf{Spec}(\mathsf{K}) \subset [0,1] \end{cases} \tag{A.1}$$

ここで、核関数と同記号で $L^2(S,\mathsf{m})$ 作用素 $\mathsf{K}f(x) = \int_S \mathsf{K}(x,y)f(y)\mathsf{m}(dy)$ を表すことにする。K が局所トレースクラス作用素であるとは、コンパクト集合 A に対して $\mathsf{K}_A f(x) := \int_S 1_A(x)\mathsf{K}(x,y)1_A(y)f(x)\mathsf{m}(dy)$ がトレースクラス作用素になることである。

以下では (A.1) を仮定し、対応する行列式点過程 μ を (K,m)-DPP とよぶ。

3. Main result

以下で分割 $\Delta=\{A_i;i\in I\}$ といえば、S の可算分割で各 A_i は相対コンパクトかつ $\mathsf{m}(A_i)>0$ であるものとする。

定理 2 ([3])**.** 分割の列 $\{\Delta(l);l\in\mathbb{N}\}$ で (A.2) を満たすものが存在するとき、μ は tail 自明である。

$$\begin{cases}\Delta(l)\prec\Delta(l+1)\\ \bigcap_{l\in\mathbb{N}}\sigma[A_i;i\in I(l)]\end{cases}\tag{A.2}$$

ここで、$\Delta(l)=\{A_i;i\in I(l)\}$ $(l\in\mathbb{N})$ とし、$\Delta(l)\prec\Delta(l+1)\Leftrightarrow^{\forall}i\in I(l+1),^{\exists}j\in I(l)$ s.t. $A_j\supsetneq A_i$ である。すなわち、各 $A_j\in\Delta(l)$ は $\Delta(l+1)$ で 2 つ以上に分割される。

$S=\mathbb{R}^d$、m =Lebesgue 測度であるときは、自明に (A.2) を満たす。

ここに上の定理の証明の概略を述べる。分割 $\Delta=\{A_i;i\in I\}$ に対して、$\mathcal{B}(\mathsf{S})$ の部分 σ-field を $\mathcal{G}_\Delta:=\sigma[\{\mathsf{s}\in\mathsf{S}:\mathsf{s}(A_i)=n\};n\in\mathbb{N},i\in I]$ とする。$\mathcal{G}_\Delta$ による条件付確率 $\mu(\cdot|\mathcal{G}_\Delta)$ は、$A_i\leftrightarrow i$ の対応で I 上の点過程とみなせる（図 **1**）。(A.2) を満たす分割の列 $\{\Delta(l);l\in\mathbb{N}\}$ に対して、$\mu_l(\mathsf{s}):=\mu(\cdot|\mathcal{G}_{\Delta(l)})(\mathsf{s})$ はマルチンゲールになる。従って、μ_l の tail 自明性を示せば、マルチンゲール収束定理により元の行列式点過程の tail 自明性が従う。なお、離散空間上の行列式点過程は tail 自明であることが知られている。

定理 3 (白井-高橋 [5], Ruessel Lyons[1, 2])**.** S : 離散集合、m : 数え上げ測度のとき、μ は tail 自明である。

しかし、μ_l は多重点をもちうるので一般には行列式点過程にならない (図 **1**)。我々は、分割の成分を底空間とする離散「ファイバー束」上の行列式点過程を構成することで μ_l の tail 自明性を示した。

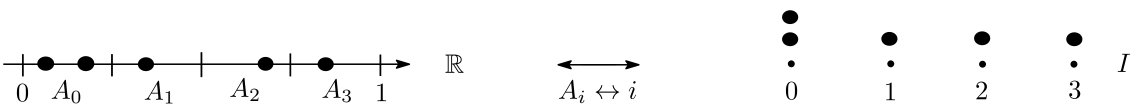


図 **1**:$\Delta=\{A_i;i=0,1,2,3\}$ とする。左図は $S=[0,1)$ 上の配置で、右図は $I=\{0,1,2,3\}$ 上の配置。

4. Fourier expansion of determinantal point processes

行列式点過程の離散化について説明する。簡単のために、$S=\mathbb{R}$、m =Lebesgue 測度とする。

まず (A.2) をみたす分割の列 $\{\Delta(l);l\in\mathbb{N}\}$ を構成する。$I(l)=\mathbb{Z}\times\{0,1\}^{l-1}$、$A_i=[\sum_{k=1}^{l}i_k\times 2^{-(k-1)},\sum_{k=1}^{l}i_k\times 2^{-(k-1)}+2^{-(l-1)})$ として分割 $\Delta(l)=\{A_i;i\in I(l)\}$ を定める。これは、長さ $2^{-(l-1)}$ の $\mathbb{R}$ の等分割であり (A.2) を満たす（図 **2**）。

次に、分割の成分をサポートに持つような $L^2(S,\mathsf{m})$ の正規直交基底を構成する。以下では $l\in\mathbb{N}$ を固定する。$\Delta_l:=\{\Delta(k);k\geq l\}$ に対し、$\mathbb{I}_l:=I(l)+\sum_{k=l+1}^{\infty}\{i\in I(k);i_k=0\}$ とする（図 **2**）。ここで、$n>m$ に対し $\mathbb{I}_n\cap\mathbb{I}_m\neq\mathbb{I}_m$ に注意する。$i\in\mathbb{I}_l$ に対し、S 上の関数 $f_{l,i}$ を次のように定める。

$$f_{l,i}:=\begin{cases}\mathsf{m}(A_i)^{-1}1_{A_i}(x) & \text{for}\quad i\in I_{(l)}\\ \mathsf{m}(A_i)^{-1}1_{A_i}(x)-\mathsf{m}(A_{T(i)})^{-1}1_{A_{T(i)}}(x) & \text{for}\quad i\in\mathbb{I}_l\backslash I_{(l)}\quad\text{(Haar 関数)}\end{cases}\tag{4}$$

ただし、$T:i=(i_1,\ldots,i_{k-1},\mathbf{0})\mapsto(i_1,\ldots,i_{k-1},\mathbf{1})$ $(i\in I(k),k\in\mathbb{N})$ とする。$1_{A_i}(x)$ $(i\in\sum_{l\in\mathbb{N}}I(l))$ は $\mathbb{F}_l$ の線形結合で書けるので、$\mathbb{F}_l$ は $L^2(S,\mathsf{m})$ の正規直交基底となる。特に、Haar 関数 $f_{l,i}$ $(i\in\mathbb{I}_l\backslash I_l)$ は l によらない。

K の $\mathbb{F}_l$ に関するフーリエ係数を、次のように定義する。

$$\mathbb{K}_l(i,j):=\int_{S\times S}\mathsf{K}(x,y)\overline{f_{l,i}(x)}f_{l,j}(y)\mathsf{m}(dx)\mathsf{m}(dy)\tag{5}$$

この $\mathbb{K}_l$ は、$\mathbb{I}_l$ 上の核関数とみなせる。

定理 4 ([3])**.** $F(x) = \sum_{i\in\mathbb{I}_l} \xi(i) f_{l,i}(x)$、$G(y) = \sum_{j\in\mathbb{I}_l} \eta(j) f_{l,j}(y)$ に対し、次の等式が成り立つ。

$$\sum_{i,j\in\mathbb{I}_l} \mathbb{K}_l(i,j)\overline{\xi(i)}\eta(j) = \int_{S\times S} \mathsf{K}(x,y)\overline{F(x)}G(y)\mathsf{m}(dx)\mathsf{m}(dy) \tag{6}$$

ここで、ξ と η はサポートが有界な $\mathbb{I}_l$ 上の関数する。

$\mathbb{I}_l$ 上の数え上げ測度を $\lambda_{\mathbb{I}_l}$、核関数を含む積分で内積を定義した関数空間をそれぞれ $L^2_{\mathsf{K}}(S\times S, \mathsf{m}\times\mathsf{m})$、$L^2_{\mathbb{K}_l}(\mathbb{I}_l\times\mathbb{I}_l, \lambda_{\mathbb{I}_l}\times\lambda_{\mathbb{I}_l})$ とすると、上の式はこれらの間のパーセバルの等式のようにみえる。特に $F=G$ とすると $F\leftrightarrow\xi$ の等長変換とみなせる。

F と ξ はそれぞれ $L^2(S\times S, \mathsf{m}\times\mathsf{m})$ と $L^2(\mathbb{I}_l\times\mathbb{I}_l, \lambda_{\mathbb{I}_l}\times\lambda_{\mathbb{I}_l})$ で稠密なので、次が成り立つ。

定理 5 ([3])**.** $\mathbb{K}_l$ を $L^2(\mathbb{I}_l, \lambda_{\mathbb{I}_l})$ 作用素とみなす。この時、次が成立する。

$$\mathsf{Spec}(\mathbb{K}_l) \subset [0,1]. \tag{7}$$

従って $\mathbb{K}_l$ は (A.1) を満たしている。定理 1 より、$\mathbb{I}_l$ 上の行列式点過程 $\mu_{\mathbb{F}_l}$: $(\mathbb{K}_l, \lambda_{\mathbb{I}_l})$-DPP が一意に存在する。$\mathbb{I}_l$ は離散空間なので、定理 3 より $\mu_{\mathbb{F}_l}$ は tail 自明である。

定理 4 より、次のフーリエ展開の等式が導かれる。

定理 6 ([3])**.**

$$\mathsf{K}(x,y) = \sum_{i,j\in\mathbb{I}_l} \mathbb{K}_l(i,j) f_{l,i}(x)\overline{f_{l,j}}(y) \tag{8}$$

$\rho^n_{\mathbb{F}_l}$ と ρ^n_l をそれぞれ $\mu_{\mathbb{F}_l}$ と μ_l の n 点相関関数とする。定理 4、定理 6 と $\mathbb{F}_l$ の直交性により、次の等式が成り立つ。

定理 7 ([3])**.** $\mathbb{A} = A_1\times\cdots\times A_n$ $(A_1,\ldots,A_n\in\Delta(l))$ とし、$\mathbb{I}_l(\mathbb{A}) = \mathbb{I}_l(A_1)\times\cdots\times\mathbb{I}_l(A_n)$ 、$\mathbb{I}_l(A) := \{i\in\mathbb{I}_l; \mathsf{supp}(f_{l,i})\subset A\}$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{I}_l(\mathbb{A})} \rho^n_{\mathbb{F}_l}(i_1,\ldots,i_n) = \int_{\mathbb{A}} \rho^n_l(x_1,\ldots,x_n)\mathsf{m}^n(d\mathbf{x}) \tag{9}$$

定理 7 より、$\mu_{\mathbb{F}_l}$ の tail 自明性から μ_l の tail 自明性を導くことができる。従って、マルチンゲール収束定理により μ の tail 自明性が示される。

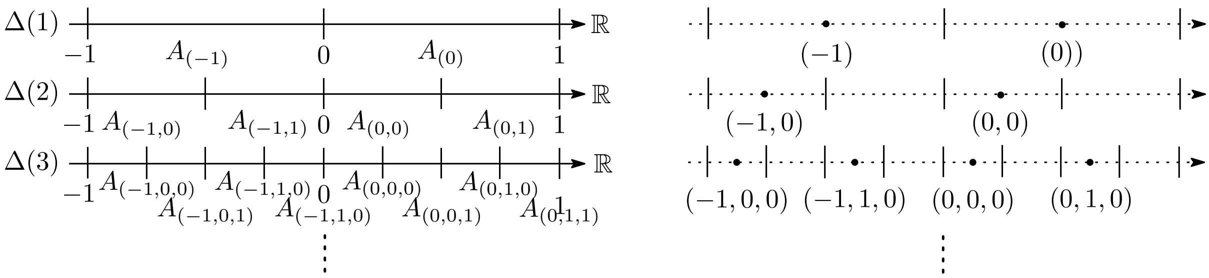


図 **2**:左図は $\Delta_1 = \{\Delta(l); l\geq 1\}$。右図は $\mathbb{I}_1$。

参考文献

[1] Lyons, R. : *Determinantal probability measures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **98** (2003), 167-212.

[2] Lyons, R. : *Determinantal probability: basic properties and conjectures*, arXiv in math 1406.2707v1 (2014).

[3] Osada, H., Osada, S., *Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and tail triviality,*, arXive:1603.07478-v3.

[4] Shirai, T., Takahashi, Y., *Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point process*, J. Funct. Anal. **205**, 414-463 (2003).

[5] Shirai T., and Takahashi Y. : *Random point fields associated with certain Fredholm determinants II: fermion shifts and their ergodic properties,*, Ann. Prob. **31** (2003), 1533–1564.

[6] Soshnikov, A., *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys **55**, 923-975 (2000).

Benjamini-Schramm convergence and limiting eigenvalue density of random matrices

Sergio Andraus (Physics department, Chuo University)

Introduction

We review the application of the notion of local convergence on infinite rooted graphs, known as Benjamini-Schramm convergence, to the calculation of the global eigenvalue density of random matrices from the β-Gaussian ensemble. By regarding a random matrix as the weighted adjacency matrix of a graph, and choosing the root of such a graph with uniform probability, one can use the Benjamini-Schramm convergence to produce the probability distribution of the infinite graph which results when the size of the matrix tends to infinity. We illustrate how the Wigner semicircle law is obtained from the distribution of the limiting graph.

The Benjamini-Schramm convergence

Following [1], we consider the set of connected graphs $G = (V, E)$, and we define rooted graphs as ordered pairs (G, o) where the vertex $o \in V$ is the root. We define the space of isomorphism classes of rooted, connected, and locally finite graphs (that is, graphs with a finite number of edges connected to any vertex) by $\mathcal{X}$. Consider the locally finite rooted graphs (G, o) and (G', o'). Then, we can define the metric

$$d[(G,o),(G',o')] := 2^{-k},$$

where

$$k[(G,o),(G',o')] := \sup\{r \in \mathbb{N}_0 : B_r(G,o) \simeq B_r(G',o')\}$$

and $B_r(G, o)$ is the subgraph of radius r around o of G, with the same root, o. In addition, if we define by $\mathcal{X}_M \subset \mathcal{X}$ the class of graphs of maximum degree M, we see that it is compact under the metric $d[(G, o), (G', o')]$.

Now, suppose that the unrooted finite graph H is given a root with uniform probability among its vertices. With this, one has a probability distribution $\mu_H(\mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is a Borel subset of $\mathcal{X}$, which gives the probability that (H, o) is an element of $\mathcal{A}$. With these definitions in place we state the following.

Definition 1 (Benjamini-Schramm convergence)**.** Consider the sequence of rooted graphs $\{(G_j, o_j)\}_{j=0}^{\infty}$, with roots chosen randomly with uniform probability. The rooted graph (G, o) is the **distributional limit** of the sequence if for every $r > 0$ and every finite rooted graph (H, o'),

$$\mathbb{P}[(H, o') \simeq (B_r(G_j, o_j), o_j)] \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}[(H, o') \simeq (B_r(G, o), o)].$$

In other words, the probability law of (G_j, o_j) tends weakly to the law of (G, o) as $j \to \infty$.

Random rooted weighted graphs

A sparse symmetric matrix can be viewed as the adjacency matrix of a finite graph. In particular, consider random matrices from the β-Gaussian ensemble [2]. These matrices are tridiagonal, so they represent a graph in which each vertex is connected to two neighbors through edges with random weight $b_{j,j+1} \sim \chi_{\beta(j-1)}$, and to itself through an edge with weight $a_i \sim N(0, 2)$. The Benjamini-Schramm convergence can be extended directly to weighted graphs, and following [3], one can show that the adjacency operator A is bounded on the space $\mathscr{L}^2(G)$ of square summable functions on the vertex set V of $G = (V, E)$; the action of the adjacency operator on a function $f \in \mathscr{L}^2(G)$ is given by

$$[Af](x) = \sum_{(x,y)\in E} l((x, y))f(y),$$

where $l((x, y))$ denotes the weight of the edge connecting the vertices x and y. The importance of the adjacency operator stems from its close relationship with the expected spectral measure of G, which is given by

$$\mu_{G,o}(X) = \langle P_X \chi_o, \chi_o\rangle,$$

where X is a Borel set of $\mathbb{R}$, the inner product of $f, g \in \mathscr{L}^2(G)$ is given by

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in V} \bar{f}(x)g(x),$$

P_X is the orthogonal projection to the linear envelope of the eigenfunctions of A which have eigenvalue $\lambda \in X$, and $\chi_o(x)$ is equal to 1 if $x = o \in E$ and zero otherwise. The relationship between the spectral measure and the adjacency operator is given by the following.

Proposition 2. *Denote by $\{e_i\}_i$ the set of eigenfunctions on $V(G)$ of the adjacency operator A, with eigenvalues $\{\lambda_i\}_i$. Then,*

$$\mu_{G,o}(X) = \sum_i \mathbf{1}_{\{\lambda_i \in X\}} e_i^2(o).$$

That is, the spectral measure of (G, o) is given by the eigenfunctions of A evaluated at the root.

Expected spectral measure and eigenvalue density of large random matrices

From the previous considerations, one can calculate the eigenvalue density from the spectral density by computing the expected spectral density w.r.t. the distribution of the roots. It can be shown that for the distributional limit (G, o) of the sequence $\{(G_j, o_j)\}_j$, the spectral density of the adjacent operator A of the limiting graph is given by

$$\mu_G(X) = \mathbb{E}[\mu_{G,o}(X)],$$

where the expectation is taken over the root distribution on $V(G)$. In this talk, we will review this machinery in detail, and we will illustrate how it can be applied to show that, for example, the limiting spectral density that corresponds to the β-Gaussian ensemble with $\beta = 1$ is given by

$$\mu_u(dx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{\{2\sqrt{u}\cos(\omega)\in[x,x+dx)\}} d\omega,$$

where u is a uniformly-distributed random variable in the interval $(0, 1)$, and its expected spectral density (or eigenvalue density) is given by the well-known Wigner semicircle law,

$$\mu(dx) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\; dx.$$

Bibliography

[1] Benjamini, I, Schramm, O., Recurrence of distributional limits of finite planar graphs, *Elec. J. Prob.* **6** (2001) 23, 1-13.

[2] Dumitriu, I., Edelman A., Matrix models for beta-ensembles, *J. Math. Phys.*, **43** (2002) 11, 5830-5847.

[3] Abért, M., Thom, A., Virág, B., Benjamini-Schramm convergence and pointwise convergence of the spectral measure, preprint: http://www.renyi.hu/∼abert/luckapprox.pdf.

屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題

野場 啓 (京都大学), 矢野 孝次 (京都大学)

1 序

実数値確率過程 $Z = \{Z_t : t \geq 0\}$ がある区間から脱出する時刻の分布を特徴づける問題を Z に対する脱出問題という．ここでは, 二つの実数 $a > b$ と非負実数 $q \geq 0$, Z の通過時刻 $\tau_a^+ = \inf\{t > 0 : Z_t > a\}$, $\tau_b^- = \inf\{t > 0 : Z_t < b\}$ に対し, 期待値 $\mathbb{E}_0^Z\left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^-\right)$ を求める問題を考える.

X を spectrally negative な Lévy 過程としたとき, X に対する脱出問題はスケール関数を用いて表すことができる．スケール関数は, X の Laplace 指数を用いて Laplace 変換により定義される．また, 脱出問題の応用として, 吸収壁ポテンシャル測度をスケール関数を用いて表すことができる.

Kyprianou and Loeffen [2] は, 屈折 Lévy 過程 U に対する脱出問題や吸収壁ポテンシャル測度について論じた．彼らの屈折 Lévy 過程 U は, 値 0 を超えない間は spectrally negative な Lévy 過程 X に従って動き, 0 を超えている間は X に対して下向きにドリフト α がかかった動きをする．詳しく言うと, 屈折 Lévy 過程 $U = \{U_t : t \geq 0\}$ は, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s>0\}} ds, \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

の解として定義される.

本講演では [3] に基づき, Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程を一般化した確率過程として, X, Y を異なる spectrally negative な Lévy 過程とし, 正の値をとるときは X の挙動を, 負の値をとるときは Y の挙動をする確率過程 U を定義する．そして, その確率過程における脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度について論じる．定義について詳しく述べると, 確率過程 U を, X が有界変動な標本路を持つときは X と Y を独立として, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = \int_{(0,t]} 1_{\{U_{s-}\geq 0\}} dX_s + \int_{(0,t]} 1_{\{U_{s-}<0\}} dY_s, \tag{1.2}$$

の解として定義する．X が非有界変動な標本路をもち Gaussian part を持たないときは停

止過程の法則 $\mathbb{P}_x^{U^0}$ と周遊測度 n^U を任意の正可測汎関数 F に対し

$$\mathbb{P}_x^{U^0}\Big(F\Big((U_t)_{t<\tau_0^-},(U_{t+\tau_0^-})_{t\geq 0}\Big)\Big)=\mathbb{P}_x^X\left(\mathbb{E}_y^{Y^0}\big(F\big(w,(Y_t^0)_{t\geq 0}\big)\big)\Big|_{\substack{y=X(\tau_0^-)\\ w=(X(t))_{t<\tau_0^-}}}\right)\quad x\neq 0 \tag{1.3}$$

$$n^U\Big(F\Big((U_t)_{t<\tau_0^-},(U_{t+\tau_0^-})_{t\geq 0}\Big)\Big)=n^X\left(\mathbb{E}_y^{Y^0}\big(F\big(w,(Y_t^0)_{t\geq 0}\big)\big)\Big|_{\substack{y=X(\tau_0^-)\\ w=(X(t))_{t<\tau_0^-}}}\right) \tag{1.4}$$

を満たすものとして定義し, 確率過程 U を周遊理論を用いて構成する. ただし, Y^0 は Y の 0 での停止過程を, n^X は X の 0 での周遊測度を表す. さらに本講演では, (1.2) で定義した確率過程の列による, (1.3) と (1.4) で定義した確率過程への分布の意味での近似についても述べる.

2 Spectrally negative な Lévy 過程の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度

主結果を述べるのに必要な記号と Spectrally negative な Lévy 過程に関して知られた事実を述べる. 主結果は講演において述べる. $X=\{X_t:t\geq 0\}$ を spectrally negative な Lévy 過程で, $-X$ が subordinator ではないものとする. X の Laplace 指数を

$$\psi_X(\lambda):=\log\mathbb{E}_0^X(e^{\lambda X_1}),\qquad \lambda\geq 0 \tag{2.1}$$

で定義する. 任意の非負実数 $q\geq 0$ に対し, q-スケール関数 $W_X^{(q)}:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ を, $(-\infty,0)$ 上では $W_X^{(q)}=0$ であり, $[0,\infty)$ 上では連続で, Laplace 変換が

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}W_X^{(q)}(x)dx=\frac{1}{\psi_X(\beta)-q},\qquad \beta>\Phi(q) \tag{2.2}$$

を満たす関数として定義する.

定理 2.1 (X に対する脱出問題)**.** $b\leq x\leq a$ と $q\geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^X\left(e^{-q\tau_a^+}:\tau_a^+<\tau_b^-\right)=\frac{W_X^{(q)}(x-b)}{W_X^{(q)}(a-b)} \tag{2.3}$$

が成り立つ.

定理 2.2 (吸収壁ポテンシャル測度)**.** $b\leq x\leq a$ と $q\geq 0$ および正可測関数 f に対し,

$$\mathbb{E}_x^X\left(\int_0^{\tau_a^+\wedge\tau_b^-}e^{-qt}f(X_t)dt\right)=\int_b^a\left(\frac{W_X^{(q)}(x-b)}{W_X^{(q)}(a-b)}W_X^{(q)}(a-y)-W_X^{(q)}(x-y)\right)f(y)dy \tag{2.4}$$

が成り立つ.

3 Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度

[2] の先行研究について述べる. $\alpha > 0$ を固定する. X を前節の通りとする. X が有界変動な場合は, α は X のドリフト係数よりも小さいものと仮定する. この時, 以下の定理が成り立つ.

定理 3.1. $X_0 = x \in \mathbb{R}\ \ a.s.$ とする. このとき, (1.1) はただ一つの強解を持つ.

次に, 確率過程 $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ を, $Y_t = X_t - \alpha t$ で定義し, その q-スケール関数を $W_Y^{(q)}$ とおく. また, 任意の実数 $x, y \in \mathbb{R}$ と非負実数 $q \geq 0$ に対し,

$$W_U^{(q)}(x,y) = \begin{cases} W_X^{(q)}(x-y) + \alpha 1_{(x \geq 0)} \int_0^x W_Y^{(q)}(x-z) W_X^{(q)\prime}(z-y)dz & y \leq 0 \\ W_Y^{(q)}(x-y) & y > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

とする.

定理 3.2 (U に対する脱出問題)**.** $b \leq x \leq a$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^U\left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^-\right) = \frac{W_U^{(q)}(x,b)}{W_U^{(q)}(a,b)} \tag{3.2}$$

が成り立つ.

定理 3.3 (吸収壁ポテンシャル測度)**.** $b \leq x \leq a$ と $q \geq 0$ および正可測関数 f に対し,

$$\mathbb{E}_x^U\left(\int_0^{\tau_a^+ \wedge \tau_b^-} e^{-qt} f(U_t)dt\right) = \int_b^a \left(\frac{W_U^{(q)}(x,b)}{W_U^{(q)}(a,b)} W_U^{(q)}(a,y) - W_U^{(q)}(x,y)\right) f(y)dy \tag{3.3}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] A. E. Kyprianou. Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Introductory lectures. Second edition. Universitext. Springer, Heidelberg, 2014. xviii+455 pp.

[2] A. E. Kyprianou and R. L. Loeffen. Refracted Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 46 (2010), no. 1, 24–44.

[3] K. Noba and K. Yano Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. arXiv:1608.05359, August 2016.

レヴィ過程に対する田中の公式

塚田大史（大阪市立大学大学院理学研究科）

1　はじめに

1 次元 Brown 運動 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ に対する田中の公式とは，

$$|B_t-x|-|B_0-x|=\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s-x)dB_s+L_t^x,$$

である．ここで，L_t^x は点 x における B の局所時間である．この式は局所時間に対する Doob–Meyer 分解を与えており，また Skorohod 問題の解として反射壁過程を表している．さらに応用として，凸関数に関する伊藤の公式（伊藤–田中の公式）の構成や Ray–Knight 定理の理解に役立っている．

飛躍過程の場合，局所時間に対する Doob–Meyer 分解と Skorohod 問題の解は異なる．そこで，ここでは局所時間に注目し，田中の公式を局所時間の Doob–Meyer 分解として考える．指数 $\alpha\in(1,2)$ の対称な安定過程に対しては Yamada [4]，局所時間が存在するような対称 Lévy 過程に対しては Salminen–Yor [2] によって研究されている．また，非対称な過程を含む指数 $\alpha\in(1,2)$ の（狭義）安定過程に対しては [3] において構成した．

[4] や [3] では，伊藤解析の手法を用いて以下のように構成した．$S=(S_t)_{t\geq 0}$ を指数 $\alpha\in(1,2)$ の（狭義）安定過程とする．Fourier 変換により，S の生成作用素に対する基本解 F が得られる．このとき，伊藤の公式を用いて田中の公式が構成できる：

$$F(S_t-x)-F(S_0-x)=M_t^x+L_t^x.$$

ここで，$M^x=(M_t^x)_{t\geq 0}$ は

$$M_t^x=\int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\{F(S_{s-}-x+h)-F(S_{s-}-x\}\tilde{N}(ds,dh)$$

で与えられる自乗可積分なマルチンゲールである．

本講演では，[2] によるポテンシャル論の手法に基づいて，非対称な過程を含む Lévy 過程に対して田中の公式を構成する．

2　準備

$X=(X_t)_{t\geq 0}$ を 1 次元 Lévy 過程とする．Lévy–Khintchine 表現より，X の Lévy symbol は

$$\begin{aligned}\eta(u)&=\log\mathbb{E}_0[e^{iuX_1}]\\&=ibu-\frac{1}{2}au^2+\int_{\mathbb{R}_0}\left(e^{iuy}-1-iuy1_{|y|\leq 1}\right)\nu(dy)\end{aligned}$$

で与えられる．ただし，$b \in \mathbb{R}, a \geq 0$ であり，ν は $\mathbb{R}_0 (:= \mathbb{R} \setminus \{0\})$ 上の Lévy 測度である．

有界可測関数 f に対し，X のレゾルベントを

$$R_q f(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} f(X_t) dt \right], \quad q > 0, x \in \mathbb{R}$$

とする．またレゾルベント密度が存在するとき，

$$R_q f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) r_q(y - x) dy, \quad q > 0, x \in \mathbb{R}$$

とする．X が初めて原点に到達する時刻を

$$T_0 := \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$$

とする．

ここで次の 2 条件を導入しておく：

(A1) X の Lévy symbol η が次の条件を満たす：

$$\int_{\mathbb{R}} \Re \left(\frac{1}{q - \eta(u)} \right) du < \infty, \quad q > 0.$$

(A2) X について 0 は正則である．すなわち，$\mathbb{P}_0(T_0 = 0) = 1$ が成り立つ．

条件 **(A1)** は有界なレゾルベント密度の存在に関する必要十分条件であり ([1, Theorem II.16])，また条件 **(A1)** の下，条件 **(A2)** はレゾルベント密度の x に関する連続性の必要十分条件である ([1, Theorem II.19])．

さらに，条件 **(A1)**, **(A2)** より強い次の条件を導入する：

(A) X の Lévy symbol η が次の条件を満たす：

$$\frac{1}{q - \eta(u)} \in L^1(\mathbb{R}), \quad q > 0.$$

このとき，レゾルベント密度を以下のように書き表せる．

補題 2.1. 条件 ***(A)*** の下，

$$r_q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{-iux}}{q - \eta(u)} \right) du, \quad q > 0, x \in \mathbb{R}.$$

が成り立つ．

3 Renormalized zero resolvent

まず，

$$h_q(x) := r_q(0) - r_q(-x), \quad q > 0, x \in \mathbb{R}$$

と定義する．このとき，任意の $q > 0$ に対し，$h_q \geq 0$ である．もし極限 $h := \lim_{q \downarrow 0} h_q$ が存在するとき，h は renormalized zero resolvent と呼ばれ，Yano [5] により研究されている．ここでは [5] の条件をさらに弱めた 2 条件 **(A)**, **(B)** の下，収束が得られた．

(B) X の Lévy symbol η が次の条件を満たす：

$$\int_0^1 \left| \Im \left(\frac{u}{\eta(u)} \right) \right| du < \infty.$$

定理 3.1. 条件 ***(A)***, ***(B)*** の下，

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{iux} - 1}{\eta(u)} \right) du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

が成り立つ．

4 田中の公式

条件 **(A1)**, **(A2)** の下，レゾルベント密度と局所時間との関係が知られている ([1, Lemma V.3])：

$$\mathbb{E}_y \left[\int_0^\infty e^{-qt} dL_t^x \right] = r_q(x - y), \quad q > 0,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

このとき，次の Doob–Meyer 分解が得られる．

命題 4.1. 条件 ***(A1)***, ***(A2)*** の下，任意の $q > 0$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$r_q(-X_t + x) = r_q(-X_0 + x) + M_t^{q,x} + q \int_0^t r_q(-X_s + x) ds - L_t^x,$$

が成り立つ．ただし，$M_t^{q,x}$ はマルチンゲールである．

上の命題において，$q \downarrow 0$ として田中の公式を得る．

定理 4.2. X が条件 ***(A)***, ***(B)*** を満たすとする．このとき， 任意の $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$h(X_t - x) - h(X_0 - x) = M_t^x + L_t^x,$$

が成り立つ．ただし，$M_t^x := -\lim_{q \downarrow 0} M_t^{q,x}$ はマルチンゲールである．

参考文献

[1] J. Bertoin, *Lévy processes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996)

[2] P. Salminen, M. Yor, Tanaka formula for symmetric Lévy processes, in *Séminaire de Probabilités XL.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1899 (Springer, Berlin, 2007), pp. 265–285

[3] H. Tsukada, Tanaka formula for stable processes. submitted.

[4] K. Yamada, Fractional derivatives of local times of α-stable Levy processes as the limits of occupation time problems, in *Limit theorems in probability and statistics II.* (János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002), pp. 553–573

[5] K. Yano, On harmonic function for the killed process upon hitting zero of asymmetric Lévy processes. J. Math-for-Ind. **5**(A), 17–24 (2013)

On density function concerning maxima of some one-dimensional diffusion processes

Tomonori Nakatsu (Ritsumeikan University)

1 Introduction

This talk is based on [3] and [4].

In this talk, we shall deal with the following one-dimensional stochastic differential equation (SDE),

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{1}$$

where $b, \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are measurable functions and $\{W_t, t \in [0, \infty)\}$ denotes a one-dimensional standard Brownian motion defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. We will consider discrete time maximum and continuous time maximum which are defined by $M_T^n := \max\{X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}\}$ and $M_T := \max_{0 \le t \le T} X_t$, respectively, where the time interval $[0, T]$ and the time partition $\Delta_n : 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, $n \ge 2$ are fixed.

The first part of the talk is devoted to prove an integration by parts (IBP) formula of M_T^n and M_T. Here, we say that the IBP formula for the random variables F and G holds if there exists an integrable random variable $H(F; G)$ such that

$$E[\varphi'(F)G] = E[\varphi(F)H(F; G)]$$

holds for any $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Moreover, we will obtain expressions, and upper bounds of the density function of M_T^n and M_T by means of the IBP formula.

In the second part of the talk, we shall obtain some asymptotic behaviors of the density function of M_T^n. In this part, we will deal with only Gaussian processes: Itô processes with deterministic integrands, the Brownian Bridge and the Ornstein-Uhlenbeck process.

2 Main results

Assumption (A)

(A1) For $t \in [0, \infty)$, $b(t, \cdot), \sigma(t, \cdot) \in C_b^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Furthermore, all constants which bound the derivatives of $b(t, \cdot)$ and $\sigma(t, \cdot)$ do not depend on t.

(A2) There exists $c > 0$ such that

$$|\sigma(t, x)| \ge c$$

holds, for any $x \in \mathbb{R}$ and $t \in [0, \infty)$.

Theorem 1. *([3]) Assume (A). Let $G \in \mathbb{D}^{1,\infty}$. Then there exists a random variable $H_T^n(G)$ such that $H_T^n(G)$ belongs to $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ for any $p \ge 1$, and*

$$E^P[\varphi'(M_T^n)G] = E^P[\varphi(M_T^n)H_T^n(G)] \tag{2}$$

holds for any $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Assumption (A)'

We assume that the diffusion coefficient of (1) is of the form $\sigma(t, x) = \sigma_1(t)\sigma_2(x)$ and the following assumption.

(A1)' For $t \in [0, \infty)$, $b(t, \cdot) \in C_b^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Furthermore, all constants which bound the derivatives of $b(t, \cdot)$ do not depend on t.

(A2)' $\sigma_1(\cdot) \in C_b^0([0, \infty); \mathbb{R})$ and there exists $c_1 > 0$ such that $|\sigma_1(t)| \geq c_1$ for any $t \in [0, \infty)$.

(A3)' $\sigma_2(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ and there exists $c_2 > 0$ such that $|\sigma_2(x)| \geq c_2$ for any $x \in \mathbb{R}$.

Let Ψ satisfy the following ordinary differential equation (ODE),

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{dx}(x) = \sigma_2(\Psi(x)) \\ \Psi(0) = x_0. \end{cases}$$

Then due to (A3)', $\Psi^{-1}(x)$ exists for any $x \in \mathbb{R}$. We define the probability measure $\tilde{P}$ by

$$\left.\frac{d\tilde{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_T} := e^{\int_0^T \frac{\frac{1}{2}\Psi''(\Psi^{-1}(X_s))\sigma_1^2(s) - b(s, X_s)}{\sigma(s, X_s)} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left[\frac{\frac{1}{2}\Psi''(\Psi^{-1}(X_s))\sigma_1^2(s) - b(s, X_s)}{\sigma(s, X_s)}\right]^2 ds} \equiv \tilde{K}_T,$$

and

$$\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t \frac{\frac{1}{2}\Psi''(\Psi^{-1}(X_s))\sigma_1^2(s) - b(s, X_s)}{\sigma(s, X_s)} ds, t \in [0, T],$$

then $\{\tilde{W}_t, t \in [0, T]\}$ is a one-dimensional under $\tilde{P}$. Moreover, it is easy to see that the solution to (1) is expressed as

$$X_t = \Psi\left(\int_0^t \sigma_1(s) d\tilde{W}_s\right), t \in [0, T].$$

Theorem 2. *([3]) Assume (A)'. Let $G \in \tilde{\mathbb{D}}^{1,\infty}$ and $a_0 > x_0$ be fixed arbitrarily. Then there exists a random variable $H_T(G, a_0)$ such that $H_T(G, a_0)$ belongs to $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ for any $p \geq 1$, and*

$$E^P[\varphi'(M_T)G] = E^P[\varphi(M_T)H_T(G, a_0)] \tag{3}$$

holds for any $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ whose support is included in (a_0, ∞).

In the talk, formulas (2) and (3) will be used to obtain the expressions and the upper bounds of the density function of M_T^n and M_T.

Then, we shall obtain the results on asymptotic behaviors of the density functions which are proved in [4].

References

[1] Gobet, E., Kohatsu-Higa, A.: Computation of greeks for barrier and look-back options using Malliavin calculus. Electron. Commun. Probab. **8**, 51-62 (2003).

[2] Hayashi, M., Kohatsu-Higa, A.: Smoothness of the distribution of the supremum of a multi-dimensional diffusion process. Potential Anal. **38** (1), 57-77 (2013).

[3] Nakatsu, T..: Integration by parts formulas concerning maxima of some SDEs with applications to study on density functions. Stoch. Anal. Appl. **34**(2), 293-317 (2016)

[4] Nakatsu, T.: On density functions related to discrete time maximum of some one-dimensional diffusion processes. Preprint (submitted)

[5] Nualart, D.: The Malliavin Calculus and Related Topics, 2nd edn. Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin (2006).

[6] Shigekawa, I.: Stochastic analysis. Translations of Mathematical Monographs, vol. 224. American Mathematical Society (2004).

Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus

Yuzuru Inahama *

This is a jointwork with Setsuo Taniguchi (Kyushu University) and can be found at arXiv Preprint Server (arXiv:1603.01386).

We discuss a short time asymptotic expansion of a hypoelliptic heat kernel on a Euclidean space and on a compact manifold. We study the "cut locus" case, namely, the case where energy-minimizing paths which join the two points under consideration form not a finite set, but a compact manifold. Under mild assumptions we obtain an asymptotic expansion of the heat kernel up to any order. Our approach is probabilistic and the heat kernel is regarded as the density of the law of a hypoelliptic diffusion process, which is realized as a unique solution of the corresponding stochastic differential equation (SDE). Our main tools are S. Watanabe's distributional Malliavin calculus and T. Lyons' rough path theory.

Our work has the following three features. To our knowledge, there are no works which satisfy all of these conditions simultaneously:

1. The manifold and the hypoelliptic diffusion process on it are rather general. In other words, this is not a study of special examples.

2. The "cut locus" case is studied. More precisely, we mean by this that the set of energy-minimizing paths (or controls) which connect the two points under consideration becomes a compact manifold of finite dimension.

3. The asymptotic expansion is full, that is, the polynomial part of the asymptotics is up to any order.

On a Euclidean space, however, there are two famous results which satisfy (2), (3) and the latter half of (1). Both of them are probabilistic and use generalized versions of Malliavin calculus. One is Takanobu and Watanabe [3]. They use Watanabe's distributional Malliavin calculus. The other is Kusuoka and Stroock [2]. They use their version of generalized Malliavin calculus. We use the former.

Though we basically follow Takanobu-Watanabe's argument in [3], the main difference is that we use T. Lyons' rough path theory together, which is something like a deterministic version of the SDE theory. The main advantage of using rough path theory is that while the usual Itô map i.e., the solution map of an SDE is discontinuous, the Lyons-Itô map i.e., the solution map of a rough differential equation (RDE) is continuous.

This fact enables us to do "local analysis" of the Lyons-Itô map (for instance, restricting the map on a neighborhood of its critical point and doing a Taylor-like expansion) in a somewhat similar way we do in the Fréchet calculus. Recall that in the standard SDE theory, this type of local operation is very hard and sometimes impossible, due to

*Kyushu University, Japan. Email:inahama@math.kyushu-u.ac.jp

the discontinuity of the Itô map. For this reason, the localization procedure in [3] looks so complicated that it might be difficult to generalize their method if rough path theory did not exist. Of course, there is a possibility that our main result can be proved without rough path theory, but we believe that the theory is quite suitable for this problem and gives us a very clear view (in particular, in the manifold case).

A detailed proof can be found in our preprint [1]. We first reprove and generalize the main result in [3] in the Euclidean setting by using rough path theory. Then, we study the manifold case. Recall that Malliavin calculus for a manifold-valued SDE was studied by Taniguchi [4]. Even in this Euclidean setting, many parts of the proof are technically improved, thanks to rough path theory. We believe that the following are worth mentioning: (i) Large deviation upper bound. (ii) Asymptotic partition of unity. (iii) A Taylor-like expansion of the Lyons-Itô map and the uniform exponential integrability lemma for the ordinary and the remainder terms of the expansion. (iv) Quasi-sure analysis for the solution of the SDE.

References

[1] Y. Inahama, S. Taniguchi, *Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus*, preprint, arXiv:1603.01386.

[2] S. Kusuoka, D. W. Stroock, *Precise asymptotics of certain Wiener functionals*, J. Funct. Anal. 99 (1991), no. 1, 1–74.

[3] S. Takanobu, S. Watanabe, *Asymptotic expansion formulas of the Schilder type for a class of conditional Wiener functional integrations*, Asymptotic problems in probability theory: Wiener functionals and asymptotics (Sanda/Kyoto, 1990), 194–241, Pitman Res. Notes Math. Ser., 284, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993.

[4] S. Taniguchi, *Malliavin's stochastic calculus of variations for manifold-valued Wiener functionals and its applications*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 65 (1983), no. 2, 269–290.

Support theorem for reflected diffusion processes

会田 茂樹
東北大学

確率分布のサポートの決定は基本的な問題である．$\mathbb{R}^d$ 上の拡散過程の分布のサポートは, Wong-Zakai の近似定理 (これはサポート定理の簡単な方の包含関係を示す) と確率微分方程式の解のブラウン運動の汎関数としてのある種の “連続性” を示すこと (この結果は逆の包含関係を意味する, こちらが難しいとされている) により Stroock-Varadhan (1972) により決定された．彼らは, この結果を拡散過程の生成作用素の subharmonic function に対する最大値原理が成立する集合を決定する問題に応用した．その後, 抽象的な設定でのサポート定理 (A-Kusuoka-Stroock,1993), それを確率微分方程式などの解の場合に使いやすい形に論法を修正した [6] などの研究がある．ただし rough path の概念が現れてからは確率微分方程式の解は rough path の連続な汎関数と捉えられるようになったため, driving rough path のサポートを決定すればよいことになり, 特別な工夫はある意味不要になった．Hairer の regularity structure や Gubinelli-Imkeller-Perkowski の paracontrolled distribution を用いて解析される singular SPDE に対するサポート定理の研究も始まっている．ただし, 反射壁の確率微分方程式や経路依存の確率微分方程式の解の場合はまだ, rough path の範疇での解析があまり進んでおらず, 事情は異なる．

$\mathbb{R}^d$ 内の滑らかな領域 D における (oblique reflection も含む) 反射壁確率微分方程式の解のサポートを決定する問題は, Wong-Zakai の近似定理とともに [5] で研究された．しかし, normal reflection の反射壁確率微分方程式の強い一意解の存在はゆるい条件 (A), (B) (講演で定義を述べる) の下で Saisho(1987, PTRF) により示されている．すなわち, (A), (B) という境界に対する仮定の下, $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ のとき, 反射壁確率微分方程式

$$Y_t(B) = \xi + \int_0^t \sigma\left(Y_s(B)\right) \circ dB_s + \Phi_t(B), \quad \xi \in \bar{D} \tag{1}$$

は強い一意解を持つ．ここで, B_t は n 次元ブラウン運動である．
Φ_t は $\Phi_t = \int_0^t 1_{\partial D}(Y_s)\mathbf{n}(Y_s)d\|\Phi\|_{1-var,[0,s]}$ を満たす反射項, $\mathbf{n}(x)$ は $x \in \partial D$ での内向き単位法線ベクトル, $\|\Phi\|_{p-var,[s,t]}$ は Φ の時間区間 $[s,t]$ における p 次変動ノルムを表す．

条件 (A), (B) の下での Wong-Zakai 定理は [4, 8, 3] により示された．Ren-Wu [7] はこの結果と [6] による論法を組み合わせて、(A), (B) (あといくつか条件が仮定されている) の条件の下, サポート定理を証明した．

我々は, [1] による reflected rough differential equation(=RRDE) の解の評価を用いて、決定する方法を説明する．なお, 昨年の RRDE の解の存在に関する講演では, (A), (B) に更に強い条件 (H1) を仮定していたが, この条件は不要であることがわかったことを注意しておく．また, Gubinelli による controlled path を用いたアプローチでも解の存在が示せることもわかった．

Hölder rough path の枠組みで考えるため, $1/3 < \beta < 1/2$ とし, β-Hölder 連続な空間 $\mathcal{C}^\beta := \mathcal{C}^\beta([0,T] \to \mathbb{R}^n)$ を考える．$B \in \mathcal{C}^\beta$ の 2 進折れ線近似 $B(N)_t$ をリフトして得られる smooth rough path $\mathbf{B}(N)_{s,t} = (B(N)^1_{s,t}, B(N)^2_{s,t})$ を考える．$N \to \infty$ のとき, β-Hölder rough path の位相で $\mathbf{B}(N)_{s,t}$ が収束するような B 全体 $\Omega(\subset \mathcal{C}^\beta)$ は Wiener 測度 μ で確率 1 の部分集合になる．各 $B \in \Omega$ に対して定まる 極限 $\mathbf{B}_{s,t} = (B^1_{s,t}, B^2_{s,t})$ が Brownian rough path (geometric rough path

値確率変数) である. (1) の B を Lipschitz path h で置き変えて得られる解を $Y_t(h)$ で表すことにする.

D は (A), (B) を満たすとし, $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ を仮定する. このとき, [4, 8, 3] の結果により部分列 $N(k)$ を適当に取ると $(Y_t(B(N_k)))$ が β-Hölder norm の位相で収束するような $B \in \Omega$ 全体 Ω' は $\mu(\Omega') = 1$ を満たすこと, 極限 $Y_t(B)$ $(B \in \Omega')$ は強い解になることがわかる. Lipshcitz path h に対して, $Y_t(h(N))$ は $Y_t(h)$ に一様収束するので, $h \in \Omega'$ がわかる.

Lemma 1. *上記のように定めた強い解 $Y_t(B)$ $(B \in \Omega')$ は Lipschitz path の各元 h で連続である. 正確に述べるため, $\beta' < \beta$ を取る. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $\|h - B\|_\beta + \|h^2 - B^2\|_{2\beta} \leq \delta$ ならば $\|Y(B) - Y(h)\|_{\beta'} \leq \varepsilon$, ここで $\|\cdot\|_\beta$ などは Hölder norm を表す.*

Lemma 1 は, Lipschitz path h に対する解 $Y_t(h), \Phi_t(h)$ の rough path の位相での評価式を用いて示す. 詳細は講演で説明する.

Lemma 2. *h を Lipschitz path とする. 任意の $\delta > 0$ に対して*

$$\mu\left(\left\{B \in \Omega' \mid \|h - B\|_\beta + \|h^2 - B^2\|_{2\beta} \leq \delta\right\}\right) > 0.$$

Lemma 1, Lemma 2 から以下の定理の包含関係 左辺 $\supset$ 右辺 が直ちに得られる. 逆の包含関係は Wong-Zakai 型定理からわかる.

Theorem 3. *D は (A), (B) を満たし, $\sigma \in C_b^2$ とする. P^Y を β-Hölder 連続な空間 $\mathcal{C}^\beta$ 上の (1) の解 Y の確率分布とする. このとき,*

$$\mathrm{Supp}\,(P^Y) = \overline{\{Y(h) \mid h \text{ は } \textit{Lipschitz path.}\}}^{\|\ \|_\beta}.$$

References

[1] S. Aida, Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms, Preprint, 2016.

[2] S. Aida, Reflected rough differential equations, Stochastic Process. Appl. 125 (2015), no.9, 3570–3595.

[3] S. Aida, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces II, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Volume 100, 2014, 1–23.

[4] S. Aida and K. Sasaki, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces, Stochastic Process. Appl. Vol. 123 (2013), no.10, 3800-3827.

[5] H. Doss and P. Priouret, Support d'un processus de réflexion, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 61 (1982), no. 3, 327–345.

[6] A. Millet and M. Sanz-Solé, A simple proof of the support theorem for diffusion processes, In *Séminaire de Probabilités, XXVIII*, Lecture Notes in Math. **1583**, 36–48, Springer, Berlin.

[7] J. Ren and J. Wu, On approximate continuity and the support of reflected stochastic differential equations. Ann. Probab. 44 (2016), no. 3, 2064–2116.

[8] T-S. Zhang, Strong Convergence of Wong-Zakai Approximations of Reflected SDEs in A Multidimensional General Domain, Potential Anal. 41 (2014), no.3, 783–815.

Large deviations and its application for a reaction-diffusion model

角田　謙吉

1　序

本講演では反応拡散模型に対する “Macroscopic Fluctuation Theory”(以下 MFT と省略）について議論する。MFT とは Bertini et al. [1] によって研究されている、非平衡定常状態の流体力学極限に対する大偏差原理に基づいた数学的及び物理的解析理論である。先行研究により、境界で粒子の流入出を伴う排他過程等の、流体力学的方程式の定常解が一意的である場合については非常に深く解析が行われてきた。一方反応拡散模型のように流体力学的方程式の定常解が一意的でない場合には、その数学的な結果は未解決とする問題が多く残っている。本講演では MFT の理論の意味する所を紹介するとともに、反応拡散模型に対する動的及び静的な大偏差原理、それらから得られる結果について紹介する。この講演は Jonathan Farfan 氏と Claudio Landim 氏との共同研究 [6, 4] に基づく。

2　反応拡散模型

初めに反応拡散模型を紹介する。この模型に対する流体力学的方程式は次の反応拡散方程式

$$\partial_t \rho \;=\; \frac{1}{2}\Delta\rho + F(\rho)\,, \tag{2.1}$$

であり、De Masi et al. [3] において反応拡散方程式 (2.1) を微視的な系より解析するために導入された。正確な定義は以下で与えられる。N を自然数とし、$\mathbb{T}_N$ を離散周期トーラス $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ とする。配置空間を $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ とし、その元を配置と呼び $\eta = \{\eta(x); x \in \mathbb{T}_N\}$ で表す。反応拡散模型とは次の無限小生成作用素により定まる $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ 上の Markov 過程である:

$$L_N f(\eta) \;=\; \frac{N^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N}[f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] + \sum_{x\in\mathbb{T}_N} c(\tau_x\eta)[f(\eta^x) - f(\eta)]\,, \tag{2.2}$$

九州大学、マス・フォア・インダストリ研究所、〒819-0395、福岡県福岡市西区元岡７４４番地
e-mail: k-tsunoda@imi.kyushu-u.ac.jp

但し f は $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ 上の関数、c は $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の正値局所関数、$\eta^{x,x+1}$、$\tau_x\eta$、η^x はそれぞれ次で定義される配置である:

$$\eta^{x,y}(z) \;:=\; \begin{cases} \eta(y) & \text{if } z = x\ , \\ \eta(x) & \text{if } z = y\ , \\ \eta(z) & \text{otherwise}\ , \end{cases} \qquad \eta^{x}(z) \;:=\; \begin{cases} \eta(z) & \text{if } z \neq x\ , \\ 1-\eta(z) & \text{otherwise}\ , \end{cases}$$
$$\tau_x\eta(y) \;:=\; \eta(x+y)\ .$$

幾つか注意を与える。(2.2) の右辺第一項は N^2 により時間についてスケール変換された排他過程に対応し、第二項は粒子の出生及び死滅に対応する Glauber 力学である。また c が $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の正値局所関数であることから、各 N に対して L_N により生成される Markov 過程は $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ 上既約になる。故に $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ 上の確率測度であって、Markov 過程の時間発展に対して不変なものが一意に存在する。その確率測度を μ_{ss}^N とする。

3 主結果

我々の興味は定常状態 μ_{ss}^N から適当なスケール変換により決まる巨視的な粒子密度の振る舞いを決定することである。このことを正確に見るために、配置 $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ に対して、1 次元連続トーラス $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の測度である経験分布 $\pi^N(\eta)$ を次で定義する:

$$\pi^N(\eta)(du) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{T}_N} \eta(x)\delta_{x/N}(du)\ ,$$

但し、δ_u は $u \in \mathbb{T}$ に集中する Dirac 測度である。$\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の有限測度全体の空間とすれば、μ_{ss}^N は π^N により $\mathcal{M}_+$ 上に確率測度を誘導するので、それを $\mathcal{P}^N$ とする: $\mathcal{P}^N := \mu_{ss}^N \circ (\pi^N)^{-1}$。

主結果を述べる為には飛躍率 c に関して技術的な仮定が必要となる。その仮定を紹介する為に $[0,1]$ 上の関数を以下のように定める。$0 \le \rho \le 1$ に対して ν_ρ を密度 ρ の $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の直積ベルヌーイ測度とする。$[0,1]$ 上の関数 B と D を次で定める:

$$B(\rho) \;=\; \int [1-\eta(0)]\, c(\eta)\, d\nu_\rho\ , \quad D(\rho) \;=\; \int \eta(0)\, c(\eta)\, d\nu_\rho\ .$$

我々の主結果は次の定理である。

Theorem 3.1 (Farfan-Landim-T., 2016+)**.** $[0,1]$ 上の関数 B と D は凹である仮定する。このとき、測度の列 $\{\mathcal{P}^N : N \in \mathbb{N}\}$ は $\mathcal{M}_+$ 上のある関数 W をレート関数として大偏差原理を満たす。

上述 Theorem 3.1 の証明の方針は、有限次元の Freidlin-Wentzell 理論を我々の無限次元の設定の枠組みにおいて再構成することである。そのための最初のステップは、有限次元の場合の Freidlin-Wentzell 型の大偏差原理を示すことにある。この模型に沿って言い換えると、De Masi et al. [3] で示されている流体力学極限に対する大偏差原理を証明する必要がある。その一部は Jona-Lasinio et al. [5] において示されているが、我々の目的の為には不十分なものであるため、彼らの結果をより堅強なものにする必要がある。関数 B と D に対する仮定はこのステップのみで必要となる。次のステップは得られた動的な大偏差原理を用いて、静的な大偏差原理である Theorem 3.1 を示すことである。本講演

ではレート関数 W を定義するとともに、何故そのような量がレート関数として現れる理由を説明する。また大偏差原理の帰結として、測度列 $\{\mathcal{P}_N : N \in \mathbb{N}\}$ の $N \to \infty$ における収束に関する結果についても得られる。この結果は Bodineau と Lagouge[2] により予想されていた相転移の問題について答えを与えるものであり、講演中において紹介する。

参考文献

[1] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio and C. Landim: Macroscopic fluctuation theory. Rev. Modern Phys. **87**, 593–636 (2015).

[2] T. Bodineau and M. Lagouge: Current large deviations in a driven dissipative model. J. Stat. Phys. **139**, 201–218 (2010).

[3] A. De Masi, P. Ferrari and J. Lebowitz: Reaction diffusion equations for interacting particle systems. J. Stat. Phys. **44**, 589–644 (1986).

[4] J. Farfan, C. Landim and K. Tsunoda. Static large deviations for a reaction-diffusion model. submitted, available at arXiv:1606.07227.

[5] G. Jona-Lasinio, C. Landim and M. E. Vares: Large deviations for a reaction diffusion model. Probab. Theory Related Fields **97**, 339–361 (1993).

[6] C. Landim and K. Tsunoda. Hydrostatics and large deviations for a reaction-diffusion model. to appear in Ann. Inst. H. Poincaré, available at arXiv:1508.07818.

高次元イジング模型における「1-arm 指数」の上限評価

北海道大学　大学院
理学院　数学専攻
半田　悟（Satoshi HANDA）
（Markus Heydenreich 氏，坂井 哲 氏との共同研究）

1　背景

私たちの身の回りには，温度 T の変化に応じて，水が固相・液相・気相へと姿を変えたり，磁石が磁性を失ったりする現象が起こっている．温度のようなマクロなパラメータに応じて，系の性質が大きく変わる現象は，一般に「相転移現象」と呼ばれる．その変化の境目となる点（温度）を「臨界点（温度）T_{c}」と呼ぶ．この臨界点の近傍・直上では，様々な物理量が冪的に振る舞うという特異的な現象が見られる．これを「臨界現象」と呼び，その冪指数のことを「臨界指数」と呼ぶ．臨界点は考えている系に依存してその値は異なるが，臨界指数は系の次元と対称性のみに依存した普遍的な値であると信じられている．この値を決定することが，相転移・臨界現象の研究の重要な目的のひとつである．

強磁性相転移現象を記述する統計力学模型として「イジング模型」というものが知られている．イジング模型の臨界指数についての研究は数多くあり，たくさんの結果がこれまでに得られているが，未解決の問題も多い．今回はそのひとつである「1-arm 指数 ρ」と呼ばれる臨界指数についての結果を述べる．

1-arm 指数は，以前にパーコレーションという統計力学模型において研究された．パーコレーションとは，格子点間のボンドが独立に，確率 p で開いている，$1-p$ で閉じているという状態をとるとした確率幾何学的な模型である．パラメタ p を変化させたとき，無限遠点につながっている確率が 0 から正に立ち上がるかどうかで，相転移が見られる．パーコレーションにおける 1-arm 指数とは，臨界点直上において，原点から半径 r の球の球面に繋がる確率が，r の冪関数としてどれくらいの速さで減衰するかを表す冪指数 ρ として定義される．[3] では「二次モーメント評価」を用いることにより，高次元において $\rho \le 2$ であることが証明された．その後，[2] で $\rho = 2$ であることが完全に決定された．

イジング模型における 1-arm 指数も対応する物理量によって定義される．臨界点直上において，プラス境界条件の半径 r の球上の原点におけるスピンの期待値が，r の冪関数としてどれくらいの速さで減衰するかを表す冪指数 ρ として定義される．パーコレーションと同様に二次モーメント評価を用い，上限評価を得ることが目的である．[5] では，$\sqrt{\langle \sigma_o \sigma_x \rangle} \le \langle \sigma_o \rangle^{+}_{|x|/3}$ が成り立つことが示されており，これにより $d > 4$ では $\rho \le (d-2)/2$ というハイパースケーリング不等式が得られている．ここから $d > 4$ では $\rho \le 1$ ということが示唆されるが，今回は厳密に $\rho \le 1$ という平均場評価を証明することができたので，これを紹介する．この発表は，Markus Heydenreich 氏，坂井 哲 氏との共同研究の結果に基づく．

2　イジング模型の定義と主結果

2.1　イジング模型の定義

V_R 上の d 次元イジング模型を以下のように定義する．$r < R$ に対して，

$$V_R = \{v \in \mathbb{Z}^d : |v| \le R\} \qquad\qquad \partial V_r = \{u \notin V_r : \exists v \in V_r \text{ s.t } J_{u,v} > 0\} \tag{2.1}$$

とする．スピン変数 $\boldsymbol{\sigma} \equiv \{\sigma_v\}_{v \in V_R} \in \{\pm 1\}^{V_R}$ を与える．格子点上のスピンが，$+1$ は上向き，-1 は下向きである状態を表す．このスピン変数の状態に対するエネルギーをハミルトニアン $H^h_{r,R}$ といい，

$$H^h_{r,R}(\boldsymbol{\sigma}) = -\sum_{\{u,v\} \subset V_R} J_{u,v}\sigma_u\sigma_v - h\sum_{v \in \partial V_r} \sigma_v, \tag{2.2}$$

で与える．$J_{u,v} \ge 0$ は，並進対称性，$\mathbb{Z}^d$ 対称性，有限レンジであると仮定する．h は境界 ∂V_r にかけられた外部磁場の強さを表すパラメターである．$J_{u,v} \ge 0$ であることから，スピン同士は，同じ向きのほうがエネルギーが小さくなり安定するという，強磁性体を表した模型となっている．このエネルギーによる確率分布をカノニカル分布で与え，その熱力学的期待値を以下のように定義する．

$$\langle f \rangle^h_{r,R} = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \{\pm 1\}^{V_R}} f(\boldsymbol{\sigma}) \frac{e^{-H^h_{r,R}(\boldsymbol{\sigma})/T_c}}{Z^h_{r,R}}, \qquad\qquad Z^h_{r,R} = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \{\pm 1\}^{V_R}} e^{-H^h_{r,R}(\boldsymbol{\sigma})/T_c}. \tag{2.3}$$

ここで $Z^h_{r,R}$ は規格化定数であり，分配関数と呼ばれる．グリフィスの不等式により以下の極限の存在が知られている．

$$\langle \sigma_x \rangle^+_r = \lim_{h \uparrow \infty} \langle \sigma_x \rangle^h_{r,R} \qquad [x \in V_r \cup \partial V_r], \tag{2.4}$$

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle = \lim_{R \uparrow \infty} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R. \tag{2.5}$$

したがって，まずは外部磁場の入った系や有限系を取り扱い，極限操作をとることを考える．

2.2　主結果

Theorem 2.1 (H, Heydenreich & Sakai)**.** $\mathbb{Z}^{d>4}$ 上の強磁性イジング模型において，$J_{u,v} \ge 0$ は並進対称性，$\mathbb{Z}^d$ 対称性，有限レンジであると仮定する．もし $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle \asymp |x|^{2-d}\,(|x| \uparrow \infty)$ であり，$\langle \sigma_o \rangle^+_r \asymp r^{-\rho}\,(r \uparrow \infty)$ を満たす $\rho > 0$ が存在するとする．すると，平均場評価 $\rho \le 1$ が成り立つ．

この定理の導く鍵になる相関不等式が以下である．

Proposition 2.2 (H, Heydenreich & Sakai)**.** 強磁性イジング模型において，以下の相関不等式が成り立つ．

$$\langle \sigma_o \rangle^+_r \ge \frac{\left(\sum_{x \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle\right)^2}{\sum_{x,y \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle \langle \sigma_x \sigma_y \rangle + \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}^d \\ x,y \in \partial V_r}} \langle \sigma_o \sigma_u \rangle \langle \sigma_u \sigma_x \rangle \langle \sigma_u \sigma_y \rangle \langle \sigma_o \rangle^+_{\mathrm{dist}(u,\partial V_r)}}. \tag{2.6}$$

上記の不等式において，分子・分母を評価する．分子は $O(r^2)$，分母は $\begin{cases} O(r^{(4-\rho)\vee 3}) & [\rho \neq 1] \\ O(r^3 \log r) & [\rho = 1] \end{cases}$ となる．すると，$\rho \leq 1$ ということが帰結される．$\langle \sigma_o \rangle^{+}_{\mathrm{dist}(u,\partial V_r)}$ が重要な項であり，この項によって $\rho \leq 1$ が得られる（この項が無ければパーコレーションと同じ結果になってしまう）．Proposition 2.2 の相関不等式の証明には，以下で説明する「ランダムカレント表現」という確率幾何学的な表現を用いる．

3　ランダムカレント表現

ランダムカレント表現とは，イジング模型の高温展開をより洗練させた表現である．二つのボンドの集合を $B_R \equiv \big\{\{u,v\} \subset V_R : J_{u,v} > 0\big\}$，$G_R \equiv \big\{\{v,g\} : v \in \partial V_r\big\}$ と定義する．$g \notin \mathbb{Z}^d$ はゴーストサイトと呼ばれる点である．ボンド上のカレント配位 $\boldsymbol{n} \equiv \{n_b\}$ を非負の整数の集合とする．カレント配位 $\boldsymbol{n}$ に対して，源泉集合 $\partial \boldsymbol{n}$ を

$$\partial \boldsymbol{n} = \Big\{ v \in V_R \cup \{g\} : \sum_{b \ni v} n_b \text{ is odd} \Big\}, \tag{3.1}$$

と定義する．また重み関数 $w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})$，$w_R(\boldsymbol{n})$ をそれぞれ

$$w^h_{r,R}(\boldsymbol{n}) = \prod_{b \in B_R} \frac{(J_b/T_{\mathrm{c}})^{n_b}}{n_b!} \prod_{b' \in G_R} \frac{(h/T_{\mathrm{c}})^{n_{b'}}}{n_{b'}!}, \qquad w_R(\boldsymbol{n}) = w^0_{r,R}(\boldsymbol{n}), \tag{3.2}$$

と定義する．すると以下のランダムカレント表現（図 1 参照）が得られる．

Proposition 3.1 (ランダムカレント表現 [1])**.**

$$\langle \sigma_x \rangle^h_{r,R} = \frac{\displaystyle\sum_{\partial \boldsymbol{n} = \{x,g\}} w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})}{\displaystyle\sum_{\partial \boldsymbol{n} = \varnothing} w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})}, \qquad \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R = \frac{\displaystyle\sum_{\partial \boldsymbol{n} = \{x\} \triangle \{y\}} w_R(\boldsymbol{n})}{\displaystyle\sum_{\partial \boldsymbol{n} = \varnothing} w_R(\boldsymbol{n})}. \tag{3.3}$$

ランダムカレント表現において，「二点 x, y がカレント $\boldsymbol{n}$ で繋がる」というのは，正のカレントをもつボンドによる x から y への道が存在することをいい，$x \underset{\boldsymbol{n}}{\longleftrightarrow} y$ とかく．すると，パーコレーションのような解析が可能になる．ランダムカレント表現で最も重要な性質は，「源泉の移し替え補題」である [4, Lemma 2.3]．これにより，二点の繋がりを用いて，源泉集合を移し替えることが可能になる．以下に源泉の移し替え補題による簡単な帰結を述べる．

Lemma 3.2 (源泉の移し替え補題の帰結)**.** 任意の部分集合 $A \subset V_R$ と $B \subset V_R \cup \{g\}$ に対して，以下が成り立つ．

$$\sum_{\substack{\partial \boldsymbol{n} = B \\ \partial \boldsymbol{m} = \varnothing}} w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})\, W_A(\boldsymbol{m}) \mathbf{1}\{x \underset{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}{\longleftrightarrow} y \text{ in } A\} = \sum_{\substack{\partial \boldsymbol{n} = B \triangle \{x\} \triangle \{y\} \\ \partial \boldsymbol{m} = \{x\} \triangle \{y\}}} w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})\, W_A(\boldsymbol{m}). \tag{3.4}$$

(3.4) の右辺を適切な分配関数で割る事で，スピン系の相関関数を取り出すことができる．

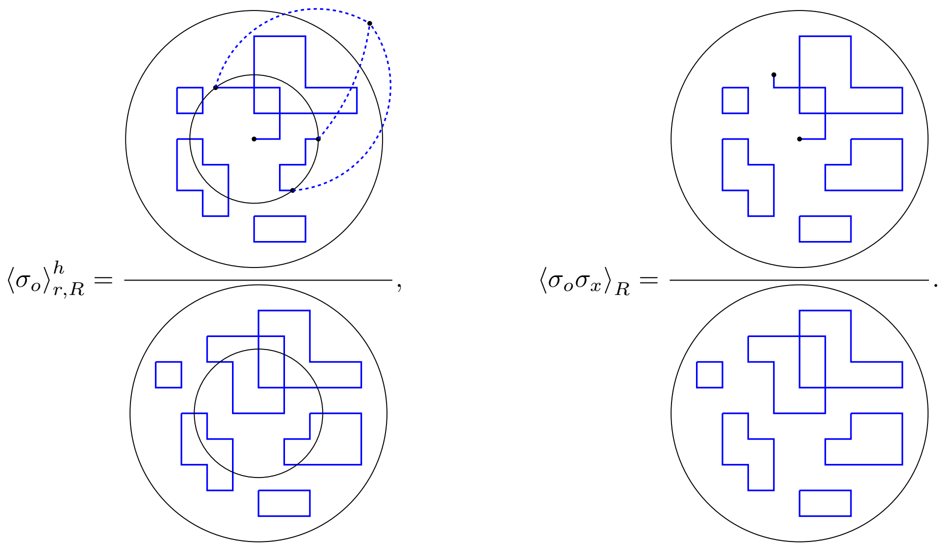


図 1　$\langle \sigma_o \rangle_{r,R}^h$ と $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_R$ のランダムカレント表現である．奇数のカレントがのっているボンドだけを書いた．破線はゴーストサイト g へのボンドを表している．

参考文献

[1] R.B. Griffiths, C.A. Hurst and S. Sherman. Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *J. Math. Phys.* **11** (1970): 790–795.

[2] G. Kozma and A. Nachmias. Arm exponents in high dimensional percolation. *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011): 375–409.

[3] A. Sakai. Mean-field behavior for the survival probability and the percolation point-to-surface connectivity. *J. Stat. Phys.* **117** (2004): 111–130.

[4] A. Sakai. Lace expansion for the Ising model. *Commun. Math. Phys.* **272** (2007): 283–344.

[5] H. Tasaki. Hyperscaling inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.* **113** (1987): 49–65.

体心立方格子上の最近接モデルに対するレース展開

北海道大学大学院理学院数学専攻
上島 芳倫 (Yoshinori KAMIJIMA) *
指導教官：坂井 哲　先生；共同研究者：半田 悟　先輩

1　はじめに

1.1　研究背景

最近接自己回避歩行 (nearest neighbour self-avoiding walk，以下 SAW) は単純ランダムウォーク (simple random walk，以下 RW) に自分自身の path と交わらないという条件を加えたモデルである．また，パーコレーションは各 bond が確率 p で開いている，確率 $1-p$ で閉じているという状態が与えられるモデルである．これらは，自然科学や確率論的統計力学モデルにおいて重要な概念である，相転移・臨界現象を示す．例えば水 (H_2O) は，常温で液体の水であって，$0\,°C$ で氷に変化し，$100\,°C$ で水蒸気に変化することはよく知られている．

H_2O は気相と液相の間に，各相が区別できなくなる点がある．これを臨界点と呼ぶ．臨界点の近傍では臨界現象と呼ばれる，物理量に特異性を示す現象が起きることが知られている．すなわち，物理量が不連続になったり，発散したりする．その漸近的な振る舞いは $(T-T_c)^\beta$ のように冪乗則に従う．ここに現れた β を**臨界指数**という．当然のことながら，臨界点の値 T_c は物質ごとに異なる．しかし臨界指数は，物質の種類によらない定数，という普遍性をもつことが実験的に知られている．

SAW においても臨界指数が定義される．特にその臨界指数は，SAW を考える空間の次元 d に依存して変わる．この場合「臨界指数の普遍性」は，考えている空間（格子の形）によらずモデルの対称性や次元にのみよって決まること，を意味する．臨界指数を具体的に求めることは，低次元では難しい問題であり，数学的に厳密な理解があまり進んでいない．一方で高次元では，臨界指数が平均場臨界指数と呼ばれる簡単な値に退化することが知られている．このとき，退化するぎりぎりの次元 d_c を**（上部）臨界次元**という．SAW の臨界次元は経験的に $d_c=4$ であると予想されている．現在のところ，数学的に厳密に証明されているのは $d\geq 5$ の場合である．それは原と Slade[2, 3] によって示された．その論文で用いられた手法が**レース展開**である．

同様にパーコレーションにおいてもレース展開を用いて臨界次元を求める試みがあり，$d_c=6$ と予想されている．しかしこちらは非常に難しく，$d\geq 11$ の場合までしか証明されていない [1].

1.2　研究目的

SAW では $d\geq 5$ で臨界指数が平均場臨界指数に退化することを証明できた，と述べた．しかしその証明は，100 ページ以上にもわたり，理解するのが容易ではない．操作する量[1)]が 10 個以上もあるために，コンピュータを使わざるを得ないこともその複雑さを示唆している．レース展開に関しても非常にテクニカルな解析方法ゆえ，あらゆる人々に親しまれているものではなかった．こうした結果，SAW の臨界現象が広く認知されているとは言い難い．

100 ページ以上あり複雑であった証明を，その半分以下の 20–30 ページに抑え，簡単で誰でもわかるように改良するのが本研究の主眼である．そのために，[2, 3] では単純立方格子 (simple cubic lattice) $\mathbb{Z}^d$ 上で考えていたのを，体心立方格子 (body-centred cubic lattice) $\mathbb{L}^d$ 上に変更した．あとで述べるように，$\mathbb{L}^d$ には $\mathbb{Z}^d$ にはない利点のおかげで解析が非常に簡単になるのである．結果として，現在までに $d\geq 7$ 次元までは完成しており，すでに証明された $d\geq 5$ まではもう少しである．さらに論文にすると 30 ページ前後に抑えられることが期待できる．これは 100

* s153009@math.sci.hokudai.ac.jp　or　ykami@eis.hokudai.ac.jp
1) bootstrapping argument（後述）で用いる，K_1，K_2，K_3 で押さえられる量のこと．

ページ以上あったことと比べれば，圧倒的に少ない分量である．

これを利用して，パーコレーションにおいて一桁の次元で平均場臨界指数へ退化することも目指している．こちらは未だ完成していないため，以下では SAW でどれだけ簡単になるのか述べよう．

2　体心立方格子の定義とその利点

d 次元体心立方格子 $\mathbb{L}^d$ は，原点を含み $\mathbb{L}^d \ni o=(0,0,\dots,0)$，$\mathscr{N}=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_d)\in\mathbb{Z}^d \mid |x_1|=|x_2|=\dots=|x_d|=1\}$ を平行移動させることで生成される集合，として定義される．最近接点の個数は $|\mathscr{N}|=2^d$ である．

$\mathbb{Z}^d$ と比べたときの $\mathbb{L}^d$ の利点は，RW の推移確率が非常に簡単になることである．すなわち，$D(x)=\mathbb{1}_{\mathscr{N}}(x)/2^d=\prod_{j=1}^d \delta_{|x_j|,1}/2$[2] という，単なる 1 **次元推移確率の積**で表されてしまう．このことから，Stirling の公式が使えて，

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad D^{*(2n)}(o)=\underbrace{(D*\dots*D)}_{2n\text{-fold}}(o)^{3)}=\left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^d \underset{n\uparrow\infty}{\sim}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^d. \tag{1}$$

3　主結果

3.1　自己回避歩行

SAW に対する二点関数を，$p\in[0,p_c)$ と $x\in\mathbb{L}^d$ に対して

$$G_p(x)=\underbrace{\sum_{\omega:\,o\to x} p^{|\omega|}\prod_{j=1}^{n} D(\omega_j-\omega_{j-1})}_{=S_p(x)}\underbrace{\prod_{0\le s<t\le|\omega|}\left(1-\mathbb{1}_{\{\omega_s=\omega_t\}}(\omega)\right)}_{\text{self-avoidance constraint}}{}^{4)}$$

と定義する．ここで，$S_p(x)$ は RW の二点関数であり，臨界点 p_c は帯磁率 χ_p が発散する点である: $\chi_p=\sum_{x\in\mathbb{L}^d}G_p(x),\quad p_c=\sup\{p\ge 0\mid \chi_p<\infty\}$．

帯磁率の臨界点近傍での振る舞いは，次の定理によって特徴付けられる．

定理 1. Bubble condition $G_p^{*2}(o)=\sum_{x\in\mathbb{L}^d}G_p(x)^2=\int_{[-\pi,\pi]^d}\hat{G}_p(k)^2\frac{\mathrm{d}^dk}{(2\pi)^d}<\infty^{5)}$ が満たされるならば，$\chi_p\asymp(p_c-p)^{-1}$ が成り立つ．したがって $\gamma=1$．ここで，‘$\asymp$’ は上下から同じオーダーで押さえられることを意味する．

これを証明するための次の補題が本研究の主結果である．

補題 1 (with 坂井，半田)**.** $\forall d\ge d_0$ (現在のところ $d_0=7$),

$$\exists C\in[1,p_c)\quad \text{s.t.}\quad \frac{|\hat{G}_p(k)|}{\hat{S}_{\mu_p}(k)}\le C\quad \left(\text{ただし，}\hat{S}_{\mu_p}=\frac{1}{1-\mu_p\hat{D}(k)}\text{ および }\mu_p=1-\chi_p^{-1}\right).$$

3.2　レース展開

レース展開は，二点関数の Fourier 変換 $\hat{G}_p(k)$ に対する，ある種の self-consistent な方程式を与える:

$$\begin{aligned}\hat{G}_p(k)=1+p\hat{D}(k)\hat{G}_p(k)+\hat{\Pi}_p(k)\hat{G}_p(k)&\implies \hat{G}_p(k)=\frac{1}{1-p\hat{D}(k)-\hat{\Pi}_p(k)}\\ \implies \chi_p=\hat{G}_p(0)=\frac{1}{1-p-\hat{\Pi}_p(0)}&\quad \therefore p=1-\chi_p^{-1}-\hat{\Pi}_p(0)\le 1+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)\end{aligned} \tag{2}$$

---

[2] $\delta_{\cdot,\cdot}$ は Kronecker デルタ．

[3] 関数 $f(x)$ の畳み込みを $(f*g)(x)=\sum_{y\in\mathbb{L}^d}f(y)g(x-y)$ で表す．

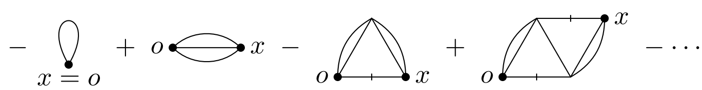
[4] n 歩の RW の path を，順序づけられた $n+1$ 個の点の集合 $\omega=(\omega_0,\ \omega_1,\ \dots,\ \omega_n)$ $(\omega_j\in\mathbb{L}^d,\ \forall j=0,\ 1,\ \dots,\ n)$ として定義し，その歩数を $|\omega|=n$ で表す．総和は o から x に至るすべての path についてとることを意味し，一つ目の総積の因子はその一歩々々が隣り合った点 $(\omega_j-\omega_{j-1}\in\mathscr{N})$ になっていることを表す．

[5] 関数 $f(x)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(k)=\sum_{x\in\mathbb{L}^d}f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$ で表す．

$$\Longrightarrow -\frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)}{p}+\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}}{1-\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}} \le \frac{\hat{G}_p(k)}{S_{\mu_p}(k)}-1 \le \frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0)}{p}+\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}}{1-\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}} \tag{3}$$

ここで，$\hat{\Pi}_p(k)$ はレース展開係数 $\Pi_p(x)$ の Fourier 変換である．

$$\Pi_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\pi_p^{(n)}(x)=$$



$\Pi_p(x)$ に対して奇数項の和を $\Pi_p^{\mathrm{odd}}(x)$ とし，偶数項の和を $\Pi_p^{\mathrm{even}}(x)$ とした．上の「絵」は，SAW の二点関数 $G_p(x)$ が体積排除効果によって RW からどの程度ずれるかを表しているもので，Feynman diagram と呼ばれている．

3.3 Bootstrapping argument

補題 1 を証明するために，次のような bootstrapping argument と呼ばれる手法が用いられる:

Step 1. 適当な関数 $g_1(p)=p$, $g_2(p)=\sup_{k\in[-\pi,\pi]^d}|\hat{G}_p(k)|/S_{\mu_p}(k)$, $g_3(p)=\sup_{k,\ l\in[-\pi,\pi]^d}|\hat{\Delta}_k\hat{G}_p(l)|/U_{\mu_p}(k,l)$ ($U_{\mu_p}(k,l)=[1-\hat{D}(k)]\left[\left\{\hat{S}_{\mu_p}(l+k)+\hat{S}_{\mu_p}(l-k)\right\}\hat{S}_{\mu_p}(l)/2+4\hat{S}_{\mu_p}(l+k)\hat{S}_{\mu_p}(l-k)\right]$, $\hat{\Delta}_k$ は離散ラプラシアンを 2 で割ったもの) を選び，upper bound $g_i(p)\le K_i,\ \forall i=1,\ 2,\ 3$ を仮定する．

Step 2. 初期値 $p=0$ で $g_i(0)<K_i,\ \forall i=1,\ 2,\ 3$ を満たすことと，$p\in(0,p_c)$ で連続であることを確認する．

Step 3. 次元 d 十分大きいとして，upper bound の仮定が満たされるならば，$g_i(p)<K_i,\ \forall i=1,\ 2,\ 3$ となることを確認する．

このとき，$g_2(p)$ は $p\in[0,p_c)$ で真に K_2 より小さいことがわかるから，補題 1 の証明が完了する．

特に，$g_1(p)$ と $g_2(p)$ はどのように押さえられるかを示そう．

$$L=\left\|(pD(x))^{*2}*G_p\right\|_\infty,\qquad B=\left((pD)^{*2}*G_p^{*2}\right)(o),$$
$$r=p\|D\|_\infty+L+B,\qquad \hat{W}(k)=\sup_{x\in\mathbb{L}^d}G_p(x)\left(1-\cos(k\cdot x)\right).$$

とおく．$\varepsilon_1=\left(D^{*2}*S_1\right)(o)=\sum_{n=1}^{\infty}D^{*(2n)}(o)$ および $\varepsilon_2=\left(D^{*2}*S_1^{*2}\right)(o)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,D^{*(2n)}(o)$ なる量を定義すると，これらは (1) により評価できる．ε_1, ε_2 および upper bound の仮定を用いると L, B, r, $\hat{W}(k)$ は

$$L\le {K_1}^2K_2\varepsilon_1,\quad B\le {K_1}^2{K_2}^2\varepsilon_2,\quad r\le\frac{K_1}{2^d}+{K_1}^2K_2\varepsilon_1+{K_1}^2{K_2}^2\varepsilon_2,\quad \frac{\hat{W}(k)}{1-\hat{D}(k)}\le 5K_3\left(1+2\varepsilon_1+\varepsilon_2\right) \tag{4}$$

と評価できる．次元 d が十分大きいとき，ε_1 と ε_2 は小さくなる．また，レース展開係数の Fourier 変換 $\hat{\Pi}_p(k)$ に対して，

$$0\le\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)\le L+\frac{rB(p\|D\|_\infty+L)}{1-r^2},\qquad 0\le\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0)\le\frac{B(p\|D\|_\infty+L)}{1-r^2} \tag{5}$$

$$0\le\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}\le\frac{\hat{W}(k)}{1-\hat{D}(k)}\frac{B^2(1+r^2)}{p(1-r^2)^3},\qquad 0\le\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}\le\frac{\hat{W}(k)}{1-\hat{D}(k)}\frac{B(1+rB)}{p(1-r^2)^3} \tag{6}$$

なる評価を得る．これらは (4) と合わせて上から押さえることができる．したがって，(2) と (3) を (4) と (5) および (6) で評価することにより，$g_1(p)$ と $g_2(p)$ は上から押さえられる．

参考文献

[1] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Nearest-neighbor percolation function is continuous for $d>10$. Preprint, (2015). arXiv:1506.07977.

[2] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **147**, pp. 101–136, (1992).

[3] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.*, Vol. **4**, pp. 235–327, (1992).

AN OPTIMAL INVESTMENT STRATEGY FOR INSURANCE COMPANIES WITH A LINEAR GAUSSIAN STOCHASTIC FACTOR MODEL.

畑　宏明　(静岡大学教育学部)　安田　和弘　(法政大学理工学部)

【本講演の目的】線形 **Gauss** 型確率ファクターモデル下での指数型効用関数を用いた保険会社の最適投資問題の最適戦略と最適値を求める。

$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ をフィルター付き確率空間とする。ただし、$\mathcal{F}_t := \sigma\{W_s, p_s, Z_j \mathbf{1}_{j\leq p_s}; s \leq t, j \geq 1\}$ である。ここで、$(W_t)_{t\geq 0}$ は $n+m$ 次元標準ブラウン運動, $(p_t)_{t\geq 0}$ はランダムな強度 λ(後に定義する) をもつ Cox 過程 , $(Z_i)_{i\geq 1}$ は同一分布 ν をもつ独立な非負確率変数の列。また、$(W_t)_{t\geq 0}, (p_t)_{t\geq 0}, (Z_i)_{i\geq 1}$ は互いに独立とする。

今、次の市場モデルを考える。

- 銀行預金過程：$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad S_0^0 = s_0^0,$
- $i(i = 1, \cdots, m)$ 番目の危険資産価格過程：

$$dS_t^i = S_t^i \left\{ (a + AY_t)^i dt + \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma_p^{ik} dW_t^k \right\}, \quad S_0^i = s_0^i,$$

- ファクター過程：$dY_t = (b + BY_t)dt + \Sigma_f dW_t, \quad Y(0) = y \in \mathbb{R}^n.$

ここで、 $r \geq 0,\ a \in \mathbb{R}^m,\ b \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \Sigma_p \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)},\ \Sigma_f \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$ である。

更に、リスク過程として、次の Cramér-Lundberg モデルを用いる：

$$R_t := x + ct - J_t,$$

ここで、 x は初期資産、 $c > 0$ は収入保険料率、$J_t := \displaystyle\sum_{i=1}^{p_t} Z_i$ である。 また、$\Delta J_s := J_s - J_{s-}$ と定義するとき、$J.$ に関連する jump measure は $t \geq 0$ とボレル集合 $U \subset [0, \infty)$ に対して、次のように定義する：

$$N([0,T] \times U) := \sum_{0\leq s\leq t} 1_U(\Delta J_s).$$

このとき、次の条件を仮定する。

(A1) $\Sigma_p \Sigma_p^* > 0.$

(A2) ランダムな強度を $\lambda(Y_t) := Y_t^* \Lambda Y_t + \lambda_0.$ とする。ただし、 $\lambda_0 > 0, \Lambda \geq 0$ である。

π_t^i を i 番目の危険資産の株の保有量, $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)^*$ とすると、時刻 t における保険会社の資産過程 X_t^π は次を満たす。

$$\begin{aligned} X_t^\pi &= R_t + \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^m \pi_u^i \frac{dS_u^i}{S_u^i} + (X_u^\pi - \pi_u^* \mathbf{1}) \frac{dS_u^0}{S_u^0} \right\} \\ &= x + \int_0^t \{c + \pi_u^*(a + AY_u) - r\mathbf{1}) + rX_u^\pi\} du + \int_0^t \pi_u^* \Sigma_p dW_u - \sum_{i=1}^{p_t} Z_i. \end{aligned}$$

本講演では、次の指数型効用関数を用いた保険会社の最適投資問題を扱う。

$$\text{(P)} \qquad V(t,x,y) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}_{t,T}} E\left[-\mathrm{e}^{-\alpha X_T^{t,x,y,\pi}} \right].$$

ただし、$\mathcal{A}_{t,T}$ は許容な投資戦略全体。

【解法の手順】

(1) 動的計画原理を用いて、形式的に (後に与えられる)HJB 方程式 (0.1) を導出する。(※HJB 方程式 (0.1) の $\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}[\quad]$ において、sup を達成する $\check{\pi}$ は最適投資戦略の候補になる。)
(2) HJB 方程式 (0.1) に最適戦略の候補 $\check{\pi}$ を代入した方程式 (0.1)(以下で与えている) の解の存在を証明する。
(3) HJB 方程式 (0.1) を用いて、Verification Theorem (最適戦略の候補 $\check{\pi}$ が本当に最適戦略であることを保証する定理) を証明する。

今、評価関数を以下のように書き換えることができる。

$$E\left[-\mathrm{e}^{-\alpha X_T^{t,x,y,\pi}}\right] = -\mathrm{e}^{-\alpha x\mathrm{e}^{r(T-t)} - c\alpha\int_t^T \mathrm{e}^{r(T-s)}ds + \lambda_0\int_t^T\int_{z>0}\left(\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-s)}}-1\right)\nu(dz)ds}$$
$$\cdot E^{(\pi)}\left[\mathrm{e}^{\int_t^T \ell(Y_{s-},\pi_s)ds}\right]$$

ただし、$E^{(\pi)}$ は以下で定義される確率測度 $P^{(\pi)}$ に関する期待値を表す。

$$\left.\frac{dP^{(\pi)}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_T} := \mathcal{E}_{t,T}^0(\pi),$$

$$\mathcal{E}_{t,T}^0(\pi) := \mathrm{e}^{-\alpha\int_t^s \mathrm{e}^{r(T-u)}\pi_u^*\Sigma_p dW_u - \frac{\alpha^2}{2}\int_t^s \mathrm{e}^{2r(T-u)}\pi_u^*\Sigma_p\Sigma_p^* du}$$
$$\cdot \mathrm{e}^{\int_t^s\int_{z>0}\alpha z\mathrm{e}^{r(T-u)}N(du,dz) + \int_t^s\lambda(Y_{u-})\int_{z>0}\left(1-\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-u)}}\right)\nu(dz)du},$$

$$\ell(y,\pi) := \frac{\alpha^2}{2}\mathrm{e}^{2r(T-t)}\pi^*\Sigma_p\Sigma_p^*\pi - \alpha\mathrm{e}^{r(T-t)}\pi^*(\mu(y)-r\mathbf{1}) + y^*\Lambda y\int_{z>0}\left(\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-t)}}-1\right)\nu(dz).$$

ここで、Y_t は、$P^{(\pi)}$-ブラウン運動 $W_s^\pi := W_s + \displaystyle\int_t^s \alpha\mathrm{e}^{r(T-u)}\Sigma_p^*\pi_u du$ を用いると $P^{(\pi)}$ の下で次を満たすことに注意する。

$$dY_s = \left\{b + BY_s - \alpha\mathrm{e}^{r(T-s)}\Sigma_f\Sigma_p^*\pi_s\right\}ds + \Sigma_f dW_s^\pi, \quad Y_t = y.$$

この時、問題 (P) は次の問題と同値になる。

$$(\tilde{\mathrm{P}}) \qquad \tilde{V}(t,y) := \inf_{\pi\in\mathcal{A}_{t,T}}\tilde{J}(t,y;\pi).$$

実際、動的計画原理から、問題 $(\tilde{\mathrm{P}})$ に関連する HJB 方程式は次のようになる。

$$\inf_{\pi\in\mathbb{R}^m}\left[\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_f\Sigma_f^*D^2\tilde{V}) + \left\{b + By - \alpha\mathrm{e}^{r(T-t)}\Sigma_p\Sigma_f^*\pi\right\}^* D\tilde{V} + \ell(y,\pi)\right] = 0, \tilde{V}(T,y) = 0.$$

更に、$\tilde{V}(t,y) := \mathrm{e}^{-v(t,y)}$, とすると、$v$ 次の偏微分方程式を満たす：

$$\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}\mathcal{L}_t^\pi v(t,y) = 0, \quad v(T,y) = 0, \tag{0.1}$$

ここで、 $\mathcal{L}_t^\pi v(t,y)$ は次で定義される。

$$\mathcal{L}_t^\pi v(t,y) := \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_f\Sigma_f^*D^2v) - \frac{1}{2}(Dv)^*\Sigma_f\Sigma_f^*Dv + (b+By)^*Dv - \frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}\pi^*\Sigma_p\Sigma_p^*\pi$$
$$+ \alpha\mathrm{e}^{r(T-t)}\pi^*(a + Ay - r\mathbf{1} + \Sigma_p\Sigma_f^*Dv) - y^*\Lambda y\int_{z>0}\left(\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-t)}}-1\right)\nu(dz).$$

つまり、次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_f\Sigma_f^*D^2v) + \left\{K_1y + b - \Sigma_f\Sigma_p^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}(a-r\mathbf{1})\right\}^* Dv \\
&-\frac{1}{2}(Dv)^*K_2Dv + \frac{1}{2}y^*K_0y + (a-r\mathbf{1})^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}Ay \\
&+\frac{1}{2}(a-r\mathbf{1})^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}(a-r\mathbf{1}) - y^*\Lambda y\int_{z>0}\left(\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-t)}}-1\right)\nu(dz) = 0, \\
&v(T,y) = 0.
\end{aligned} \tag{0.2}$$

ただし、K_2, K_1, K_0 は次で与えられる:

$$K_2 := \Sigma_f \left\{ I - \Sigma_p^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}\Sigma_p \right\} \Sigma_f^*, K_1 := B - \Sigma_f\Sigma_p^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}A, K_0 := A^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}A.$$

【解法の手順】を経て、次の結果が得られる。

Theorem 0.1. **(A1), (A2)** を仮定する。さらに、次も仮定する。

(A3)
$$K_0 - 2\Lambda \int_{z>0} \left(\mathrm{e}^{\alpha z \mathrm{e}^{rT}} - 1 \right) \nu(dz) \geq 0.$$

そのとき、次の結果が得られる。

1.(0.2) は次の明示解 $\widehat{v}(t,y)$ をもつ。

$$\widehat{v}(t,y) := \frac{1}{2} y^* P(t) y + q(t)^* y + k(t),$$

ただし、$P(t), q(t), k(t)$ それぞれ次の方程式の解である。

$$\dot{P}(t) + P(t)K_1 + K_1^*P(t) - P(t)K_2P(t) + K_0 - 2\Lambda \int_{z>0} \left(\mathrm{e}^{\alpha z \mathrm{e}^{r(T-t)}} - 1 \right) \nu(dz) = 0,\ P(T) = 0,$$

$$\dot{q}(t) + (K_1 - K_2P(t))^* q(t) + P(t)b + (A - \Sigma_p\Sigma_f^*P(t))^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}(a - r\mathbf{1}) = 0,\ q(T) = 0,$$

$$\dot{k}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_f\Sigma_f^*P(t)) + q(t)^* \left\{ b - \Sigma_f\Sigma_p^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}(a - r\mathbf{1}) \right\} - \frac{1}{2} q(t)^* K_2 q(t)$$
$$+ \frac{1}{2}(a - r\mathbf{1})^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}(a - r\mathbf{1}) = 0, \quad k(T) = 0.$$

2. 更に次を仮定する。

(A4)
$$\int_{z>0} \mathrm{e}^{2\alpha z \mathrm{e}^{rT}} \nu(dz) < \infty.$$

このとき、

$$\widehat{\pi}_s := \widehat{\pi}(s, Y_s) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-r(T-s)}(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1} \left[\left\{ A - \Sigma_p\Sigma_f^*P(s) \right\} Y_s + a - r\mathbf{1} - \Sigma_p\Sigma_f^* q(s) \right]$$

は最適戦略で、$t \in [0,T]$ に対して、次が成り立つ。

$$V(t,x,y) = -\mathrm{e}^{-\widehat{v}(t,y) - c\alpha\int_t^T \mathrm{e}^{r(T-s)}ds + \lambda_0 \int_t^T \int_{z>0} \left(\mathrm{e}^{\alpha z \mathrm{e}^{r(T-s)}} - 1 \right) \nu(dz) ds - \alpha x \mathrm{e}^{r(T-t)}}.$$

参考文献

[1] H. Hata and K. Yasuda (2016) “An optimal investment strategy for insurance companies with a linear Gaussian stochastic factor model”, preprint.

PARAMETRIX EXPANSIONS FOR SIMULATION OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

TOMOOKI YUASA

JOINT WORK WITH PATRIK ANDERSSON AND ARTURO KOHATSU-HIGA

1. 背景

我々は確率微分方程式に関する新しい数値計算手法の開発を行っている．確率微分方程式に関する数値計算手法は 1955 年に丸山儀四郎によって開発された Euler-Maruyama 近似が現在においても主流となっている．Euler-Maruyama 近似は実務家にとっては金融派生商品の価格決定の際に用いられ，理論的な研究対象としては不連続係数の場合における誤差評価など未解決な問題がある．しかし，近年 Hoang-Taguchi の活躍により，後者の問題は解決されようとしている．では，Euler-Maruyama 近似以外の数値計算手法が開発されていないのかという問いに対しては No である．例えば，古典的な Milstein 近似を始め，近年では Kusuoka 近似，Ninomiya-Victoir，Bally-Kohatsu[2] などが挙げられる．特に，我々の研究対象である Bally-Kohatsu は楕円型偏微分方程式の解の構成方法である Parametrix method を応用していることから，この数値計算手法を Parametrix simulation method と呼んでいる*．Parametrix simulation method が今後の研究対象として期待出来る点は次にある．

(i) 他の数値計算手法より群を抜いて計算時間が速い．
(ii) 仮定に確率微分方程式の係数の滑らかさを必ずしも要求しない．

例えば，(i) は計算時間の速さが重要となる金融業界にとっては非常に有用である．(ii) は確率微分方程式の係数が非滑らかな時，Euler-Maruyama 近似が安定しない場合が存在することが知られている．その場合の Euler-Maruyama 近似に代わる数値計算手法として Parametrix simulation method の有用性を感じる．しかし，Parametrix simulation method は他の数値計算手法より明確に有用であるとは言えないのも事実である．その要因は次の点にある．

(iii) 数値計算の安定性を指し示す分散が非常に大きいという点．
(iv) 仮定に確率微分方程式の係数の有界性を有する点．

例えば，(iii) の問題を解決する第一歩として，Andersson-Kohatsu[1] は分散を無限から有限にする分散減少法を与えた．また，金融業界で用いられるモデルには確率微分方程式の係数に有界性がないため，Parametrix simulation method を金融業界のモデルに適用するには (iv) の問題解決が “理論的な意味を込めて”必要不可欠となる．今回の講演では (iii) の問題解決にあたり得られた様々な結果をお披露目する．

*Parametrix simulation method は Unbiased simulation method の一つである．通常，確率論を用いた数値計算手法には近似過程（例えば，Euler-Maruyama 近似）から生じる誤差が存在する．その誤差が生じない数値計算手法を Exact simulation method や Unbiased simulation method と呼ぶ．ここでは，前者を strong の意味での数値計算手法に用い，後者を weak の意味での数値計算手法に用いる．

2. Parametrix simulation method の解説

次に，最も基本となる Parametrix simulation method を説明する[†]．$(X_t)_{t\geq 0}$ を初期値 $X_0 = x \in \mathbf{R}^d$ の d 次元確率微分方程式 $dX_t = \sum_{j=1}^m \sigma_j(X_t)dW_t^j + b(X_t)dt$ で得られる強解とする．ここで，$(W_t)_{t\geq 0}$ は m 次元 Wiener 過程であり，σ は一様楕円性を持ち，$\sigma \in C_b^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^m)$，$b \in C_b^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ を満たすものとする．この時，$\mathbf{E}[f(X_t)]$ の Parametrix expansion は次で与えられる．

Theorem 2.0.1 (Bally-Kohatsu)**.** 任意の $f \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$，$t \in (0,T]$ に対して，

$$\mathbf{E}[f(X_t)] = \int_{\mathbf{R}^d} dy f(y) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{S}_t^n} d\mathbf{s} \int_{\mathbf{R}^{nd}} d\mathbf{y} \prod_{i=0}^{n-1} a_{s_i - s_{i+1}}(y_i, y_{i+1}) \overline{p}_{s_n}(y_n, y).$$

ここで，$\mathbf{S}_t^n = \{0 < s_n < \ldots < s_1 < t\}$，$a_t(x,y) = \theta_t(x,y)\overline{p}_t(x,y)$ である．また，関数 $y \mapsto \overline{p}_t(x,y)$ は平均 $x + b(x)t$，共分散行列 $a(x)t$ の正規分布に従う密度関数である．その密度関数から生成される $1,2$ 階の *Hermite* 多項式 $h^i, h^{i,j}$ を用いて，重み関数 $\theta : (0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\theta_t(x,y) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \theta_t^{i,j}(x,y) - \sum_{i=1}^{d} \rho_t^i(x,y), \\
\theta_t^{i,j}(x,y) &= \partial_{i,j}^2 a^{i,j}(y) + \partial_j a^{i,j}(y) h_t^i(x,y) + \partial_i a^{i,j}(y) h_t^j(x,y) \\
&\quad + (a^{i,j}(y) - a^{i,j}(x)) h_t^{i,j}(x,y), \\
\rho_t^i(x,y) &= \partial_i b^i(y) + (b^i(y) - b^i(x)) h_t^i(x,y).
\end{aligned}$$

上記の定理を用いて，次が得られる．

Theorem 2.0.2 (Bally-Kohatsu)**.** 任意の $f \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$，$t \in (0,T]$ に対して，

$$\mathbf{E}[f(X_T)] = \mathbf{E}\Bigg[\underbrace{f(X_T^\pi) e^{\lambda T} \lambda^{-N_T} \prod_{i=0}^{N_T - 1} \theta_{\tau_{i+1} - \tau_i}(X_{\tau_i}^\pi, X_{\tau_{i+1}}^\pi)}_{=Y}\Bigg].$$

ここで，$(N_t)_{t\geq 0}$ は点過程 $(\tau_i)_{i\in\mathbf{N}}$ とパラメータ $\lambda > 0$ から構成される *Poisson* 過程である．また，$(X_t^\pi)_{t\in\pi}$ は点過程を分割点 $\pi(\omega) = \{\tau_i(\omega); i = 0, 1, \ldots, N_T(\omega)\} \cup \{T\}$ に持つ *Euler-Maruyama* 近似である．

Parametrix simulation method とは上記定理によって得られた確率変数 Y に対して，モンテカルロ法などを用いて $\mathbf{E}[f(X_t)]$ の近似値を求める数値計算手法のことである．しかし，Y の分散が一般には有界にならないことが Andersson-Kohatsu によって示されている．これはこの数値計算手法が安定しないことを意味している．そこで，彼らは Poisson 過程を他の Renewal 過程を用いることで，分散を有限にすることに成功した．

2.1. 結果：時間に関する Importance sampling.

$\mathbf{E}[f(X_t)]$ の Parametrix expansion は数え上げ $\sum_{n=0}^{\infty}$，時間 $\int_{\mathbf{S}_t^n} d\mathbf{s}$，空間 $\int_{\mathbf{R}^{nd}} d\mathbf{y}$ の 3 つの直積測度から構成されている．Andersson-Kohatsu が行った研究は数え上げと時間の直積測度に関する Importance sampling と解釈することが出来る．そこで，我々は時間に関してのみ Importance

[†]Bally-Kohatsu の言葉を借りると，Parametrix method は Forward method と Backward method に分けられる．それらを基に，それぞれの数値計算手法を考える事が出来るが，今回，講演する内容は Forward method を用いた数値計算手法に限る．

sampling を行うことで，先行結果の Andersson-Kohatsu より，良い結果を得ることに成功した.

3. 主結果：空間に関する Importance sampling

次に，我々の主結果を説明する．特に，これは空間に関してのみ Importance sampling を行なった結果であり，この結果は分散を有限にするだけではなく，全てのモーメントを有限に導く．パラメータ $t>0$, $x\in\mathbf{R}^d$ で添え字付けた $\nu_{t,x}$ を $\mathbf{R}^d$ 上の符号付き測度とし，$\mathbf{R}^d$ 上のルベーグ測度に対して絶対連続と仮定する．この時，$\nu_{t,x}$ の全変動を $|\nu_{t,x}|$ とし，Radon-Nikodym 密度関数を $\varphi_{t,x}$ とする．さらに，$\nu_{t,x}$ は次の仮定を満たすものとする．

- 任意の $x,y\in\mathbf{R}^d$ に対して，関数 $t\mapsto\varphi_{t,x}(y)$ は $(0,\infty)$ 上で微分可能である．
- 任意の $t>0$, $x\in\mathbf{R}^d$ に対して，関数 $y\mapsto\partial_t\varphi_{t,x}(y)$ は $\mathbf{R}^d$ 上可積分である．
- 任意の $f\in C_0(\mathbf{R}^d)$ に対して，$s\to t$ の時，$\sup_{x\in\mathbf{R}^d}|\nu_{s,x}(f)-\nu_{t,x}(f)|\to 0$ を満たし，$t\to 0$ の時，$\sup_{x\in\mathbf{R}^d}|\nu_{t,x}(f)-\delta_x(f)|\to 0$ を満たす.
- 任意の $t>0$ に対して，$\sup_{(s,x)\in(0,t]\times\mathbf{R}^d}|\nu_{s,x}|(\mathbf{R}^d)<\infty$ を満たす.
- 任意の $t>0$, $x\in\mathbf{R}^d$ に対して，関数 $y\mapsto\varphi_{t,x}(y)$ は L^* の定義域に属する．

ここで，δ_x は $x\in\mathbf{R}^d$ に重みを置く Dirac 測度である．また，L^* は次のように与えられる．$(X_t)_{t\geq 0}$ から生成される $C_0(\mathbf{R}^d)$ 上の半群の生成作用素を L とすると，L^* は L を $C_b^2(\mathbf{R}^d)\cap L^2(\mathbf{R}^d)\cap\{Lf\in L^2(\mathbf{R}^d)\}$ に制限して得られる $L^2(\mathbf{R}^d)$ に関する共役作用素である．この時，上手く符号付き測度 $\nu_{t,x}$ を選ぶことで，次の結果を得る．

Theorem 3.0.1. 任意の $f\in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, $t\in(0,T]$, $p>0$ に対して，

$$\mathbf{E}[f(X_t)]=\mathbf{E}\Bigg[\underbrace{f(X_T^\pi)e^{\lambda T}\lambda^{-N_T}\frac{\varphi_{T-\tau_{N_T},X^\pi_{\tau_{N_T}}}(X_T^\pi)}{\overline{p}_{T-\tau_{N_T}}(X^\pi_{\tau_{N_T}},X_T^\pi)}\prod_{i=0}^{N_T-1}\frac{a_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}{\overline{p}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}}_{=Y}\Bigg],$$

$$\mathbf{E}[|Y|^p]\leq\|f\|_\infty^pC_{T,p}\exp\left\{-\lambda T(1-p)+C_{T,p}\lambda^{1-p}T\right\}<\infty.$$

ここで，$a_t(x,y)=(L^*-\partial_t)\varphi_{t,x}(y)$ である．

Theorem 3.0.2. 任意の $f\in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, $t\in(0,T]$, $p>0$ に対して，

$$\mathbf{E}[f(X_t)]=$$

$$\mathbf{E}\Bigg[\underbrace{f(X_T^\pi)\frac{\varphi_{T-\tau_{N_T},X^\pi_{\tau_{N_T}}}(X_T^\pi)}{\overline{p}_{T-\tau_{N_T}}(X^\pi_{\tau_{N_T}},X_T^\pi)}\prod_{i=0}^{N_T-1}\left(\frac{\varphi_{\tau_{i+1}-\tau_i,X^\pi_{\tau_i}}(X^\pi_{\tau_{i+1}})}{\overline{p}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}+\frac{a_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}{\lambda\overline{p}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}\right)}_{=Y}\Bigg],$$

$$\mathbf{E}[|Y|^p]\leq\|f\|_\infty^pC_{T,p}\exp\left\{-\lambda T+C_{T,p}\lambda^{1-p}T\right\}<\infty.$$

$p=2$ の時，Theorem 3.0.2 で得られた結果は Theorem 3.0.1 とは違い，2 次モーメントの上からの評価が λ に関して単調減少であることが分かる．パラメータ λ は任意だったので，Theorem 3.0.2 の結果は λ を大きくすることで，分散をいくらでも小さくする事が出来ることを意味している．ただし，λ を大きくすることで，計算時間も増えることに注意しなければならない.

References

[1] Andersson, P. and Kohatsu-Higa, A.: "Unbiased simulation of stochastic differential equations using parametrix expansions", To appear in Bernoulli, 2016.

[2] Bally, V. and Kohatsu-Higa, A.: "A probabilistic interpretation of the parametrix method", Ann. Appl. Probab., 25(6), 3095-3138, 2015.

Ergodic type limit theorem for fundamental solutions of Schrödinger operators

東北大学大学院理学研究科　　和田正樹

2016 年 12 月 22 日

1　準備及び背景にある問題

$\mathbb{M} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \{\mathbb{P}_x\}, \{X_t\})$ を生成作用素 $\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2}$ $(0 < \alpha \le 2)$ とする $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称 α-安定過程とする。このとき、ディリクレ形式が $\mathcal{E}(u, u) = (-\mathcal{L}u, u)_m$ として、推移確率密度関数 $p(t, x, y)$ が方程式 $\partial u/\partial t = \mathcal{L}u$ の基本解として与えられる。ここで、m は $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度、$(\cdot, \cdot)_m$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ における内積を表す。更に、グリーン核 $G(x, y) = \displaystyle\int_0^\infty p(t, x, y)dt$ により、以下の 3 条件が成立しているような非負測度 μ を考える。

$$
\lim_{a \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \le a} G(x, y)\mu(dy) = 0, \quad \lim_{R \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| > R} G(x, y)\mu(dy) = 0,
$$
$$
\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} G(x, y)\mu(dy)\mu(dx) < \infty.
$$

このとき、シュレディンガー形式を $\mathcal{E}^\mu(u, u) = \mathcal{E}(u, u) - \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu(dx)$ で定め、対応する作用素を $\mathcal{L}^\mu$ とする。方程式 $\partial u/\partial t = \mathcal{L}^\mu u$ にも基本解 $p^\mu(t, x, y)$ が存在することが知られている ([1])。今回の発表内容は、$p^\mu(t, x, y)$ の振る舞いが元の基本解 $p(t, x, y)$ のそれと異なるとき、どのように異なるのかを解析する一環で得られた結果である。

2　先行結果と主結果

もし μ が「十分小さい」ならば、直感的には $p^\mu(t, x, y)$ が元の $p(t, x, y)$ と似たような挙動をすること（基本解の安定性という）が予想される。そこで、まずは測度 μ の大きさを表すための指標を

$$
\lambda(\mu) = \inf \left\{ \mathcal{E}(u, u) \mid \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu(dx) = 1 \right\}
$$

で定める。[5] や [7] では、基本解の安定性が成立するための必要十分条件が、$\lambda(\mu) > 1$ を満たすこと、すなわち μ が劣臨界的であることが示された。その証明のカギとして、次の補題があったことを付け加える。

補題 2.1. ([4, Theorem 2.2])
以下の 3 条件は互いに同値である。

(1) μ は劣臨界的である。

(2) μ はゲージアブルである。すなわち、μ とルヴューズ対応する加法汎関数 A_t^μ としたとき $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)] < \infty.$

(3) $x \neq y$ のとき、$p^\mu(t,x,y)$ は時間について可積分である。すなわち、$\int_0^\infty p^\mu(t,x,y)dt < \infty.$

$\lambda(\mu) = 1$ のとき、μ は臨界的であるといい、$p^\mu(t,x,y)$ は元の $p(t,x,y)$ とは異なる挙動をすることがわかる。しかし、具体的な振る舞いが与えられているのは、元のマルコフ過程が 3 次元ブラウン運動、$(d,\alpha) = (3,2)$ の場合に限られている ([2, 5])。一般の安定過程の枠組みでは、まだ具体的な振る舞いが確立されてはいないが、補題 2.1 (2) に着目してファインマン・カッツ汎関数 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ ($p^\mu(t,x,y)$ の空間積分と同義) の時間無限大での発散の様子が以下のように得られている (尚、これは 2014 年の確率論シンポジウムで発表させていただいたものである)。

定理 2.2. ([6, Theorem 1.1], [8, Theorem 4.7])
μ は臨界的であるとする。$h(x)$ をシュレディンガー作用素 $\mathcal{L}^\mu$ における基底状態、すなわち $\mathcal{E}^\mu(h,h) = 0$ を満たす関数とするとき、基本解 $p^\mu(t,x,y)$ の空間積分は以下の漸近挙動をもつ。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{\alpha}-1}} \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)dy = \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{\alpha})} \cdot \frac{h(x)}{\langle\mu,h\rangle}, \qquad (1 < d/\alpha < 2).$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}} \cdot \frac{h(x)}{\langle\mu,h\rangle}, \qquad (d/\alpha = 2).$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)dy = \frac{\langle\mu,h\rangle h(x)}{(h,h)_m}, \qquad (d/\alpha > 2).$$

ただし、$\langle\mu,h\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\mu(dx)$ である。

3　主結果と証明方法の概略

今回の主結果は補題 2.1 (3) に着目して得られた、時間積分 $\int_0^t p^\mu(s,x,y)ds$ の $t\to\infty$ における増大度で次の通りである。

定理 3.1. ([9, Theorem 1.1])
μ は臨界的で $h(x)$ は定理 2.2 の通りとする。このとき基本解 $p^\mu(t,x,y)$ の時間積分は以下の漸近挙動をもつ。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{\alpha}-1}} \int_0^t p^\mu(s,x,y)ds = \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{\alpha})} \cdot \frac{h(x)h(y)}{\langle\mu,h\rangle^2}, \qquad (1 < d/\alpha < 2).$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}\int_0^t p^\mu(s,x,y)ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}}\cdot\frac{h(x)h(y)}{\langle\mu,h\rangle^2}, \qquad (d/\alpha=2).$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p^\mu(s,x,y)ds = \frac{h(x)h(y)}{(h,h)_m}, \qquad (d/\alpha>2).$$

一般に $p^\mu(t,x,y)/h(x)h(y)$ は、ドゥーブの h-変換によるマルコフ過程の推移確率密度関数を表す。それ故、定理 3.1 にある式の両辺を $h(x)h(y)$ で割ることで、変換後のマルコフ過程におけるエルゴード型定理が得られる。特に $d/\alpha>2$ の場合は変換後のマルコフ過程が正再帰的であるからエルゴード定理そのものである。他方、$d/\alpha\le 2$ の場合は変換後のマルコフ過程が零再帰的である。Pinchover [3, Theorem 1.2] では零再帰的な拡散過程について、推移確率密度関数の長時間平均が消えることを示しているが、定理 3.1 では t よりも小さいオーダーをもつ関数で「平均」をとっているため、非自明な結果が得られている。

証明方法は、定理 2.2 のそれを改変したものである。定理 2.2 は、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)] &= \mathbb{E}_x\left[1+\int_0^t \exp(A_s^\mu)dA_s^\mu\right]\\ &= 1+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(s,x,y)\mu(dy)ds = 1+\int_0^t p_s^\mu\mu(x)ds\end{aligned}$$

に着目し、レゾルベント $G_\beta^\mu\mu(x)$ の $\beta\to 0$ とした際の振る舞いを μ による時間変更のマルコフ過程を用いて求め、更にタウバー型定理を適用して示した。定理 3.1 では、この方法を 1 節で挙げた μ が満たすべき条件を満たしている別の測度 ν に対して得られる $G_\beta^\mu\nu(x)$ へと拡張し、特に $\nu(dy)=p^\mu(\epsilon,x,y)m(dy)$ とすれば良い。

参考文献

[1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.-M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, In Random partial differential equations (Ober-wolfach, 1989), Birkhäuser, Inter. Ser. Num. Math. 102, 1—31, (1991).

[2] Grigor'yan, A.: Heat kernels on weighted manifolds and applications, Contemp. Math. 338, 93–191, (2006).

[3] Pinchover, Y.: Large time behavior of the heat kernel and the behavior of the Green function near criticality for non-symmetric elliptic operators, J. Funct. Anal. 104, 54–70, (1992).

[4] Takeda, M.: Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 2729-2738, (2006).

[5] Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39, 85–94, (2007).

[6] Takeda, M and Wada, M.: Large time asymptotics of Feynman-Kac functionals for symmetric stable processes, Math. Nachr. 289, No.16, 2069–2082, (2016).

[7] Wada, M.: Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions, Tohoku Math. Journal 66, 523–537, (2014).

[8] Wada, M.: Feynman-Kac penalization problem for critical measures of symmetric α-stable processes, Elect. Comm. in Probab. 21, no.79, 1–14, (2016).

[9] Wada, M.: Ergodic type limit theorem for fundamental solutions of Schrödinger operators, preprint.

Potential theory of subordinate killed Brownian motion

Panki Kim **Renming Song** and **Zoran Vondraček**

Abstract

Let W^D be a killed Brownian motion in a domain $D \subset \mathbb{R}^d$ and S an independent subordinator with Laplace exponent ϕ. The process Y^D defined by $Y_t^D = W_{S_t}^D$ is called a subordinate killed Brownian motion. It is a Hunt process with infinitesimal generator $-\phi(-\Delta|_D)$, where $\Delta|_D$ is the Dirichlet Laplacian.

In the PDE literature, the operator $-(-\Delta|_D)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0,2)$, which is the generator of the subordinate killed Brownian motion via an $\alpha/2$-stable subordinator, also goes under the name of spectral fractional Laplacian, see [1] and the references therein. This operator has been of interest to quite a few people in the PDE circle. For instance, a version of Harnack inequality was also shown in [6].

In this talk we discuss the potential theory of Y^D under a weak scaling condition on the derivative of ϕ.

For any Borel set $B \subset D$, let $\tau_B = \inf\{t > 0 : Y_t^D \notin B\}$ be the exit time of Y^D from B.

Definition 0.1 A real-valued function f defined on D is said to be *harmonic* in an open set $V \subset D$ with respect to Y^D if for every open set $U \subset \overline{U} \subset V$,

$$\mathbb{E}_x\left[\left|f(Y_{\tau_U}^D)\right|\right] < \infty \quad \text{and} \quad f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(Y_{\tau_U}^D)\right] \qquad \text{for all } x \in U. \tag{0.1}$$

Under some mild assumptions on ϕ and D, we show that non-negative harmonic functions of Y^D satisfy the following scale invariant Harnack inequality, which extends [5, 6].

Theorem 0.2 (Harnack inequality) *Let $D \subset \mathbb{R}^d$ be either a bounded Lipschitz domain or an unbounded domain consisting of all the points above the graph of a globally Lipschitz function. There exists a constant $C > 0$ such that for any $r \in (0,1]$ and $B(x_0, r) \subset D$ and any function f which is non-negative in D and harmonic in $B(x_0, r)$ with respect to Y^D, we have*

$$f(x) \le C f(y), \qquad \text{for all } x, y \in B(x_0, r/2).$$

The proof of the Harnack inequality is modeled after the powerful method developed in [2].

Subsequently we present two types of scale invariant boundary Harnack principles with explicit decay rates for non-negative harmonic functions of Y^D. The first boundary Harnack principle deals with a $C^{1,1}$ domain D and non-negative functions which are harmonic near the boundary of D.

For any open set $U \subset \mathbb{R}^d$ and $x \in \mathbb{R}^d$, we use $\delta_U(x)$ to denote the distance between x and the boundary ∂U.

Theorem 0.3 *Let D be a bounded $C^{1,1}$ domain, or a $C^{1,1}$ domain with compact complement or a domain consisting of all the points above the graph of a bounded globally $C^{1,1}$ function. Let (R, Λ) be the $C^{1,1}$ characteristics of D. There exists a constant $C = C(d, \Lambda, R, \phi) > 0$ such that for any $r \in (0, R]$, $Q \in \partial D$, and any non-negative function f in D which is harmonic in $D \cap B(Q, r)$ with respect to Y^D and vanishes continuously on $\partial D \cap B(Q, r)$, we have*

$$\frac{f(x)}{\delta_D(x)} \le C \, \frac{f(y)}{\delta_D(y)} \qquad \text{for all } x, y \in D \cap B(Q, r/2). \tag{0.2}$$

In particular, we see from the theorem above that if a non-negative function which is harmonic with respect to Y^D vanishes near the boundary, then its rate of decay is proportional to the distance to the boundary. This shows that near the boundary of D, Y^D behaves like the killed Brownian motion W^D.

The second one is for a more general domain D and non-negative functions which are harmonic near the boundary of an interior open subset of D.

Theorem 0.4 *Let $D \subset \mathbb{R}^d$ be either a bounded Lipschitz domain or an unbounded domain consisting of all the points above the graph of a globally Lipschitz function. There exists a constant $b = b(\phi, d) > 2$ such that, for every open set $E \subset D$ and every $Q \in \partial E \cap D$ such that E is $C^{1,1}$ near Q with characteristics $(\delta_D(Q) \wedge 1, \Lambda)$, the following holds: There exists a constant $C = C(\delta_D(Q) \wedge 1, \Lambda, \phi, d) > 0$ such that for every $r \le (\delta_D(Q) \wedge 1)/(b + 2)$ and every non-negative function f on D which is regular harmonic in $E \cap B(Q, r)$ with respect to Y^D and vanishes on $E^c \cap B(Q, r)$, we have*

$$\frac{f(x)}{\phi(\delta_E(x)^{-2})^{-1/2}} \le C \frac{f(y)}{\phi(\delta_E(y)^{-2})^{-1/2}}\,, \qquad x, y \in E \cap B(Q, 2^{-6}(1 + (1 + \Lambda)^2)^{-2} r)\,,$$

The obtained decay rates in the above two theorem are not the same, reflecting different boundary and interior behaviors of Y^D. Theorem 0.4 is new even in the case of a stable subordinator. The method of proof of Theorem 0.4 is quite different from that of Theorem 0.3. It relies on a comparison of the Green functions of subprocesses of Y^D and X for small interior subsets of D, and on some already available potential-theoretic results for X obtained in [3].

This is a joint work with Renming Song (University of Illinois) and Zoran Vondraček (University of Zagreb).

References

[1] M. Bonforte, Y. Sire and J. L. Vázquez. Existence, uniqueness and asymptotic behaviour for fractional porous medium equations on bounded domains. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **35** (2015), 5725–5767.

[2] P. Kim and A. Mimica. Harnack inequalities for subordinate Brownian motions. *Elect. J. Probab.* **17** (2012), #37.

[3] P. Kim and A. Mimica. Green function estimates for subordinate Brownian motions: stable and beyond. *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 4383–4422.

[4] R. Song and Z. Vondraček. Potential theory of subordinate killed Brownian motion in a domain. *Probab. Theory Related Fields* **125** (2003), 578–592.

[5] R. Song and Z. Vondraček. Potential theory of subordinate Brownian motion. In *Potential Analysis of Stable Processes and its Extensions*, Lecture Notes in Math., vol. 1980, (2009), 87–176.

[6] P. R. Stinga and C. Zhang. Harnack inequality for fractional non-local equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **33** (2013), 3153–3370.

縮小されたブラウン媒質中の拡散過程

鈴木 由紀 （慶大医）

本講演では, $\mathbb{R}$ 上の縮小されたブラウン媒質の中を動く拡散過程の挙動について報告する. $\mathbb{W}$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 w で $w(0)=0$ を満たすもの全体とし, P を $\mathbb{W}$ 上の Wiener 測度とする. Ω を $[0,\infty)$ 上で定義された連続関数全体とし, $\omega \in \Omega$ に対し $X(t)=X(t,\omega)=\omega(t)$ とおく. $w \in \mathbb{W}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し, Ω 上の確率測度 $P_w^{x_0}$ を $\{X(t), t \geq 0, P_w^{x_0}\}$ が x_0 から出発する生成作用素

$$\mathcal{L}_w = \frac{1}{2} e^{w(x)} \frac{d}{dx} \left(e^{-w(x)} \frac{d}{dx} \right)$$

をもつ拡散過程となるものとして定義する. $0 < c_1 < 1/4$, $c_2 \geq 1/4$ とし, $w \in \mathbb{W}$ と $\lambda > 0$ に対し, $w_\lambda \in \mathbb{W}$ を

$$w_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-c_1 \lambda} w(x) & x \leq 0, \\ \lambda e^{-c_2 \lambda} w(x) & x > 0, \end{cases}$$

により定義する. さらに, $\mathbb{W} \times \Omega$ 上の確率測度 $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}$ を $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}(dwd\omega) = P(dw) P_{w_\lambda}^{x_0}(d\omega)$ により定義する. $\lambda > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し $\{X(t), t \geq 0, \mathcal{P}_\lambda^{x_0}\}$ は確率空間 $(\mathbb{W} \times \Omega, \mathcal{P}_\lambda^{x_0})$ 上で定義された過程とみなされる. 本講演では, $\{X(t), t \geq 0, \mathcal{P}_\lambda^0\}$ の時刻 $t = e^\lambda$ での挙動 $(\lambda \to \infty)$ について報告する. なお, $0 < c_1, c_2 < 1/4$ の場合, ここで扱うモデルは, [S] により導入されたモデルに対応づけられる.

$\widetilde{c}_1 = 2c_1 (< 1/2)$ とおき, $w \in \mathbb{W}$, $\lambda > 0$ に対し $\tau_\lambda w \in \mathbb{W}$ を

$$(\tau_\lambda w)(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} w(e^{\widetilde{c}_1 \lambda} x) & x \leq 0, \\ \lambda^{-1} e^{(c_2 - 1/4)\lambda} w(e^{(1/2)\lambda} x) & x > 0, \end{cases}$$

により定義する. すると $\{\tau_\lambda w_\lambda, P\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{w, P\}$ が成り立つ. $w \in \mathbb{W}, \rho \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sigma(\rho) = \sigma(\rho, w) = \sup\{x < 0 : w(x) = \rho\}$$

と定義し,

$$\mathbb{A} = \{w \in \mathbb{W} : \sigma(1/2 - \widetilde{c}_1) > \sigma(\widetilde{c}_1 - 1/2)\}, \ \mathbb{B} = \{w \in \mathbb{W} : \sigma(1/2 - \widetilde{c}_1) < \sigma(\widetilde{c}_1 - 1/2)\}$$

とおく. さらに $\lambda > 0$ に対し,

$$\mathbb{A}_\lambda = \{w \in \mathbb{W} : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{A}\}, \quad \mathbb{B}_\lambda = \{w \in \mathbb{W} : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{B}\}$$

とおくと, $P\{\mathbb{A}_\lambda\} = P\{\mathbb{A}\} = 1/2$, $P\{\mathbb{B}_\lambda\} = P\{\mathbb{B}\} = 1/2$ が成り立つ.

ここで, $\omega \in \Omega$, $\lambda > 0$, $t \geq 0$ に対し,

$$X_\lambda(t) = e^{-(1/2)\lambda} X(e^\lambda t), \qquad a_\lambda(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{(0,\infty)}(X_\lambda(s)) ds,$$
$$a_\lambda^{-1}(t) = \inf\{s > 0 : a_\lambda(s) > t\}, \quad G_\lambda(t) = X_\lambda(a_\lambda^{-1}(t)),$$

とおく. すると $w \in \mathbb{W}, \lambda > 0$ に対し $\{G_\lambda(t), t \geq 0, P_{w_\lambda}^0\}$ は 0 から出発する $[0,\infty)$ 上の反射壁 Brown 運動になる.

定理 1 任意の $T>0$ と $\varepsilon>0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{1,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\right\}=1.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{1,\lambda,\varepsilon}&=\left\{w\in\mathbb{W}:p_{1,\lambda,\varepsilon}(w)>1-\varepsilon\right\},\\
p_{1,\lambda,\varepsilon}(w)&=P^0_{w_\lambda}\left\{\sup_{0\le t\le T}|X_\lambda(t)-G_\lambda(t)|<\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

次に, $w\in\mathbb{W}$ に対し

$$\begin{aligned}
\zeta&=\zeta(w)=\sup\{x<0:w(x)-\min_{x\le y\le 0}w(y)=1-2\widetilde{c}_1\},\\
\ell&=\ell(w)=\begin{cases}\sigma(1/2-\widetilde{c}_1,w) & w\in\mathbb{A},\\ \zeta(w) & w\in\mathbb{B},\end{cases}\\
V&=V(w)=\min_{\ell\le x\le 0}w(x),
\end{aligned}$$

とおき, $b=b(w)\in(\ell,0)$ を $w(b)=V$ により定義する. ほとんどすべての w に対し, $b(w)$ はただ 1 つに定められる.

定理 2 任意の $\varepsilon>0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{2,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\right\}=1.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{2,\lambda,\varepsilon}&=\left\{w\in\mathbb{W}:p_{2,\lambda,\varepsilon}(w)>1-\varepsilon\right\},\\
p_{2,\lambda,\varepsilon}(w)&=P^0_{w_\lambda}\left\{|e^{-\widetilde{c}_1\lambda}X(e^\lambda)-b(\tau_\lambda w_\lambda)|<\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

さらに, $\omega\in\Omega$ に対し $\underline{X}(t)=\underline{X}(t,\omega)=\min_{0\le s\le t}X(s,\omega)$, $\overline{X}(t)=\overline{X}(t,\omega)=\max_{0\le s\le t}X(s,\omega)$ とおき, 我々の過程の最小値過程 $\{\underline{X}(t),t\ge0,\mathcal{P}^0_\lambda\}$ と最大値過程 $\{\overline{X}(t),t\ge0,\mathcal{P}^0_\lambda\}$ の $t=e^\lambda$ での挙動 $(\lambda\to\infty)$ について調べる. $w\in\mathbb{W}$, $\gamma\in\mathbb{R}$ に対して

$$\zeta(\gamma)=\zeta(\gamma,w)=\sup\{x<0:w(x)-\min_{x\le y\le 0}w(y)=1-2\widetilde{c}_1+\gamma\}$$

とおく. ただし $\sup\emptyset=0$ とする. $\zeta(0)=\zeta$ である.

定理 3 任意の $\varepsilon>0$ に対して以下が成立する.

(i) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{3,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\right\}=1.$

(ii) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{4,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\right\}=1.$

ここで,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon}=\left\{w\in\mathbb{W}:p_{i,\lambda,\varepsilon}(w)>1-\varepsilon\right\},\quad i=3,4,\\
&p_{3,\lambda,\varepsilon}(w)=P^0_{w_\lambda}\left\{\sigma(1/2-\widetilde{c}_1+\varepsilon,\tau_\lambda w_\lambda)<e^{-\widetilde{c}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda)<\sigma(1/2-\widetilde{c}_1-\varepsilon,\tau_\lambda w_\lambda)\right\},\\
&p_{4,\lambda,\varepsilon}(w)=P^0_{w_\lambda}\left\{\zeta(\varepsilon,\tau_\lambda w_\lambda)<e^{-\widetilde{c}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda)<\zeta(-\varepsilon(\lambda),\tau_\lambda w_\lambda)\right\},
\end{aligned}$$

$\varepsilon(\lambda) > 0, \lambda > 0,$ は $\lim_{\lambda\to\infty}\varepsilon(\lambda) = 0,\ \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varepsilon(\lambda) = \infty,$ を満たす任意の関数である.

$w \in \mathbb{W}$ に対し,

$$H = H(w) = \max_{\ell \le x \le 0} w(x)$$

とおく. $w \in \mathbb{A}$ ならば $H(w) = 1/2 - \widetilde{c}_1$ であり, $w \in \mathbb{B}$ ならば $0 < H(w) < 1/2 - \widetilde{c}_1$ である.

定理 4 任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下が成立する.
(i) $\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{5,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\right\} = 1.$
(ii) $\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{6,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\right\} = 1.$
ここで,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon} = \left\{w \in \mathbb{W} : p_{i,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\right\}, \quad i = 5, 6,\\
&p_{5,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\left\{|e^{-(1/2)\lambda}\overline{X}(e^\lambda) - \max_{0\le t\le 1} G_\lambda(t)| < \varepsilon\right\},\\
&p_{6,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\left\{|\lambda^{-1}\log\overline{X}(e^\lambda) - H(\tau_\lambda w_\lambda) - \widetilde{c}_1| < \varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

上記の定理 $1 \sim 4$ は, [KST], [KS] による片側ブラウンポテンシャルをもつ拡散過程の挙動に関する結果に対応するものである.

講演では, $c_1 = c_2 = 1/4$ の場合, また $c_1, c_2 > 1/4$ の場合の対応する過程の挙動についても報告する.

参考文献

[B] Brox, T. (1986). A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium. *Ann. Probab.* **14,** 1206–1218.

[KS] Kawazu, K. and Suzuki, Y. (2006). Limit theorems for a diffusion process with a one-sided Brownian potential. *Journal of Applied Probability* **43,** 997–1012.

[KST] Kawazu, K., Suzuki, Y. and Tanaka, H. (2001). A diffusion process with a one-sided Brownian potential. *Tokyo J. Math.* **24,** 211–229.

[KTT] Kawazu, K., Tamura, Y. and Tanaka, H. (1989). Limit theorems for one-dimensional diffusions and random walks in random environments. *Probab. Theory Related Fields* **80,** 501–541.

[S] Suzuki, Y. (2016). A diffusion process with a random potential consisting of two contracted self-similar processes. *preprint.*

Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation

横山 聡　（東大数理）
email: satoshi2@ms.u-tokyo.ac.jp

$D \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界 ∂D を持つ有界な領域とし、次の確率偏微分方程式の解 $u = u^\varepsilon(t,x)$ を考える:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \Delta u^\varepsilon + \varepsilon^{-2}\left(f(u^\varepsilon) - \displaystyle⨍_D f(u^\varepsilon)\right) + \alpha \dot{w}^\varepsilon(t), & \text{in } D \times \mathbb{R}_+, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0, & \text{on } \partial D \times \mathbb{R}_+, \\ u^\varepsilon(0,\cdot) = g^\varepsilon(\cdot), & \text{in } D, \end{cases}$$

ここで、$\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, ν は ∂D 上の内向き法線ベクトル, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, また、

$$⨍_D f(u^\varepsilon) = \frac{1}{|D|}\int_D f(u^\varepsilon(t,x))dx,$$

g^ε は連続関数で、

$$(2)\qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g^\varepsilon(x) = \chi_{\gamma_0},$$

in $L^2(D)$, ただし、γ_0 は D 上の境界がない有限個の連結成分から成る滑らかな超曲面で $\gamma_0 = \partial D_0$ となるもの（D_0 は滑らかで $\overline{D}_0 \subset D$), χ_γ は x が γ の外側 (内側) にあるとき, $\chi_\gamma(x) = +1(-1)$ なるものである。$\dot{w}^\varepsilon(t)$ はある $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された $w^\varepsilon(t) \equiv w^\varepsilon(t,\omega) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ の t についての微分で、$w^\varepsilon(t)$ は 1 次元 Brown 運動 $w(t)$ に $\varepsilon \downarrow 0$ で適当な意味で収束するものである。反応項 f は $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, bistable で、以下を満たすとする:

(i) $f(\pm 1) = 0$, $f'(\pm 1) < 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(u)du = 0$,

(ii) f has only three zeros ± 1 and one another between ± 1,

(iii) there exists $\bar{c}_1 > 0$ such that $f'(u) \le \bar{c}_1$ for every $u \in \mathbb{R}$.

方程式 (1) で $\alpha = 0$、かつ、f の平均化項がない場合は Allen-Cahn 方程式である。$\alpha = 0$ であれば, (1) の解 u^ε の体積は保存される:　$\exists C \in \mathbb{R}$ s.t.

$$(3)\qquad \frac{1}{|D|}\int_D u^\varepsilon(t,x)dx = C,$$

体積保存型 Allen-Cahn 方程式でノイズがない場合 ((1) with $\alpha = 0$) の $\varepsilon \downarrow 0$ での sharp interface limit は [1] で論じられている。我々はノイズあり（$\alpha \neq 0$）の場合を考え、その sharp interface limit を論じる。講演では以下について紹介する予定である：

1. 以下に述べる (4) の解が一意的に存在する条件の下, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき、(1) の解 $u^\varepsilon(t)$ は、g^ε が (2) を満たすなら、(4) に従う γ_t にある意味で収束する。
2. (4) の解は $D \subset \mathbb{R}^2$, γ_t が convex である限り一意的に存在する。

$$V = \kappa - \fint_{\gamma_t} \kappa + \frac{\alpha|D|}{2|\gamma_t|} \circ \dot{w}(t), \quad t \in [0, \sigma], \tag{4}$$

σ: stopping time で $\sigma > 0$ (a.s.), V: γ_t の inward normal velocity, κ : γ_t の mean curvature (multiplied by $n-1$), $\fint_{\gamma_t} \kappa = \frac{1}{|\gamma_t|} \int_{\gamma_t} \kappa d\bar{s}$, $\dot{w}(t)$: white noise process, $\circ$: Stratonovich sense。
本結果 ([2]) は舟木直久氏との共同研究である。

[1] X. Chen, D. Hilhorst, E. Logak, *Mass conserving Allen-Cahn equation and volume preserving mean curvature flow*, Interfaces Free Bound., **12** (2010), 527–549.

[2] T. Funaki, S. Yokoyama, *Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation*, arXiv:1610.01263.

Sharp interface limit for the stochastic Allen-Cahn equations

確率アレン・カーン方程式に対する鋭敏な界面極限

李　嘉衣
東京大学大学院　数理科学研究科

アレン・カーン方程式とは、双安定な反応項 f を持つ反応拡散方程式のことである。この方程式は界面が形成され、それが時間発展する様子を表現する。特に相分離の過程、界面ダイナミクスならびに相転移現象と密接に関わるモデルであり、物理的な背景を基礎に数多くの研究がなされてきた。確率アレン・カーン方程式は、このアレン・カーン方程式に外的ノイズ項を付加した確率偏微分方程式である。本講演では十分小さい $\varepsilon > 0$ でパラメータ付けされた確率アレン・カーン方程式

$$\partial_t u^\varepsilon(t,x) = \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f(u^\varepsilon) + \dot{W}^\varepsilon(t,x),\ t>0,\ x\in D,$$

について考察する。ここで $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ は適当な領域とし、何かしらの境界条件を持つ。本講演では $\int_{-1}^{1} f(u)du = 0$ を仮定し、更に簡単のため f の安定点は ± 1 とする。まずはノイズのない場合（$W^\varepsilon \equiv 0$）を考えよう。初期値では拡散項の影響が非常に弱いため、双安定な反応項 f により、解は ± 1 の二つの相に分離される。その境界を界面と呼び、界面が形作られる過程を界面の生成という。その後、界面の近傍では反応項と拡散項が釣り合い、適当な時間のスケール変換をとると $O(1)$ の速度で運動することが知られている。このスケール変換のオーダーは $\varepsilon > 0$ に依存し、空間次元や反応項 f の条件によって変化させる必要がある。界面の形状も ε で特徴付けられており、特にその幅は $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ である。そのため $\varepsilon \to 0$ という極限を取った時、極限では鋭敏な形状の界面が一瞬で生成され、更にそれが運動するような挙動が観察される。このことから、この極限のことを鋭敏な界面極限と呼ぶ。本研究の目的は、確率アレン・カーン方程式の解に対する鋭敏な界面極限を与え、界面の生成、界面が運動するための時間スケール、極限で導出される界面運動を記述する方程式について考察を行うことである。

先行結果と背景

空間 1 次元、つまり $D = \mathbb{R}$ で外的ノイズ項がない場合については Chen[1] などによって研究された。Chen[1] は $\partial_t u^\varepsilon(t,x) = \partial_{xx} u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f(u^\varepsilon)$ なる 1 次元アレン・カーン方程式の鋭敏な界面極限について考察を行い、界面の挙動を (1) 二相への分離 (2) 準安定パターンの生成 (3) 界面の超微速運動 (4) 界面同士の消滅、の 4 段階に分類した。特に本講演では (1) から (3) の段階について論ずる。また (3) で言及した超微速運動に対しては、$O(1)$ の速度で界面運動するための時間スケールが $O(\exp(\frac{C}{\varepsilon}))$ と言った非常に長いものとなることに注意されたい。一方で、舟木 [2] では、外的ノイズ項として $\dot{W}^\varepsilon(t,x) := \varepsilon^\gamma a(x)\dot{W}(t,x)$ を採用した 1 次元確率アレン・カーン方程式に対して界面の挙動の考察を行なっている。ここで $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\dot{W}(t,x)$ は $\mathbb{R}$ 上の時空ホワイトノイズである。この結果では $\bar{u}^\varepsilon(t,x) = u^\varepsilon(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}}t,x)$ とした時に、$x<\xi$ の時に -1、$x>\xi$ の時に 1 をとる関数 χ_ξ と確率過

程 ξ_t を用いて $\bar{u}^\varepsilon \Rightarrow \chi_{\xi_t}$ が示された。この ξ_t を時間発展する界面と見做すことが出来る。更に界面 $\xi_t \in \mathbb{R}$ は、α_1 と α_2 を f による定数、B_t を 1 次元ブラウン運動として

$$d\xi_t = \alpha_1 a(\xi_t) dB_t + \alpha_2 a(\xi_t) a'(\xi_t) dt, \tag{0.1}$$

なる確率微分方程式に従う。このことから、適切な時間スケールは $O(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}})$ であり、上で述べた (3) の超微速運動のものに比べて非常に短い時間スケールとなることが分かる。この差異はノイズの寄与に他ならず、以上のように界面運動は確率微分方程式によって記述される。

また空間多次元、すなわち $d \geq 2$ の場合の先行研究についても触れておく。空間が多次元かつノイズ項がない偏微分方程式の場合は、例えば de Mottoni-Schatzman [4] などによって考察された。多次元の場合、界面の形状は領域内の閉曲面（2 次元であれば閉曲線）として表せる。彼らは時間スケールを変化させずとも界面運動が $O(1)$ で観察でき、界面の形状の時間発展は平均曲率流 $V_t = \kappa$ として導出されることを示した。ノイズ項を持つ場合は舟木 [3] によって考察されている。ノイズ項は $\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \dot{w}_t^\varepsilon$ と取り w_t^ε は a.s. で滑らかかつ 1 次元ブラウン運動に収束するような確率過程である。彼は特に 2 次元の場合について解析し、偏微分方程式の時と同様、時間スケールに変化はなく界面の挙動はノイズの寄与が残った平均曲率流 $V_t = \kappa + \alpha w_t$, で記述されることを示した。ここで V_t は外向きの界面の速度であり w_t は 1 次元ブラウン運動、α は f による定数である。

1 次元アレン・カーン方程式に対する界面の生成

まず 1 次元の場合の結果について述べる。設定は舟木 [2] と同じであるが、初期値は

$$\begin{cases} \text{(i)} \|u_0^\varepsilon\|_\infty + \|u_0^{\varepsilon\prime}\|_\infty + \|u_0^{\varepsilon\prime\prime}\|_\infty \leq C_0, \\ \text{(ii)} \varepsilon > 0 \text{ と独立な} \xi_0 \in [-1,1] \text{ が唯一つ存在し、} u_0^\varepsilon(\xi_0) = 0, \\ \text{(iii)} |u_0^\varepsilon(x)| \geq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \ (|x-\xi_0| \geq C'\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \\ \text{(iv)} |u_0^\varepsilon(x) - 1| + |u_0^{\varepsilon\prime}(x)| + |u_0^{\varepsilon\prime\prime}(x)| \leq \varepsilon^\kappa C_\mu \exp(-\frac{\sqrt{\mu}x}{2}) \ (x \geq 1), \\ \text{(v)} |u_0^\varepsilon(x) + 1| + |u_0^{\varepsilon\prime}(x)| + |u_0^{\varepsilon\prime\prime}(x)| \leq \varepsilon^\kappa C_\mu \exp(\frac{\sqrt{\mu}x}{2}) \ (x \leq -1), \end{cases} \tag{0.2}$$

を満たすものと仮定する。

定理 0.1. 初期値 u_0^ε が *(0.2)* を満たし, $\bar{u}^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}}t, x)$ とおく。この時、確率変数 $C(\omega) \in L^\infty(\Omega)$ と確率過程 $\{\xi_t^\varepsilon\}$ が存在し、

$$P\Big(\text{任意の } t \in [C(\omega)\varepsilon^{2\gamma+\frac{3}{2}}|\log\varepsilon|, T] \text{ に対し } \|\bar{u}^\varepsilon(t,\cdot) - \chi_{\xi_t^\varepsilon}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta\Big) \to 1 \quad (\varepsilon \to 0),$$

が任意の $\delta > 0$ と $T > 0$ について成立する。 さらに確率過程 ξ_t^ε の $C([0,T],\mathbb{R})$ 上での分布は ξ_t の分布に弱収束し、ξ_t は確率微分方程式 *(0.1)* に従う。

定理 0.1 により、界面はノイズがない場合と同じ $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ の時間までに生成され、界面運動に移行することがわかる。証明の大筋は、解 u^ε のエネルギー評価による。

多次元アレン・カーン方程式に対する界面の生成

次に多次元アレン・カーン方程式に対して界面の生成を証明する。ノイズ項として空間方向に滑らかな Q-ブラウン運動 $W^Q(t,x)$ を用意し、$\varepsilon^\gamma \dot{W}^Q(t,x)$ を採用した。

定理 0.2. 解 u^ε の初期値が $\|u_0\|_\infty + \|u_0'\|_\infty + \|u_0''\|_\infty \le C_0$ を満たす時、以下の収束を得る。

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0} P($全ての $x \in D$ に対して $-1-\varepsilon^\kappa \le u^\varepsilon(x, C_1\varepsilon|\log\varepsilon|) \le 1+\varepsilon^\kappa) = 1$

(ii) $\lim_{\varepsilon\to 0} P($全ての $u_0(x) \ge \varepsilon^{1-C_1\mu}$を満たす $x \in D$ に対して $u^\varepsilon(x, C_1\varepsilon|\log\varepsilon|) \ge 1-\varepsilon^\kappa) = 1$

(iii) $\lim_{\varepsilon\to 0} P($全ての $u_0(x) \le \varepsilon^{1-C_1\mu}$を満たす $x \in D$ に対して $u^\varepsilon(x, C_1\varepsilon|\log\varepsilon|) \le -1+\varepsilon^\kappa) = 1.$

この場合も $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ の非常に短い時刻において界面が生成されることを示した。定理 0.2 を示す過程において、偏微分方程式の最大値原理を応用し、確率偏微分方程式の比較定理を示した。これにより優解と劣解が構成でき、定理が示される。

ディリクレ境界条件を持つ場合

最後に再び空間 1 次元の場合を考察する。領域は $D = [-1, 1]$ なる区間を考え、ディリクレ境界条件 $u^\varepsilon(\pm 1) = \pm 1$ を持つような場合を扱う。外的ノイズ項は $\dot{W}^\varepsilon(t,x) := \sqrt{2}\varepsilon^\gamma \dot{W}(t,x)$ とし、$\dot{W}(t,x)$ は区間 $[-1,1]$ 上の時空ホワイトノイズとする。今、確率微分方程式 (0.1) に形式的に $a \equiv 1$ を代入すると、$\xi_t = \alpha_1 B_t$ となる。更に、発見的な議論ではあるが、ディリクレ境界条件のため極限における界面の運動は反射壁を持つブラウン運動になることが期待される。

定理 0.3. $C([0,T], L^2[-1,1])$ 上の確率測度 P^ε を $\bar{u}^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}}t, x)$ の分布とし、P を確率過程 $\chi_{\sqrt{2}B(\alpha_1^2 t)}$ の分布とする。ここで $B(t)$ は区間 $[-1,1]$ 上の反射ブラウン運動であり、定数 α_1 は f によって定まる。このとき、$\varepsilon \to 0$ で P^ε は P に $C([0,T], L^2[-1,1])$ 上で弱収束する。

以上のように、ディリクレ境界条件を持つ場合であっても、適切な時間スケールのオーダーは $O(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}})$ であり、予想した通り界面の挙動は反射壁ブラウン運動となる。しかしながら境界付近における界面の挙動の解析は、その特異性から容易ではない。我々はこの解を $L^2[-1,1]$-値のマルコフ過程と見做し、この解に対応するディリクレ形式の、$\chi_{\sqrt{2}B(\alpha_1^2 t)}$ に対応する別のディリクレ形式へのモスコ収束を示した。この議論と確率測度の緊密性から、極限 $\varepsilon \to 0$ における界面の挙動を特定した。

参考文献

[1] X. Chen, *Generation, propagation, and annihilation of metastable patterns*, J. Differential Equations, **206**, no. 2, 399-437 (2004).

[2] T. Funaki, *The scaling limit for a stochastic PDE and the separation of phases*, Probab. Theory Related Fields, **102**, no. 2, 221-288 (1995).

[3] T. Funaki, *Singular limit for stochastic reaction-diffusion equation and generation of random interfaces.* Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **15** (1999), no. 3, 407-438.

[4] P. de Mottoni, M. Schatzman, *Geometrical evolution of developed interfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 5, 1533-1589.

Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise *

Nobuaki Naganuma (Osaka University)

In this talk, we prove local well-posedness of the stochastic complex Ginzburg-Landau equation with a complex-valued space-time white noise ξ in the three-dimensional torus $\mathbf{T}^3 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^3$

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \quad \partial_t u = (\mathsf{i}+\mu)\triangle u + \nu(1-|u|^2)u + \xi \qquad \text{on } (0,\infty)\times\mathbf{T}^3, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \end{cases}$$

Here, $\mathsf{i} = \sqrt{-1}$, μ is a positive constant and ν is a complex constant.

Before starting our discussion, we introduce notation. We denote by $\mathcal{D}$ the space of all smooth functions on $\mathbf{T}^3$ and by $\mathcal{D}'$ its dual. For every $\alpha \in \mathbf{R}$, $1 \le p, q \le \infty$, we denote by $\mathcal{B}^\alpha_{p,q}$ the Besov space, which is defined by the completion of the space of smooth functions on $\mathbf{T}^3$ under the Besov norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^\alpha_{p,q}}$. To define the Besov norm, we use the Littlewood-Paley block $\{\triangle_m = \mathcal{F}^{-1}\rho_m\mathcal{F}\}_{m=-1}^\infty$, where $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}^{-1}$ are the Fourier transformation and its inverse, respectively, and $\{\rho_m\}_{m=-1}^\infty$ is the dyadic partition of unity. For notational simplicity, we set the Hölder-Besov space $\mathcal{C}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha_{\infty,\infty}$ and denote by $C_T\mathcal{C}^\alpha$ the space of all $\mathcal{C}^\alpha$-valued continuous functions on $[0,T]$ for every $T > 0$. Next we introduce the notion of paradifferential calculus. For every $f \in \mathcal{C}^\alpha$ and $g \in \mathcal{C}^\beta$, we define the resonance $f \odot g$ and the praproduct $f \varolessthan g$. They give the decomposition $fg = f \varolessthan g + f \odot g + f \varogreaterthan g$. The paraproduct $f \varolessthan g$ can be defined for any $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, but the resonance $f \odot g$ can be defined for $\alpha + \beta > 0$. Hence, in order define products fg, it is necessary that $\alpha + \beta > 0$ holds. Finally, we set $\mathcal{L}^1 = \partial_t - \{(\mathsf{i}+\mu)\triangle - 1\}$, $P^1_t = e^{t\{(\mathsf{i}+\mu)\triangle-1\}}$ and $I(u)_t = \int_{-\infty}^t P^1_{t-s}u_s\,ds$ for $u : [0,\infty) \to \mathcal{D}'$.

Now we return to well-posedness of the equation (P). For some reason, we write (P) as $\mathcal{L}^1 u = \nu(1-|u|^2)u + u + \xi$ and discuss the problem. To illustrate difficulty of this problem, we consider a stationary solution to the linear equation $\mathcal{L}^1 Z = \xi$ on $(0,\infty)\times\mathbf{T}^3$. The solution is given by $Z_t = I(\xi)_t$ formally and it is not a function but a distribution with respect to the space variable in the dimension three. More precisely, Z_t belongs $\mathcal{C}^{-\frac{1}{2}-\kappa}$ for any $\kappa > 0$. Hence the products Z_t^2, $Z_t\overline{Z_t}$, $Z_t^2\overline{Z_t}$ and so on are not defined a priori. Since the irregularity of the solution to (P) comes from the white noise, it is natural to guess that the space regularity of u_t is not better than that of Z_t and that the product $|u_t|^2u_t = u_t^2\overline{u_t}$ is not defined a priori.

To overcome this difficulty, we use the theory of paracontrolled distributions developed in [GIP15]. The method consists a deterministic part and a probabilistic part.

*This talk is based on a joint work with Masato Hoshino (The University of Tokyo) and Yuzuru Inahama (Kyushu University)

In the deterministic part, we construct the solution map of (P) from the space $\mathcal{X}^{\kappa}_{T_*}$ of driving vectors to the space $\mathcal{D}^{\kappa,\kappa'}_{T_*}$ of solutions, where T_* is a life time of a solution and κ, κ' are positive small parameters, and show that the solution map is continuous. To be precise, for every $0 < \kappa < \kappa' < 1/18$ and $T > 0$, we call a vector of space-time distributions

$$X = (X^{\mathrm{I}}, X^{\mathrm{V}}, X^{\bar{\mathrm{V}}}, X^{\mathrm{Y}}, X^{\bar{\mathrm{Y}}}, X^{\tau_1}, X^{\tau_2}, X^{\tau_3}, X^{\tau_4}, X^{\tau_5}, X^{\tau_6}, X^{\tau_7}, X^{\tau_8}, X^{\tau_9}, X^{\tau_{10}})$$
$$\in C_T\mathcal{C}^{-\frac{1}{2}-\kappa} \times (C_T\mathcal{C}^{-1-\kappa})^2 \times (C_T\mathcal{C}^{1-\kappa})^2 \times \mathcal{L}_T^{\frac{1}{2}-\kappa,\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\kappa} \times (C_T\mathcal{C}^{-\kappa})^6 \times (C_T\mathcal{C}^{-\frac{1}{2}-\kappa})^2$$

which satisfies $\mathcal{L}^1 X^{\mathrm{Y}} = X^{\mathrm{V}}$ and $\mathcal{L}^1 X^{\bar{\mathrm{Y}}} = X^{\bar{\mathrm{V}}}$ a *driving vector* of (P). We denote by $\mathcal{X}^{\kappa}_T$ the set of all driving vector. The definition of $\mathcal{D}^{\kappa,\kappa'}_T$ is a little complicated. Because we transform (P) to a system of two equations with respect to (v, w) so that $u = X^{\mathrm{I}} - \nu X^{\tau_1} + v + w$ solves (P). The space $\mathcal{D}^{\kappa,\kappa'}_T$ is where (v, w) lives.

We explain the meanings of the graphical symbols I, V, $\bar{\mathrm{V}}$, Y, ... They are just coordinates mathematically; however, the dot and the line are icons for the white noise and the operation I, respectively. Hence, I represents $I(\xi) = Z$. Moreover, $\bar{\mathrm{I}}$ and $\bar{\mathrm{V}}$ are icons for the complex conjugate of Z and the product $Z\overline{Z}$, respectively. So τ_1 means $I(Z^2\overline{Z})$. Finally, $\circ$ denotes the resonance term; τ_2 represents $I(Z^2\overline{Z}) \odot Z$.

In the probabilistic part, we construct a driving vector X^ϵ from a smeared noise ξ^ϵ with a parameter $0 < \epsilon < 1$ and show convergence of X^ϵ as $\epsilon \downarrow 0$. Of course, we assume that $\xi^\epsilon \to \xi$ as $\epsilon \downarrow 0$. More precisely, we set $X^{\epsilon,\mathrm{I}} = Z^\epsilon = I(\xi^\epsilon)_t$, $X^{\epsilon,\bar{\mathrm{I}}} = \overline{Z^\epsilon}$ and $X^{\epsilon,\mathrm{V}} = (Z^\epsilon)^2$; however, since $\mathfrak{c}_1^\epsilon = \boldsymbol{E}[Z_t^\epsilon \overline{Z_t^\epsilon}]$ diverges as $\epsilon \downarrow 0$, we need to consider renormalization and set $X^{\epsilon,\bar{\mathrm{V}}} = Z^\epsilon\overline{Z^\epsilon} - \mathfrak{c}_1^\epsilon$. In order to define $X^{\epsilon,\tau}$ for τ_1, τ_4, τ_6, τ_8 and τ_9, it is necessary to consider renormalization. The other renormalization constants are $\mathfrak{c}^\epsilon_{2,1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}[X^{\epsilon,\mathrm{Y}}_{(t,x)} \odot X^{\epsilon,\bar{\bar{\mathrm{V}}}}_{(t,x)}]$ and $\mathfrak{c}^\epsilon_{2,2} = \boldsymbol{E}[X^{\epsilon,\bar{\mathrm{Y}}}_{(t,x)} \odot X^{\epsilon,\bar{\mathrm{V}}}_{(t,x)}]$. To show convergence of X^ϵ, we express $\triangle_m X^\tau$ by the Itô-Wiener integrals and estimate their kernels.

From the discussion above, we obtain our main result:

Theorem 1. *Set* $\mathfrak{c}^\epsilon = 2(\mathfrak{c}_1^\epsilon - \overline{\nu\mathfrak{c}^\epsilon_{2,1}} - 2\nu\mathfrak{c}^\epsilon_{2,2})$. *Let* $u_0 \in \mathcal{C}^{-\frac{2}{3}+\kappa'}$. *Consider the renormalized equation*

$$\text{(P')} \qquad \begin{cases} \partial_t u^\epsilon = (\mathrm{i} + \mu)\triangle u^\epsilon + \nu(1 - |u^\epsilon|^2)u^\epsilon + \nu\mathfrak{c}^\epsilon u^\epsilon + \xi^\epsilon, & \text{on } (0,\infty) \times \mathbf{T}^3, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \end{cases}$$

Then $\mathfrak{c}^\epsilon \to \infty$ *as* $\epsilon \downarrow 0$ *and there exist a unique process* u^ϵ *and a random time* T_*^ϵ *such that*

- u^ϵ *solves* (P') *on* $[0, T_*^\epsilon) \times \mathbf{T}^3$,
- T_*^ϵ *converges to some a.s. positive random time* T_* *in probability,*
- u^ϵ *converges to some process* u *defined on* $[0, T_*) \times \mathbf{T}^3$ *in the sense that* $\sup_{0 \le s \le T_*/2} \|u_s^\epsilon - u_s\|_{\mathcal{C}^{-\frac{2}{3}+\kappa'}} \to 0$ *as* $\epsilon \to 0$ *in probability. Furthermore,* u *is independent of the choice of* ξ^ϵ.

References

[GIP15] Massimiliano Gubinelli, Peter Imkeller, and Nicolas Perkowski. Paracontrolled distributions and singular PDEs. *Forum Math. Pi*, 3:e6, 75, 2015.

GLOBAL SOLUTION OF THE COUPLED KPZ EQUATIONS

MASATO HOSHINO (THE UNIVERSITY OF TOKYO)

1. Introduction: the KPZ equation

The KPZ equation

$$\partial_t h = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h + \tfrac{1}{2}(\partial_x h)^2 + \xi, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

where ξ is a space-time white noise, appears as a space-time scaling limit of the fluctuations of weakly asymmetric microscopic models. Since the solution h of the equation (1) is expected to have a regularity $(\frac{1}{2})^-$, i.e. $\frac{1}{2}-\kappa$ for every $\kappa > 0$ in spatial variable, the square term is ill-posed. Instead, the *Cole-Hopf solution* of the KPZ equation is defined by $h_{\mathrm{CH}} = \log Z$, where Z is the solution of the multiplicative stochastic heat equation

$$\partial_t Z = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 Z + Z\xi.$$

At formal level, Itô's formula yields that $h = h_{\mathrm{CH}}$ solves the equation

$$\partial_t h = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h + \tfrac{1}{2}\{(\partial_x h)^2 - \infty\} + \xi.$$

This heuristic equation should be reformulated into the approximation

$$\partial_t h^\epsilon = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^\epsilon + \tfrac{1}{2}\{(\partial_x h^\epsilon)^2 - c_\eta^\epsilon\} + \xi^\epsilon, \tag{2}$$

where $\xi^\epsilon(t,x) = (\xi(t) * \eta^\epsilon)(x)$ is a smeared noise with an even mollifier $\eta^\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\eta(\epsilon^{-1}x)$ $(\epsilon > 0)$, and $c_\eta^\epsilon = \|\eta^\epsilon\|_{L^2}^2 = \epsilon^{-1}\|\eta\|_{L^2}^2$.

Recently developed theories of *regularity structures* [5], or *paracontrolled calculus* [2] constructed the well-posedness theory for the KPZ equation independent to the probability space. Let $\mathcal{C}^\theta$ be the completion of the set of smooth functions on $\mathbb{T}$ under the $\mathcal{B}^\theta_{\infty,\infty}(\mathbb{T})$ norm and $\bar{\mathcal{C}}^\theta = \mathcal{C}^\theta \cup \{\Delta\}$ be the extended space with a "death point" Δ.

Theorem 1.1 ([4, 3, 7])**.** *Let $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. There exist a Polish space $\mathcal{M}$, a lower semicontinuous map $T_* : \mathcal{C}^\theta \times \mathcal{M} \to (0,\infty]$, and a map*

$$S : \mathcal{C}^\theta \times \mathcal{M} \ni (h_0, \Xi) \mapsto h \in C([0,\infty), \bar{\mathcal{C}}^\theta)$$

such that, $h|_{[0,T_*)} \in C([0,T_*), \mathcal{C}^\theta)$, $h|_{[T_*,\infty)} \equiv \Delta$, the map S is continuous with respect to the $C([0,T], \mathcal{C}^\theta)$-norm on the set $\{(h_0,\Xi)\,;T_*(h_0,\Xi) > T\}$ for every $T > 0$, and for every probability space (Ω, P) (which admits a space-time white noise) there exists a measurable map $\Xi : \Omega \to \mathcal{M}$ such that

$$h_{\mathrm{CH}}(h_0,\omega) = S(h_0, \Xi(\omega)) \quad P\text{-a.s. } \omega,$$

where $h_{\mathrm{CH}}(h_0,\omega)$ is the Cole-Hopf solution with initial value $h_0 \in \mathcal{C}^\theta$. Moreover, there exists a measurable map $\Xi^\epsilon : \Omega \to \mathcal{M}$ such that $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \Xi^\epsilon = \Xi$ in probability, and $h^\epsilon(h_0,\omega) = S(h_0, \Xi^\epsilon(\omega))$ solves (2) with initial value $h_0 \in \mathcal{C}^\theta$.

Theorem 1.1 and the properties of the Cole-Hopf solution imply that $T_*(h_0, \Xi(\omega)) = \infty$, P-a.s. ω. On the other hand, the fact that $T_*(h_0, \Xi) = \infty$ for every $(h_0, \Xi) \in \mathcal{C}^\theta \times \mathcal{M}$ was shown by Gubinelli and Perkowski [3] by using the Cole-Hopf transform again.

2. Main result: the coupled KPZ equations

Let $d \in \mathbb{N}$. For given constants $\{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\}_{1\le\alpha,\beta,\gamma\le d}$ and the independent space-time white noises $\{\xi^\alpha\}_{1\le\alpha\le d}$, we consider the coupled KPZ equations

$$\partial_t h^\alpha = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^\alpha + \tfrac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\partial_x h^\beta \partial_x h^\gamma + \xi^\alpha, \quad 1 \le \alpha \le d,\ t > 0,\ x \in \mathbb{T}, \tag{3}$$

where the summation symbol $\sum$ over (β, γ) is omitted. Such system naturally appears as a scaling limit of microscopic systems with d (local) conserved quantities. As with (1), the ill-posed equation (3) should be reformulated into the approximation

$$\partial_t h^{\epsilon,\alpha} = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^{\epsilon,\alpha} + \tfrac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\partial_x h^{\epsilon,\beta}\partial_x h^{\epsilon,\gamma} - c^\epsilon_\eta \delta^{\beta\gamma} - C^{\epsilon,\beta\gamma}) + \xi^{\epsilon,\alpha}, \tag{4}$$

where $C^\epsilon = (C^{\epsilon,\beta\gamma})_{\beta,\gamma}$ is a matrix behaving as $O(|\log \epsilon|)$ in general. It is not difficult to show the similar well-posedness result to Theorem 1.1 for the coupled equations, except for the existence of global-in-time solution like the Cole-Hopf solution.

In order to obtain the global existence, we assume the symmetry condition

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}. \tag{5}$$

Then indeed we can choose $C^\epsilon = 0$. Under the condition (5), the distribution μ of $(\partial_x B^\alpha)_\alpha$, where $(B^\alpha)_\alpha$ is the d-tuple of independent Brownian bridges on $\mathbb{T}$, is invariant under the process $(\partial_x h^\alpha)_\alpha$, where h is the limit point of the sequence (h^ϵ) defined by (4). This implies that for μ-a.e. $u_0 \in (\mathcal{C}^{\theta-1})^d = \mathcal{C}^{\theta-1}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$, it holds that

$$T_*(h_0, \Xi(\omega)) = \infty, \quad P\text{-a.s. } \omega \tag{6}$$

for every h_0 such that $\partial_x h_0 = u_0$ ([1]). By using the fact that the limit process h is a strong Feller process on the space $(\bar{\mathcal{C}}^\theta)^d$ ([6]), the global existence (6) can be shown for every initial value.

Theorem 2.1 ([1, 6])**.** *Let $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Under the symmetry condition* (5)*, we have* (6) *for every $h_0 \in (\mathcal{C}^\theta)^d$.*

References

[1] T. Funaki and M. Hoshino, *A coupled KPZ equation, its two types of approximations and existence of global solutions*, arXiv:1611.00498.

[2] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Perkowski, *Paracontrolled distributions and singular PDEs*, Forum Math. Pi **3** (2015), e6, 75pp.

[3] M. Gubinelli and N. Perkowski, *KPZ reloaded*, arXiv:1508.03877.

[4] M. Hairer, *Solving the KPZ equation*, Ann. Math, **178** (2013), 559-664.

[5] M. Hairer, *A theory of regularity structures*, Invent. Math. **198** (2014), no. 2, 269-504.

[6] M. Hairer and J. Mattingly, *The strong Feller property for singular stochastic PDEs*, arXiv:1610.03415.

[7] M. Hoshino, *Paracontrolled calculus and Funaki-Quastel approximation for the KPZ equation*, arXiv:1605.02624.