

Support theorem for reflected diffusion processes

会田 茂樹
東北大学

確率分布のサポートの決定は基本的な問題である。 \mathbb{R}^d 上の拡散過程の分布のサポートは, Wong-Zakai の近似定理 (これはサポート定理の簡単な方の包含関係を示す) と確率微分方程式の解のブラウン運動の汎関数としてのある種の “連続性” を示すこと (この結果は逆の包含関係を意味する, こちらが難しいとされている) により Stroock-Varadhan (1972) により決定された。彼らは, この結果を拡散過程の生成作用素の subharmonic function に対する最大値原理が成立する集合を決定する問題に応用した。その後, 抽象的な設定でのサポート定理 (A-Kusuoka-Stroock,1993), それを確率微分方程式などの解の場合に使いやすい形に論法を修正した [6] などの研究がある。ただし rough path の概念が現れてからは確率微分方程式の解は rough path の連続な汎関数と捉えられるようになったため, driving rough path のサポートを決定すればよいことになり, 特別な工夫はある意味不要になった。Hairer の regularity structure や Gubinelli-Imkeller-Perkowski の paracontrolled distribution を用いて解析される singular SPDE に対するサポート定理の研究も始まっている。ただし, 反射壁の確率微分方程式や経路依存の確率微分方程式の解の場合はまだ, rough path の範疇での解析があまり進んでおらず, 事情は異なる。

\mathbb{R}^d 内の滑らかな領域 D における (oblique reflection も含む) 反射壁確率微分方程式の解のサポートを決定する問題は, Wong-Zakai の近似定理とともに [5] で研究された。しかし, normal reflection の反射壁確率微分方程式の強い一意解の存在はゆるい条件 (A), (B) (講演で定義を述べる) の下で Saisho(1987, PTRF) により示されている。すなわち, (A), (B) という境界に対する仮定の下, $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ のとき, 反射壁確率微分方程式

$$Y_t(B) = \xi + \int_0^t \sigma(Y_s(B)) \circ dB_s + \Phi_t(B), \quad \xi \in \bar{D} \quad (1)$$

は強い一意解を持つ。ここで, B_t は n 次元ブラウン運動である。

Φ_t は $\Phi_t = \int_0^t 1_{\partial D}(Y_s) \mathbf{n}(Y_s) d\|\Phi\|_{1-var, [0, s]}$ を満たす反射項, $\mathbf{n}(x)$ は $x \in \partial D$ での内向き単位法線ベクトル, $\|\Phi\|_{p-var, [s, t]}$ は Φ の時間区間 $[s, t]$ における p 次変動ノルムを表す。

条件 (A), (B) の下での Wong-Zakai 定理は [4, 8, 3] により示された。Ren-Wu [7] はこの結果と [6] による論法を組み合わせ、(A), (B) (あといくつか条件が仮定されている) の条件の下, サポート定理を証明した。

我々は, [1] による reflected rough differential equation(=RRDE) の解の評価を用いて, 決定する方法を説明する。なお, 昨年の RRDE の解の存在に関する講演では, (A), (B) に更に強い条件 (H1) を仮定していたが, この条件は不要であることがわかったことを注意しておく。また, Gubinelli による controlled path を用いたアプローチでも解の存在が示せることもわかった。

Hölder rough path の枠組みで考えるため, $1/3 < \beta < 1/2$ とし, β -Hölder 連続な空間 $C^\beta := C^\beta([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ を考える。 $B \in C^\beta$ の 2 進折れ線近似 $B(N)_t$ をリフトして得られる smooth rough path $\mathbf{B}(N)_{s,t} = (B(N)_{s,t}^1, B(N)_{s,t}^2)$ を考える。 $N \rightarrow \infty$ のとき, β -Hölder rough path の位相で $\mathbf{B}(N)_{s,t}$ が収束するような B 全体 $\Omega \subset C^\beta$ は Wiener 測度 μ で確率 1 の部分集合になる。各 $B \in \Omega$ に対して定まる 極限 $\mathbf{B}_{s,t} = (B_{s,t}^1, B_{s,t}^2)$ が Brownian rough path (geometric rough path

値確率変数) である. (1) の B を Lipschitz path h で置き変えて得られる解を $Y_t(h)$ で表すことにする.

D は (A), (B) を満たすとし, $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ を仮定する. このとき, [4, 8, 3] の結果により部分列 $N(k)$ を適当にとると $(Y_t(B(N_k)))$ が β -Hölder norm の位相で収束するような $B \in \Omega$ 全体 Ω' は $\mu(\Omega') = 1$ を満たすこと, 極限 $Y_t(B)$ ($B \in \Omega'$) は強い解になることがわかる. Lipschitz path h に対して, $Y_t(h(N))$ は $Y_t(h)$ に一様収束するので, $h \in \Omega'$ がわかる.

Lemma 1. 上記のように定めた強い解 $Y_t(B)$ ($B \in \Omega'$) は Lipschitz path の各元 h で連続である. 正確に述べるため, $\beta' < \beta$ を取る. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $\|h - B\|_\beta + \|h^2 - B^2\|_{2\beta} \leq \delta$ ならば $\|Y(B) - Y(h)\|_{\beta'} \leq \varepsilon$, ここで $\|\cdot\|_\beta$ などは Hölder norm を表す.

Lemma 1 は, Lipschitz path h に対する解 $Y_t(h), \Phi_t(h)$ の rough path の位相での評価式を用いて示す. 詳細は講演で説明する.

Lemma 2. h を Lipschitz path とする. 任意の $\delta > 0$ に対して

$$\mu(\{B \in \Omega' \mid \|h - B\|_\beta + \|h^2 - B^2\|_{2\beta} \leq \delta\}) > 0.$$

Lemma 1, Lemma 2 から以下の定理の包含関係 左辺 \supset 右辺 が直ちに得られる. 逆の包含関係は Wong-Zakai 型定理からわかる.

Theorem 3. D は (A), (B) を満たし, $\sigma \in C_b^2$ とする. P^Y を β -Hölder 連続な空間 \mathcal{C}^β 上の (1) の解 Y の確率分布とする. このとき,

$$\text{Supp}(P^Y) = \overline{\{Y(h) \mid h \text{ は Lipschitz path.}\}}^{\|\cdot\|_\beta}.$$

References

- [1] S. Aida, Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms, Preprint, 2016.
- [2] S. Aida, Reflected rough differential equations, Stochastic Process. Appl. 125 (2015), no.9, 3570–3595.
- [3] S. Aida, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces II, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Volume 100, 2014, 1–23.
- [4] S. Aida and K. Sasaki, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces, Stochastic Process. Appl. Vol. 123 (2013), no.10, 3800–3827.
- [5] H. Doss and P. Priouret, Support d'un processus de réflexion, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 61 (1982), no. 3, 327–345.
- [6] A. Millet and M. Sanz-Solé, A simple proof of the support theorem for diffusion processes, In *Séminaire de Probabilités, XXVIII*, Lecture Notes in Math. **1583**, 36–48, Springer, Berlin.
- [7] J. Ren and J. Wu, On approximate continuity and the support of reflected stochastic differential equations. Ann. Probab. 44 (2016), no. 3, 2064–2116.
- [8] T-S. Zhang, Strong Convergence of Wong-Zakai Approximations of Reflected SDEs in A Multidimensional General Domain, Potential Anal. 41 (2014), no.3, 783–815.