Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性と *Alder* 型転移

2016/12/20/火：京都大学数理解析研究所　　Hirofumi Osada (Kyushu University)

$\mathbb{R}^d$ における $-(1/2)\Delta$ の基本解の $\sigma(d)$ 倍を d 次元 Coulomb ポテンシャルと呼び Ψ_d と表す。ここで $\sigma(d) = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ は $(d-1)$ 次元単位球面の面積であり、$\nabla\Psi(x) = -x/|x|^d$ となる。d 次元ユークリッド空間内を Coulomb ポテンシャル Ψ_d で相互作用しながら運動する無限個のブラウン運動を考える。逆温度を β とする。この確率力学が平行移動不変なときには、次の無限次元確率微分方程式で記述される [5]。

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\sum_{j\neq i,\,|X_t^i - X_t^j|<r}\frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^d}dt \quad (i\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

現在、$d=2$ かつ $\beta=2$ の時だけ、この確率力学およびその平衡分布は構成されており、それぞれ「Ginibre 干渉ブラウン運動」、「Ginibre 点過程」と呼ばれる。尚、この点過程は、非エルミート Gaussian ランダム行列の固有値の分布の極限である。$\mathbb{R}^d$ において d 次元 Coulomb ポテンシャルは、Ruelle クラスのポテンシャルではない。従って、DLR 方程式に基づく、従来の Gibbs 測度の理論をそのまま適用できない。Gibbs 測度は、Poisson 点過程に近いクラスである。一方、Coulomb ポテンシャルは、その遠方での相互作用の強烈さのために、付随する無限粒子系は異なる様相を見せる。

次式 (2) で与えられる $\mathbb{R}^d$ 上の平行移動不変かつ回転不変な点過程 $\mu_{d,\beta}$ が存在するとする。(2) は、形式的だが、対数微分の概念を用いて、定義は厳密化できる。$(d,\beta) = (2,2)$ 以外は、存在は未解決である。

$$\mu_{d,\beta}(d\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{Z}}\exp\{-\beta\sum_{i<j}^{\infty}\Psi_d(x_i - x_j)\}\prod_{k}^{\infty}dx_k \tag{2}$$

この講演では、Ginibre 干渉ブラウン運動の劣拡散性を示す。さらに、$d=2$ のとき、**一般の逆温度 β に対して、(2) の形の Ginibre$_\beta$ 点過程が存在する**という仮定のもとで、自己拡散行列に対する相転移が起こることを示す。実際、周期的クーロン媒質のホモジナイゼーション、つまり結晶格子の各点が電荷を持つとし、それからクーロン力を受けるブラウン運動粒子のホモジナイゼーションに対する有効伝導率 γ の関数によって、臨界点を下から評価する。このように、臨界点が正かつ有限の値を持つことを示す。この結果は、Alder 型相転移（後述）を 2 次元クーロンポテンシャルに対して証明したものと解釈できる。

$\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}$ とも見なす) の配置空間を S とおく。μ を Ginibre 点過程とする。つまり、行列式点過程でガウス分布 $g(dx) = (1/\pi)e^{-|x|^2}dx$ を基礎の測度としたとき、核関数 $K(x,y)$ 次式で与えられるものである。

$$K(x,y) = e^{x\bar{y}}$$

$\ell = (\ell_i)_{i\in\mathbb{N}}$ をラベル、$\ell(\mathsf{s})$ を出発する SDE(1) の解 $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ の分布を $P_{\ell(\mathsf{s})}$、平均を $E_{\ell(\mathsf{s})}$ と表す。

Theorem 1 ([6])**.** $P_{\ell(\mathsf{s})}$ の下で、すべての $i\in\mathbb{N}$ に対して、$\forall F\in C_b(C([0,\infty);\mathbb{R}^2))$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mu\Big(\Big\{\mathsf{s};\big|E_{\ell(\mathsf{s})}[F(\epsilon X^i_{\cdot/\epsilon^2})] - F(0)\big|\geq\delta\Big\}\Big) = 0 \quad \text{for all } \delta > 0. \tag{3}$$

Tagged 粒子の極限の係数行列の初期条件についての平均を自己拡散行列と $\alpha_{d,\beta}$ いう。ここで、β は逆温度、d は空間の次元である。もし、逆温度 β をもつ d 次元厳密クーロン点過程が存在すれば、一般論から、自己拡散行列が存在し更に、変分表現を持つ [3]。Theorem 1 は、$\alpha_{2,2} = 0$、つまり、$(\beta, d) = (2,2)$ の場合に、下記の関数 $\chi_{r,R}$ を用いて、この変分表現が消滅することを示したものである。

$$\chi_{\epsilon,R}(x) = \begin{cases} -\epsilon^{-2}r\cos\theta & (r\leq\epsilon) \\ -\epsilon^{-1}\{\frac{\epsilon+R-r}{R}\}\cos\theta & (\epsilon\leq r\leq\epsilon+R) \\ 0 & (\epsilon+R\leq r)\end{cases}$$

ただし、$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ 、また、(r,θ) は極座標、$r=|x|$, $\cos\theta=x_1/|x|$.
• $\mathbb{L}=\mathbb{L}(d)$ を d 次元格子 (結晶) とする。簡単のため格子は原点を含むとし $\mathbb{L}_0=\mathbb{L}\backslash\{0\}$ する。立方格子以外に、例えば 2 次元では、3 角格子も考える。格子 $\mathbb{L}$ が与えられたとき、周期関数 b と b_0 を次で定義する。

$$b(x)=\lim_{r\to\infty}c_d\sum_{j\in\mathbb{L};\,|x-j|<r}\frac{x-j}{|x-j|^d},\quad b_0(x)=b(x)-c_d\frac{x}{|x|^d}$$

逆温度 β を含む形で、それぞれに対応する SDE を、次で与える。

$$dY_t=dB_t+\frac{\beta}{2}b(Y_t)dt,\quad dZ_t=dB_t+\frac{\beta}{2}b_0(Z_t)dt$$

拡散的スケーリング $Y_t^\epsilon=\epsilon Y_{t/\epsilon^2}$ と $Z_t^\epsilon=\epsilon Z_{t/\epsilon^2}$ を取ると、これらは次式を満たす。

$$dY_t^\epsilon=dB_t+\frac{\beta}{2}\frac{1}{\epsilon}b(\frac{1}{\epsilon}Y_t^\epsilon)dt,\quad dZ_t^\epsilon=dB_t+\frac{\beta}{2}\frac{1}{\epsilon}b(\frac{1}{\epsilon}Z_t^\epsilon)dt-\frac{\beta}{2}c_d\epsilon^{d-2}\frac{Z_t^\epsilon}{|Z_t^\epsilon|^d}dt$$

Lemma 1. 有効伝導率とよばれる定数 $\gamma=\gamma_{d,\beta}$ が存在し、次のホモジナイゼーションが成立する。

$$\lim_{\epsilon\to0}\epsilon Y_{t/\epsilon^2}=\sqrt{\gamma}B_t$$

Proof. 退化はするが、周期的ホモジナイゼーションである。非退化性は、反射壁ブラウン運動のホモジナイゼーションと比べることにより示され、$0<\gamma<1$ となる。 □

2 次元の場合は、Z^ϵ に対して、次の収束定理と相転移が成立する。

Theorem 2. $d=2$ とする。初期条件が $\lim_\epsilon x_\epsilon=x$ を満たすとする。このとき $\overline{Z}=\lim Z^\epsilon$ が存在し、

$$d\overline{Z}_t=\sqrt{\gamma}dB_t-\frac{\beta}{2}\frac{\overline{Z}_t}{|\overline{Z}_t|^2}dt\quad(0<\beta<\gamma+1)\tag{4}$$

を満たす。更に、$\gamma+1\le\beta<\infty$ では、原点が流出境界となり、$\overline{Z}_t=0$ for $\sigma_0\le t$. とくに Z が、原点（の近傍）から出発するときには、劣拡散的である。特に、$\beta<\gamma+1$ で拡散的、$\beta\ge\gamma+1$ で劣拡散的である。つまり、$\beta_{\mathrm{c}}^{\mathrm{homo}}=1+\gamma$ を臨界点とする、拡散/劣拡散に対する相転移が起こる。

Proof. Chen-Croydon-Kumagai [1] の定理と Saloff-Coste その他による熱核の評価 [7] を用いる。更に、Girsanov の公式、Mosco 収束や [2] の Dirichlet 形式の収束を使う。 □

以上の二つの定理を組み合わせると、拡散行列の非退化性についての臨界点 β_c に対して、2 次元では、次の評価が得られる。**Ginibre 点過程の分布が、格子構造で十分近似できるという仮説の下で**、次の定理が成立する。尚、$\beta=\infty$ の極限では、Ginibre 点過程の分布は、三角格子に収束する。又、格子が満たすべきパラメーターの条件として、粒子の密度（1 相関関数の定数値）が入ることに注意する。

Theorem 3. $d=2$ のとき、$\gamma+1\le\beta_c\le2$。特に、$1\le\beta_c\le2$。

Remark • 通常の Ruelle クラスの干渉ポテンシャルの場合は、2 次元以上では常に拡散的になり、退化しないこと [4] が知られている。[4] では凸のハードコアの存在を仮定したが、事実としては 2 次元以上では Ruelle クラスの干渉ポテンシャルの場合は、常に拡散的スケーリングで非退化と思われている。また対応する格子モデルでは、単純排他過程については、Kipnis-Varadhan、また、一般の排他過程については、Spohn によって非退化が示されている。従って、今回の結果は、これらの従来の結果とは、対照的である。このような現象が生じる理由は、Coulomb ポテンシャルがもつ、無限大での効果の強烈さに起因する。このよう

に、 long range の影響のため、この平衡分布に付随する確率力学の tagged 粒子は、通常のブラウン運動とは違う種類の、漸近挙動をすることが分かる。

• γ の値は、格子の構造に依存する。Theorem 3 の下からのバウンドは、適切な γ についての sup と取ることが出来る。ただし、何が適切な格子かはまだ、observation である。

• Alder 転移とは、1957 年に発表された剛体球系の固相-流動相の相転移である。これは有界領域でニュートン力学に従う剛体球系の運動が、境界の影響で密度について相転移を起すことを、計算機シミュレーションによって示したものである。ハードコアポテンシャルという非常に単純かつ斥力しか持たない場合に示された相転移で有り、その後、リースポテンシャル、あるいは、確率力学といった枠組みでも研究された。

• ある時期、ハードコアブラウン運動からなる無限粒子系が、劣拡散的挙動を示すという形で定式化された、無限領域の Alder 転移が予想された。[4] の結果はそれを否定するものだった。尚、[4] は「ガラス転移」を研究する上で、Mode Coupling Theory (MCT) と呼ばれる手法が、低次元の空間では成立しないことを厳密に証明するものとして引用されている。MCT は、空間の次元が無限次元にちかずく時に正しく機能すると言われている。ガラス転移は、液相とガラス相をいかにみわけるかというテーマをあつかい、今も盛んに研究されているが、理論的にはなかなか進展しない。実験にかかるような、時間のスケールで見ると、ガラスと液体は区別できて、その力学的挙動も、スローダウンし液体とは異なっている、ということを示したいのだが、理論的に捉えるのが難しい。hopping、caging、jamming など、様々な現象が取り上げられている。（これらは、[4] を引用する文献を Google Scholar で調べると検索できる）。今回の Theorem 3 は、昔、[4] で否定された予想が、クーロンポテンシャルに話を移せば成立（復活）することを示している。

• 臨界現象とは、干渉が無限遠点まで到達する現象である。クーロンポテンシャルは、臨界点でなくても、それ自身で遠距離強相互作用を持ち、その逆温度についての相転移は、臨界現象の中の臨界現象である（この切り口は、香取さんから教えてていただいた。ただし、私の方が理解せずに間違って話している可能性がある）。元々の Alder 転移を「境界の影響のために生じた相転移だ」と解釈すれば、今回の相転移は、クーロンポテンシャルの遠距離強相互作用によって無限遠点を境界として認識した結果、生じたものであり、これを Alder 型転移というのは、話が整合すると思われる。

参考文献

[1] Chen, Zhen-Qing; Croydon, David A.; Kumagai, Takashi *Quenched invariance principles for random walks and elliptic diffusions in random media with boundary*,. Ann. Probab. 43 (2015), no. 4, 1594-1642.

[2] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*,, Commun. Math. Phys. **176**, 117-131 (1996).

[3] Osada, H. *An invariance principle for Markov processes and Brownian particles with singular interaction*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **34**, n° 2 (1998), 217-248.

[4] Osada, H., *Positivity of the self-diffusion matrix of interacting Brownian particles with hard core*, Probab. Theory Relat. Fields, **112**, (1998), 53-90.

[5] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields, Vol **153**, (2012) pp 471-509.

[6] Osada, H., *The Ginibre interacting Brownian motion is sub-diffusive*, (preprint/draft)

[7] Tasena, S., Saloff-Coste, L., Dhompongsa, S., Tanemura, H., *Poincaré inequality: From remote balls to all balls*, , Nonlinear Analysis **108** (2014) 161-172