高次元イジング模型における「1-arm 指数」の上限評価

北海道大学　大学院
理学院　数学専攻
半田　悟（Satoshi HANDA）
（Markus Heydenreich 氏，坂井 哲 氏との共同研究）

1　背景

私たちの身の回りには，温度 T の変化に応じて，水が固相・液相・気相へと姿を変えたり，磁石が磁性を失ったりする現象が起こっている．温度のようなマクロなパラメータに応じて，系の性質が大きく変わる現象は，一般に「相転移現象」と呼ばれる．その変化の境目となる点（温度）を「臨界点（温度）T_{c}」と呼ぶ．この臨界点の近傍・直上では，様々な物理量が冪的に振る舞うという特異的な現象が見られる．これを「臨界現象」と呼び，その冪指数のことを「臨界指数」と呼ぶ．臨界点は考えている系に依存してその値は異なるが，臨界指数は系の次元と対称性のみに依存した普遍的な値であると信じられている．この値を決定することが，相転移・臨界現象の研究の重要な目的のひとつである．

強磁性相転移現象を記述する統計力学模型として「イジング模型」というものが知られている．イジング模型の臨界指数についての研究は数多くあり，たくさんの結果がこれまでに得られているが，未解決の問題も多い．今回はそのひとつである「1-arm 指数 ρ」と呼ばれる臨界指数についての結果を述べる．

1-arm 指数は，以前にパーコレーションという統計力学模型において研究された．パーコレーションとは，格子点間のボンドが独立に，確率 p で開いている，$1-p$ で閉じているという状態をとるとした確率幾何学的な模型である．パラメタ p を変化させたとき，無限遠点につながっている確率が 0 から正に立ち上がるかどうかで，相転移が見られる．パーコレーションにおける 1-arm 指数とは，臨界点直上において，原点から半径 r の球の球面に繋がる確率が，r の冪関数としてどれくらいの速さで減衰するかを表す冪指数 ρ として定義される．[3] では「二次モーメント評価」を用いることにより，高次元において $\rho \leq 2$ であることが証明された．その後，[2] で $\rho = 2$ であることが完全に決定された．

イジング模型における 1-arm 指数も対応する物理量によって定義される．臨界点直上において，プラス境界条件の半径 r の球上の原点におけるスピンの期待値が，r の冪関数としてどれくらいの速さで減衰するかを表す冪指数 ρ として定義される．パーコレーションと同様に二次モーメント評価を用い，上限評価を得ることが目的である．[5] では，$\sqrt{\langle \sigma_o \sigma_x \rangle} \leq \langle \sigma_o \rangle^{+}_{|x|/3}$ が成り立つことが示されており，これにより $d > 4$ では $\rho \leq (d-2)/2$ というハイパースケーリング不等式が得られている．ここから $d > 4$ では $\rho \leq 1$ ということが示唆されるが，今回は厳密に $\rho \leq 1$ という平均場評価を証明することができたので，これを紹介する．この発表は，Markus Heydenreich 氏，坂井 哲 氏との共同研究の結果に基づく．

2　イジング模型の定義と主結果

2.1　イジング模型の定義

V_R 上の d 次元イジング模型を以下のように定義する．$r < R$ に対して，

$$V_R = \{v \in \mathbb{Z}^d : |v| \le R\} \qquad \partial V_r = \{u \notin V_r : \exists v \in V_r \text{ s.t } J_{u,v} > 0\} \tag{2.1}$$

とする．スピン変数 $\boldsymbol{\sigma} \equiv \{\sigma_v\}_{v \in V_R} \in \{\pm 1\}^{V_R}$ を与える．格子点上のスピンが，$+1$ は上向き，-1 は下向きである状態を表す．このスピン変数の状態に対するエネルギーをハミルトニアン $H^h_{r,R}$ といい，

$$H^h_{r,R}(\boldsymbol{\sigma}) = -\sum_{\{u,v\} \subset V_R} J_{u,v}\sigma_u\sigma_v - h\sum_{v \in \partial V_r} \sigma_v, \tag{2.2}$$

で与える．$J_{u,v} \ge 0$ は，並進対称性，$\mathbb{Z}^d$ 対称性，有限レンジであると仮定する．h は境界 ∂V_r にかけられた外部磁場の強さを表すパラメターである．$J_{u,v} \ge 0$ であることから，スピン同士は，同じ向きのほうがエネルギーが小さくなり安定するという，強磁性体を表した模型となっている．このエネルギーによる確率分布をカノニカル分布で与え，その熱力学的期待値を以下のように定義する．

$$\langle f \rangle^h_{r,R} = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \{\pm 1\}^{V_R}} f(\boldsymbol{\sigma}) \frac{e^{-H^h_{r,R}(\boldsymbol{\sigma})/T_c}}{Z^h_{r,R}}, \qquad Z^h_{r,R} = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \{\pm 1\}^{V_R}} e^{-H^h_{r,R}(\boldsymbol{\sigma})/T_c}. \tag{2.3}$$

ここで $Z^h_{r,R}$ は規格化定数であり，分配関数と呼ばれる．グリフィスの不等式により以下の極限の存在が知られている．

$$\langle \sigma_x \rangle^+_r = \lim_{h \uparrow \infty} \langle \sigma_x \rangle^h_{r,R} \qquad [x \in V_r \cup \partial V_r], \tag{2.4}$$

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle = \lim_{R \uparrow \infty} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R. \tag{2.5}$$

したがって，まずは外部磁場の入った系や有限系を取り扱い，極限操作をとることを考える．

2.2　主結果

Theorem 2.1 (H, Heydenreich & Sakai)．$\mathbb{Z}^{d>4}$ 上の強磁性イジング模型において，$J_{u,v} \ge 0$ は並進対称性，$\mathbb{Z}^d$ 対称性，有限レンジであると仮定する．もし $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle \asymp |x|^{2-d}\,(|x| \uparrow \infty)$ であり，$\langle \sigma_o \rangle^+_r \asymp r^{-\rho}\,(r \uparrow \infty)$ を満たす $\rho > 0$ が存在するとする．すると，平均場評価 $\rho \le 1$ が成り立つ．

この定理の導く鍵になる相関不等式が以下である．

Proposition 2.2 (H, Heydenreich & Sakai)．強磁性イジング模型において，以下の相関不等式が成り立つ．

$$\langle \sigma_o \rangle^+_r \ge \frac{\left(\sum_{x \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle\right)^2}{\sum_{x,y \in \partial V_r} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle \langle \sigma_x \sigma_y \rangle + \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}^d \\ x,y \in \partial V_r}} \langle \sigma_o \sigma_u \rangle \langle \sigma_u \sigma_x \rangle \langle \sigma_u \sigma_y \rangle \langle \sigma_o \rangle^+_{\mathrm{dist}(u,\partial V_r)}}. \tag{2.6}$$

上記の不等式において，分子・分母を評価する．分子は $O(r^2)$，分母は $\begin{cases} O(r^{(4-\rho)\vee 3}) & [\rho \neq 1] \\ O(r^3 \log r) & [\rho = 1] \end{cases}$ となる．すると，$\rho \leq 1$ ということが帰結される．$\langle \sigma_o \rangle^{+}_{\mathrm{dist}(u,\partial V_r)}$ が重要な項であり，この項によって $\rho \leq 1$ が得られる（この項が無ければパーコレーションと同じ結果になってしまう）．Proposition 2.2 の相関不等式の証明には，以下で説明する「ランダムカレント表現」という確率幾何学的な表現を用いる．

3　ランダムカレント表現

ランダムカレント表現とは，イジング模型の高温展開をより洗練させた表現である．二つのボンドの集合を $B_R \equiv \big\{\{u,v\} \subset V_R : J_{u,v} > 0\big\}$，$G_R \equiv \big\{\{v,g\} : v \in \partial V_r\big\}$ と定義する．$g \notin \mathbb{Z}^d$ はゴーストサイトと呼ばれる点である．ボンド上のカレント配位 $\boldsymbol{n} \equiv \{n_b\}$ を非負の整数の集合とする．カレント配位 $\boldsymbol{n}$ に対して，源泉集合 $\partial\boldsymbol{n}$ を

$$\partial\boldsymbol{n} = \left\{ v \in V_R \cup \{g\} : \sum_{b \ni v} n_b \text{ is odd} \right\}, \tag{3.1}$$

と定義する．また重み関数 $w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})$，$w_R(\boldsymbol{n})$ をそれぞれ

$$w^h_{r,R}(\boldsymbol{n}) = \prod_{b \in B_R} \frac{(J_b/T_{\mathrm{c}})^{n_b}}{n_b!} \prod_{b' \in G_R} \frac{(h/T_{\mathrm{c}})^{n_{b'}}}{n_{b'}!}, \qquad w_R(\boldsymbol{n}) = w^0_{r,R}(\boldsymbol{n}), \tag{3.2}$$

と定義する．すると以下のランダムカレント表現（図 1 参照）が得られる．

Proposition 3.1 (ランダムカレント表現 [1])**.**

$$\langle \sigma_x \rangle^h_{r,R} = \frac{\displaystyle\sum_{\partial\boldsymbol{n}=\{x,g\}} w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})}{\displaystyle\sum_{\partial\boldsymbol{n}=\varnothing} w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})}, \qquad \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_R = \frac{\displaystyle\sum_{\partial\boldsymbol{n}=\{x\}\triangle\{y\}} w_R(\boldsymbol{n})}{\displaystyle\sum_{\partial\boldsymbol{n}=\varnothing} w_R(\boldsymbol{n})}. \tag{3.3}$$

ランダムカレント表現において，「二点 x, y がカレント $\boldsymbol{n}$ で繋がる」というのは，正のカレントをもつボンドによる x から y への道が存在することをいい，$x \underset{\boldsymbol{n}}{\longleftrightarrow} y$ とかく．すると，パーコレーションのような解析が可能になる．ランダムカレント表現で最も重要な性質は，「源泉の移し替え補題」である [4, Lemma 2.3]．これにより，二点の繋がりを用いて，源泉集合を移し替えることが可能になる．以下に源泉の移し替え補題による簡単な帰結を述べる．

Lemma 3.2 (源泉の移し替え補題の帰結)**.** 任意の部分集合 $A \subset V_R$ と $B \subset V_R \cup \{g\}$ に対して，以下が成り立つ．

$$\sum_{\substack{\partial\boldsymbol{n}=B \\ \partial\boldsymbol{m}=\varnothing}} w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})\, W_A(\boldsymbol{m}) \mathbf{1}\{x \underset{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}{\longleftrightarrow} y \text{ in } A\} = \sum_{\substack{\partial\boldsymbol{n}=B\triangle\{x\}\triangle\{y\} \\ \partial\boldsymbol{m}=\{x\}\triangle\{y\}}} w^h_{r,R}(\boldsymbol{n})\, W_A(\boldsymbol{m}). \tag{3.4}$$

(3.4) の右辺を適切な分配関数で割る事で，スピン系の相関関数を取り出すことができる．

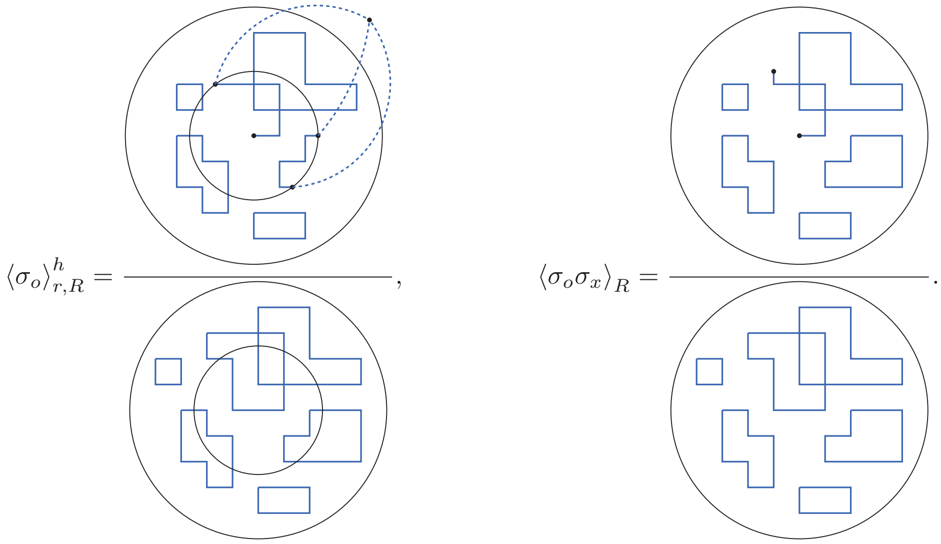

図 1　$\langle \sigma_o \rangle_{r,R}^h$ と $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_R$ のランダムカレント表現である．奇数のカレントがのっているボンドだけを書いた．破線はゴーストサイト g へのボンドを表している．

参考文献

[1] R.B. Griffiths, C.A. Hurst and S. Sherman. Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *J. Math. Phys.* **11** (1970): 790–795.

[2] G. Kozma and A. Nachmias. Arm exponents in high dimensional percolation. *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011): 375–409.

[3] A. Sakai. Mean-field behavior for the survival probability and the percolation point-to-surface connectivity. *J. Stat. Phys.* **117** (2004): 111–130.

[4] A. Sakai. Lace expansion for the Ising model. *Commun. Math. Phys.* **272** (2007): 283–344.

[5] H. Tasaki. Hyperscaling inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.* **113** (1987): 49–65.