AN OPTIMAL INVESTMENT STRATEGY FOR INSURANCE COMPANIES WITH A LINEAR GAUSSIAN STOCHASTIC FACTOR MODEL.

畑　宏明　(静岡大学教育学部)　安田　和弘　(法政大学理工学部)

【本講演の目的】線形 **Gauss** 型確率ファクターモデル下での指数型効用関数を用いた保険会社の最適投資問題の最適戦略と最適値を求める。

$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ をフィルター付き確率空間とする。ただし、$\mathcal{F}_t := \sigma\{W_s, p_s, Z_j \mathbf{1}_{j\leq p_s}; s \leq t, j \geq 1\}$ である。ここで、$(W_t)_{t\geq 0}$ は $n+m$ 次元標準ブラウン運動, $(p_t)_{t\geq 0}$ はランダムな強度 λ(後に定義する) をもつ Cox 過程 , $(Z_i)_{i\geq 1}$ は同一分布 ν をもつ独立な非負確率変数の列。また、$(W_t)_{t\geq 0}, (p_t)_{t\geq 0}, (Z_i)_{i\geq 1}$ は互いに独立とする。

今、次の市場モデルを考える。

- 銀行預金過程 : $dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad S_0^0 = s_0^0,$
- $i(i = 1, \cdots, m)$ 番目の危険資産価格過程 :

$$dS_t^i = S_t^i \left\{ (a + AY_t)^i dt + \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma_p^{ik} dW_t^k \right\}, \quad S_0^i = s_0^i,$$

- ファクター過程 : $dY_t = (b + BY_t)dt + \Sigma_f dW_t, \quad Y(0) = y \in \mathbb{R}^n.$

ここで、 $r \geq 0,\ a \in \mathbb{R}^m,\ b \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \Sigma_p \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)},\ \Sigma_f \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$ である。

更に、リスク過程として、次の Cramér-Lundberg モデルを用いる :

$$R_t := x + ct - J_t,$$

ここで、 x は初期資産、 $c > 0$ は収入保険料率、$J_t := \sum_{i=1}^{p_t} Z_i$ である。 また、$\Delta J_s := J_s - J_{s-}$ と定義するとき、$J.$ に関連する jump measure は $t \geq 0$ とボレル集合 $U \subset [0, \infty)$ に対して、次のように定義する :

$$N([0, T] \times U) := \sum_{0\leq s\leq t} 1_U(\Delta J_s).$$

このとき、次の条件を仮定する。

(A1) $\Sigma_p \Sigma_p^* > 0.$

(A2) ランダムな強度を $\lambda(Y_t) := Y_t^* \Lambda Y_t + \lambda_0.$ とする。ただし、 $\lambda_0 > 0, \Lambda \geq 0$ である。

π_t^i を i 番目の危険資産の株の保有量, $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)^*$ とすると、時刻 t における保険会社の資産過程 X_t^π は次を満たす。

$$\begin{aligned} X_t^\pi &= R_t + \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^m \pi_u^i \frac{dS_u^i}{S_u^i} + (X_u^\pi - \pi_u^* \mathbf{1}) \frac{dS_u^0}{S_u^0} \right\} \\ &= x + \int_0^t \{c + \pi_u^*(a + AY_u) - r\mathbf{1}) + rX_u^\pi\} du + \int_0^t \pi_u^* \Sigma_p dW_u - \sum_{i=1}^{p_t} Z_i. \end{aligned}$$

本講演では、次の指数型効用関数を用いた保険会社の最適投資問題を扱う。

$$\text{(P)} \qquad V(t, x, y) := \sup_{\pi\in\mathcal{A}_{t,T}} E\left[-\mathrm{e}^{-\alpha X_T^{t,x,y,\pi}} \right].$$

ただし、$\mathcal{A}_{t,T}$ は許容な投資戦略全体。

【解法の手順】

(1) 動的計画原理を用いて、形式的に (後に与えられる)HJB 方程式 (0.1) を導出する。(※ HJB 方程式 (0.1) の $\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}[\quad]$ において、sup を達成する $\hat{\pi}$ は最適投資戦略の候補になる。)

(2) HJB 方程式 (0.1) に最適戦略の候補 $\hat{\pi}$ を代入した方程式 (0.1)(以下で与えている) の解の存在を証明する。

(3) HJB 方程式 (0.1) を用いて、Verification Theorem (最適戦略の候補 $\hat{\pi}$ が本当に最適戦略であることを保証する定理) を証明する。

今、評価関数を以下のように書き換えることができる。

$$E\left[-\mathrm{e}^{-\alpha X_T^{t,x,y,\pi}}\right] = -\mathrm{e}^{-\alpha x\mathrm{e}^{r(T-t)}-c\alpha\int_t^T \mathrm{e}^{r(T-s)}ds+\lambda_0\int_t^T\int_{z>0}\left(\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-s)}}-1\right)\nu(dz)ds} \cdot E^{(\pi)}\left[\mathrm{e}^{\int_t^T \ell(Y_{s-},\pi_s)ds}\right]$$

ただし、$E^{(\pi)}$ は以下で定義される確率測度 $P^{(\pi)}$ に関する期待値を表す。

$$\left.\frac{dP^{(\pi)}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_T} := \mathcal{E}^0_{t,T}(\pi),$$

$$\mathcal{E}^0_{t,T}(\pi) := \mathrm{e}^{-\alpha\int_t^s \mathrm{e}^{r(T-u)}\pi_u^*\Sigma_p dW_u - \frac{\alpha^2}{2}\int_t^s \mathrm{e}^{2r(T-u)}\pi_u^*\Sigma_p\Sigma_p^* du} \cdot \mathrm{e}^{\int_t^s\int_{z>0}\alpha z\mathrm{e}^{r(T-u)}N(du,dz)+\int_t^s\lambda(Y_{u-})\int_{z>0}\left(1-\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-u)}}\right)\nu(dz)du},$$

$$\ell(y,\pi) := \frac{\alpha^2}{2}\mathrm{e}^{2r(T-t)}\pi^*\Sigma_p\Sigma_p^*\pi - \alpha\mathrm{e}^{r(T-t)}\pi^*(\mu(y)-r\mathbf{1}) + y^*\Lambda y\int_{z>0}\left(\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-t)}}-1\right)\nu(dz).$$

ここで、Y_t は、$P^{(\pi)}$-ブラウン運動 $W_s^\pi := W_s + \int_t^s \alpha\mathrm{e}^{r(T-u)}\Sigma_p^*\pi_u du$ を用いると $P^{(\pi)}$ の下で次を満たすことに注意する。

$$dY_s = \left\{b + BY_s - \alpha\mathrm{e}^{r(T-s)}\Sigma_f\Sigma_p^*\pi_s\right\}ds + \Sigma_f dW_s^\pi, \quad Y_t = y.$$

この時、問題 (P) は次の問題と同値になる。

$$(\tilde{\mathrm{P}}) \qquad \tilde{V}(t,y) := \inf_{\pi\in\mathcal{A}_{t,T}} \tilde{J}(t,y;\pi).$$

実際、動的計画原理から、問題 ($\tilde{\mathrm{P}}$) に関連する HJB 方程式は次のようになる。

$$\inf_{\pi\in\mathbb{R}^m}\left[\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_f\Sigma_f^*D^2\tilde{V}) + \left\{b + By - \alpha\mathrm{e}^{r(T-t)}\Sigma_p\Sigma_f^*\pi\right\}^* D\tilde{V} + \ell(y,\pi)\right] = 0, \tilde{V}(T,y) = 0.$$

更に、$\tilde{V}(t,y) := \mathrm{e}^{-v(t,y)}$, とすると、$v$ 次の偏微分方程式を満たす：

$$\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}\mathcal{L}_t^\pi v(t,y) = 0, \quad v(T,y) = 0, \tag{0.1}$$

ここで、 $\mathcal{L}_t^\pi v(t,y)$ は次で定義される。

$$\mathcal{L}_t^\pi v(t,y) := \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_f\Sigma_f^*D^2v) - \frac{1}{2}(Dv)^*\Sigma_f\Sigma_f^*Dv + (b+By)^*Dv - \frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}\pi^*\Sigma_p\Sigma_p^*\pi$$
$$+ \alpha\mathrm{e}^{r(T-t)}\pi^*(a + Ay - r\mathbf{1} + \Sigma_p\Sigma_f^*Dv) - y^*\Lambda y\int_{z>0}\left(\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-t)}}-1\right)\nu(dz).$$

つまり、次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_f\Sigma_f^*D^2v) + \left\{K_1y + b - \Sigma_f\Sigma_p^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}(a-r\mathbf{1})\right\}^* Dv\\ &- \frac{1}{2}(Dv)^*K_2Dv + \frac{1}{2}y^*K_0y + (a-r\mathbf{1})^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}Ay\\ &+ \frac{1}{2}(a-r\mathbf{1})^*(\Sigma_p\Sigma_p^*)^{-1}(a-r\mathbf{1}) - y^*\Lambda y\int_{z>0}\left(\mathrm{e}^{\alpha z\mathrm{e}^{r(T-t)}}-1\right)\nu(dz) = 0,\\ &v(T,y) = 0.\end{aligned} \tag{0.2}$$

ただし、K_2, K_1, K_0 は次で与えられる:

$$K_2 := \Sigma_f \left\{ I - \Sigma_p^* (\Sigma_p \Sigma_p^*)^{-1} \Sigma_p \right\} \Sigma_f^*, K_1 := B - \Sigma_f \Sigma_p^* (\Sigma_p \Sigma_p^*)^{-1} A, K_0 := A^* (\Sigma_p \Sigma_p^*)^{-1} A.$$

【解法の手順】を経て、次の結果が得られる。

Theorem 0.1. (A1), (A2) を仮定する。さらに、次も仮定する。

(A3) $$K_0 - 2\Lambda \int_{z>0} \left(\mathrm{e}^{\alpha z \mathrm{e}^{rT}} - 1 \right) \nu(dz) \geq 0.$$

そのとき、次の結果が得られる。

1.(0.2) は次の明示解 $\widehat{v}(t, y)$ をもつ。

$$\widehat{v}(t, y) := \frac{1}{2} y^* P(t) y + q(t)^* y + k(t),$$

ただし、$P(t), q(t), k(t)$ それぞれ次の方程式の解である。

$$\dot{P}(t) + P(t)K_1 + K_1^* P(t) - P(t) K_2 P(t) + K_0 - 2\Lambda \int_{z>0} \left(\mathrm{e}^{\alpha z \mathrm{e}^{r(T-t)}} - 1 \right) \nu(dz) = 0, \ P(T) = 0,$$

$$\dot{q}(t) + (K_1 - K_2 P(t))^* q(t) + P(t) b + (A - \Sigma_p \Sigma_f^* P(t))^* (\Sigma_p \Sigma_p^*)^{-1} (a - r\mathbf{1}) = 0, \ q(T) = 0,$$

$$\dot{k}(t) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\Sigma_f \Sigma_f^* P(t)) + q(t)^* \left\{ b - \Sigma_f \Sigma_p^* (\Sigma_p \Sigma_p^*)^{-1} (a - r\mathbf{1}) \right\} - \frac{1}{2} q(t)^* K_2 q(t)$$
$$+ \frac{1}{2} (a - r\mathbf{1})^* (\Sigma_p \Sigma_p^*)^{-1} (a - r\mathbf{1}) = 0, \quad k(T) = 0.$$

2. 更に次を仮定する。

(A4) $$\int_{z>0} \mathrm{e}^{2\alpha z \mathrm{e}^{rT}} \nu(dz) < \infty.$$

このとき、

$$\widehat{\pi}_s := \widehat{\pi}(s, Y_s) = \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-r(T-s)} (\Sigma_p \Sigma_p^*)^{-1} \left[\left\{ A - \Sigma_p \Sigma_f^* P(s) \right\} Y_s + a - r\mathbf{1} - \Sigma_p \Sigma_f^* q(s) \right]$$

は最適戦略で、$t \in [0, T]$ に対して、次が成り立つ。

$$V(t, x, y) = -\mathrm{e}^{-\widehat{v}(t,y) - c\alpha \int_t^T \mathrm{e}^{r(T-s)} ds + \lambda_0 \int_t^T \int_{z>0} \left(\mathrm{e}^{\alpha z \mathrm{e}^{r(T-s)}} - 1 \right) \nu(dz) ds - \alpha x \mathrm{e}^{r(T-t)}}.$$

参考文献

[1] H. Hata and K. Yasuda (2016) “An optimal investment strategy for insurance companies with a linear Gaussian stochastic factor model”, preprint.