移動平均型定常増分過程に対する新生過程によるセミマルチンゲール表現

井上 昭彦 (広島大学)
仲村 勇祐 (広島大学)

これは, 時系列解析の手法と伊藤解析の枠組みの融合という方向の研究である. $n \in \mathbb{N}$ とし，$r_k \in (0,\infty)$ $(k=1,\dots,n)$ と $\theta_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $(k=1,\dots,n)$ に対し，

$$c(t) := \sum_{k=1}^{n} \theta_k e^{-r_k t} \qquad (t>0) \tag{1}$$

とおく．$\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を完備な確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上に定義された $W(0)=0$ を満たす 1 次元ブラウン運動とし，ガウス型定常増分過程 $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を次で定義する：

$$Z(t) := W(t) - \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{s} c(s-u)dW(u) \right\} ds \qquad (t\in\mathbb{R}). \tag{2}$$

P-零集合の全体 $\mathcal{N}$ に対し, $\mathcal{F}_t := \sigma(Z(s) : 0 \le s \le t) \vee \mathcal{N}$ で $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ を定める. $\{Z(t)\}_{t\ge0}$ の**新生過程** $\{\overline{W}(t)\}_{t\ge0}$ は, 次で定義される：

$$\overline{W}(t) := Z(t) + \int_0^t E\left[\int_{-\infty}^{s} c(s-u)dW(u) \Big| \mathcal{F}_s \right] ds \qquad (t\ge0).$$

$\{\overline{W}(t)\}_{t\ge0}$ は 1 次元ブラウン運動で, $\sigma(\overline{W}(s) : 0 \le s \le t) = \sigma(Z(s) : 0 \le s \le t)$ を満たす．我々は，確定的な関数 $\ell(s,u)$ で次を満たすものを**明示的**に求めたい：

$$Z(t) = \overline{W}(t) - \int_0^t \left\{ \int_0^s \ell(s,u) d\overline{W}(u) \right\} ds \qquad (t\ge0). \tag{3}$$

このような結果は，$\{Z(t)\}$ という記憶を持つノイズで駆動される確率モデルに対して，ブラウン運動 $\{\overline{W}(t)\}_{t\ge0}$ に関する通常の伊藤解析を適用することを可能にする．

実係数有理関数 Θ を

$$\Theta(\xi) := 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{r_k+\xi}$$

により定義する．次の (定常時系列の純非決定性に対応する) 仮定を考える：

$$\Theta(-\xi) \text{ は } n \text{ 個の相異なる正の零点 } q_1,\dots,q_n \text{ を持つ.} \tag{A}$$

仮定 (A) のもと，$\psi_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $(k=1,\dots,n)$ を

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_k}{q_k+\xi} = \frac{1}{\Theta(\xi)}$$

により定義する．$t>0$ に対し，$G(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ を次で定義する：

$$G(t) := \begin{pmatrix} \frac{\psi_1\Theta(q_1)}{q_1+q_1}e^{-q_1t} & \frac{\psi_2\Theta(q_2)}{q_1+q_2}e^{-q_2t} & \cdots & \frac{\psi_n\Theta(q_n)}{q_1+q_n}e^{-q_nt} \\ \frac{\psi_1\Theta(q_1)}{q_2+q_1}e^{-q_1t} & \frac{\psi_2\Theta(q_2)}{q_2+q_2}e^{-q_2t} & \cdots & \frac{\psi_n\Theta(q_n)}{q_2+q_n}e^{-q_nt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\psi_1\Theta(q_1)}{q_n+q_1}e^{-q_1t} & \frac{\psi_2\Theta(q_2)}{q_n+q_2}e^{-q_2t} & \cdots & \frac{\psi_n\Theta(q_n)}{q_n+q_n}e^{-q_nt} \end{pmatrix}.$$

また，$D(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を

$$D(s) := \{1 - G(s)^2\}^{-1} \qquad (s > 0)$$

により定める (逆行列の存在は保証されている)．さらに，$s > 0$ に対し，$v_1(s) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ および $F(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ をそれぞれ次で定める：

$$v_1(s) := \left(\psi_1\Theta(q_1)e^{-q_1 s}, \psi_2\Theta(q_2)e^{-q_2 s}, \ldots, \psi_n\Theta(q_n)e^{-q_n s}\right),$$

$$F(s) := \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \frac{G_{1,j}(s)e^{r_1 s}}{r_1 - q_j} & \frac{G_{1,j}(s)e^{r_2 s}}{r_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{1,j}(s)e^{r_n s}}{r_n - q_j} \\ \frac{G_{2,j}(s)e^{r_1 s}}{r_1 - q_j} & \frac{G_{2,j}(s)e^{r_2 s}}{r_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{2,j}(s)e^{r_n s}}{r_n - q_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{G_{n,j}(s)e^{r_1 s}}{r_1 - q_j} & \frac{G_{n,j}(s)e^{r_2 s}}{r_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{n,j}(s)e^{r_n s}}{r_n - q_j} \end{pmatrix}.$$

ただし，$G_{i,j}(s)$ は行列 $G(s)$ の (i,j) 成分を表す．$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$\ell_k(s) := \theta_k e^{r_k s} - \theta_k [v_1(s)D(s)F(s)]_k \qquad (s > 0) \tag{4}$$

とおく．ただし，$[v_1(s)D(s)F(s)]_k$ は，$1 \times n$ 行列 $v_1(s)D(s)F(s)$ の第 k 成分を表す．

Theorem 1. (A) を仮定する．このとき，(3) が次の $\ell(s,u)$ で成り立つ：

$$\ell(s,u) := \sum_{k=1}^{n} e^{-r_k s}\ell_k(u). \tag{5}$$

この定理より特に次が分かる：与えられたブラウン運動 $\{\overline{W}(t)\}_{t\geq 0}$ と (5) の $\ell(s,u)$ により (3) で与えられる $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ は，(1), (2) で定義される $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ と同じ分布を持つ定常増分過程である．Theorem 1 の $n = 1$ の場合は，[AIK, INA] で示されている．Theorem 1 の $n \geq 2$ の場合を [AIK, INA] の方法で示すのは困難で，[IKP] で導入された新しい手法が鍵となる．

今，n 個の過程 $\{X_k(t)\}_{t\geq 0}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ を, 次により定める：

$$X_k(t) := \int_0^t \ell_k(s)d\overline{W}(s) \qquad (t \geq 0).$$

次の定理より，$Z(t)$ は $n+1$ 次元マルコフ過程の成分として埋め込めることが分かる．

Theorem 2. (A) を仮定する．このとき，$(Z(t), X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ は次のマルコフ型 SDE の解である：$t \geq 0$ に対し，

$$\begin{cases} dZ(t) = \left\{-\sum_{k=1}^{n} e^{-r_k t}X_k(t)\right\}dt + d\overline{W}(t), \\ dX_k(t) = \ell_k(t)d\overline{W}(t) \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

上の結果の応用例として, 短期金利過程 $\{r(t)\}_{t\geq 0}$ が確率微分方程式

$$dr(t) = \{a - br(t)\}dt + \sigma dZ(t) \quad (t \geq 0), \quad r(0) \in [0, \infty) \tag{6}$$

により記述される Vasicek タイプのモデルを考える．ここで, $a, b, \sigma \in (0, \infty)$ とする．P は同値マルチンゲール測度とみなし, モデルのフィルトレーションは上の $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ を

となる．(6) の $\{Z(t)\}$ は (3) の形の伊藤過程であるから, (6) は通常の伊藤解析の枠組みに入る．一方, $\{Z(t)\}$ は定常増分過程であり, その意味でノイズとして自然である．$\{Z(t)\}$ は $2n$ 個のパラメータ r_k, θ_k を含むので, モデルの fitting で柔軟性が高い．

満期が T (>0) で額面 1 の割引き債の時刻 $t \in [0,T]$ における価格 $P(t,T)$ は

$$P(t,T) = E\left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

により与えられる．Theorem 2 により, [IMN] の結果を拡張した次が得られる．

Theorem 3 (**アフィン期間構造の類似物**)**.** $P(t,T)$ は

$$P(t,T) = F(t, r(t), X_1(t), \ldots, X_n(t); T) \qquad (0 \le t \le T)$$

で与えられる．ここで，$\ell_0(s) := \sigma$ として，

$$F(t, x_0, x_1, \ldots, x_n; T) := \exp\left\{-A(t,T) - C_0(t,T)x_0 - \sum_{k=1}^{n} C_k(t,T)x_k\right\},$$

$$C_0(t,T) := \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b},$$

$$C_k(t,T) := -\frac{\sigma}{b}\int_t^T e^{-p_k s}\{1-e^{-b(T-s)}\}ds \quad (k=1,2,\ldots,n),$$

$$A(t,T) := \frac{a}{b}\left\{T - t - \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}\right\} - \frac{1}{2}\int_t^T \left\{\sum_{k=0}^{n} \ell_k(s) C_k(s,T)\right\}^2 ds.$$

次に期間構造方程式に関する結果を述べる．$G(t, r(t), X_1(t), \ldots, X_n(t))$ を満期が S $(\le T)$ で，ペイオフが $H = h(P(S,T))$ のヨーロピアン・タイプの派生証券の時間 t における価格とする．すると, G の数値計算は次の PDE の数値計算に帰着される：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}G(t,x) = 0 & ((t,x) \in [0,S) \times \mathbb{R}^{n+1}), \\ G(S,x) = h(F(S,x;T)) & (x \in \mathbb{R}^{n+1}). \end{cases}$$

ここで，$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\ell_0(t) := \sigma$, そして

$$\mathcal{L}G := \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \ell_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 G + \left\{a - bx_0 - \sigma\sum_{k=1}^{n} e^{-p_k t}x_k\right\}\frac{\partial G}{\partial x_0} - x_0 G.$$

即ち, (6) の非マルコフ的金利モデルは, PDE による通常の数値計算法が可能である．

参考文献

[AIK] V. V. Anh, A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization, *Stochastic Anal. Appl.* **23** (2005), 301–328.

[IKP] A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes, *Bernoulli*, to appear. arXiv:1507.02848.

[IMN] A. Inoue, S. Moriuchi and Y. Nakamura, A Vasicek-type short rate model with memory effect, *Stochastic Anal. Appl.* **33** (2016), 1068–1082.

[INA] A. Inoue, Y. Nakano and V. Anh, Linear filtering of systems with memory and application to finance, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* 2006, Art. ID 53104, 26 pp.