体心立方格子上の最近接モデルに対するレース展開

北海道大学大学院理学院数学専攻
上島 芳倫 (Yoshinori KAMIJIMA) *
指導教官：坂井 哲　先生；共同研究者：半田 悟　先輩

1　はじめに

1.1　研究背景

最近接自己回避歩行 (nearest neighbour self-avoiding walk，以下 SAW) は単純ランダムウォーク (simple random walk，以下 RW) に自分自身の path と交わらないという条件を加えたモデルである．また，パーコレーションは各 bond が確率 p で開いている，確率 $1-p$ で閉じているという状態が与えられるモデルである．これらは，自然科学や確率論的統計力学モデルにおいて重要な概念である，相転移・臨界現象を示す．例えば水 (H_2O) は，常温で液体の水であって，$0\,°C$ で氷に変化し，$100\,°C$ で水蒸気に変化することはよく知られている．

H_2O は気相と液相の間に，各相が区別できなくなる点がある．これを臨界点と呼ぶ．臨界点の近傍では臨界現象と呼ばれる，物理量に特異性を示す現象が起きることが知られている．すなわち，物理量が不連続になったり，発散したりする．その漸近的な振る舞いは $(T-T_c)^\beta$ のように冪乗則に従う．ここに現れた β を**臨界指数**という．当然のことながら，臨界点の値 T_c は物質ごとに異なる．しかし臨界指数は，物質の種類によらない定数，という普遍性をもつことが実験的に知られている．

SAW においても臨界指数が定義される．特にその臨界指数は，SAW を考える空間の次元 d に依存して変わる．この場合「臨界指数の普遍性」は，考えている空間（格子の形）によらずモデルの対称性や次元にのみよって決まること，を意味する．臨界指数を具体的に求めることは，低次元では難しい問題であり，数学的に厳密な理解があまり進んでいない．一方で高次元では，臨界指数が平均場臨界指数と呼ばれる簡単な値に退化することが知られている．このとき，退化するぎりぎりの次元 d_c を**（上部）臨界次元**という．SAW の臨界次元は経験的に $d_c=4$ であると予想されている．現在のところ，数学的に厳密に証明されているのは $d\geq 5$ の場合である．それは原と Slade[2, 3] によって示された．その論文で用いられた手法が**レース展開**である．

同様にパーコレーションにおいてもレース展開を用いて臨界次元を求める試みがあり，$d_c=6$ と予想されている．しかしこちらは非常に難しく，$d\geq 11$ の場合までしか証明されていない [1].

1.2　研究目的

SAW では $d\geq 5$ で臨界指数が平均場臨界指数に退化することを証明できた，と述べた．しかしその証明は，100 ページ以上にもわたり，理解するのが容易ではない．操作する量[1)]が 10 個以上もあるために，コンピュータを使わざるを得ないこともその複雑さを示唆している．レース展開に関しても非常にテクニカルな解析方法ゆえ，あらゆる人々に親しまれているものではなかった．こうした結果，SAW の臨界現象が広く認知されているとは言い難い．

100 ページ以上あり複雑であった証明を，その半分以下の 20–30 ページに抑え，簡単で誰でもわかるように改良するのが本研究の主眼である．そのために，[2, 3] では単純立方格子 (simple cubic lattice) $\mathbb{Z}^d$ 上で考えていたのを，体心立方格子 (body-centred cubic lattice) $\mathbb{L}^d$ 上に変更した．あとで述べるように，$\mathbb{L}^d$ には $\mathbb{Z}^d$ にはない利点のおかげで解析が非常に簡単になるのである．結果として，現在までに $d\geq 7$ 次元までは完成しており，すでに証明された $d\geq 5$ まではもう少しである．さらに論文にすると 30 ページ前後に抑えられることが期待できる．これは 100

* s153009@math.sci.hokudai.ac.jp　or　ykami@eis.hokudai.ac.jp
1) bootstrapping argument（後述）で用いる，K_1，K_2，K_3 で押さえられる量のこと．

ページ以上あったことと比べれば，圧倒的に少ない分量である．

これを利用して，パーコレーションにおいて一桁の次元で平均場臨界指数へ退化することも目指している．こちらは未だ完成していないため，以下では SAW でどれだけ簡単になるのか述べよう．

2 体心立方格子の定義とその利点

d 次元体心立方格子 $\mathbb{L}^d$ は，原点を含み $\mathbb{L}^d \ni o = (0,0,\dots,0)$，$\mathscr{N} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid |x_1| = |x_2| = \cdots = |x_d| = 1\}$ を平行移動させることで生成される集合，として定義される．最近接点の個数は $|\mathscr{N}| = 2^d$ である．

$\mathbb{Z}^d$ と比べたときの $\mathbb{L}^d$ の利点は，RW の推移確率が非常に簡単になることである．すなわち，$D(x) = \mathbb{1}_{\mathscr{N}}(x)/2^d = \prod_{j=1}^{d} \delta_{|x_j|,1}/2$[2] という，単なる 1 **次元推移確率の積**で表されてしまう．このことから，Stirling の公式が使えて，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^{*(2n)}(o) = \underbrace{(D * \dots * D)}_{2n\text{-fold}}(o)^{3)} = \left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^d \underset{n\uparrow\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^d. \tag{1}$$

3 主結果

3.1 自己回避歩行

SAW に対する二点関数を，$p \in [0, p_c)$ と $x \in \mathbb{L}^d$ に対して

$$G_p(x) = \underbrace{\sum_{\omega\colon o \to x} p^{|\omega|} \prod_{j=1}^{n} D(\omega_j - \omega_{j-1})}_{=S_p(x)} \underbrace{\prod_{0\le s<t\le|\omega|} \left(1 - \mathbb{1}_{\{\omega_s = \omega_t\}}(\omega)\right)}_{\text{self-avoidance constraint}}{}^{4)}$$

と定義する．ここで，$S_p(x)$ は RW の二点関数であり，臨界点 p_c は帯磁率 χ_p が発散する点である: $\chi_p = \sum_{x\in\mathbb{L}^d} G_p(x)$, $\quad p_c = \sup\{\, p \ge 0 \mid \chi_p < \infty \,\}$.

帯磁率の臨界点近傍での振る舞いは，次の定理によって特徴付けられる．

定理 1. Bubble condition $G_p^{*2}(o) = \sum_{x\in\mathbb{L}^d} G_p(x)^2 = \int_{[-\pi,\pi]^d} \hat{G}_p(k)^2 \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} < \infty$[5] が満たされるならば，$\chi_p \asymp (p_c - p)^{-1}$ が成り立つ．したがって $\gamma = 1$．ここで，'$\asymp$' は上下から同じオーダーで押さえられることを意味する．

これを証明するための次の補題が本研究の主結果である．

補題 1 (with 坂井，半田)**.** $\forall d \ge d_0$ (現在のところ $d_0 = 7$),

$$\exists C \in [1, p_c) \quad \text{s.t.} \quad \frac{|\hat{G}_p(k)|}{\hat{S}_{\mu_p}(k)} \le C \quad \left(\text{ただし，} \hat{S}_{\mu_p} = \frac{1}{1 - \mu_p \hat{D}(k)} \text{ および } \mu_p = 1 - \chi_p^{-1}\right).$$

3.2 レース展開

レース展開は，二点関数の Fourier 変換 $\hat{G}_p(k)$ に対する，ある種の self-consistent な方程式を与える:

$$\begin{aligned} &\hat{G}_p(k) = 1 + p\hat{D}(k)\hat{G}_p(k) + \hat{\Pi}_p(k)\hat{G}_p(k) \implies \hat{G}_p(k) = \frac{1}{1 - p\hat{D}(k) - \hat{\Pi}_p(k)} \\ &\implies \chi_p = \hat{G}_p(0) = \frac{1}{1 - p - \hat{\Pi}_p(0)} \quad \therefore p = 1 - \chi_p^{-1} - \hat{\Pi}_p(0) \le 1 + \hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0) \end{aligned} \tag{2}$$

---

2) $\delta_{\cdot,\cdot}$ は Kronecker デルタ．

3) 関数 $f(x)$ の畳み込みを $(f * g)(x) = \sum_{y\in\mathbb{L}^d} f(y)g(x-y)$ で表す．

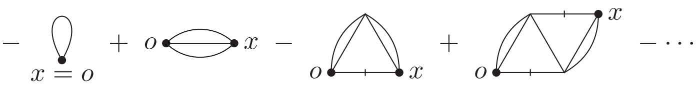
4) n 歩の RW の path を，順序づけられた $n+1$ 個の点の集合 $\omega = (\omega_0,\ \omega_1,\ \dots,\ \omega_n)$ $(\omega_j \in \mathbb{L}^d,\ \forall j = 0,\ 1,\ \dots,\ n)$ として定義し，その歩数を $|\omega| = n$ で表す．総和は o から x に至るすべての path についてとることを意味し，一つ目の総積の因子はその一歩々々が隣り合った点 $(\omega_j - \omega_{j-1} \in \mathscr{N})$ になっていることを表す．

5) 関数 $f(x)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(k) = \sum_{x\in\mathbb{L}^d} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$ で表す．

$$\Longrightarrow -\frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)}{p}+\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}}{1-\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}} \le \frac{\hat{G}_p(k)}{S_{\mu_p}(k)}-1 \le \frac{\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0)}{p}+\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}}{1-\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}} \tag{3}$$

ここで，$\hat{\Pi}_p(k)$ はレース展開係数 $\Pi_p(x)$ の Fourier 変換である．

$$\Pi_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \pi_p^{(n)}(x) = -$$



$\Pi_p(x)$ に対して奇数項の和を $\Pi_p^{\mathrm{odd}}(x)$ とし，偶数項の和を $\Pi_p^{\mathrm{even}}(x)$ とした．上の「絵」は，SAW の二点関数 $G_p(x)$ が体積排除効果によって RW からどの程度ずれるかを表しているもので，Feynman diagram と呼ばれている．

3.3 Bootstrapping argument

補題 1 を証明するために，次のような bootstrapping argument と呼ばれる手法が用いられる:

Step 1. 適当な関数 $g_1(p)=p$, $g_2(p)=\sup_{k\in[-\pi,\pi]^d}|\hat{G}_p(k)|/S_{\mu_p}(k)$, $g_3(p)=\sup_{k,\ l\in[-\pi,\pi]^d}|\hat{\Delta}_k\hat{G}_p(l)|/U_{\mu_p}(k,l)$ ($U_{\mu_p}(k,l)=[1-\hat{D}(k)]\left[\left\{\hat{S}_{\mu_p}(l+k)+\hat{S}_{\mu_p}(l-k)\right\}\hat{S}_{\mu_p}(l)/2+4\hat{S}_{\mu_p}(l+k)\hat{S}_{\mu_p}(l-k)\right]$, $\hat{\Delta}_k$ は離散ラプラシアンを 2 で割ったもの) を選び，upper bound $g_i(p)\le K_i$, $\forall i=1,\ 2,\ 3$ を仮定する．

Step 2. 初期値 $p=0$ で $g_i(0)<K_i$, $\forall i=1,\ 2,\ 3$ を満たすことと，$p\in(0,p_c)$ で連続であることを確認する．

Step 3. 次元 d 十分大きいとして，upper bound の仮定が満たされるならば，$g_i(p)<K_i$, $\forall i=1,\ 2,\ 3$ となることを確認する．

このとき，$g_2(p)$ は $p\in[0,p_c)$ で真に K_2 より小さいことがわかるから，補題 1 の証明が完了する．

特に，$g_1(p)$ と $g_2(p)$ はどのように押さえられるかを示そう．

$$L=\left\|(pD(x))^{*2}*G_p\right\|_{\infty}, \qquad B=\left((pD)^{*2}*G_p^{*2}\right)(o),$$
$$r=p\|D\|_{\infty}+L+B, \qquad \hat{W}(k)=\sup_{x\in\mathbb{L}^d} G_p(x)\,(1-\cos(k\cdot x)).$$

とおく．$\varepsilon_1=\left(D^{*2}*S_1\right)(o)=\sum_{n=1}^{\infty}D^{*(2n)}(o)$ および $\varepsilon_2=\left(D^{*2}*S_1^{*2}\right)(o)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,D^{*(2n)}(o)$ なる量を定義すると，これらは (1) により評価できる．ε_1, ε_2 および upper bound の仮定を用いると L, B, r, $\hat{W}(k)$ は

$$L\le {K_1}^2K_2\varepsilon_1,\quad B\le {K_1}^2{K_2}^2\varepsilon_2,\quad r\le\frac{K_1}{2^d}+{K_1}^2K_2\varepsilon_1+{K_1}^2{K_2}^2\varepsilon_2,\quad \frac{\hat{W}(k)}{1-\hat{D}(k)}\le 5K_3\,(1+2\varepsilon_1+\varepsilon_2) \tag{4}$$

と評価できる．次元 d が十分大きいとき，ε_1 と ε_2 は小さくなる．また，レース展開係数の Fourier 変換 $\hat{\Pi}_p(k)$ に対して，

$$0\le\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)\le L+\frac{rB(p\|D\|_{\infty}+L)}{1-r^2}, \qquad 0\le\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0)\le\frac{B(p\|D\|_{\infty}+L)}{1-r^2} \tag{5}$$

$$0\le\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}\le\frac{\hat{W}(k)}{1-\hat{D}(k)}\frac{B^2(1+r^2)}{p(1-r^2)^3}, \qquad 0\le\frac{\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(k)}{p(1-\hat{D}(k))}\le\frac{\hat{W}(k)}{1-\hat{D}(k)}\frac{B(1+rB)}{p(1-r^2)^3} \tag{6}$$

なる評価を得る．これらは (4) と合わせて上から押さえることができる．したがって，(2) と (3) を (4) と (5) および (6) で評価することにより，$g_1(p)$ と $g_2(p)$ は上から押さえられる．

参考文献

[1] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Nearest-neighbor percolation function is continuous for $d>10$. Preprint, (2015). arXiv:1506.07977.

[2] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **147**, pp. 101–136, (1992).

[3] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.*, Vol. **4**, pp. 235–327, (1992).