Dynamic Universality for Random Matrices

2016/12/20/火：京都大学数理解析研究所:　　河本陽介，長田博文 (Kyushu University)

1. ランダム行列の普遍性:　ランダム行列とは、典型的な場合、成分がガウス分布であるエルミート行列であり、ガウシアンユニタリーアンサンブル (GUE) と呼ばれる。その固有値の分布は、 Vandermonde 行列式で表示される。固有値を確率変数と思った場合、相関が非常に強くなり、大数の法則および中心極限定理のレベル共に、古典的な結果とは著しく異なる現象が現れる。上述の GUE はいわば、ベルヌイ分布の対応物で、可解モデルとしてすべてを具体的に計算することにより、これらの現象が解明された。従って、古典理論の大数の法則や中心極限定理と同じく、今や、その普遍性が重要な問題となっている。

ランダム行列の普遍性は、ランダム行列理論における中心的課題であり、Tao や Yau を初めとして、これまで様々な設定の下で研究がなされてきた (詳しくは、例えば [1] やその参考文献を参照)。一例を挙げる。

V を $\mathbb{R}$ 上実解析的かつ $\lim_{|x|\to\infty}\frac{V(x)}{\log|x|}=\infty$ を満たす関数とし、$\mathbb{R}^N$ の確率測度 $\mu_V^N(d\mathbf{x}^N)$ を考える。

$$\mu_V^N(d\mathbf{x}^N)\propto\prod_{i<j}^N|x_i-x_j|^2\prod_{k=1}^N e^{-NV(x_k)}\,d\mathbf{x}^N. \tag{1}$$

V に対する平衡測度が存在するので ρ_V と表す。つまり、$\mathsf{x}^N=\sum_{1\le i\le N}\delta_{x_i}$ とおくと、次が成立する。

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_V^N}[\frac{1}{N}\mathsf{x}^N((-\infty,s])]=\int_{-\infty}^s\rho_V(x)\,dx. \tag{2}$$

特に、$V=x^2$ としたとき、μ_V^N は N 次 GUE の固有値の法則を与える。また ρ_V は Wigner の半円分布であり、この収束は Wigner の半円法則と呼ばれる。

ρ_V は決定論的な測度であることから、(2) は大数の法則とみなすことができる。更に大数の法則の次のオーダー、つまり中心極限定理にあたるものを考え、ランダムな無限粒子の配置を与える。$\rho_V(\theta)>0$ なる $\theta\in\mathbb{R}$ を固定し、スケーリング $x\mapsto s$ を、$x=\frac{s}{N\rho_V(\theta)}+\theta$ とし、s に対する確率測度を $\mu_{V,\theta}^N$ とすると、

$$\mu_{V,\theta}^N(d\mathbf{s}^N)\propto\prod_{i<j}^N|s_i-s_j|^2\prod_{k=1}^N\exp(-NV(\frac{s}{N\rho_V(\theta)}+\theta))\,d\mathbf{s}^N. \tag{3}$$

$\rho_V^{N,n}$ を μ_V^N の n 点相関関数とすると、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、局所一様収束が成立する [2]：

$$\lim_{N\to\infty}\rho^{N,n}(\mathbf{x}^n)=\rho_{\sin}^n(\mathbf{x}^n)\ \text{compact uniformly}, \tag{4}$$

ここで、$\rho_{\sin}^n(\mathbf{x}^n)$ は Sine 点過程 $\mu_{\sin}$ の n 点相関関数で次式で与えられる。

$$\rho_{\sin}^n(\mathbf{x}^n)=\det\Big[\frac{\sin(x_i-x_j)}{x_i-x_j}\Big]_{1\le i,j\le n}$$

つまり、$\mu_{V,\theta}^N$ は粒子数無限大での極限で Sine 点過程に弱収束する。特に、極限 $\mu_{\sin}$ は V や θ に依らない普遍的な点過程であり、これは、bulk 極限におけるランダム行列理論の普遍性の一例である。

2. 力学的普遍性:　次に力学的対応物を考える。μ_V^N に対し $L^2(S^N,\mu_V^N)$ で次の Dirichlet 形式を考える。

$$\mathcal{E}^N(f,g)=\frac{1}{2}\int_{S^N}\sum_{i=1}^N\nabla_i f\cdot\nabla_i g\,d\mu_V^N.$$

この Dirichlet 形式を部分積分することにより得られる生成作用素に対応する N 次元 SDE は、

$$dX_t^{N,i}=dB^i+\sum_{1\le j\ne i\le N}\frac{1}{X_t^{N,i}-X_t^{N,j}}dt-\frac{1}{2\rho_V(\theta)}V'(\frac{X_t^{N,i}}{N\rho_V(\theta)}+\theta)dt,\quad 1\le i\le N. \tag{5}$$

更に確率力学の N 無限大での極限で得られる無限次元 SDE は、以下の (6) であると予想される。

$$dX_t^i=dB^i+\lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i-X_t^j|<r}\frac{1}{X_t^i-X_t^j}dt,\quad i\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

実際 (6) は $\mu_{\sin}$ に付随する Dirichlet 形式 (distorted ブラウン運動) に対応する確率力学だからである。

まとめると、有限粒子系の点過程の無限系の点過程への収束が、それぞれに付随する確率力学の収束も伴うと期待される。特に、点過程の普遍性は、対応する確率力学の普遍性を導く、つまり、幾何的普遍性の力学的普遍性への伝播が成立すると予想する。本講演では、極限の無限次元 SDE の解の一意性が満たされる条件の下では、この予想が正しいことを示す。つまり、一般に点過程の良い収束（**幾何的強普遍性**）が確率力学の収束（**力学的普遍性**）を保証するということを示す。

3. 設定と主結果: 以下、一般的枠組みを設定し、主結果を述べる。

点過程の有限粒子系近似: $S = \mathbb{R}^d$、$\mathsf{S} = \{\mathsf{s} = \sum_i \delta_{\mathsf{s}_i}; \mathsf{s}_i \in S$, 任意のコンパクト K に対し、$\mathsf{s}(K) < \infty\}$ を S の配置空間とする．S 上の確率測度 μ を点過程という。$\{\mu^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を, $\lim_{N\to\infty} \mu^N = \mu$ in law, かつ $\mu^N(\mathsf{s}(S) = N) = 1$ であるような点過程の列とする。$S_r = \{x \in S\,; |x| < r\}$ に対し、$m_{r,n}$ と $m_{r,n}^N$ をそれぞれ μ と μ^N の S_r の n 点密度関数とする。

(A1) $m_{r,n}, m_{r,n}^N \in C^\infty(S_r^n, dx)$ for any $n, r \in \mathbb{N}$, and $\sum_{i=1}^\infty i\mu(S_r^n) < \infty$ for any $r \in \mathbb{N}$.

この条件 **(A1)** は、N 粒子系の確率力学の存在を保証する。極限については Dirichlet 形式の可閉性や準正則性を仮定する。実際これらは、具体的な場合は、示されている。また、準 Gibbs 性というロバストな十分条件が知られている。本質的なのは、次の **(A2)** と後述の **(A3)** の条件である。

(A2) $\lim_{N\to\infty} ||m_{r,n}^N - m_{r,n}||_{S_r^n} = 0,\quad \mathrm{Cap}^\mu(\{\mathsf{s}; m_{r,n}(\mathsf{s}) = 0\}) = 0$ for any $n, r \in \mathbb{N}$.

尚、$\|\cdot\|_A$ は集合 A 上の L^∞ ノルムを表す。$m_{r,n}$ の零点を配置空間の集合とみなし $\{\mathsf{s}; m_{r,n}(\mathsf{s}) = 0\}$ と表す。

Dirichlet 形式の 2 種類の近似: μ の自然な Dirichlet 形式に付随する、2 種類の近似（領域近似）を導入する。$\mathcal{D}_\circ$ を local smooth な $f : \mathsf{S} \to \mathbb{R}$ 全体とする。$f, g \in \mathcal{D}_\circ$ に対して、2 次場 $\mathbb{D}$ と $\mathbb{D}_r^m$ を次で与える。

$$\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s}) = \frac{1}{2}\sum_i \nabla_{s_i}\check{f}(\mathsf{s})\cdot\nabla_{s_i}\check{g}(\mathsf{s}),$$

$$\mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s}) = \mathbb{D}[f,g](\mathsf{s}) \quad (\mathsf{s} \in \mathsf{S}_r^m), \quad \mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s}) = 0 \quad (\mathsf{s} \notin \mathsf{S}_r^m).$$

ここで $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$, $\mathbf{s} = (s_i)$, $\check{f}$ は $\check{f}(\mathbf{s}) = f(\mathsf{s})$ をみたす対称関数、$\mathsf{S}_r^m = \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}\,; \mathsf{s}(S_r) = m\}$ である。

$\mathcal{D}_\circ^\mu = \{f \in \mathcal{D}_\circ \cap L^2(\mu)\,; \mathcal{E}(f,f) < \infty\}$ とおき、$L^2(\mu)$ 上の双線形形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}_\circ^\mu)$ と $(\mathcal{E}_r^m, \mathcal{D}_\circ^\mu)$ を次で与える。

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})d\mu, \quad \mathcal{E}_r^m(f,g) := \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s})d\mu. \tag{7}$$

仮定 **(A1)** から、任意の $m, r \in \mathbb{N}$ に対し、$(\mathcal{E}_r^m, \mathcal{D}_\circ^\mu)$ は $L^2(\mu)$ 上可閉となる。

$\mathcal{E}_r = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{E}_r^i$ と定義し、$\mathcal{B}_r^b = \{f\,; f$ is bounded and $\sigma[\pi_r]$-measurable$\}$ と置く。そして、$(\underline{\mathcal{E}}_r, \underline{\mathcal{D}}_r)$ と $(\mathcal{E}_r, \mathcal{D}_r)$ をそれぞれ、$(\mathcal{E}_r, \mathcal{D}_\circ^\mu \cap \mathcal{B}_r^b)$ と $(\mathcal{E}_r, \mathcal{D}_\circ^\mu)$ の閉包とする。$\{(\underline{\mathcal{E}}_r, \underline{\mathcal{D}}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ は Dirichlet 形式として単調増大、$\{(\mathcal{E}_r, \mathcal{D}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ は単調減少になる。極限をそれぞれ $(\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{D}})$ と $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ と書く。各 r で $(\underline{\mathcal{E}}_r, \underline{\mathcal{D}}_r) \le (\mathcal{E}_r, \mathcal{D}_r)$。故に極限でも $(\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{D}}) \le (\mathcal{E}, \mathcal{D})$ である。そこでこの 2 つの Dirichlet 形式の一致を仮定する。

(A3) $(\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{D}}) = (\mathcal{E}, \mathcal{D})$.

Remark 1. $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ に付随する無限次元 SDE の解の一意性が満たされるならば、**(A3)** は成立する [9]。解の一意性は、μ の末尾事象の自明性から従う [8]。さらに、行列式点過程は、常に末尾事象が自明になる [6]。

$(\mathcal{E}^N, \mathcal{D}^N)$ を $(\mathcal{E}^N, \mathcal{D}_\circ^{\mu^N})$ の $L^2(\mu^N)$ での閉包とする。X^N を $(\mathcal{E}^N, \mathcal{D}^N, L^2(\mu^N))$ に、X を $(\mathcal{E}, \mathcal{D}, L^2(\mu))$ にそれぞれ付随する拡散過程とする。この時、桑江-塩谷型のモスコ収束が成立し SDE の解の収束が従う。

定理 1. **(A1)–(A3)** を仮定すると、$\lim_{N\to\infty}(\mathcal{E}^N, \mathcal{D}^N, L^2(\mu^N)) = (\mathcal{E}, \mathcal{D}, L^2(\mu))$ in Mosco in the sense of 桑江-塩谷 [4]. 特に、初期条件が収束する（$\lim_{N\to\infty} \mathsf{X}_0^N = \mathsf{X}_0$ weakly）とき、

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{X}^N = \mathsf{X} \text{ in distribution in } C([0,\infty), \mathsf{S}). \tag{8}$$

ラベル ℓ^N と ℓ に対して $\ell^N(\mathsf{X}_0^N)$ の分布がが $\ell(\mathsf{X}_0)$ 分布に収束する時（任意の最初の m 粒子の意味で）

$$\lim_{N\to\infty} (X^{N,i})_{i=1}^m = (X^i)_{i=1}^m \text{ in distribution in } C([0,\infty); (\mathbb{R}^d)^m). \tag{9}$$

4. 力学的普遍性 （bulk と soft-edge）:

• **bulk:** $\beta = 1, 2, 4$ の場合は、**(A2)** が広い範囲で満たされることが、[2] と [3] で示されている。無限次元確率微分方程式の可逆解の一意性が $\beta = 1, 2, 4$ [8, 10]、また、（可逆かどうかはわからないが一意的非平衡解が）$\beta \geq 1$ について Tsai [10] で得れている。特に次の力学的普遍性が成立する。

定理 2 (bulk 極限)**.** $\mu_{V,\theta}^N$ を (3) で与えられたものとする。V は実解析的かつ $\lim_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{\log|x|} = \infty$ を満たすとする。このとき、**(A1)**–**(A3)** が満たされる。特に、SDE (5) と (6) の解に対して定理 1 の結論が成立する。但し、$\beta = 1, 4$ の場合は、(3), (5), (6) は適宜修正する。

• **soft-edge:** $\beta = 2$ とする。(1) を $V(x) = \sum_{i=0}^{2l} \kappa_i x^i$ $(\kappa_{2l} > 0)$ で与えスケーリングを次でとる。

$$x \mapsto N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1 + \frac{s}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}}) + d_N)$$

確率測度 $\mu_{V,\mathrm{Ai}}^N$ は次で与えられる。

$$\mu_{V,\mathrm{Ai}}^N(d\mathbf{s}^N) \propto \prod_{i<j}^N |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^N \exp(-NV(N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1 + \frac{s}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}}) + d_N)))\, d\mathbf{s}^N. \tag{10}$$

ここで、c_N, α_N, d_N は [3] で与えられている N に依る定数。このとき、$\mu_{V,\mathrm{Ai}}^N$ は N 無限大の極限で Airy 点過程 μ_{Ai} に収束し、かつ **(A2)** を満たす [3]。**(A1)** と **(A3)** を満たすことは知られている [7, 8, 6]。

定理 3 (soft-edge 極限)**.** 以上の仮定の下で、次の SDE の解に対して定理 1 の結論が成立する。

$$dX_t^{N,i} = dB^i + \sum_{1\leq j\neq i\leq N} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2l}} c_N}{2\alpha_N} V'(N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1 + \frac{X_t^{N,i}}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}}) + d_N))dt,$$

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{s\to\infty}\{\sum_{|X_t^j|<s, j\neq i} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} - \int_{|x|<s} \frac{\hat{\rho}(x)}{-x} dx\}dt.$$

参考文献

[1] Bourgade, P., Erdös, L., and Yau, H.-T., *Universality of general β-ensembles*, Duke Math. J. **163**, (2014), 1127-1190.

[2] Deift, P., Kriecherbauer, T., McLaughlin, K. T.-R., Venakides, S., Zhou, X., *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory,*, Comm. Pure Appl. Math., **52**, (1999), 1335-1425.

[3] Deift, P., Gioev, D., *Universality at the edge of the spectrum for unitary, orthogonal, and symplectic ensembles of random matrices,*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), 867-910.

[4] Kuwae, K., Shioya, T., *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry,*, Comm. Anal. Geom. **11**, (2003), no. 4, 599673.

[5] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions,*, Comm. Math. Phys. **176**, (1996), 117-131.

[6] Osada, H., Osada, S., *Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and the tail triviality*, (preprint)

[7] Osada, H., Tanemura, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from Airy random point fields*, (preprint/draft)

[8] Osada, H., Tanemura, H., *Strong solutions of infinite-dimensional stochastic differential equations and tail theorems*, (preprint/draft)

[9] Osada, H., Tanemura, H., *Uniqueness of quasi-regular Dirichlet forms related to interacting Brownian motions*, (in preparation)

[10] Tsai, Li-Cheng *Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model*, Probab. Theory Relat. Fields (published on line) DOI 10.1007/s00440-015-0672-2 (2015)