屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題

野場 啓 (京都大学), 矢野 孝次 (京都大学)

1 序

実数値確率過程 $Z = \{Z_t : t \geq 0\}$ がある区間から脱出する時刻の分布を特徴づける問題を Z に対する脱出問題という．ここでは, 二つの実数 $a > b$ と非負実数 $q \geq 0$, Z の通過時刻 $\tau_a^+ = \inf\{t > 0 : Z_t > a\}$, $\tau_b^- = \inf\{t > 0 : Z_t < b\}$ に対し, 期待値 $\mathbb{E}_0^Z\left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^-\right)$ を求める問題を考える．

X を spectrally negative な Lévy 過程としたとき, X に対する脱出問題はスケール関数を用いて表すことができる．スケール関数は, X の Laplace 指数を用いて Laplace 変換により定義される．また, 脱出問題の応用として, 吸収壁ポテンシャル測度をスケール関数を用いて表すことができる．

Kyprianou and Loeffen [2] は, 屈折 Lévy 過程 U に対する脱出問題や吸収壁ポテンシャル測度について論じた．彼らの屈折 Lévy 過程 U は, 値 0 を超えない間は spectrally negative な Lévy 過程 X に従って動き, 0 を超えている間は X に対して下向きにドリフト α がかかった動きをする．詳しく言うと, 屈折 Lévy 過程 $U = \{U_t : t \geq 0\}$ は, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s > 0\}} ds, \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

の解として定義される．

本講演では [3] に基づき, Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程を一般化した確率過程として, X, Y を異なる spectrally negative な Lévy 過程とし, 正の値をとるときは X の挙動を, 負の値をとるときは Y の挙動をする確率過程 U を定義する．そして, その確率過程における脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度について論じる．定義について詳しく述べると, 確率過程 U を, X が有界変動な標本路を持つときは X と Y を独立として, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = \int_{(0,t]} 1_{\{U_{s-} \geq 0\}} dX_s + \int_{(0,t]} 1_{\{U_{s-} < 0\}} dY_s, \tag{1.2}$$

の解として定義する．X が非有界変動な標本路をもち Gaussian part を持たないときは停

止過程の法則 $\mathbb{P}_x^{U^0}$ と周遊測度 n^U を任意の正可測汎関数 F に対し

$$\mathbb{P}_x^{U^0}\Big(F\Big((U_t)_{t<\tau_0^-},(U_{t+\tau_0^-})_{t\geq 0}\Big)\Big)=\mathbb{P}_x^X\left(\mathbb{E}_y^{Y^0}\big(F\big(w,(Y_t^0)_{t\geq 0}\big)\big)\Big|_{\substack{y=X(\tau_0^-)\\ w=(X(t))_{t<\tau_0^-}}}\right)\quad x\neq 0 \tag{1.3}$$

$$n^U\Big(F\Big((U_t)_{t<\tau_0^-},(U_{t+\tau_0^-})_{t\geq 0}\Big)\Big)=n^X\left(\mathbb{E}_y^{Y^0}\big(F\big(w,(Y_t^0)_{t\geq 0}\big)\big)\Big|_{\substack{y=X(\tau_0^-)\\ w=(X(t))_{t<\tau_0^-}}}\right) \tag{1.4}$$

を満たすものとして定義し, 確率過程 U を周遊理論を用いて構成する. ただし, Y^0 は Y の 0 での停止過程を, n^X は X の 0 での周遊測度を表す. さらに本講演では, (1.2) で定義した確率過程の列による, (1.3) と (1.4) で定義した確率過程への分布の意味での近似についても述べる.

2 Spectrally negative な Lévy 過程の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度

主結果を述べるのに必要な記号と Spectrally negative な Lévy 過程に関して知られた事実を述べる. 主結果は講演において述べる. $X=\{X_t:t\geq 0\}$ を spectrally negative な Lévy 過程で, $-X$ が subordinator ではないものとする. X の Laplace 指数を

$$\psi_X(\lambda):=\log\mathbb{E}_0^X(e^{\lambda X_1}),\qquad \lambda\geq 0 \tag{2.1}$$

で定義する. 任意の非負実数 $q\geq 0$ に対し, q-スケール関数 $W_X^{(q)}:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ を, $(-\infty,0)$ 上では $W_X^{(q)}=0$ であり, $[0,\infty)$ 上では連続で, Laplace 変換が

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}W_X^{(q)}(x)dx=\frac{1}{\psi_X(\beta)-q},\qquad \beta>\Phi(q) \tag{2.2}$$

を満たす関数として定義する.

定理 2.1 (X に対する脱出問題)**.** $b\leq x\leq a$ と $q\geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^X\left(e^{-q\tau_a^+}:\tau_a^+<\tau_b^-\right)=\frac{W_X^{(q)}(x-b)}{W_X^{(q)}(a-b)} \tag{2.3}$$

が成り立つ.

定理 2.2 (吸収壁ポテンシャル測度)**.** $b\leq x\leq a$ と $q\geq 0$ および正可測関数 f に対し,

$$\mathbb{E}_x^X\left(\int_0^{\tau_a^+\wedge\tau_b^-}e^{-qt}f(X_t)dt\right)=\int_b^a\left(\frac{W_X^{(q)}(x-b)}{W_X^{(q)}(a-b)}W_X^{(q)}(a-y)-W_X^{(q)}(x-y)\right)f(y)dy \tag{2.4}$$

が成り立つ.

3 Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度

[2] の先行研究について述べる．$\alpha > 0$ を固定する．X を前節の通りとする．X が有界変動な場合は, α は X のドリフト係数よりも小さいものと仮定する．この時, 以下の定理が成り立つ.

定理 3.1. $X_0 = x \in \mathbb{R}$ $a.s.$ とする．このとき, (1.1) はただ一つの強解を持つ.

次に, 確率過程 $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ を, $Y_t = X_t - \alpha t$ で定義し, その q-スケール関数を $W_Y^{(q)}$ とおく．また, 任意の実数 $x, y \in \mathbb{R}$ と非負実数 $q \geq 0$ に対し,

$$W_U^{(q)}(x,y) = \begin{cases} W_X^{(q)}(x-y) + \alpha 1_{(x \geq 0)} \int_0^x W_Y^{(q)}(x-z) W_X^{(q)\prime}(z-y)dz & y \leq 0 \\ W_Y^{(q)}(x-y) & y > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

とする.

定理 3.2 (U に対する脱出問題)**.** $b \leq x \leq a$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^U \left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^- \right) = \frac{W_U^{(q)}(x,b)}{W_U^{(q)}(a,b)} \tag{3.2}$$

が成り立つ.

定理 3.3 (吸収壁ポテンシャル測度)**.** $b \leq x \leq a$ と $q \geq 0$ および正可測関数 f に対し,

$$\mathbb{E}_x^U \left(\int_0^{\tau_a^+ \wedge \tau_b^-} e^{-qt} f(U_t)dt \right) = \int_b^a \left(\frac{W_U^{(q)}(x,b)}{W_U^{(q)}(a,b)} W_U^{(q)}(a,y) - W_U^{(q)}(x,y) \right) f(y)dy \tag{3.3}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] A. E. Kyprianou. Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Introductory lectures. Second edition. Universitext. Springer, Heidelberg, 2014. xviii+455 pp.

[2] A. E. Kyprianou and R. L. Loeffen. Refracted Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 46 (2010), no. 1, 24–44.

[3] K. Noba and K. Yano Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. arXiv:1608.05359, August 2016.