Exponents for the number of high points of simple random walks in two dimensions

Izumi OKADA (Tokyo institute of Technology)*

1. Introduction

本講演では、２次元 (整数格子上) の単純ランダムウォーク (SRW) の local time に関する極限定理を扱う．特に、これまで２次元の favorite point (SRW の local time が他点と比べて極端に大きい点) という特異点に対して研究を進めてきた．また、その拡張として favorite domain (他の領域と比べて SRW の local time が極端に大きい領域) に着目している．近年この分野の第一人者である A.Dembo, Y.Peres, O.Zeitouni, J.Rosen 氏らによって、 [2] では favorite point と local time の汎関数の極限定理と密接な関係を持つことが示されており、従って重要な研究対象と考えている．

2. Known results

local time を $K(n,x) := \sum_{i=0}^{n} 1_{\{S_i=x\}}$ と定義する．さらに、$\tau_n := \inf\{m \geq 0 : |S_m| \geq n\}$ とする．もともと A.Dembo 氏らによって、 [1] では次が示されていた：$\mathbb{Z}^2$ 上の SRW に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{x\in\mathbb{Z}^2} K(\tau_n, x)}{(\log n)^2} = \frac{4}{\pi} \quad a.s.$$

これに基づき、$0 < \alpha < 1$ に対して、α-favorite points の集合を次のように定義する：

$$\Psi_n(\alpha) := \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 : K(\tau_n, x) \geq \frac{4\alpha}{\pi}(\log n)^2 \right\}.$$

さらに、$j \in \mathbb{N}$ に対して、次の量を定義する：

$$|\{(x_1, ..., x_j) \in \Psi_n(\alpha)^j : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|.$$

この量について、[1] では $j = 1$ の値を、講演者は $j \geq 2$ のときを評価した．$j \geq 2$ の場合は、Green 関数から構成される行列の逆行列の全ての成分の和という新しい量が、評価において重要になることが得られた．その後、Green 関数から構成される行列が、ある意味で超距離行列に近づくということを示し、さらには超距離行列 (の逆行列の全ての成分の和) の新たな性質を解明することで、新しい量に関する解析をすることができた．

これを踏まえて、$0 < \alpha < 1$ に対して、favorite domain を定義する：

$$\mathcal{R}_{j,n}(\alpha) := \{(x_1, ..., x_j) \in (\mathbb{Z}^2)^j : \sum_{i=1}^{j} K(\tau_n, x_i) \geq \frac{4\alpha j}{\pi}(\log n)^2\}.$$

3. Main result

favorite domain の長時間挙動での個数を評価した．

This work was supported by JSPS KAKENHI (15J11183).
2010 Mathematics Subject Classification: 60G.
Keywords: simple random walk, local time.
*e-mail: okada.i.aa@m.titech.ac.jp

Theorem 3.1 (0.2016)**.** $0 < \alpha, \beta < 1$ に対して、次が成立する：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log E[|\{(x_1, ..., x_j) \in \mathcal{R}_{j,n}(\alpha) : d(x_i, x_l) \le n^{\beta} \ \textit{for any}\ 1 \le i, l \le j\}|]}{\log n} = \hat{\rho}_j(\alpha, \beta).$$

ただし、

$$\hat{\rho}_j(\alpha,\beta) = \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \le 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}), \\ 2(j+1-2\sqrt{j\alpha}) & (\beta \ge 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}). \end{cases}$$

この補題として、Green 関数から構成された行列の最大固有値が、favorite domain に関する重要な量に相当することが得られた．その後、Green 関数から構成される行列が、ある意味で超距離行列に近づくということを踏まえ、さらには超距離行列 (の最大固有値) の新たな性質を解明することで、Green 関数から構成された行列の最大固有値に関する解析をすることができた．本講演では、時間の許す限りこの補題の証明や、favorite domain を扱う動機を述べる予定である．

References

[1] Dembo, A. , Peres, Y. , Rosen, J. and Zeitouni, O. (2001). Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk. Acta Math., **186**, 239–270.

[2] Dembo, A. , Peres, Y. , Rosen, J. and Zeitouni, O. (2004). Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. Ann. Math., **160**, 433–464.