Fourier expansion and discritizations of determinantal point processes

Shota OSADA
Kyushu University

1. Introduction

我々は、論文 [3] において行列式点過程の tail σ-field の 0-1 法則（tail 自明性）を示した。本公演では、その証明に用いた行列式点過程の離散化に主眼をおいて説明する。

行列式点過程とは、n 点相関関数がある核関数の行列式で与えられる点過程である。例えば、Bernoulli process は最も単純な $\mathbb{Z}$ 上の行列式点過程である。他には、Uniform spanning tree、Schur process などが離散空間上の行列式点過程の例である。$\mathbb{R}$ 上の行列式点過程の例では Sine_2、Airy_2、Bessel_2 などがある。行列式点過程において、離散空間上の場合のみ知られている性質がいくつかあり tail 自明性もその一つである [5, 1, 2]。我々は、連続空間上の行列式点過程の tail 自明性を示した。

本講演は、九州大学の長田博文氏との共同研究によるものである。

2. Set up

S を局所コンパクトな完備可分距離空間、d を S の距離とする。S 上の非負整数値ラドン測度 s を配置といい、配置全体 S に漠位相を入れたもの $(\mathsf{S}, \mathcal{B}(\mathsf{S}))$ を配置空間という。配置空間上の確率測度 μ を S 上の点過程という。配置空間 S の tail σ-field$\mathsf{Tail}(\mathsf{S})$ は、次のように定義される。

$$\mathrm{Tail}(\mathsf{S}) := \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \sigma[\pi_r^c] \tag{1}$$

ここで、$\pi_r^c : \mathsf{s}(\cdot) \mapsto \mathsf{s}(\cdot \cap B_r^c)$ 、 $B_r = \{|x| \le r\}$ とする。点過程 μ が tail 自明であるとは、すべての $A \in \mathsf{Tail}(\mathsf{S})$ に対し $\mu(A) \in \{0, 1\}$ となることである。

m を S に備わったラドン測度とする。点過程 μ の（m についての）n 点相関関数 ρ^n とは、次の等式を満たす S 上の対称関数である。

$$\int_{A_1^{k_1}\times\cdots\times A_j^{k_j}} \rho^n(x_1, \ldots, x_n)\mathsf{m}^n(d\mathbf{x}) = \int_{\mathsf{S}} \prod_{i=1}^{j} \frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i) - k_i)!}\mu(d\mathsf{s}) \tag{2}$$

ここで、$A_i, \ldots, A_j$ は互いに素な可測集合、$k_1, \ldots, k_j$ は $n = k_1 + \cdots + k_j$ とする。ρ^n は各 x_m に粒子が存在する「密度」である。ρ^n が S 上のある核関数 $\mathsf{K}(x, y)$ によって次式で表されるとき、μ は行列式点過程 (DPP) であるという。

$$\rho^n(x_1, ..., x_n) = \det[\mathsf{K}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n \tag{3}$$

行列式点過程はその相関関数の定義から多重点を持たないことに注意する。行列式点過程の存在については、十分条件が知られている。

定理 1 (白井-高橋 [4], Soshnikov[6])**.** (K, m) が (A.1) を満たすとき、S 上の行列式点過程が一意に存在する。

$$\begin{cases} K(x, y) = \overline{K(y, x)} \\ \mathsf{K} \text{ は局所トレースクラス作用素} \\ \mathsf{Spec}(\mathsf{K}) \subset [0, 1] \end{cases} \tag{A.1}$$

ここで、核関数と同記号で $L^2(S, \mathsf{m})$ 作用素 $\mathsf{K}f(x) = \int_S \mathsf{K}(x, y)f(y)\mathsf{m}(dy)$ を表すことにする。K が局所トレースクラス作用素であるとは、コンパクト集合 A に対して $\mathsf{K}_A f(x) := \int_S 1_A(x)\mathsf{K}(x, y)1_A(y)f(x)\mathsf{m}(dy)$ がトレースクラス作用素になることである。

以下では (A.1) を仮定し、対応する行列式点過程 μ を (K,m)-DPP とよぶ。

3. Main result

以下で分割 $\Delta=\{A_i; i\in I\}$ といえば、S の可算分割で各 A_i は相対コンパクトかつ $\mathsf{m}(A_i)>0$ であるものとする。

定理 2 ([3])**.** 分割の列 $\{\Delta(l); l\in\mathbb{N}\}$ で (A.2) を満たすものが存在するとき、μ は tail 自明である。

$$\begin{cases}\Delta(l)\prec\Delta(l+1)\\ \bigcap_{l\in\mathbb{N}}\sigma[A_i; i\in I(l)]\end{cases} \tag{A.2}$$

ここで、$\Delta(l)=\{A_i; i\in I(l)\}$ $(l\in\mathbb{N})$ とし、$\Delta(l)\prec\Delta(l+1)\Leftrightarrow^{\forall} i\in I(l+1),^{\exists} j\in I(l)$ s.t. $A_j\supsetneqq A_i$ である。すなわち、各 $A_j\in\Delta(l)$ は $\Delta(l+1)$ で 2 つ以上に分割される。

$S=\mathbb{R}^d$、$\mathsf{m}=$Lebesgue 測度であるときは、自明に (A.2) を満たす。

ここに上の定理の証明の概略を述べる。分割 $\Delta=\{A_i; i\in I\}$ に対して、$\mathcal{B}(\mathsf{S})$ の部分 σ-field を $\mathcal{G}_\Delta:=\sigma[\{\mathsf{s}\in\mathsf{S}:\mathsf{s}(A_i)=n\}; n\in\mathbb{N}, i\in I]$ とする。$\mathcal{G}_\Delta$ による条件付確率 $\mu(\cdot|\mathcal{G}_\Delta)$ は、$A_i\leftrightarrow i$ の対応で I 上の点過程とみなせる（**図 1**）。(A.2) を満たす分割の列 $\{\Delta(l); l\in\mathbb{N}\}$ に対して、$\mu_l(\mathsf{s}):=\mu(\cdot|\mathcal{G}_{\Delta(l)})(\mathsf{s})$ はマルチンゲールになる。従って、μ_l の tail 自明性を示せば、マルチンゲール収束定理により元の行列式点過程の tail 自明性が従う。なお、離散空間上の行列式点過程は tail 自明であることが知られている。

定理 3 (白井-高橋 [5], Ruessel Lyons[1, 2])**.** S : 離散集合、m : 数え上げ測度のとき、μ は tail 自明である。

しかし、μ_l は多重点をもちうるので一般には行列式点過程にならない (**図 1**)。我々は、分割の成分を底空間とする離散「ファイバー束」上の行列式点過程を構成することで μ_l の tail 自明性を示した。

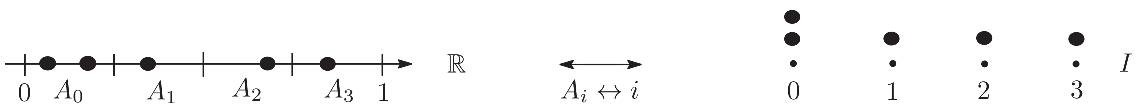

図 1:$\Delta=\{A_i; i=0,1,2,3\}$ とする。左図は $S=[0,1)$ 上の配置で、右図は $I=\{0,1,2,3\}$ 上の配置。

4. Fourier expansion of determinantal point processes

行列式点過程の離散化について説明する。簡単のために、$S=\mathbb{R}$、$\mathsf{m}=$Lebesgue 測度とする。

まず (A.2) をみたす分割の列 $\{\Delta(l); l\in\mathbb{N}\}$ を構成する。$I(l)=\mathbb{Z}\times\{0,1\}^{l-1}$、$A_i=[\sum_{k=1}^{l} i_k\times 2^{-(k-1)}, \sum_{k=1}^{l} i_k\times 2^{-(k-1)}+2^{-(l-1)})$ として分割 $\Delta(l)=\{A_i; i\in I(l)\}$ を定める。これは、長さ $2^{-(l-1)}$ の $\mathbb{R}$ の等分割であり (A.2) を満たす（**図 2**）。

次に、分割の成分をサポートに持つような $L^2(S,\mathsf{m})$ の正規直交基底を構成する。以下では $l\in\mathbb{N}$ を固定する。$\Delta_l:=\{\Delta(k); k\geq l\}$ に対し、$\mathbb{I}_l:=I(l)+\sum_{k=l+1}^{\infty}\{i\in I(k); i_k=0\}$ とする（**図 2**）。ここで、$n>m$ に対し $\mathbb{I}_n\cap\mathbb{I}_m\neq\mathbb{I}_m$ に注意する。$i\in\mathbb{I}_l$ に対し、S 上の関数 $f_{l,i}$ を次のように定める。

$$f_{l,i}:=\begin{cases}\mathsf{m}(A_i)^{-1}1_{A_i}(x) & \text{for}\quad i\in I_{(l)}\\ \mathsf{m}(A_i)^{-1}1_{A_i}(x)-\mathsf{m}(A_{T(i)})^{-1}1_{A_{T(i)}}(x) & \text{for}\quad i\in\mathbb{I}_l\backslash I_{(l)}\quad \text{(Haar 関数)}\end{cases} \tag{4}$$

ただし、$T: i=(i_1,\ldots,i_{k-1},\mathbf{0})\mapsto(i_1,\ldots,i_{k-1},\mathbf{1})$ $(i\in I(k), k\in\mathbb{N})$ とする。$1_{A_i}(x)$ $(i\in\sum_{l\in\mathbb{N}}I(l))$ は $\mathbb{F}_l$ の線形結合で書けるので、$\mathbb{F}_l$ は $L^2(S,\mathsf{m})$ の正規直交基底となる。特に、Haar 関数 $f_{l,i}$ $(i\in\mathbb{I}_l\backslash I_l)$ は l によらない。

K の $\mathbb{F}_l$ に関するフーリエ係数を、次のように定義する。

$$\mathbb{K}_l(i,j):=\int_{S\times S}\mathsf{K}(x,y)\overline{f_{l,i}(x)}f_{l,j}(y)\mathsf{m}(dx)\mathsf{m}(dy) \tag{5}$$

この $\mathbb{K}_l$ は、$\mathbb{I}_l$ 上の核関数とみなせる。

定理 4 ([3])**.** $F(x)=\sum_{i\in\mathbb{I}_l}\xi(i)f_{l,i}(x)$、$G(y)=\sum_{j\in\mathbb{I}_l}\eta(j)f_{l,j}(y)$ に対し、次の等式が成り立つ。

$$\sum_{i,j\in\mathbb{I}_l}\mathbb{K}_l(i,j)\overline{\xi(i)}\eta(j)=\int_{S\times S}\mathsf{K}(x,y)\overline{F(x)}G(y)\mathsf{m}(dx)\mathsf{m}(dy) \tag{6}$$

ここで、ξ と η はサポートが有界な $\mathbb{I}_l$ 上の関数する。

$\mathbb{I}_l$ 上の数え上げ測度を $\lambda_{\mathbb{I}_l}$、核関数を含む積分で内積を定義した関数空間をそれぞれ $L^2_{\mathsf{K}}(S\times S,\mathsf{m}\times\mathsf{m})$、$L^2_{\mathbb{K}_l}(\mathbb{I}_l\times\mathbb{I}_l,\lambda_{\mathbb{I}_l}\times\lambda_{\mathbb{I}_l})$ とすると、上の式はこれらの間のパーセバルの等式のようにみえる。特に $F=G$ とすると $F\leftrightarrow\xi$ の等長変換とみなせる。

F と ξ はそれぞれ $L^2(S\times S,\mathsf{m}\times\mathsf{m})$ と $L^2(\mathbb{I}_l\times\mathbb{I}_l,\lambda_{\mathbb{I}_l}\times\lambda_{\mathbb{I}_l})$ で稠密なので、次が成り立つ。

定理 5 ([3])**.** $\mathbb{K}_l$ を $L^2(\mathbb{I}_l,\lambda_{\mathbb{I}_l})$ 作用素とみなす。この時、次が成立する。

$$\mathsf{Spec}(\mathbb{K}_l)\subset[0,1]. \tag{7}$$

従って $\mathbb{K}_l$ は (A.1) を満たしている。定理 1 より、$\mathbb{I}_l$ 上の行列式点過程 $\mu_{\mathbb{F}_l}:(\mathbb{K}_l,\lambda_{\mathbb{I}_l})$-DPP が一意に存在する。$\mathbb{I}_l$ は離散空間なので、定理 3 より $\mu_{\mathbb{F}_l}$ は tail 自明である。

定理 4 より、次のフーリエ展開の等式が導かれる。

定理 6 ([3])**.**

$$\mathsf{K}(x,y)=\sum_{i,j\in\mathbb{I}_l}\mathbb{K}_l(i,j)f_{l,i}(x)\overline{f_{l,j}}(y) \tag{8}$$

$\rho^n_{\mathbb{F}_l}$ と ρ^n_l をそれぞれ $\mu_{\mathbb{F}_l}$ と μ_l の n 点相関関数とする。定理 4、定理 6 と $\mathbb{F}_l$ の直交性により、次の等式が成り立つ。

定理 7 ([3])**.** $\mathbb{A}=A_1\times\cdots\times A_n$ $(A_1,\ldots,A_n\in\Delta(l))$ とし、$\mathbb{I}_l(\mathbb{A})=\mathbb{I}_l(A_1)\times\cdots\times\mathbb{I}_l(A_n)$ 、$\mathbb{I}_l(A):=\{i\in\mathbb{I}_l;\mathsf{supp}(f_{l,i})\subset A\}$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{I}_l(\mathbb{A})}\rho^n_{\mathbb{F}_l}(i_1,\ldots,i_n)=\int_{\mathbb{A}}\rho^n_l(x_1,\ldots,x_n)\mathsf{m}^n(d\mathbf{x}) \tag{9}$$

定理 7 より、$\mu_{\mathbb{F}_l}$ の tail 自明性から μ_l の tail 自明性を導くことができる。従って、マルチンゲール収束定理により μ の tail 自明性が示される。

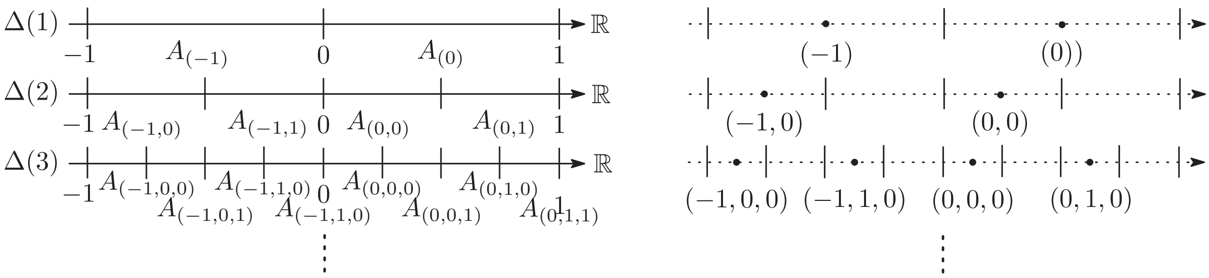

図 2:左図は $\Delta_1=\{\Delta(l);l\geq 1\}$。右図は $\mathbb{I}_1$。

参考文献

[1] Lyons, R. : *Determinantal probability measures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **98** (2003), 167-212.

[2] Lyons, R. : *Determinantal probability: basic properties and conjectures*, arXiv in math 1406.2707v1 (2014).

[3] Osada, H., Osada, S., *Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and tail triviality,*, arXive:1603.07478-v3.

[4] Shirai, T., Takahashi, Y., *Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point process*, J. Funct. Anal. **205**, 414-463 (2003).

[5] Shirai T., and Takahashi Y. : *Random point fields associated with certain Fredholm determinants II: fermion shifts and their ergodic properties,*, Ann. Prob. **31** (2003), 1533–1564.

[6] Soshnikov, A., *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys **55**, 923-975 (2000).