縮小されたブラウン媒質中の拡散過程

鈴木 由紀 （慶大医）

本講演では, $\mathbb{R}$ 上の縮小されたブラウン媒質の中を動く拡散過程の挙動について報告する. $\mathbb{W}$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 w で $w(0)=0$ を満たすもの全体とし, P を $\mathbb{W}$ 上の Wiener 測度とする. Ω を $[0,\infty)$ 上で定義された連続関数全体とし, $\omega \in \Omega$ に対し $X(t)=X(t,\omega)=\omega(t)$ とおく. $w \in \mathbb{W}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し, Ω 上の確率測度 $P_w^{x_0}$ を $\{X(t), t \geq 0, P_w^{x_0}\}$ が x_0 から出発する生成作用素

$$\mathcal{L}_w = \frac{1}{2} e^{w(x)} \frac{d}{dx} \left(e^{-w(x)} \frac{d}{dx} \right)$$

をもつ拡散過程となるものとして定義する. $0 < c_1 < 1/4$, $c_2 \geq 1/4$ とし, $w \in \mathbb{W}$ と $\lambda > 0$ に対し, $w_\lambda \in \mathbb{W}$ を

$$w_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-c_1 \lambda} w(x) & x \leq 0, \\ \lambda e^{-c_2 \lambda} w(x) & x > 0, \end{cases}$$

により定義する. さらに, $\mathbb{W} \times \Omega$ 上の確率測度 $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}$ を $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}(dwd\omega) = P(dw)P_{w_\lambda}^{x_0}(d\omega)$ により定義する. $\lambda > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し $\{X(t), t \geq 0, \mathcal{P}_\lambda^{x_0}\}$ は確率空間 $(\mathbb{W} \times \Omega, \mathcal{P}_\lambda^{x_0})$ 上で定義された過程とみなされる. 本講演では, $\{X(t), t \geq 0, \mathcal{P}_\lambda^{0}\}$ の時刻 $t = e^\lambda$ での挙動 $(\lambda \to \infty)$ について報告する. なお, $0 < c_1, c_2 < 1/4$ の場合, ここで扱うモデルは, [S] により導入されたモデルに対応づけられる.

$\widetilde{c}_1 = 2c_1 (< 1/2)$ とおき, $w \in \mathbb{W}$, $\lambda > 0$ に対し $\tau_\lambda w \in \mathbb{W}$ を

$$(\tau_\lambda w)(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} w(e^{\widetilde{c}_1 \lambda} x) & x \leq 0, \\ \lambda^{-1} e^{(c_2 - 1/4)\lambda} w(e^{(1/2)\lambda} x) & x > 0, \end{cases}$$

により定義する. すると $\{\tau_\lambda w_\lambda, P\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{w, P\}$ が成り立つ. $w \in \mathbb{W}, \rho \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sigma(\rho) = \sigma(\rho, w) = \sup\{x < 0 : w(x) = \rho\}$$

と定義し,

$$\mathbb{A} = \{w \in \mathbb{W} : \sigma(1/2 - \widetilde{c}_1) > \sigma(\widetilde{c}_1 - 1/2)\}, \ \mathbb{B} = \{w \in \mathbb{W} : \sigma(1/2 - \widetilde{c}_1) < \sigma(\widetilde{c}_1 - 1/2)\}$$

とおく. さらに $\lambda > 0$ に対し,

$$\mathbb{A}_\lambda = \{w \in \mathbb{W} : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{A}\}, \quad \mathbb{B}_\lambda = \{w \in \mathbb{W} : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{B}\}$$

とおくと, $P\{\mathbb{A}_\lambda\} = P\{\mathbb{A}\} = 1/2$, $P\{\mathbb{B}_\lambda\} = P\{\mathbb{B}\} = 1/2$ が成り立つ.

ここで, $\omega \in \Omega$, $\lambda > 0$, $t \geq 0$ に対し,

$$X_\lambda(t) = e^{-(1/2)\lambda} X(e^\lambda t), \qquad a_\lambda(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{(0,\infty)}(X_\lambda(s)) ds,$$
$$a_\lambda^{-1}(t) = \inf\{s > 0 : a_\lambda(s) > t\}, \quad G_\lambda(t) = X_\lambda(a_\lambda^{-1}(t)),$$

とおく. すると $w \in \mathbb{W}, \lambda > 0$ に対し $\{G_\lambda(t), t \geq 0, P_{w_\lambda}^0\}$ は 0 から出発する $[0,\infty)$ 上の反射壁 Brown 運動になる.

定理 1 任意の $T>0$ と $\varepsilon>0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{1,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\right\}=1.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{1,\lambda,\varepsilon}=\left\{w\in\mathbb{W}:p_{1,\lambda,\varepsilon}(w)>1-\varepsilon\right\},\\
&p_{1,\lambda,\varepsilon}(w)=P^0_{w_\lambda}\left\{\sup_{0\le t\le T}|X_\lambda(t)-G_\lambda(t)|<\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

次に, $w\in\mathbb{W}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\zeta=\zeta(w)=\sup\{x<0:w(x)-\min_{x\le y\le 0}w(y)=1-2\widetilde{c}_1\},\\
&\ell=\ell(w)=\begin{cases}\sigma(1/2-\widetilde{c}_1,w) & w\in\mathbb{A},\\ \zeta(w) & w\in\mathbb{B},\end{cases}\\
&V=V(w)=\min_{\ell\le x\le 0}w(x),
\end{aligned}$$

とおき, $b=b(w)\in(\ell,0)$ を $w(b)=V$ により定義する. ほとんどすべての w に対し, $b(w)$ はただ 1 つに定められる.

定理 2 任意の $\varepsilon>0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{2,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\right\}=1.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{2,\lambda,\varepsilon}=\left\{w\in\mathbb{W}:p_{2,\lambda,\varepsilon}(w)>1-\varepsilon\right\},\\
&p_{2,\lambda,\varepsilon}(w)=P^0_{w_\lambda}\left\{|e^{-\widetilde{c}_1\lambda}X(e^\lambda)-b(\tau_\lambda w_\lambda)|<\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

さらに, $\omega\in\Omega$ に対し $\underline{X}(t)=\underline{X}(t,\omega)=\min_{0\le s\le t}X(s,\omega)$, $\overline{X}(t)=\overline{X}(t,\omega)=\max_{0\le s\le t}X(s,\omega)$ とおき, 我々の過程の最小値過程 $\{\underline{X}(t),t\ge 0,\mathcal{P}^0_\lambda\}$ と最大値過程 $\{\overline{X}(t),t\ge 0,\mathcal{P}^0_\lambda\}$ の $t=e^\lambda$ での挙動 $(\lambda\to\infty)$ について調べる. $w\in\mathbb{W}$, $\gamma\in\mathbb{R}$ に対して

$$\zeta(\gamma)=\zeta(\gamma,w)=\sup\{x<0:w(x)-\min_{x\le y\le 0}w(y)=1-2\widetilde{c}_1+\gamma\}$$

とおく. ただし $\sup\emptyset=0$ とする. $\zeta(0)=\zeta$ である.

定理 3 任意の $\varepsilon>0$ に対して以下が成立する.
(i) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{3,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\right\}=1.$
(ii) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{4,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\right\}=1.$
ここで,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon}=\left\{w\in\mathbb{W}:p_{i,\lambda,\varepsilon}(w)>1-\varepsilon\right\},\quad i=3,4,\\
&p_{3,\lambda,\varepsilon}(w)=P^0_{w_\lambda}\left\{\sigma(1/2-\widetilde{c}_1+\varepsilon,\tau_\lambda w_\lambda)<e^{-\widetilde{c}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda)<\sigma(1/2-\widetilde{c}_1-\varepsilon,\tau_\lambda w_\lambda)\right\},\\
&p_{4,\lambda,\varepsilon}(w)=P^0_{w_\lambda}\left\{\zeta(\varepsilon,\tau_\lambda w_\lambda)<e^{-\widetilde{c}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda)<\zeta(-\varepsilon(\lambda),\tau_\lambda w_\lambda)\right\},
\end{aligned}$$

$\varepsilon(\lambda) > 0, \lambda > 0$, は $\lim_{\lambda\to\infty} \varepsilon(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\varepsilon(\lambda) = \infty$, を満たす任意の関数である.

$w \in \mathbb{W}$ に対し,

$$H = H(w) = \max_{\ell \le x \le 0} w(x)$$

とおく. $w \in \mathbb{A}$ ならば $H(w) = 1/2 - \widetilde{c}_1$ であり, $w \in \mathbb{B}$ ならば $0 < H(w) < 1/2 - \widetilde{c}_1$ である.

定理 4 任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下が成立する.
(i) $\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{5,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{A}_\lambda\right\} = 1.$
(ii) $\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\mathbb{E}_{6,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{B}_\lambda\right\} = 1.$
ここで,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon} = \left\{w \in \mathbb{W} : p_{i,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\right\}, \quad i = 5, 6,\\
&p_{5,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\left\{|e^{-(1/2)\lambda}\overline{X}(e^\lambda) - \max_{0\le t\le 1} G_\lambda(t)| < \varepsilon\right\},\\
&p_{6,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\left\{|\lambda^{-1}\log \overline{X}(e^\lambda) - H(\tau_\lambda w_\lambda) - \widetilde{c}_1| < \varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

上記の定理 $1 \sim 4$ は, [KST], [KS] による片側ブラウンポテンシャルをもつ拡散過程の挙動に関する結果に対応するものである.

講演では, $c_1 = c_2 = 1/4$ の場合, また $c_1, c_2 > 1/4$ の場合の対応する過程の挙動についても報告する.

参考文献

[B] Brox, T. (1986). A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium. *Ann. Probab.* **14,** 1206–1218.

[KS] Kawazu, K. and Suzuki, Y. (2006). Limit theorems for a diffusion process with a one-sided Brownian potential. *Journal of Applied Probability* **43,** 997–1012.

[KST] Kawazu, K., Suzuki, Y. and Tanaka, H. (2001). A diffusion process with a one-sided Brownian potential. *Tokyo J. Math.* **24,** 211–229.

[KTT] Kawazu, K., Tamura, Y. and Tanaka, H. (1989). Limit theorems for one-dimensional diffusions and random walks in random environments. *Probab. Theory Related Fields* **80,** 501–541.

[S] Suzuki, Y. (2016). A diffusion process with a random potential consisting of two contracted self-similar processes. *preprint.*