レヴィ過程に対する田中の公式

塚田大史（大阪市立大学大学院理学研究科）

1　はじめに

1 次元 Brown 運動 $B = (B_t)_{t\geq 0}$ に対する田中の公式とは，

$$|B_t - x| - |B_0 - x| = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - x) dB_s + L_t^x,$$

である．ここで，L_t^x は点 x における B の局所時間である．この式は局所時間に対する Doob–Meyer 分解を与えており，また Skorohod 問題の解として反射壁過程を表している．さらに応用として，凸関数に関する伊藤の公式（伊藤–田中の公式）の構成や Ray–Knight 定理の理解に役立っている．

飛躍過程の場合，局所時間に対する Doob–Meyer 分解と Skorohod 問題の解は異なる．そこで，ここでは局所時間に注目し，田中の公式を局所時間の Doob–Meyer 分解として考える．指数 $\alpha \in (1, 2)$ の対称な安定過程に対しては Yamada [4]，局所時間が存在するような対称 Lévy 過程に対しては Salminen–Yor [2] によって研究されている．また，非対称な過程を含む指数 $\alpha \in (1, 2)$ の（狭義）安定過程に対しては [3] において構成した．

[4] や [3] では，伊藤解析の手法を用いて以下のように構成した．$S = (S_t)_{t\geq 0}$ を指数 $\alpha \in (1, 2)$ の（狭義）安定過程とする．Fourier 変換により，S の生成作用素に対する基本解 F が得られる．このとき，伊藤の公式を用いて田中の公式が構成できる：

$$F(S_t - x) - F(S_0 - x) = M_t^x + L_t^x.$$

ここで，$M^x = (M_t^x)_{t\geq 0}$ は

$$M_t^x = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} \{F(S_{s-} - x + h) - F(S_{s-} - x\} \tilde{N}(ds, dh)$$

で与えられる自乗可積分なマルチンゲールである．

本講演では，[2] によるポテンシャル論の手法に基づいて，非対称な過程を含む Lévy 過程に対して田中の公式を構成する．

2　準備

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ を 1 次元 Lévy 過程とする．Lévy–Khintchine 表現より，X の Lévy symbol は

$$\begin{aligned}\eta(u) &= \log \mathbb{E}_0[e^{iuX_1}] \\ &= ibu - \frac{1}{2}au^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \left(e^{iuy} - 1 - iuy1_{|y|\leq 1}\right) \nu(dy)\end{aligned}$$

で与えられる．ただし，$b \in \mathbb{R}, a \geq 0$ であり，ν は $\mathbb{R}_0(:= \mathbb{R} \setminus \{0\})$ 上の Lévy 測度である．

有界可測関数 f に対し，X のレゾルベントを

$$R_q f(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} f(X_t) dt \right], \quad q > 0, x \in \mathbb{R}$$

とする．またレゾルベント密度が存在するとき，

$$R_q f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) r_q(y - x) dy, \quad q > 0, x \in \mathbb{R}$$

とする．X が初めて原点に到達する時刻を

$$T_0 := \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$$

とする．

ここで次の 2 条件を導入しておく：

(A1) X の Lévy symbol η が次の条件を満たす：

$$\int_{\mathbb{R}} \Re \left(\frac{1}{q - \eta(u)} \right) du < \infty, \quad q > 0.$$

(A2) X について 0 は正則である．すなわち，$\mathbb{P}_0(T_0 = 0) = 1$ が成り立つ．

条件 **(A1)** は有界なレゾルベント密度の存在に関する必要十分条件であり ([1, Theorem II.16])，また条件 **(A1)** の下，条件 **(A2)** はレゾルベント密度の x に関する連続性の必要十分条件である ([1, Theorem II.19])．

さらに，条件 **(A1)**, **(A2)** より強い次の条件を導入する：

(A) X の Lévy symbol η が次の条件を満たす：

$$\frac{1}{q - \eta(u)} \in L^1(\mathbb{R}), \quad q > 0.$$

このとき，レゾルベント密度を以下のように書き表せる．

補題 2.1. 条件 ***(A)*** の下，

$$r_q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{-iux}}{q - \eta(u)} \right) du, \quad q > 0, x \in \mathbb{R}.$$

が成り立つ．

3 Renormalized zero resolvent

まず，

$$h_q(x) := r_q(0) - r_q(-x), \quad q > 0, x \in \mathbb{R}$$

と定義する．このとき，任意の $q > 0$ に対し，$h_q \geq 0$ である．もし極限 $h := \lim_{q \downarrow 0} h_q$ が存在するとき，h は renormalized zero resolvent と呼ばれ，Yano [5] により研究されている．ここでは [5] の条件をさらに弱めた 2 条件 **(A)**, **(B)** の下，収束が得られた．

(B) X の Lévy symbol η が次の条件を満たす：

$$\int_0^1 \left| \Im \left(\frac{u}{\eta(u)} \right) \right| du < \infty.$$

定理 3.1. 条件 ***(A)***, ***(B)*** の下，

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{iux} - 1}{\eta(u)} \right) du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

が成り立つ．

4 田中の公式

条件 **(A1)**, **(A2)** の下，レゾルベント密度と局所時間との関係が知られている ([1, Lemma V.3])：

$$\mathbb{E}_y \left[\int_0^\infty e^{-qt} dL_t^x \right] = r_q(x-y), \quad q > 0,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

このとき，次の Doob–Meyer 分解が得られる．

命題 4.1. 条件 ***(A1)***, ***(A2)*** の下，任意の $q > 0$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$r_q(-X_t + x) = r_q(-X_0 + x) + M_t^{q,x} + q \int_0^t r_q(-X_s + x) ds - L_t^x,$$

が成り立つ．ただし，$M_t^{q,x}$ はマルチンゲールである．

上の命題において，$q \downarrow 0$ として田中の公式を得る．

定理 4.2. X が条件 ***(A)***, ***(B)*** を満たすとする．このとき， 任意の $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$h(X_t - x) - h(X_0 - x) = M_t^x + L_t^x,$$

が成り立つ．ただし，$M_t^x := -\lim_{q\downarrow 0} M_t^{q,x}$ はマルチンゲールである．

参考文献

[1] J. Bertoin, *Lévy processes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996)

[2] P. Salminen, M. Yor, Tanaka formula for symmetric Lévy processes, in *Séminaire de Probabilités XL.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1899 (Springer, Berlin, 2007), pp. 265–285

[3] H. Tsukada, Tanaka formula for stable processes. submitted.

[4] K. Yamada, Fractional derivatives of local times of α-stable Levy processes as the limits of occupation time problems, in *Limit theorems in probability and statistics II.* (János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002), pp. 553–573

[5] K. Yano, On harmonic function for the killed process upon hitting zero of asymmetric Lévy processes. J. Math-for-Ind. **5**(A), 17–24 (2013)