Large deviations and its application for a reaction-diffusion model

角田　謙吉

1　序

本講演では反応拡散模型に対する “Macroscopic Fluctuation Theory”(以下 MFT と省略) について議論する。MFT とは Bertini et al. [1] によって研究されている、非平衡定常状態の流体力学極限に対する大偏差原理に基づいた数学的及び物理的解析理論である。先行研究により、境界で粒子の流入出を伴う排他過程等の、流体力学的方程式の定常解が一意的である場合については非常に深く解析が行われてきた。一方反応拡散模型のように流体力学的方程式の定常解が一意的でない場合には、その数学的な結果は未解決とする問題が多く残っている。本講演では MFT の理論の意味する所を紹介するとともに、反応拡散模型に対する動的及び静的な大偏差原理、それらから得られる結果について紹介する。この講演は Jonathan Farfan 氏と Claudio Landim 氏との共同研究 [6, 4] に基づく。

2　反応拡散模型

初めに反応拡散模型を紹介する。この模型に対する流体力学的方程式は次の反応拡散方程式

$$\partial_t \rho \;=\; \frac{1}{2}\Delta\rho + F(\rho)\,, \tag{2.1}$$

であり、De Masi et al. [3] において反応拡散方程式 (2.1) を微視的な系より解析するために導入された。正確な定義は以下で与えられる。N を自然数とし、$\mathbb{T}_N$ を離散周期トーラス $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ とする。配置空間を $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ とし、その元を配置と呼び $\eta = \{\eta(x); x \in \mathbb{T}_N\}$ で表す。反応拡散模型とは次の無限小生成作用素により定まる $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ 上の Markov 過程である:

$$L_N f(\eta) \;=\; \frac{N^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N}[f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] + \sum_{x\in\mathbb{T}_N} c(\tau_x\eta)[f(\eta^x) - f(\eta)]\,, \tag{2.2}$$

九州大学、マス・フォア・インダストリ研究所、〒819-0395、福岡県福岡市西区元岡７４４番地
e-mail: k-tsunoda@imi.kyushu-u.ac.jp

但し f は $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ 上の関数、c は $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の正値局所関数、$\eta^{x,x+1}$、$\tau_x\eta$、η^x はそれぞれ次で定義される配置である:

$$\eta^{x,y}(z) \;:=\; \begin{cases} \eta(y) & \text{if } z = x\ , \\ \eta(x) & \text{if } z = y\ , \\ \eta(z) & \text{otherwise}\ , \end{cases} \qquad \eta^{x}(z) \;:=\; \begin{cases} \eta(z) & \text{if } z \neq x\ , \\ 1-\eta(z) & \text{otherwise}\ , \end{cases}$$
$$\tau_x\eta(y) \;:=\; \eta(x+y)\ .$$

幾つか注意を与える。(2.2) の右辺第一項は N^2 により時間についてスケール変換された排他過程に対応し、第二項は粒子の出生及び死滅に対応する Glauber 力学である。また c が $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の正値局所関数であることから、各 N に対して L_N により生成される Markov 過程は $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ 上既約になる。故に $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ 上の確率測度であって、Markov 過程の時間発展に対して不変なものが一意に存在する。その確率測度を μ^N_{ss} とする。

3　主結果

我々の興味は定常状態 μ^N_{ss} から適当なスケール変換により決まる巨視的な粒子密度の振る舞いを決定することである。このことを正確に見るために、配置 $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ に対して、1 次元連続トーラス $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の測度である経験分布 $\pi^N(\eta)$ を次で定義する:

$$\pi^N(\eta)(du) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{T}_N} \eta(x)\delta_{x/N}(du)\ ,$$

但し、δ_u は $u \in \mathbb{T}$ に集中する Dirac 測度である。$\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の有限測度全体の空間とすれば、μ^N_{ss} は π^N により $\mathcal{M}_+$ 上に確率測度を誘導するので、それを $\mathcal{P}^N$ とする: $\mathcal{P}^N := \mu^N_{ss}\circ(\pi^N)^{-1}$。

主結果を述べる為には飛躍率 c に関して技術的な仮定が必要となる。その仮定を紹介する為に $[0,1]$ 上の関数を以下のように定める。$0 \le \rho \le 1$ に対して ν_ρ を密度 ρ の $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の直積ベルヌーイ測度とする。$[0,1]$ 上の関数 B と D を次で定める:

$$B(\rho) \;=\; \int [1-\eta(0)]\, c(\eta)\, d\nu_\rho\ , \quad D(\rho) \;=\; \int \eta(0)\, c(\eta)\, d\nu_\rho\ .$$

我々の主結果は次の定理である。

Theorem 3.1 (Farfan-Landim-T., 2016+)**.** $[0,1]$ 上の関数 B と D は凹である仮定する。このとき、測度の列 $\{\mathcal{P}^N : N \in \mathbb{N}\}$ は $\mathcal{M}_+$ 上のある関数 W をレート関数として大偏差原理を満たす。

上述 Theorem 3.1 の証明の方針は、有限次元の Freidlin-Wentzell 理論を我々の無限次元の設定の枠組みにおいて再構成することである。そのための最初のステップは、有限次元の場合の Freidlin-Wentzell 型の大偏差原理を示すことにある。この模型に沿って言い換えると、De Masi et al. [3] で示されている流体力学極限に対する大偏差原理を証明する必要がある。その一部は Jona-Lasinio et al. [5] において示されているが、我々の目的の為には不十分なものであるため、彼らの結果をより堅強なものにする必要がある。関数 B と D に対する仮定はこのステップのみで必要となる。次のステップは得られた動的な大偏差原理を用いて、静的な大偏差原理である Theorem 3.1 を示すことである。本講演

ではレート関数 W を定義するとともに、何故そのような量がレート関数として現れる理由を説明する。また大偏差原理の帰結として、測度列 $\{\mathcal{P}_N : N \in \mathbb{N}\}$ の $N \to \infty$ における収束に関する結果についても得られる。この結果は Bodineau と Lagouge[2] により予想されていた相転移の問題について答えを与えるものであり、講演中において紹介する。

参考文献

[1] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio and C. Landim: Macroscopic fluctuation theory. Rev. Modern Phys. **87**, 593–636 (2015).

[2] T. Bodineau and M. Lagouge: Current large deviations in a driven dissipative model. J. Stat. Phys. **139**, 201–218 (2010).

[3] A. De Masi, P. Ferrari and J. Lebowitz: Reaction diffusion equations for interacting particle systems. J. Stat. Phys. **44**, 589–644 (1986).

[4] J. Farfan, C. Landim and K. Tsunoda. Static large deviations for a reaction-diffusion model. submitted, available at arXiv:1606.07227.

[5] G. Jona-Lasinio, C. Landim and M. E. Vares: Large deviations for a reaction diffusion model. Probab. Theory Related Fields **97**, 339–361 (1993).

[6] C. Landim and K. Tsunoda. Hydrostatics and large deviations for a reaction-diffusion model. to appear in Ann. Inst. H. Poincaré, available at arXiv:1508.07818.