Ergodic type limit theorem for fundamental solutions of Schrödinger operators

東北大学大学院理学研究科　　和田正樹

2016 年 12 月 22 日

1　準備及び背景にある問題

$\mathbb{M} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \{\mathbb{P}_x\}, \{X_t\})$ を生成作用素 $\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2}$ $(0 < \alpha \leq 2)$ とする $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称 α-安定過程とする。このとき、ディリクレ形式が $\mathcal{E}(u,u) = (-\mathcal{L}u, u)_m$ として、推移確率密度関数 $p(t,x,y)$ が方程式 $\partial u/\partial t = \mathcal{L}u$ の基本解として与えられる。ここで、m は $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度、$(\cdot,\cdot)_m$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ における内積を表す。更に、グリーン核 $G(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty p(t,x,y)dt$ により、以下の 3 条件が成立しているような非負測度 μ を考える。

$$\lim_{a\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{|x-y|\leq a} G(x,y)\mu(dy) = 0, \quad \lim_{R\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{|y|>R} G(x,y)\mu(dy) = 0,$$
$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} G(x,y)\mu(dy)\mu(dx) < \infty.$$

このとき、シュレディンガー形式を $\mathcal{E}^\mu(u,u) = \mathcal{E}(u,u) - \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu(dx)$ で定め、対応する作用素を $\mathcal{L}^\mu$ とする。方程式 $\partial u/\partial t = \mathcal{L}^\mu u$ にも基本解 $p^\mu(t,x,y)$ が存在することが知られている ([1])。今回の発表内容は、$p^\mu(t,x,y)$ の振る舞いが元の基本解 $p(t,x,y)$ のそれと異なるとき、どのように異なるのかを解析する一環で得られた結果である。

2　先行結果と主結果

もし μ が「十分小さい」ならば、直感的には $p^\mu(t,x,y)$ が元の $p(t,x,y)$ と似たような挙動をすること（基本解の安定性という）が予想される。そこで、まずは測度 μ の大きさを表すための指標を

$$\lambda(\mu) = \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) \mid \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu(dx) = 1\right\}$$

で定める。[5] や [7] では、基本解の安定性が成立するための必要十分条件が、$\lambda(\mu) > 1$ を満たすこと、すなわち μ が劣臨界的であることが示された。その証明のカギとして、次の補題があったことを付け加える。

補題 2.1. ([4, Theorem 2.2])
以下の 3 条件は互いに同値である。

(1) μ は劣臨界的である。

(2) μ はゲージアブルである。すなわち、μ とルヴューズ対応する加法汎関数 A_t^μ としたとき $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)] < \infty$.

(3) $x \neq y$ のとき、$p^\mu(t,x,y)$ は時間について可積分である。すなわち、$\int_0^\infty p^\mu(t,x,y)dt < \infty$.

$\lambda(\mu) = 1$ のとき、μ は臨界的であるといい、$p^\mu(t,x,y)$ は元の $p(t,x,y)$ とは異なる挙動をすることがわかる。しかし、具体的な振る舞いが与えられているのは、元のマルコフ過程が 3 次元ブラウン運動、$(d,\alpha) = (3,2)$ の場合に限られている ([2, 5])。一般の安定過程の枠組みでは、まだ具体的な振る舞いが確立されてはいないが、補題 2.1 (2) に着目してファインマン・カッツ汎関数 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ ($p^\mu(t,x,y)$ の空間積分と同義) の時間無限大での発散の様子が以下のように得られている (尚、これは 2014 年の確率論シンポジウムで発表させていただいたものである)。

定理 2.2. ([6, Theorem 1.1], [8, Theorem 4.7])
μ は臨界的であるとする。$h(x)$ をシュレディンガー作用素 $\mathcal{L}^\mu$ における基底状態、すなわち $\mathcal{E}^\mu(h,h) = 0$ を満たす関数とするとき、基本解 $p^\mu(t,x,y)$ の空間積分は以下の漸近挙動をもつ。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{\alpha}-1}} \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)dy = \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{\alpha})} \cdot \frac{h(x)}{\langle\mu,h\rangle}, \qquad (1 < d/\alpha < 2).$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}} \cdot \frac{h(x)}{\langle\mu,h\rangle}, \qquad (d/\alpha = 2).$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)dy = \frac{\langle\mu,h\rangle h(x)}{(h,h)_m}, \qquad (d/\alpha > 2).$$

ただし、$\langle\mu,h\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\mu(dx)$ である。

3 主結果と証明方法の概略

今回の主結果は補題 2.1 (3) に着目して得られた、時間積分 $\int_0^t p^\mu(s,x,y)ds$ の $t \to \infty$ における増大度で次の通りである。

定理 3.1. ([9, Theorem 1.1])
μ は臨界的で $h(x)$ は定理 2.2 の通りとする。このとき基本解 $p^\mu(t,x,y)$ の時間積分は以下の漸近挙動をもつ。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{\alpha}-1}} \int_0^t p^\mu(s,x,y)ds = \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{\alpha})} \cdot \frac{h(x)h(y)}{\langle\mu,h\rangle^2}, \qquad (1 < d/\alpha < 2).$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t}\int_0^t p^\mu(s,x,y)ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}}\cdot\frac{h(x)h(y)}{\langle\mu,h\rangle^2}, \qquad (d/\alpha=2).$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p^\mu(s,x,y)ds = \frac{h(x)h(y)}{(h,h)_m}, \qquad (d/\alpha>2).$$

一般に $p^\mu(t,x,y)/h(x)h(y)$ は、ドゥーブの h-変換によるマルコフ過程の推移確率密度関数を表す。それ故、定理 3.1 にある式の両辺を $h(x)h(y)$ で割ることで、変換後のマルコフ過程におけるエルゴード型定理が得られる。特に $d/\alpha>2$ の場合は変換後のマルコフ過程が正再帰的であるからエルゴード定理そのものである。他方、$d/\alpha\le 2$ の場合は変換後のマルコフ過程が零再帰的である。Pinchover [3, Theorem 1.2] では零再帰的な拡散過程について、推移確率密度関数の長時間平均が消えることを示しているが、定理 3.1 では t よりも小さいオーダーをもつ関数で「平均」をとっているため、非自明な結果が得られている。

証明方法は、定理 2.2 のそれを改変したものである。定理 2.2 は、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)] &= \mathbb{E}_x\left[1+\int_0^t \exp(A_s^\mu)dA_s^\mu\right]\\ &= 1+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(s,x,y)\mu(dy)ds = 1+\int_0^t p_s^\mu\mu(x)ds\end{aligned}$$

に着目し、レゾルベント $G_\beta^\mu\mu(x)$ の $\beta\to 0$ とした際の振る舞いを μ による時間変更のマルコフ過程を用いて求め、更にタウバー型定理を適用して示した。定理 3.1 では、この方法を 1 節で挙げた μ が満たすべき条件を満たしている別の測度 ν に対して得られる $G_\beta^\mu\nu(x)$ へと拡張し、特に $\nu(dy)=p^\mu(\epsilon,x,y)m(dy)$ とすれば良い。

参考文献

[1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.-M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, In Random partial differential equations (Ober-wolfach, 1989), Birkhäuser, Inter. Ser. Num. Math. 102, 1—31, (1991).

[2] Grigor'yan, A.: Heat kernels on weighted manifolds and applications, Contemp. Math. 338, 93–191, (2006).

[3] Pinchover, Y.: Large time behavior of the heat kernel and the behavior of the Green function near criticality for non-symmetric elliptic operators, J. Funct. Anal. 104, 54–70, (1992).

[4] Takeda, M.: Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 2729-2738, (2006).

[5] Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39, 85–94, (2007).

[6] Takeda, M and Wada, M.: Large time asymptotics of Feynman-Kac functionals for symmetric stable processes, Math. Nachr. 289, No.16, 2069–2082, (2016).

[7] Wada, M.: Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions, Tohoku Math. Journal 66, 523–537, (2014).

[8] Wada, M.: Feynman-Kac penalization problem for critical measures of symmetric α-stable processes, Elect. Comm. in Probab. 21, no.79, 1–14, (2016).

[9] Wada, M.: Ergodic type limit theorem for fundamental solutions of Schrödinger operators, preprint.