Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation

横山 聡　（東大数理）
email: satoshi2@ms.u-tokyo.ac.jp

$D \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界 ∂D を持つ有界な領域とし、次の確率偏微分方程式の解 $u = u^\varepsilon(t,x)$ を考える:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \Delta u^\varepsilon + \varepsilon^{-2}\left(f(u^\varepsilon) - \fint_D f(u^\varepsilon)\right) + \alpha \dot{w}^\varepsilon(t), & \text{in } D \times \mathbb{R}_+, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0, & \text{on } \partial D \times \mathbb{R}_+, \\ u^\varepsilon(0,\cdot) = g^\varepsilon(\cdot), & \text{in } D, \end{cases}$$

ここで、$\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, ν は ∂D 上の内向き法線ベクトル, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, また、

$$\fint_D f(u^\varepsilon) = \frac{1}{|D|}\int_D f(u^\varepsilon(t,x))dx,$$

g^ε は連続関数で、

$$(2) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g^\varepsilon(x) = \chi_{\gamma_0},$$

in $L^2(D)$, ただし、γ_0 は D 上の境界がない有限個の連結成分から成る滑らかな超曲面で $\gamma_0 = \partial D_0$ となるもの（D_0 は滑らかで $\overline{D}_0 \subset D$), χ_γ は x が γ の外側 (内側) にあるとき, $\chi_\gamma(x) = +1(-1)$ なるものである。$\dot{w}^\varepsilon(t)$ はある $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された $w^\varepsilon(t) \equiv w^\varepsilon(t,\omega) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ の t についての微分で、$w^\varepsilon(t)$ は 1 次元 Brown 運動 $w(t)$ に $\varepsilon \downarrow 0$ で適当な意味で収束するものである。反応項 f は $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, bistable で、以下を満たすとする:

(i) $f(\pm 1) = 0$, $f'(\pm 1) < 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(u)du = 0$,

(ii) f has only three zeros ± 1 and one another between ± 1,

(iii) there exists $\bar{c}_1 > 0$ such that $f'(u) \le \bar{c}_1$ for every $u \in \mathbb{R}$.

方程式 (1) で $\alpha = 0$、かつ、f の平均化項がない場合は Allen-Cahn 方程式である。$\alpha = 0$ であれば, (1) の解 u^ε の体積は保存される: $\exists C \in \mathbb{R}$ s.t.

$$(3) \qquad \frac{1}{|D|}\int_D u^\varepsilon(t,x)dx = C,$$

体積保存型 Allen-Cahn 方程式でノイズがない場合 ((1) with $\alpha = 0$) の $\varepsilon \downarrow 0$ での sharp interface limit は [1] で論じられている。我々はノイズあり（$\alpha \neq 0$）の場合を考え、その sharp interface limit を論じる。講演では以下について紹介する予定である：

1. 以下に述べる (4) の解が一意的に存在する条件の下, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき、(1) の解 $u^\varepsilon(t)$ は、g^ε が (2) を満たすなら、(4) に従う γ_t にある意味で収束する。
2. (4) の解は $D \subset \mathbb{R}^2$, γ_t が convex である限り一意的に存在する。

$$V = \kappa - \fint_{\gamma_t} \kappa + \frac{\alpha|D|}{2|\gamma_t|} \circ \dot{w}(t), \quad t \in [0, \sigma], \tag{4}$$

σ: stopping time で $\sigma > 0$ (a.s.), V: γ_t の inward normal velocity, κ : γ_t の mean curvature (multiplied by $n-1$), $\fint_{\gamma_t} \kappa = \frac{1}{|\gamma_t|} \int_{\gamma_t} \kappa d\bar{s}$, $\dot{w}(t)$: white noise process, $\circ$: Stratonovich sense。

本結果 ([2]) は舟木直久氏との共同研究である。

[1] X. Chen, D. Hilhorst, E. Logak, *Mass conserving Allen-Cahn equation and volume preserving mean curvature flow*, Interfaces Free Bound., **12** (2010), 527–549.

[2] T. Funaki, S. Yokoyama, *Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation*, arXiv:1610.01263.