PARAMETRIX EXPANSIONS FOR SIMULATION OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

TOMOOKI YUASA

JOINT WORK WITH PATRIK ANDERSSON AND ARTURO KOHATSU-HIGA

1. 背景

我々は確率微分方程式に関する新しい数値計算手法の開発を行っている．確率微分方程式に関する数値計算手法は 1955 年に丸山儀四郎によって開発された Euler-Maruyama 近似が現在においても主流となっている．Euler-Maruyama 近似は実務家にとっては金融派生商品の価格決定の際に用いられ，理論的な研究対象としては不連続係数の場合における誤差評価など未解決な問題がある．しかし，近年 Hoang-Taguchi の活躍により，後者の問題は解決されようとしている．では，Euler-Maruyama 近似以外の数値計算手法が開発されていないのかという問いに対しては No である．例えば，古典的な Milstein 近似を始め，近年では Kusuoka 近似，Ninomiya-Victoir, Bally-Kohatsu[2] などが挙げられる．特に，我々の研究対象である Bally-Kohatsu は楕円型偏微分方程式の解の構成方法である Parametrix method を応用していることから，この数値計算手法を Parametrix simulation method と呼んでいる*．Parametrix simulation method が今後の研究対象として期待出来る点は次にある．

(i) 他の数値計算手法より群を抜いて計算時間が速い．
(ii) 仮定に確率微分方程式の係数の滑らかさを必ずしも要求しない．

例えば，(i) は計算時間の速さが重要となる金融業界にとっては非常に有用である．(ii) は確率微分方程式の係数が非滑らかな時，Euler-Maruyama 近似が安定しない場合が存在することが知られている．その場合の Euler-Maruyama 近似に代わる数値計算手法として Parametrix simulation method の有用性を感じる．しかし，Parametrix simulation method は他の数値計算手法より明確に有用であるとは言えないのも事実である．その要因は次の点にある．

(iii) 数値計算の安定性を指し示す分散が非常に大きいという点．
(iv) 仮定に確率微分方程式の係数の有界性を有する点．

例えば，(iii) の問題を解決する第一歩として，Andersson-Kohatsu[1] は分散を無限から有限にする分散減少法を与えた．また，金融業界で用いられるモデルには確率微分方程式の係数に有界性がないため，Parametrix simulation method を金融業界のモデルに適用するには (iv) の問題解決が “理論的な意味を込めて” 必要不可欠となる．今回の講演では (iii) の問題解決にあたり得られた様々な結果をお披露目する．

---

*Parametrix simulation method は Unbiased simulation method の一つである．通常，確率論を用いた数値計算手法には近似過程（例えば，Euler-Maruyama 近似）から生じる誤差が存在する．その誤差が生じない数値計算手法を Exact simulation method や Unbiased simulation method と呼ぶ．ここでは，前者を strong の意味での数値計算手法に用い，後者を weak の意味での数値計算手法に用いる．

2. Parametrix simulation method の解説

次に，最も基本となる Parametrix simulation method を説明する[†]．$(X_t)_{t\geq 0}$ を初期値 $X_0 = x \in \mathbf{R}^d$ の d 次元確率微分方程式 $dX_t = \sum_{j=1}^m \sigma_j(X_t)dW_t^j + b(X_t)dt$ で得られる強解とする．ここで，$(W_t)_{t\geq 0}$ は m 次元 Wiener 過程であり，σ は一様楕円性を持ち，$\sigma \in C_b^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^m)$，$b \in C_b^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ を満たすものとする．この時，$\mathbf{E}[f(X_t)]$ の Parametrix expansion は次で与えられる．

Theorem 2.0.1 (Bally-Kohatsu)**.** 任意の $f \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$，$t \in (0, T]$ に対して，

$$\mathbf{E}[f(X_t)] = \int_{\mathbf{R}^d} dy f(y) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{S}_t^n} d\mathbf{s} \int_{\mathbf{R}^{nd}} d\mathbf{y} \prod_{i=0}^{n-1} a_{s_i - s_{i+1}}(y_i, y_{i+1}) \overline{p}_{s_n}(y_n, y).$$

ここで，$\mathbf{S}_t^n = \{0 < s_n < \ldots < s_1 < t\}$，$a_t(x,y) = \theta_t(x,y)\overline{p}_t(x,y)$ である．また，関数 $y \mapsto \overline{p}_t(x,y)$ は平均 $x + b(x)t$，共分散行列 $a(x)t$ の正規分布に従う密度関数である．その密度関数から生成される $1, 2$ 階の *Hermite* 多項式 $h^i, h^{i,j}$ を用いて，重み関数 $\theta : (0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\theta_t(x,y) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \theta_t^{i,j}(x,y) - \sum_{i=1}^{d} \rho_t^i(x,y), \\
\theta_t^{i,j}(x,y) &= \partial_{i,j}^2 a^{i,j}(y) + \partial_j a^{i,j}(y) h_t^i(x,y) + \partial_i a^{i,j}(y) h_t^j(x,y) \\
&\quad + (a^{i,j}(y) - a^{i,j}(x)) h_t^{i,j}(x,y), \\
\rho_t^i(x,y) &= \partial_i b^i(y) + (b^i(y) - b^i(x)) h_t^i(x,y).
\end{aligned}$$

上記の定理を用いて，次が得られる．

Theorem 2.0.2 (Bally-Kohatsu)**.** 任意の $f \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$，$t \in (0, T]$ に対して，

$$\mathbf{E}[f(X_T)] = \mathbf{E}\Bigg[\underbrace{f(X_T^\pi) e^{\lambda T} \lambda^{-N_T} \prod_{i=0}^{N_T - 1} \theta_{\tau_{i+1} - \tau_i}(X_{\tau_i}^\pi, X_{\tau_{i+1}}^\pi)}_{=Y}\Bigg].$$

ここで，$(N_t)_{t\geq 0}$ は点過程 $(\tau_i)_{i\in\mathbf{N}}$ とパラメータ $\lambda > 0$ から構成される *Poisson* 過程である．また，$(X_t^\pi)_{t\in\pi}$ は点過程を分割点 $\pi(\omega) = \{\tau_i(\omega); i = 0, 1, \ldots, N_T(\omega)\} \cup \{T\}$ に持つ *Euler-Maruyama* 近似である．

Parametrix simulation method とは上記定理によって得られた確率変数 Y に対して，モンテカルロ法などを用いて $\mathbf{E}[f(X_t)]$ の近似値を求める数値計算手法のことである．しかし，Y の分散が一般には有界にならないことが Andersson-Kohatsu によって示されている．これはこの数値計算手法が安定しないことを意味している．そこで，彼らは Poisson 過程を他の Renewal 過程を用いることで，分散を有限にすることに成功した．

2.1. 結果：時間に関する Importance sampling.

$\mathbf{E}[f(X_t)]$ の Parametrix expansion は数え上げ $\sum_{n=0}^\infty$，時間 $\int_{\mathbf{S}_t^n} d\mathbf{s}$，空間 $\int_{\mathbf{R}^{nd}} d\mathbf{y}$ の 3 つの直積測度から構成されている．Andersson-Kohatsu が行った研究は数え上げと時間の直積測度に関する Importance sampling と解釈することが出来る．そこで，我々は時間に関してのみ Importance

---

[†]Bally-Kohatsu の言葉を借りると，Parametrix method は Forward method と Backward method に分けられる．それらを基に，それぞれの数値計算手法を考える事が出来るが，今回，講演する内容は Forward method を用いた数値計算手法に限る．

sampling を行うことで，先行結果の Andersson-Kohatsu より，良い結果を得ることに成功した．

3. 主結果：空間に関する Importance sampling

次に，我々の主結果を説明する．特に，これは空間に関してのみ Importance sampling を行なった結果であり，この結果は分散を有限にするだけではなく，全てのモーメントを有限に導く．パラメータ $t>0$，$x\in\mathbf{R}^d$ で添え字付けた $\nu_{t,x}$ を $\mathbf{R}^d$ 上の符号付き測度とし，$\mathbf{R}^d$ 上のルベーグ測度に対して絶対連続と仮定する．この時，$\nu_{t,x}$ の全変動を $|\nu_{t,x}|$ とし，Radon-Nikodym 密度関数を $\varphi_{t,x}$ とする．さらに，$\nu_{t,x}$ は次の仮定を満たすものとする．

- 任意の $x,y\in\mathbf{R}^d$ に対して，関数 $t\mapsto\varphi_{t,x}(y)$ は $(0,\infty)$ 上で微分可能である．
- 任意の $t>0$，$x\in\mathbf{R}^d$ に対して，関数 $y\mapsto\partial_t\varphi_{t,x}(y)$ は $\mathbf{R}^d$ 上可積分である．
- 任意の $f\in C_0(\mathbf{R}^d)$ に対して，$s\to t$ の時，$\sup_{x\in\mathbf{R}^d}|\nu_{s,x}(f)-\nu_{t,x}(f)|\to 0$ を満たし，$t\to 0$ の時，$\sup_{x\in\mathbf{R}^d}|\nu_{t,x}(f)-\delta_x(f)|\to 0$ を満たす．
- 任意の $t>0$ に対して，$\sup_{(s,x)\in(0,t]\times\mathbf{R}^d}|\nu_{s,x}|(\mathbf{R}^d)<\infty$ を満たす．
- 任意の $t>0$，$x\in\mathbf{R}^d$ に対して，関数 $y\mapsto\varphi_{t,x}(y)$ は L^* の定義域に属する．

ここで，δ_x は $x\in\mathbf{R}^d$ に重みを置く Dirac 測度である．また，L^* は次のように与えられる．$(X_t)_{t\geq 0}$ から生成される $C_0(\mathbf{R}^d)$ 上の半群の生成作用素を L とすると，L^* は L を $C_b^2(\mathbf{R}^d)\cap L^2(\mathbf{R}^d)\cap\{Lf\in L^2(\mathbf{R}^d)\}$ に制限して得られる $L^2(\mathbf{R}^d)$ に関する共役作用素である．この時，上手く符号付き測度 $\nu_{t,x}$ を選ぶことで，次の結果を得る．

Theorem 3.0.1. 任意の $f\in L^\infty(\mathbf{R}^d)$，$t\in(0,T]$，$p>0$ に対して，

$$\mathbf{E}[f(X_t)]=\mathbf{E}\Bigg[\underbrace{f(X_T^\pi)e^{\lambda T}\lambda^{-N_T}\frac{\varphi_{T-\tau_{N_T},X^\pi_{\tau_{N_T}}}(X_T^\pi)}{\overline{p}_{T-\tau_{N_T}}(X^\pi_{\tau_{N_T}},X^\pi_T)}\prod_{i=0}^{N_T-1}\frac{a_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}{\overline{p}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}}_{=Y}\Bigg],$$

$$\mathbf{E}[|Y|^p]\leq\|f\|_\infty^p C_{T,p}\exp\left\{-\lambda T(1-p)+C_{T,p}\lambda^{1-p}T\right\}<\infty.$$

ここで，$a_t(x,y)=(L^*-\partial_t)\varphi_{t,x}(y)$ である．

Theorem 3.0.2. 任意の $f\in L^\infty(\mathbf{R}^d)$，$t\in(0,T]$，$p>0$ に対して，

$$\mathbf{E}[f(X_t)]=$$

$$\mathbf{E}\Bigg[\underbrace{f(X_T^\pi)\frac{\varphi_{T-\tau_{N_T},X^\pi_{\tau_{N_T}}}(X_T^\pi)}{\overline{p}_{T-\tau_{N_T}}(X^\pi_{\tau_{N_T}},X^\pi_T)}\prod_{i=0}^{N_T-1}\left(\frac{\varphi_{\tau_{i+1}-\tau_i,X^\pi_{\tau_i}}(X^\pi_{\tau_{i+1}})}{\overline{p}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}+\frac{a_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}{\lambda\overline{p}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(X^\pi_{\tau_i},X^\pi_{\tau_{i+1}})}\right)}_{=Y}\Bigg],$$

$$\mathbf{E}[|Y|^p]\leq\|f\|_\infty^p C_{T,p}\exp\left\{-\lambda T+C_{T,p}\lambda^{1-p}T\right\}<\infty.$$

$p=2$ の時，Theorem 3.0.2 で得られた結果は Theorem 3.0.1 とは違い，2 次モーメントの上からの評価が λ に関して単調減少であることが分かる．パラメータ λ は任意だったので，Theorem 3.0.2 の結果は λ を大きくすることで，分散をいくらでも小さくする事が出来ることを意味している．ただし，λ を大きくすることで，計算時間も増えることに注意しなければならない．

References

[1] Andersson, P. and Kohatsu-Higa, A.: “Unbiased simulation of stochastic differential equations using parametrix expansions”, To appear in Bernoulli, 2016.

[2] Bally, V. and Kohatsu-Higa, A.: “A probabilistic interpretation of the parametrix method”, Ann. Appl. Probab., 25(6), 3095-3138, 2015.