

# Risa/Asir 終結式計算パッケージ f\_res 説明書

---

利用説明書  
1.0 版  
2005 年 6 月

by Kenji Fujiwara and Masayuki Noro

---



## 1 関数マニュアル

### 1.1 概要

`f_res` パッケージは、多変数多項式集合に対し、dense な係数をもつとして multipolynomial resultant を計算する `f_res.mres`, sparse な係数を持つ場合に sparse resultant を計算する `f_res.sres`, Dixon の方法により resultant を計算する `f_res.dres` および、付随する関数を実装している。実際には、これらは真の resultant の多項式倍を返す場合があるが、消去イデアルに属する多項式を一つ求めたい場合には、グレブナー基底による消去に比較して効率がよい場合がある。

これらの方法においては、線形計画法、凸包、mixed volume の計算などが必要となるが、これらについてはフリーソフトである `cddlib` および `MixedVol` を利用した。これらは OpenXM サーバ `ox_sres` としてまとめられている。これは、ソースディストリビューションでは、自動的に `make` されないが、`'OpenXM/src/ox_cdd'` において `make`, `make install` することにより、`asir` のライブラリディレクトリにインストールされる。これを利用して上で述べた resultant を計算する `asir` 関数が、`'OpenXM/src/asir-contrib/packages/f_res/f_res.rr'` にある。これを load することで、次節以降で述べる機能が使えるようになる。なお、線形計画法および凸包計算は、`gmp` による厳密計算を行うものと、浮動小数による近似計算で行うものの 2 通りが用意されている。後者の方が高速だが、誤差が生ずる場合がある。この選択は、`f_res.gmp()`, `f_res.float()` を呼び出すことで行う。

### 1.2 Notation

このマニュアルでは点をリストで、support や polytope をリストのリストで表す。つまり、点  $(1,1)$  はリスト `[1,1]` で表し、点  $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$  からなる polytope をリストのリスト `[[0,0],[1,0],[0,1]]` で表す。

### 1.3 主な関数

#### 1.3.1 `f_res.mres`, `f_res.mresM`

```
f_res.mres(Equations, Vars )
    :: Multipolynomial resultant の多項式倍を返す

f_res.mresM(Equations, Vars )
    :: 行列式が f_res.mres が返す値になるような行列を返す

return

    f_res.mres
        多項式もしくは 0

    f_res.mresM
        行列

Equaitons 多項式のリスト
Vars       変数のリスト.

オプション

    rsc      任意
```

|        |     |
|--------|-----|
| rowidx | 配列  |
| colidx | 配列  |
| p      | 素数  |
| sub    | リスト |

- *Equations* の成分の多項式による不定元を *Vars* としたとき斉次多項式の場合の方法で *f\_res.mres* は resultant の多項式倍を, *f\_res.mresM* は resultant の多項式倍を行列式にもつ行列を返す.
- *Equations* の成分の多項式は内部で自動的に斉次化されているから, 斉次多項式である必要はない.
- Rank Submatrix Construction を行ないたいときはオプション *rsc* を 1 に設定する. その場合, この関数は内部で関数 *f\_res.submatrix* を呼び出しているの, そのためのオプションはすべて受け付ける.

```
[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] f_res.mresM( [F0,F1,F2], [x,y] );
[ 0 0 0 a2 a3 a1 ]
[ 0 a2 a3 0 a1 0 ]
[ a2 a3 0 a1 0 0 ]
[ 0 b2 b3 0 b1 0 ]
[ b2 b3 0 b1 0 0 ]
[ c2 c6 c3 c4 c5 c1 ]
[4] R = f_res.mres( [F0,F1,F2], [x,y] );
(-c3*b2^2+c6*b3*b2-c2*b3^2)*a1^3+((2*c3*b2-c6*b3)*b1-c5*b3*b2+c4*b3^2)*a2+((-c6*b2+2*c2*b3)*b1+c5*b2^2-c4*b3*b2)*a3)*a1^2+((-c3*b1^2+c5*b3*b1-c1*b3^2)*a2^2+(c6*b1^2+(-c5*b2-c4*b3)*b1+2*c1*b3*b2)*a3*a2+(-c2*b1^2+c4*b2*b1-c1*b2^2)*a3^2)*a1
[5] fctr( R );
[[-1,1],[a1,1],[(c3*b2^2-c6*b3*b2+c2*b3^2)*a1^2+((-2*c3*b2+c6*b3)*b1+c5*b3*b2-c4*b3^2)*a2+((c6*b2-2*c2*b3)*b1-c5*b2^2+c4*b3*b2)*a3)*a1+(c3*b1^2-c5*b3*b1+c1*b3^2)*a2^2+(-c6*b1^2+(c5*b2+c4*b3)*b1-2*c1*b3*b2)*a3*a2+(c2*b1^2-c4*b2*b1+c1*b2^2)*a3^2,1]]
```

### 1.3.2 f\_res.indexof

*f\_res.indexof(Element, List )*

:: リスト中に要素が最初に現れる位置を返す

*Element*    検索したい要素

*List*        検索対象のリスト

*return*      *List* で最初に現れる *Element* のインデックス番号. *List* に *Element* が現れない場合は整数 -1.

- *List* で最初に現れる *Element* のインデックス番号を返す. *List* に *Element* が現れない場合は -1 を返す.
- *Element* の型は何であっても構わない.

- 関数 `flist` と組み合わせると、ある関数が `Asir` に入っているかが分かる。

```
[0] f_res.indexof( 2, [1,2,3] );
1
[1] f_res.indexof( 4, [1,2,3] );
-1
[2] f_res.indexof( "nd_det", flist() );
31
[3] f_res.indexof( "nd_Det", flist() );
-1
```

### 1.3.3 `f_res.listadd`

`f_res.listadd(A, B )`

:: リストをベクトルと見て和を求める

*A*

*B*            リスト

*return*        リスト

- ベクトルの和のようにリスト *A* とリスト *B* の和を求める。
- リスト *A* とリスト *B* の長さは等しくなくてはならない。

```
[0] f_res.listadd( [1,2,3], [4,5,6] );
[5,7,9]
[1] f_res.listadd( [a,b,c], [d,e,f] );
[a+d,b+e,c+f]
```

### 1.3.4 `f_res.start`

`f_res.start(N)`

:: `ox_sres` を起動する

*N*            任意

*return*        整数

- パラメータ *N* が 1 のときは GMP 版、それ以外の場合は浮動小数版の新しい OpenXM サーバ `ox_sres` を起動し、他の関数で使われるサーバに設定する。
- 実行ファイルが見つからないときはデバッグモードに入る。
- 返される整数は通信のための識別子。

### 1.3.5 `f_res.float`

`f_res.float()`

:: `ox_sres` を起動する

*return*        整数

- 浮動小数版の OpenXM サーバ `ox_sres` が存在しないときは起動し、他の関数で使われるサーバに設定する。
- 実行ファイルが見つからないときはデバッグモードに入る。
- すでに存在している場合は他の関数で使われるサーバに設定するだけで新たに起動はしない。
- 返される整数は通信のための識別子。

### 1.3.6 f\_res.gmp

f\_res.gmp()

:: ox\_sres を起動する

return 整数

- GMP 版の OpenXM サーバ ox\_sres が存在しないときは起動し、他の関数で使われるサーバに設定する.
- 実行ファイルが見つからないときはデバッグモードに入る.
- すでに存在している場合は他の関数で使われるサーバに設定するだけで新たに起動はしない.
- 返される整数は通信のための識別子.

### 1.3.7 f\_res.conv

f\_res.conv(List)

:: polytope の凸閉包を求める

return リストのリスト

List 点を表すリストのリスト

- List で与えられる polytope の凸閉包を求める.
- OpenXM サーバ ox\_sres が存在しないときは浮動小数版を起動する.
- 点の座標は整数しか受け付けない.

```
[0] f_res.conv( [ [1,1],[0,0],[0,2],[2,0],[2,2] ] );
[0,0],[0,2],[2,0],[2,2]]
```

### 1.3.8 f\_res.support

f\_res.support(Equation, Vars)

:: 多項式の support を返す

return リストのリスト

Equation 多項式

Vars 不定元のリスト

- 不定元を Vars としたときの多項式 Equation の support をリストのリストとして返す.

```
[0] f_res.support( x^2 + x*y + y^2, [x,y] );
[0,2],[1,1],[2,0]]
[1] f_res.support( x^2 + x*y + y^2, [x,y,z] );
[0,2,0],[1,1,0],[2,0,0]]
```

### 1.3.9 f\_res.np

f\_res.np(Equation, Vars)

:: Newton polytope を返す

return リストのリスト

Equation 多項式

Vars 不定元のリスト

- 不定元を *Vars* としたときの多項式 *Equation* の Newton polytope をリストのリストとして返す.
- OpenXM サーバ ox\_sres が存在しないときは浮動小数版を起動する.

```
[0] f_res.np( x^2 + x*y + y^2, [x,y] );
[[0,2],[2,0]]
[1] f_res.np( x^2 + x*y + y^2, [x,y,z] );
[[0,2,0],[2,0,0]]
```

### 1.3.10 f\_res.msum

*f\_res.msum*(*Polytopes*)  
 :: polytope たちの Minkowski sum を返す

*return* リストのリスト

*Polytopes* リストのリストのリスト

オプション

*conv* 任意.

- *Polytopes* の成分である polytope による Minkowski sum 内のすべての lattice points を求める.
- *conv* が 1 のときは Minkowski sum の凸閉包を返す. OpenXM サーバ ox\_sres が存在しないときは浮動小数版を起動する.

```
[0] Q1 = [[0,0],[1,0],[0,1]]$
[1] Q2 = [[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]]$
[2] f_res.msum( [Q1,Q1] );
[[0,0],[0,1],[0,2],[1,0],[1,1],[2,0]]
[3] f_res.msum( [Q1,Q1] | conv=1 );
[[0,0],[0,2],[2,0]]
[4] f_res.msum( [Q1,Q1,Q1] | conv=1 );
[[0,0],[0,3],[3,0]]
[5] f_res.msum( [Q1,Q2] );
[[0,0],[0,1],[0,2],[1,0],[1,1],[1,2],[2,0],[2,1]]
[6] f_res.msum( [Q1,Q2] | conv=1 );
[[0,0],[0,2],[1,2],[2,0],[2,1]]
```

### 1.3.11 f\_res.mvol

*f\_res.mvol*(*Polytopes*)  
 :: polytope たちの mixed volume を求める

*return* 整数

*Polytopes* リストのリストのリスト

- *varPolytopes* の成分である polytope による mixed volume を求める.
- Mixed volume の定義から polytope の次元と数は等しい必要がある.
- OpenXM サーバ ox\_sres が存在しないときは浮動小数版を起動する.

```
[0] Q1 = [[0,0],[1,0],[0,1]]$
```

```

[1] Q2 = [[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]]$
[2] f_res.mvol( [Q1,Q1] );
1
[3] f_res.mvol( [Q1,Q2] );
2
[4] f_res.mvol( [Q2,Q2] );
2

```

### 1.3.12 f\_res.sres

`f_res.sres(Equations,Vars)`  
 :: sparse resultant の多項式倍を返す

*return*      多項式

*Equations*   多項式のリスト

*Vars*          不定元のリスト

オプション

*v*              リスト

*p*              素数

*sub*           リスト

- *Equations* の成分の多項式による不定元を *Vars* としたとき Incremental algorithm で計算した resultant の多項式倍を返す.
- オプション *v* は *v-distance* を表すリストで, 定義されていない場合は `[11,12,13,...]` が使われる.
- 行列の rank の計算は  $\text{GF}(p)$  上で行なわれ, 行列の中の不定元にはオプションで *sub* で指定されるリストの要素が前から順に代入され評価される. ここで *p* はオプションの *p* である. 素数 *p* が指定されていない場合は 65521 が使われ, リスト *sub* が指定されていない場合は 53,59,... の素数が使われる.
- OpenXM サーバ `ox_sres` が存在しないときは浮動小数版を起動する.

```

[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] R = f_res.sres( [F0,F1,F2], [x,y] );
(c3*b2^3-c6*b3*b2^2+c2*b3^2*b2)*a1^2+((-2*c3*b2^2+c6*b3*b2)*b1+c5*b3*b2^2-c4*b
3^2*b2)*a2+((c6*b2^2-2*c2*b3*b2)*b1-c5*b2^3+c4*b3*b2^2)*a3)*a1+(c3*b2*b1^2-c5*b
3*b2*b1+c1*b3^2*b2)*a2^2+(-c6*b2*b1^2+(c5*b2^2+c4*b3*b2)*b1-2*c1*b3*b2^2)*a3*a2
+(c2*b2*b1^2-c4*b2^2*b1+c1*b2^3)*a3^2
[4] fctr( R );
[[1,1],[b2,1],[(c3*b2^2-c6*b3*b2+c2*b3^2)*a1^2+((-2*c3*b2+c6*b3)*b1+c5*b3*b2-c
4*b3^2)*a2+((c6*b2-2*c2*b3)*b1-c5*b2^2+c4*b3*b2)*a3)*a1+(c3*b1^2-c5*b3*b1+c1*b3
^2)*a2^2+(-c6*b1^2+(c5*b2+c4*b3)*b1-2*c1*b3*b2)*a3*a2+(c2*b1^2-c4*b2*b1+c1*b2^2
)*a3^2,1]]

```



### 1.3.13 f\_res.dres, f\_res.dresM

f\_res.dres(Equations, Vars)

:: Dixon resultant を返す

f\_res.dresM(Equations, Vars)

:: 行列式が Dixon resultant になるような行列を返す

return

f\_res.dres

多項式

f\_res.dresM

行列

Equations 多項式のリスト

Vars 不定元のリスト

オプション

norsc 任意

rowidx 配列

colidx 配列

p 素数

sub リスト

- Equations の成分の多項式による不定元を Vars としたとき Dixon の方法で f\_res.dres は resultant の多項式倍を, f\_res.dresM は resultant の多項式倍を行列式にもつ行列を返す.
- Rank Submatrix Construction を行ないたくないときはオプション norsc を 1 に設定する.
- この関数は内部で関数 f\_res.submatrix を呼び出しているため、そのためのオプションはすべて受け付ける.

```
[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
```

```
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
```

```
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
```

```
[3] f_res.dresM( [F0,F1,F2], [x,y] );
```

```
[ c1*b3*a2-c1*b2*a3 -c2*b3*a1+c4*b3*a2+(c2*b1-c4*b2)*a3 (c3*b2-c6*b3)*a1+(-c3*b1+c5*b3)*a2+(c6*b1-c5*b2)*a3 ]
```

```
[ 0 -c2*b2*a1+c2*b1*a2 -c2*b3*a1+c2*b1*a3 ]
```

```
[ -c1*b2*a1+c1*b1*a2 -c4*b2*a1+c4*b1*a2 -c4*b3*a1+c1*b3*a2+(c4*b1-c1*b2)*a3 ]
```

```
[4] R = dres( [F0,F1,F2], [x,y] );
```

```
(-c3*c2*c1*b2^3+c6*c2*c1*b3*b2^2-c2^2*c1*b3^2*b2)*a1^3+(((3*c3*c2*c1*b2^2-2*c6*c2*c1*b3*b2+c2^2*c1*b3^2)*b1-c5*c2*c1*b3*b2^2+c4*c2*c1*b3^2*b2)*a2+((-c6*c2*c1*b2^2+2*c2^2*c1*b3*b2)*b1+c5*c2*c1*b2^3-c4*c2*c1*b3*b2^2)*a3)*a1^2+(((3*c3*c2*c1*b2+c6*c2*c1*b3)*b1^2+(2*c5*c2*c1*b3*b2-c4*c2*c1*b3^2)*b1-c2*c1^2*b3^2*b2)*a2^2+((2*c6*c2*c1*b2-2*c2^2*c1*b3)*b1^2-2*c5*c2*c1*b2^2*b1+2*c2*c1^2*b3*b2^2)*a3*a2+(-c2^2*c1*b2*b1^2+c4*c2*c1*b2^2*b1-c2*c1^2*b2^3)*a3^2)*a1+(c3*c2*c1*b1^3-c5*c2*c1*b3*b1^2+c2*c1^2*b3^2*b1)*a2^3+(-c6*c2*c1*b1^3+(c5*c2*c1*b2+c4*c2*c1*b3)*b1^2-2*c2*c1^2*b3*b2*b1)*a3*a2^2+(c2^2*c1*b1^3-c4*c2*c1*b2*b1^2+c2*c1^2*b2^2*b1)*
```

```

a3^2*a2
[5] fctr(R);
[[-1,1],[c2,1],[c1,1],[b2*a1-b1*a2,1],[(c3*b2^2-c6*b3*b2+c2*b3^2)*a1^2+((-2*c3
*b2+c6*b3)*b1+c5*b3*b2-c4*b3^2)*a2+((c6*b2-2*c2*b3)*b1-c5*b2^2+c4*b3*b2)*a3)*a1
+(c3*b1^2-c5*b3*b1+c1*b3^2)*a2^2+(-c6*b1^2+(c5*b2+c4*b3)*b1-2*c1*b3*b2)*a3*a2+(
c2*b1^2-c4*b2*b1+c1*b2^2)*a3^2,1]]

```

### 1.3.14 f\_res.dixonpolynomial

`f_res.dixonpolynomial(Equations,Vars)`

:: Dixon polynomial を返す

*return* リスト

*Equaitons* 多項式のリスト

*Vars* 不定元のリスト

*Equations* の成分の多項式による不定元を *Vars* としたときの Dixon polynomial を計算し、  
 [(Dixon polynomial), (新しい変数の配列)] というリストを返す。新しい変数は関数 `uc`  
 によって生成された不定元である。多項式の数を変数の数よりも一つ多い必要がある。

```

[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] f_res.dixonpolynomial( [F0,F1,F2], [x,y] );
[(-_0*c1*b2*a1+(_0*c1*b1+c1*b3)*a2-c1*b2*a3)*x+((-_1*c2-_0*c4)*b2-c2*b3)*a1+((-
_1*c2+_0*c4)*b1+c4*b3)*a2+(c2*b1-c4*b2)*a3)*y+(c3*b2+(-_1*c2-_0*c4-c6)*b3)*a1+(-
-c3*b1+(_0*c1+c5)*b3)*a2+((-_1*c2+_0*c4+c6)*b1+(-_0*c1-c5)*b2)*a3,[ _0 _1 ]]

```

### 1.3.15 f\_res.matrixdecomp

`f_res.matrixdecomp( Dpoly, UC, Vars )`

:: Dixon polynomial を行列に分解する。

*return* リスト

*Dpoly* 多項式

*UC* 配列

*Vars* リスト

- `dixonpolynomial Dpoly` を行が *UC* の monomial, 列が *Vars* の monomial で添字付けられる行列に分解する。
- 戻り値は, [(*UC* の monomial の配列), (行列), (*Vars* の monomial の配列)] という形で, それぞれ  $\sigma_P = V D_P W$  の  $V, D_P, W$  を表す。

```

[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] D = f_res.dixonpolynomial( [F0,F1,F2], [x,y] )$
[4] M = f_res.matrixdecomp( D[0], D[1], [x,y] );
[[ 1 _1 _0 ],[ c1*b3*a2-c1*b2*a3 -c2*b3*a1+c4*b3*a2+(c2*b1-c4*b2)*a3 (c3*b2-c6*
b3)*a1+(-c3*b1+c5*b3)*a2+(c6*b1-c5*b2)*a3 ]

```

```

[ 0 -c2*b2*a1+c2*b1*a2 -c2*b3*a1+c2*b1*a3 ]
[ -c1*b2*a1+c1*b1*a2 -c4*b2*a1+c4*b1*a2 -c4*b3*a1+c1*b3*a2+(c4*b1-c1*b2)*a3 ],[
  x y 1 ]]
[5] V = M[0]*M[1]$
[6] D[0] == V[0]*M[2][0]+V[1]*M[2][1]+V[2]*M[2][2];
1

```

### 1.3.16 f\_res.submatrix

`f_res.submatrix( Matrix )`  
 :: 引数である行列の rank を持つ部分行列を返す.

*return* 行列

*Matrix* 行列

オプション

|               |     |
|---------------|-----|
| <i>rowidx</i> | 配列  |
| <i>colidx</i> | 配列  |
| <i>p</i>      | 素数  |
| <i>sub</i>    | リスト |

- 行列 *Matrix* の rank を持つ部分行列を返す.
- 行列の rank の計算で行列の中の不定元にはリスト *sub* の値が前から順に代入され  $\text{GF}(p)$  で評価される. ここで *p* はオプションの *p* が使われる.
- 与えられた行列が正則ではないとき部分行列は一意に定まらない. そこでどの行列を指定するかというのを配列 *rowidx, colidx* で行なう. 実際には行列 *Matrix* の  $(i,j)$  成分を  $(\text{rowidx}[i], \text{colidx}[j])$  成分と入れ換えているだけである.
- 素数 *p* が指定されていない場合は 65521 が使われ, リスト *sub* が指定されていない場合は 53, 59, dots の素数が使われる.

```

[0] M = newmat( 3, 3, [[1,0,0],[0,a,0],[0,b,0]] );
[ 1 0 0 ]
[ 0 a 0 ]
[ 0 b 0 ]
[1] f_res.submatrix( M );
[ 1 0 ]
[ 0 a ]
[2] f_res.submatrix( M | rowidx=ltov([0,2,1]) );
[ 1 0 ]
[ 0 b ]

```

# Index

(Index is nonexistent)

(Index is nonexistent)

## Short Contents

|   |                   |    |
|---|-------------------|----|
| 1 | 関数マニュアル . . . . . | 1  |
|   | Index . . . . .   | 10 |

# Table of Contents

|              |                         |           |
|--------------|-------------------------|-----------|
| <b>1</b>     | <b>関数マニュアル</b>          | <b>1</b>  |
| 1.1          | 概要                      | 1         |
| 1.2          | Notation                | 1         |
| 1.3          | 主な関数                    | 1         |
| 1.3.1        | f_res.mres, f_res.mresM | 1         |
| 1.3.2        | f_res.indexof           | 2         |
| 1.3.3        | f_res.listadd           | 3         |
| 1.3.4        | f_res.start             | 3         |
| 1.3.5        | f_res.float             | 3         |
| 1.3.6        | f_res.gmp               | 4         |
| 1.3.7        | f_res.conv              | 4         |
| 1.3.8        | f_res.support           | 4         |
| 1.3.9        | f_res.np                | 4         |
| 1.3.10       | f_res.msum              | 5         |
| 1.3.11       | f_res.mvol              | 5         |
| 1.3.12       | f_res.sres              | 6         |
| 1.3.13       | f_res.dres, f_res.dresM | 7         |
| 1.3.14       | f_res.dixonpolynomial   | 8         |
| 1.3.15       | f_res.matrixdecomp      | 8         |
| 1.3.16       | f_res.submatrix         | 9         |
| <b>Index</b> |                         | <b>10</b> |