

# Risa/Asir 終結式計算パッケージf\_res 説明書

---

利用説明書  
1.0 版  
2005 年 6 月

by Kenji Fujiwara and Masayuki Noro

---



# 1 関数マニュアル

## 1.1 概要

`f_res` パッケージは、多変数多項式集合に対し、dense な係数をもつとして multipolynomial resultant を計算する `f_res.mres`, sparse な係数を持つ場合に sparse resultant を計算する `f_res.sres`, Dixon の方法により resultant を計算する `f_res.dres` および、付随する関数を実装している。実際には、これらは真の resultant の多項式倍を返す場合があるが、消去イデアルに属する多項式を一つ求めたい場合には、グレブナー基底による消去に比較して効率がよい場合がある。

これらの方法においては、線形計画法、凸包、mixed volume の計算などが必要となるが、これらについてはフリーソフトである `cddlib` および `MixedVol` を利用した。これらは OpenXM サーバ `ox_sres` としてまとめられている。これは、ソースディストリビューションでは、自動的に `make` されないが、`'OpenXM/src/ox_cdd'` において `make`, `make install` することにより、`asir` のライブラリディレクトリにインストールされる。これを利用して上で述べた resultant を計算する `asir` 関数が、`'OpenXM/src/asir-contrib/packages/f_res/f_res.rr'` にある。これを load することで、次節以降で述べる機能が使えるようになる。なお、線形計画法および凸包計算は、`gmp` による厳密計算を行うものと、浮動小数による近似計算で行うものの 2 通りが用意されている。後者の方が高速だが、誤差が生ずる場合がある。この選択は、`f_res.gmp()`, `f_res.float()` を呼び出すことで行う。

## 1.2 Notation

このマニュアルでは点をリストで、support や polytope をリストのリストで表す。つまり、点  $(1,1)$  はリスト `[1,1]` で表し、点  $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$  からなる polytope をリストのリスト `[[0,0],[1,0],[0,1]]` で表す。

## 1.3 主な関数

### 1.3.1 `f_res.mres`, `f_res.mresM`

```
f_res.mres(Equations, Vars )
    :: Multipolynomial resultant の多項式倍を返す

f_res.mresM(Equations, Vars )
    :: 行列式が f_res.mres が返す値になるような行列を返す

return

f_res.mres
    多項式もしくは 0

f_res.mresM
    行列

Equations 多項式のリスト
Vars      変数のリスト.
```

## オプション

|        |     |
|--------|-----|
| rsc    | 任意  |
| rowidx | 配列  |
| colidx | 配列  |
| p      | 素数  |
| sub    | リスト |

- *Equations* の成分の多項式による不定元を *Vars* としたとき斉次多項式の場合の方法で `f_res.mres` は resultant の多項式倍を, `f_res.mresM` は resultant の多項式倍を行列式にもつ行列を返す.
- *Equations* の成分の多項式は内部で自動的に斉次化されているから, 斉次多項式である必要はない.
- Rank Submatrix Construction を行ないたいときはオプション `rsc` を 1 に設定する. その場合, この関数は内部で関数 `f_res.submatrix` を呼び出している, そのためのオプションはすべて受け付ける.

```
[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] f_res.mresM( [F0,F1,F2], [x,y] );
[ 0 0 0 a2 a3 a1 ]
[ 0 a2 a3 0 a1 0 ]
[ a2 a3 0 a1 0 0 ]
[ 0 b2 b3 0 b1 0 ]
[ b2 b3 0 b1 0 0 ]
[ c2 c6 c3 c4 c5 c1 ]
[4] R = f_res.mres( [F0,F1,F2], [x,y] );
(-c3*b2^2+c6*b3*b2-c2*b3^2)*a1^3+((2*c3*b2-c6*b3)*b1-c5*b3*b2+c4*b3^2)*a2+((-c6*b2+2*c2*b3)*b1+c5*b2^2-c4*b3*b2)*a3)*a1^2+((-c3*b1^2+c5*b3*b1-c1*b3^2)*a2^2+(c6*b1^2+(-c5*b2-c4*b3)*b1+2*c1*b3*b2)*a3*a2+(-c2*b1^2+c4*b2*b1-c1*b2^2)*a3^2)*a1
[5] fctr( R );
[[-1,1],[a1,1],[(c3*b2^2-c6*b3*b2+c2*b3^2)*a1^2+((-2*c3*b2+c6*b3)*b1+c5*b3*b2-c4*b3^2)*a2+((c6*b2-2*c2*b3)*b1-c5*b2^2+c4*b3*b2)*a3)*a1+(c3*b1^2-c5*b3*b1+c1*b3^2)*a2^2+(-c6*b1^2+(c5*b2+c4*b3)*b1-2*c1*b3*b2)*a3*a2+(c2*b1^2-c4*b2*b1+c1*b2^2)*a3^2,1]]
```

## 1.3.2 f\_res.indexof

`f_res.indexof(Element, List)`

:: リスト中に要素が最初に現れる位置を返す

*Element*    検索したい要素

*List*        検索対象のリスト

*return*     *List* で最初に現れる *Element* のインデックス番号. *List* に *Element* が現れない場合は整数-1.

- *List* で最初に現れる *Element* のインデックス番号を返す. *List* に *Element* が現れない場合は-1 を返す.
- *Element* の型は何であっても構わない.
- 関数 `flist` と組み合わせると,ある関数が *Asir* に入っているかが分かる.

```
[0] f_res.indexof( 2, [1,2,3] );
1
[1] f_res.indexof( 4, [1,2,3] );
-1
[2] f_res.indexof( "nd_det", flist() );
31
[3] f_res.indexof( "nd_Det", flist() );
-1
```

### 1.3.3 f\_res.listadd

`f_res.listadd(A, B )`  
 :: リストをベクトルと見て和を求める

*A*  
*B*            リスト

*return*       リスト

- ベクトルの和のようにリスト *A* とリスト *B* の和を求める.
- リスト *A* とリスト *B* の長さは等しくなくてはいけない.

```
[0] f_res.listadd( [1,2,3], [4,5,6] );
[5,7,9]
[1] f_res.listadd( [a,b,c], [d,e,f] );
[a+d,b+e,c+f]
```

### 1.3.4 f\_res.start

`f_res.start(N)`  
 :: `ox_sres` を起動する

*N*            任意

*return*       整数

- パラメータ *N* が 1 のときは GMP 版, それ以外の場合は浮動小数版の新しい OpenXM サーバ `ox_sres` を起動し, 他の関数で使われるサーバに設定する.
- 実行ファイルが見つからないときはデバッグモードに入る.
- 返される整数は通信のための識別子.

### 1.3.5 f\_res.float

`f_res.float()`  
 :: `ox_sres` を起動する

*return*       整数

- 浮動小数版の OpenXM サーバ `ox_sres` が存在しないときは起動し, 他の関数で使われるサーバに設定する.

- 実行ファイルが見つからないときはデバッグモードに入る.
- すでに存在している場合は他の関数で使われるサーバに設定するだけで新たに起動はしない.
- 返される整数は通信のための識別子.

### 1.3.6 f\_res.gmp

`f_res.gmp()`

:: `ox_sres` を起動する

*return*      整数

- GMP 版の OpenXM サーバ`ox_sres` が存在しないときは起動し, 他の関数で使われるサーバに設定する.
- 実行ファイルが見つからないときはデバッグモードに入る.
- すでに存在している場合は他の関数で使われるサーバに設定するだけで新たに起動はしない.
- 返される整数は通信のための識別子.

### 1.3.7 f\_res.conv

`f_res.conv(List)`

:: polytope の凸閉包を求める

*return*      リストのリスト

*List*          点を表すリストのリスト

- *List* で与えられる polytope の凸閉包を求める.
- OpenXM サーバ`ox_sres` が存在しないときは浮動小数版を起動する.
- 点の座標は整数しか受け付けない.

```
[0] f_res.conv( [ [1,1],[0,0],[0,2],[2,0],[2,2] ] );
[0,0],[0,2],[2,0],[2,2]]
```

### 1.3.8 f\_res.support

`f_res.support(Equation,Vars)`

:: 多項式の support を返す

*return*      リストのリスト

*Equation*    多項式

*Vars*        不定元のリスト

- 不定元を *Vars* としたときの多項式 *Equation* の support をリストのリストとして返す.

```
[0] f_res.support( x^2 + x*y + y^2, [x,y] );
[0,2],[1,1],[2,0]]
[1] f_res.support( x^2 + x*y + y^2, [x,y,z] );
[0,2,0],[1,1,0],[2,0,0]]
```

### 1.3.9 f\_res.np

`f_res.np(Equation,Vars)`

:: Newton polytope を返す

`return` リストのリスト

`Equation` 多項式

`Vars` 不定元のリスト

- 不定元を `Vars` としたときの多項式 `Equation` の Newton polytope をリストのリストとして返す.
- OpenXM サーバ `ox_sres` が存在しないときは浮動小数版を起動する.

```
[0] f_res.np( x^2 + x*y + y^2, [x,y] );
[[0,2],[2,0]]
[1] f_res.np( x^2 + x*y + y^2, [x,y,z] );
[[0,2,0],[2,0,0]]
```

### 1.3.10 f\_res.msum

`f_res.msum(Polytopes)`

:: polytope たちの Minkowski sum を返す

`return` リストのリスト

`Polytopes` リストのリストのリスト

オプション

`conv` 任意.

- `Polytopes` の成分である polytope による Minkowski sum 内のすべての lattice points を求める.
- `conv` が 1 のときは Minkowski sum の凸閉包を返す. OpenXM サーバ `ox_sres` が存在しないときは浮動小数版を起動する.

```
[0] Q1 = [[0,0],[1,0],[0,1]]$
[1] Q2 = [[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]]$
[2] f_res.msum( [Q1,Q1] );
[[0,0],[0,1],[0,2],[1,0],[1,1],[2,0]]
[3] f_res.msum( [Q1,Q1] | conv=1 );
[[0,0],[0,2],[2,0]]
[4] f_res.msum( [Q1,Q1,Q1] | conv=1 );
[[0,0],[0,3],[3,0]]
[5] f_res.msum( [Q1,Q2] );
[[0,0],[0,1],[0,2],[1,0],[1,1],[1,2],[2,0],[2,1]]
[6] f_res.msum( [Q1,Q2] | conv=1 );
[[0,0],[0,2],[1,2],[2,0],[2,1]]
```

### 1.3.11 f\_res.mvol

`f_res.mvol(Polytopes)`

:: polytope たちの mixed volume を求める

*return*      整数

*Polytopes*   リストのリストのリスト

- *varPolytopes* の成分である *polytope* による mixed volume を求める.
- Mixed volume の定義から *polytope* の次元と数は等しい必要がある.
- OpenXM サーバ *ox\_sres* が存在しないときは浮動小数版を起動する.

```
[0] Q1 = [[0,0],[1,0],[0,1]]$
[1] Q2 = [[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]]$
[2] f_res.mvol( [Q1,Q1] );
1
[3] f_res.mvol( [Q1,Q2] );
2
[4] f_res.mvol( [Q2,Q2] );
2
```

### 1.3.12 *f\_res.sres*

*f\_res.sres*(*Equations*,*Vars*)  
:: sparse resultant の多項式倍を返す

*return*      多項式

*Equations*   多項式のリスト

*Vars*          不定元のリスト

オプション

*v*            リスト

*p*            素数

*sub*          リスト

- *Equations* の成分の多項式による不定元を *Vars* としたとき Incremental algorithm で計算した resultant の多項式倍を返す.
- オプション *v* は *v-distance* を表すリストで, 定義されていない場合は `[11,12,13,...]` が使われる.
- 行列の rank の計算は  $\text{GF}(p)$  上で行なわれ, 行列の中の不定元にはオプションで *sub* で指定されるリストの要素が前から順に代入され評価される. ここで *p* はオプションの *p* である. 素数 *p* が指定されていない場合は 65521 が使われ, リスト *sub* が指定されていない場合は 53,59,... の素数が使われる.
- OpenXM サーバ *ox\_sres* が存在しないときは浮動小数版を起動する.

```
[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] R = f_res.sres( [F0,F1,F2], [x,y] );
(c3*b2^3-c6*b3*b2^2+c2*b3^2*b2)*a1^2+((-2*c3*b2^2+c6*b3*b2)*b1+c5*b3*b2^2-c4*b3^2*b2)*a2+((c6*b2^2-2*c2*b3*b2)*b1-c5*b2^3+c4*b3*b2^2)*a3)*a1+(c3*b2*b1^2-c5*b3*b2*b1+c1*b3^2*b2)*a2^2+(-c6*b2*b1^2+(c5*b2^2+c4*b3*b2)*b1-2*c1*b3*b2^2)*a3*a2+(c2*b2*b1^2-c4*b2^2*b1+c1*b2^3)*a3^2
```



```
[4] fctr( R );
[[1,1],[b2,1],[(c3*b2^2-c6*b3*b2+c2*b3^2)*a1^2+((-2*c3*b2+c6*b3)*b1+c5*b3*b2-c
4*b3^2)*a2+((c6*b2-2*c2*b3)*b1-c5*b2^2+c4*b3*b2)*a3)*a1+(c3*b1^2-c5*b3*b1+c1*b3
^2)*a2^2+(-c6*b1^2+(c5*b2+c4*b3)*b1-2*c1*b3*b2)*a3*a2+(c2*b1^2-c4*b2*b1+c1*b2^2
)*a3^2,1]]
```

### 1.3.13 f\_res.dres, f\_res.dresM

`f_res.dres(Equations,Vars)`  
 :: Dixon resultant を返す

`f_res.dresM(Equations,Vars)`  
 :: 行列式が Dixon resultant になるような行列を返す

*return*

`f_res.dres`  
 多項式

`f_res.dresM`  
 行列

*Equaitons* 多項式のリスト

*Vars* 不定元のリスト

オプション

|               |     |
|---------------|-----|
| <i>norsc</i>  | 任意  |
| <i>rowidx</i> | 配列  |
| <i>colidx</i> | 配列  |
| <i>p</i>      | 素数  |
| <i>sub</i>    | リスト |

- *Equations* の成分の多項式による不定元を *Vars* としたとき Dixon の方法で `f_res.dres` は resultant の多項式倍を, `f_res.dresM` は resultant の多項式倍を行列式にもつ行列を返す.
- Rank Submatrix Construction を行ないたくないときはオプション *norsc* を 1 に設定する.
- この関数は内部で関数 `f_res.submatrix` を呼び出しているので, そのためのオプションはすべて受け付ける.

```
[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] f_res.dresM( [F0,F1,F2], [x,y] );
[ c1*b3*a2-c1*b2*a3 -c2*b3*a1+c4*b3*a2+(c2*b1-c4*b2)*a3 (c3*b2-c6*b3)*a1+(-c3*b
1+c5*b3)*a2+(c6*b1-c5*b2)*a3 ]
[ 0 -c2*b2*a1+c2*b1*a2 -c2*b3*a1+c2*b1*a3 ]
[ -c1*b2*a1+c1*b1*a2 -c4*b2*a1+c4*b1*a2 -c4*b3*a1+c1*b3*a2+(c4*b1-c1*b2)*a3 ]
[4] R = dres( [F0,F1,F2], [x,y] );
(-c3*c2*c1*b2^3+c6*c2*c1*b3*b2^2-c2^2*c1*b3^2*b2)*a1^3+((3*c3*c2*c1*b2^2-2*c6*
```

```

c2*c1*b3*b2+c2^2*c1*b3^2)*b1-c5*c2*c1*b3*b2^2+c4*c2*c1*b3^2*b2)*a2+((-c6*c2*c1*
b2^2+2*c2^2*c1*b3*b2)*b1+c5*c2*c1*b2^3-c4*c2*c1*b3*b2^2)*a3)*a1^2+(((3*c3*c2*c
1*b2+c6*c2*c1*b3)*b1^2+(2*c5*c2*c1*b3*b2-c4*c2*c1*b3^2)*b1-c2*c1^2*b3^2*b2)*a2^
2+((2*c6*c2*c1*b2-2*c2^2*c1*b3)*b1^2-2*c5*c2*c1*b2^2*b1+2*c2*c1^2*b3*b2^2)*a3*a
2+(-c2^2*c1*b2*b1^2+c4*c2*c1*b2^2*b1-c2*c1^2*b2^3)*a3^2)*a1+(c3*c2*c1*b1^3-c5*c
2*c1*b3*b1^2+c2*c1^2*b3^2*b1)*a2^3+(-c6*c2*c1*b1^3+(c5*c2*c1*b2+c4*c2*c1*b3)*b1
^2-2*c2*c1^2*b3*b2*b1)*a3*a2^2+(c2^2*c1*b1^3-c4*c2*c1*b2*b1^2+c2*c1^2*b2^2*b1)*
a3^2*a2
[5] fctr(R);
[[-1,1],[c2,1],[c1,1],[b2*a1-b1*a2,1],[(c3*b2^2-c6*b3*b2+c2*b3^2)*a1^2+((-2*c3
*b2+c6*b3)*b1+c5*b3*b2-c4*b3^2)*a2+((c6*b2-2*c2*b3)*b1-c5*b2^2+c4*b3*b2)*a3)*a1
+(c3*b1^2-c5*b3*b1+c1*b3^2)*a2^2+(-c6*b1^2+(c5*b2+c4*b3)*b1-2*c1*b3*b2)*a3*a2+(
c2*b1^2-c4*b2*b1+c1*b2^2)*a3^2,1]]

```

### 1.3.14 f\_res.dixonpolynomial

`f_res.dixonpolynomial(Equations,Vars)`

:: Dixon polynomial を返す

*return* リスト

*Equations* 多項式のリスト

*Vars* 不定元のリスト

*Equations* の成分の多項式による不定元を *Vars* としたときの Dixon polynomial を計算し, `[(Dixon polynomial), (新しい変数の配列)]` というリストを返す. 新しい変数は関数 `uc` によって生成された不定元である. 多項式の数は変数の数よりも一つ多い必要がある.

```

[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] f_res.dixonpolynomial( [F0,F1,F2], [x,y] );
[(-_0*c1*b2*a1+(_0*c1*b1+c1*b3)*a2-c1*b2*a3)*x+(((1*c2-_0*c4)*b2-c2*b3)*a1+((
_1*c2+_0*c4)*b1+c4*b3)*a2+(c2*b1-c4*b2)*a3)*y+(c3*b2+(-_1*c2-_0*c4-c6)*b3)*a1+(
-c3*b1+(_0*c1+c5)*b3)*a2+((1*c2+_0*c4+c6)*b1+(-_0*c1-c5)*b2)*a3,[ _0 _1 ]]

```

### 1.3.15 f\_res.matrixdecomp

`f_res.matrixdecomp( Dpoly, UC, Vars )`

:: Dixon polynomial を行列に分解する.

*return* リスト

*Dpoly* 多項式

*UC* 配列

*Vars* リスト

- `dixonpolynomial Dpoly` を行が *UC* の monomial, 列が *Vars* の monomial で添字付けられる行列に分解する.
- 戻り値は, `[(UC の monomial の配列), (行列), (Vars の monomial の配列)]` という形で, それぞれ  $\sigma_P = V D_P W$  の  $V, D_P, W$  を表す.

```

[0] F0 = a1*x + a2*y + a3$
[1] F1 = b1*x + b2*y + b3$
[2] F2 = c1*x^2 + c2*y^2 + c3 + c4*x*y + c5*x + c6*y$
[3] D = f_res.dixonpolynomial( [F0,F1,F2], [x,y] )$
[4] M = f_res.matrixdecomp( D[0], D[1], [x,y] );
[[ 1 _1 _0 ],[ c1*b3*a2-c1*b2*a3 -c2*b3*a1+c4*b3*a2+(c2*b1-c4*b2)*a3 (c3*b2-c6*
b3)*a1+(-c3*b1+c5*b3)*a2+(c6*b1-c5*b2)*a3 ]
[ 0 -c2*b2*a1+c2*b1*a2 -c2*b3*a1+c2*b1*a3 ]
[ -c1*b2*a1+c1*b1*a2 -c4*b2*a1+c4*b1*a2 -c4*b3*a1+c1*b3*a2+(c4*b1-c1*b2)*a3 ],[
x y 1 ]]
[5] V = M[0]*M[1]$
[6] D[0] == V[0]*M[2][0]+V[1]*M[2][1]+V[2]*M[2][2];
1

```

### 1.3.16 f\_res.submatrix

`f_res.submatrix( Matrix )`

:: 引数である行列の rank を持つ部分行列を返す.

*return* 行列

*Matrix* 行列

オプション

|               |     |
|---------------|-----|
| <i>rowidx</i> | 配列  |
| <i>colidx</i> | 配列  |
| <i>p</i>      | 素数  |
| <i>sub</i>    | リスト |

- 行列 *Matrix* の rank を持つ部分行列を返す.
- 行列の rank の計算で行列の中の不定元にはリスト *sub* の値が前から順に代入され GF(*p*) で評価される. ここで *p* はオプションの *p* が使われる.
- 与えられた行列が正則ではないとき部分行列は一意に定まらない. そこでどの行列を指定するかというのを配列 *rowidx*, *colidx* で行なう. 実際には行列 *Matrix* の (*i*,*j*) 成分を (*rowidx*[*i*], *colidx*[*j*]) 成分と入れ換えているだけである.
- 素数 *p* が指定されていない場合は 65521 が使われ, リスト *sub* が指定されていない場合は 53, 59, dots の素数が使われる.

```

[0] M = newmat( 3, 3, [[1,0,0],[0,a,0],[0,b,0]] );
[ 1 0 0 ]
[ 0 a 0 ]
[ 0 b 0 ]
[1] f_res.submatrix( M );
[ 1 0 ]
[ 0 a ]
[2] f_res.submatrix( M | rowidx=ltov([0,2,1]) );
[ 1 0 ]
[ 0 b ]

```

# Index

(インデックスがありません)

(インデックスがありません)

## 簡単な目次

|                 |    |
|-----------------|----|
| 1 関数マニュアル ..... | 1  |
| Index .....     | 10 |

# 目次

|          |                         |           |
|----------|-------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>関数マニュアル</b>          | <b>1</b>  |
| 1.1      | 概要                      | 1         |
| 1.2      | Notation                | 1         |
| 1.3      | 主な関数                    | 1         |
| 1.3.1    | f_res.mres, f_res.mresM | 1         |
| 1.3.2    | f_res.indexof           | 2         |
| 1.3.3    | f_res.listadd           | 3         |
| 1.3.4    | f_res.start             | 3         |
| 1.3.5    | f_res.float             | 3         |
| 1.3.6    | f_res.gmp               | 4         |
| 1.3.7    | f_res.conv              | 4         |
| 1.3.8    | f_res.support           | 4         |
| 1.3.9    | f_res.np                | 5         |
| 1.3.10   | f_res.msum              | 5         |
| 1.3.11   | f_res.mvol              | 5         |
| 1.3.12   | f_res.sres              | 6         |
| 1.3.13   | f_res.dres, f_res.dresM | 7         |
| 1.3.14   | f_res.dixonpolynomial   | 8         |
| 1.3.15   | f_res.matrixdecomp      | 8         |
| 1.3.16   | f_res.submatrix         | 9         |
|          | <b>Index</b>            | <b>10</b> |

