

超幾何学校講義録は超幾何関数に関連する最新の研究についての講演記録である。本号“超幾何学校講義録 その4”には下記の講演, および講演後の加筆等を掲載している。本講義録が超幾何関数の研究のさらなる進展に寄与することを願っている¹。

2025 年 1 月 27 日
高山信毅

1. 加藤 満生 述, 小川原 弘士 記,
多変数大久保型微分方程式について
2. 寺杣友秀 述 永野中行 記,
Deligne-Mostow-Terada classification, K3 surfaces, Automorphic forms,
Jacobi-Thomae identity

¹本研究は JSPS 科研費 21K03270 の助成を受けたものです

多変数大久保型微分方程式について

加藤 満生 述*
小川原 弘士 記

9月4日 [1日目]

1 序論

多変数大久保型微分方程式について話します。まず、大久保型微分方程式は対角化可能な行列 T_0 と、定数成分の対角行列

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

により定義される以下の n 階常微分方程式のことを指します:

$$dY = B(x)dxY = -(xI_n - T_0)^{-1}B_\infty dxY \quad (1.1)$$

T_0 を対角行列とする方もいますが、ここでは B_∞ を対角化, normalize することにします。こういったものを大久保型微分方程式といいます。 B_∞ は、複素関数論での留数と同様に、 $x = \infty$ における留数行列を意味しています。実際、無限遠点 $x = \infty$ において $\xi = 1/x$ とおくと、

$$B(x)dx = (I_n - \xi T_0)^{-1}B_\infty \frac{d\xi}{\xi}$$

と変換され、 B_∞ は $B(x)$ の $x = \infty$ における留数行列

$$B_\infty = \text{Res}_{x=\infty}(B(x)dx) = \text{Res}_{\xi=0} \left((I_n - \xi T_0)^{-1}B_\infty \frac{d\xi}{\xi} \right)$$

となります。

今回は多変数を考えるので、 m 変数に大久保型微分方程式を拡張します。

$$dY = \left(\sum_{i=1}^m B^{(i)}(x_1, \dots, x_m) dx_i \right) Y \quad (1.2)$$

どの方向でもいいですが、ここでは x_m -方向には大久保型微分方程式となるものを構成します:

$$B^{(m)}(x_1, \dots, x_m) = -(x_m I_n - T_0(x_1, \dots, x_{m-1}))^{-1}B_\infty$$

*超幾何学校 2017(小樽) での講演

T_0 には変数 x_m が入らないものとし, B_∞ については常微分と同じく定数行列として考えます. この方程式が今回のテーマです.

Section 2 では Gauss の超幾何微分方程式や Appell F_1 微分方程式が多変数大久保型微分方程式の一部であることを示します. Section 3 では多変数大久保型微分方程式の一般論について話します. Section 4 では大久保型微分方程式とその平坦座標や, 一般化された WDVV 方程式などを話します. Section 5 では複素鏡映群をモノドロミー群にもつ微分方程式を構成します. この構成に色々試行錯誤しましたが, 多変数大久保型方程式や WDVV 方程式の概念を使うと, きれいに構成できることがわかり, それがこの研究をやる動機になっています. 時間があれば, Painleve VI の微分方程式との関連性についても話したいと思います.

2 Gauss の超幾何微分方程式と Appell F_1 微分方程式

この節では, Gauss の超幾何微分方程式や Appell F_1 微分方程式がたしかに多変数大久保型微分方程式となっていることを示します. この多変数大久保型微分方程式については, 琉球大学の真野先生や関口先生と一緒に研究していましたが, あまり classical な例というのを考えていませんでしたが, 佐々木先生からメールで Appell F_1 についてはどうなんでしょう? というのを聞かれて, 考えてみたところ結果が得られたのでここで話したいと思います.

2.1 Gauss の超幾何微分方程式

Gauss の超幾何微分方程式

$${}_2E_1(a, b, c; x) : x(1-x)y'' + (c - (1+a+b)x)y' - aby = 0 \quad (2.1)$$

を連立型にするため,

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ xy' \end{pmatrix}$$

を未知関数にした微分方程式になおします:

$$\begin{aligned} dY &= \begin{pmatrix} y' \\ xy'' + y' \end{pmatrix} dx = \left(-\left(\frac{c}{x} + \frac{1+a+b-c}{x-1}xy'\right) - \frac{ab}{x-1}y + y' \right) dx \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{ab}{x-1} & \frac{1-c}{x} - \frac{1+a+b-c}{x-1} \end{pmatrix} dx Y \\ &= \left\{ \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} - \frac{1}{x-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab & 1+a+b-c \end{pmatrix} \right\} dx Y \\ &= \left\{ \frac{1}{x} B_0 + \frac{1}{x-1} B_1 \right\} dx Y = B dx Y \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで $B dx$ の $x = \infty$ での留数行列は, $x = 1/\xi$ とおいて $\xi = 0$ の留数行列を求めればよいので, 計算すると

$$B_\infty = \text{Res}_{x=\infty}(B dx) = -B_0 - B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ ab & a+b \end{pmatrix}$$

となります. これは対角行列ではないので, このままでは大久保型にはなりません. したがって, B_∞ を対角化する必要があります. ところで,

$$T_0 = B_\infty B^{-1} + xI_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} (c-1 \quad 1)$$

とおくと, $B = -(xI_2 - T_0)^{-1}B_\infty$ となり, 方程式

$$dY = (Bdx)Y = \{-(xI_2 - T_0)^{-1}B_\infty dx\}Y$$

を得ます. B_∞ を対角化するため, $a \neq b$ として行列 $R = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ により

$$Y \rightarrow RY, \quad T_0 \rightarrow RT_0R^{-1}, \quad B_i \rightarrow RB_iR^{-1}, \quad B_\infty \rightarrow RB_\inftyR^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

と置き換えると,

$$Y = \begin{pmatrix} xy' + ay \\ xy' + by \end{pmatrix}$$

に対する大久保型微分方程式

$$dY = (Bdx)Y = \{-(xI_2 - T_0)^{-1}B_\infty dx\}Y, \quad (2.3)$$

$$T_0 = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b+c-1 & a-c+1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

を得ます. (ただし, 上記の $Y \rightarrow RY$ に置き換えることによる微分方程式の変換のように, 正則な定数行列を左からかけて互いに変換される微分方程式を互いに同値ということにします.) Gauss の超幾何微分方程式が (同値を除いて) 大久保型微分方程式 (1.1) の形をしていることが確かめられました. ここで重要なのは Y の 1 行目と 2 行目の成分が a と b に関して対称な形に書かれていることです.

(聴講者) この例のように大久保型方程式に書き直すと, 必ず Y の対称性や T_0 がランク 1 になるといった特徴が現れるのですか?

今回はたまたまそうなったというだけで, m 変数のとき必ずこのようなランク 1 の形になるとは限りません. この例は T_0 が定数行列になるということを強調したかったわけです.

2.2 Appell F_1 微分方程式

次に, Appell の超幾何関数 $y = F_1(a, b, b', c; x_1, x_2)$ が満たす微分方程式 $E_1(a, b, b', c; x_1, x_2)$ を大久保型に書き直します. $E_1(a, b, b', c; x_1, x_2)$ は Pfaff 型で表した次の方程式が良く知られています: (例えば, Kimura, T: Hypergeometric functions of two variables, Tokyo Univ.

1973)

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ x_1 \partial_{x_1} y \\ x_2 \partial_{x_2} y \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$dY = (Ad \log x_1 + Bd \log x_2 + Cd \log(x_1 - 1) + Dd \log(x_2 - 1) + Ed \log(x_1 - x_2)) Y, \quad (2.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - c + b' & 0 \\ 0 & -b' & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 - c + b \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -ab & c - a - b - 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab' & -b' & c - a - b' - 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b' & b \\ 0 & b' & -b \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

この微分方程式を $dY = BY = (B^{(2)}dx_2 + B^{(1)}dx_1)Y$ と置き, 変数 x_1 と x_2 についてまとめると,

$$B^{(1)} = \frac{A}{x_1} + \frac{C}{x_1 - 1} + \frac{E}{x_1 - x_2}, \quad B^{(2)} = \frac{B}{x_2} + \frac{D}{x_2 - 1} + \frac{E}{x_2 - x_1} \quad (2.11)$$

となります. B_∞ は留数行列なので, 先ほどと同様に

$$B_\infty = -B - D - E = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & -1 \\ 0 & b' & 0 \\ \mathbf{a}b' & 0 & \mathbf{a} + b' \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

となります. ここで, 太字で表した箇所は Gauss の超幾何微分方程式の場合における B_∞ に対応しています. また, B_∞ の 2 列目については対角化されている, と見ることができます. 従って, B_∞ を対角化するための行列は

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b' & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{a - b'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a - b' & 0 \\ -b' & 0 & a \end{pmatrix}$$

を取ることができます. もちろん, 今回は Appell の F_1 だったからたまたま B_∞ が定数行列で対角化できたわけで, 一般の大久保型では定数行列で対角化できるわけではありません.

$$Y \rightarrow RY, \quad B^{(1)} \rightarrow RB^{(1)}R^{-1}, \quad B^{(2)} \rightarrow RB^{(2)}R^{-1},$$

と置き換えると,

$$Y = (x_2 \partial_{x_2} y + ay \quad x_1 \partial_{x_1} y \quad x_2 \partial_{x_2} y + b'y)^t$$

に対する微分方程式

$$dY = (B^{(2)}(x_1, x_2)dx_2 + B^{(1)}(x_1, x_2)dx_1) Y, \quad (2.13)$$

$$B^{(2)} = -(x_2 I_2 - T_0(x_1))^{-1} B_\infty, \quad (2.14)$$

$$T_0 = \frac{1}{a-b'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b' + c - 1 & a - b' & a - c + 1 \end{pmatrix} \\ + \frac{x_1}{a-b'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & -a + b' & b \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} b' & & \\ & b' & \\ & & a \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$B^{(1)} = \frac{RAR^{-1}}{x_1} + \frac{RCR^{-1}}{x_1 - 1} + \frac{RER^{-1}}{x_1 - x_2} \quad (2.17)$$

を得ます. T_0 は変数 x_2 を含まず, この方程式は x_2 方向に大久保型となる 2 変数大久保型方程式になっています. 後で使うため, 以下を用意しておきます:

$$RAR^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a - b' & 0 \\ 0 & b' - c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$RCR^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & a + b - c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$RER^{-1} = \frac{1}{a-b'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a - b' & -b \end{pmatrix} B_\infty \quad (2.20)$$

というわけで, 上記のように Gauss の超幾何微分方程式や Appell F_1 微分方程式を大久保型方程式に書き直せることが分かりました.

(聴講者) Lauricella の F_D は大久保型に書き直すことは可能ですか

まだ計算していないです. ようやく Appell F_1 について計算できたところです. 今までの計算の方針を変えなければ出来て当然, と思いますが, まだやってないです¹.

(聴講者) 大久保型にならない例はあるんでしょうか

Appell F_2 は F_1 と同じ singular locus を持ちますが, rank は 4 となるため, 直接的な書き換えはできません.

3 多変数大久保型微分方程式の一般論

一般論と書いてますが, 全て証明は constructive なもので, 存在証明みたいなものはありません. こういう風に計算すればできる, という形になっています.

¹この講義の後, 計算ができて, M.Kato, Okubo type differential equations derived from hypergeometric functions F_D , Kyushu Journal of Mathematics 95 (2021), 1-21 に結果が掲載されている.
<https://doi.org/10.2206/kyushujm.75.1>

以降, 簡単のために $(x) = (x_1, \dots, x_m)$, $(x') = (x_1, \dots, x_{m-1})$ と略記する. また, 行列 A の (p, q) 成分を $A_{p,q}$ と表記する. x_m 方向に大久保型で微分可能な rank n の微分方程式

$$dY = \left(\sum_{i=1}^m B^{(i)}(x) dx_i \right) Y, \quad (3.1)$$

$$B^{(m)} = -(x_m I_n - T_0(x'))^{-1} B_\infty, \quad (3.2)$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$h(x) = \det(x_m I_n - T_0(x')) = \prod_{i=1}^n (x_m - z_i(x')) \quad (3.4)$$

を考えます. $h(x', x_m)$ は x_m について n 次 monic な多項式で, 特異点の位置を表します. $h(x', x_m)$ の判別式 $\delta_h(x') = \prod_{i < j} (z_i(x') - z_j(x'))^2$ は恒等的には 0 でない (すなわち, generic な n 根を持つ) と仮定します. このとき $T_0(x')$ は対角化可能となります. 対角行列 B_∞ は定数行列で, 次の仮定をおきます:

$$\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \quad \lambda_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.5)$$

$\lambda_i = \lambda_j$ となる場合は仮定を満たします. たとえば Appell の F_1 では $B_\infty = \begin{pmatrix} b' & & \\ & b' & \\ & & a \end{pmatrix}$

でしたが, 1 行目と 2 行目の固有値は同じ値となっています. 等式 (3.2) より $h(x)B^{(m)}$ の各成分は x_m の高々 $n-1$ 次の多項式となるので, $B^{(m)}$ は部分分数分解することで

$$B^{(m)}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{B_j^{(m)}(x')}{x_m - z_j(x')} \quad (3.6)$$

の形で表せます. 実際, $T_0(x')$ を対角化して

$$T_0(x') = P(x') \begin{pmatrix} z_1(x') & & \\ & \ddots & \\ & & z_n(x') \end{pmatrix} P(x')^{-1}$$

とし, (3.2) に代入します. 行列 E_j を

$$(E_j)_{p,q} := \begin{cases} 1 & (p = q = j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義すると,

$$\begin{aligned} B^{(m)} &= -P(x') \begin{pmatrix} x_m - z_1(x') & & \\ & \ddots & \\ & & x_m - z_n(x') \end{pmatrix}^{-1} P(x')^{-1} B_\infty \\ &= -P(x') \left(\sum_{j=1}^n \frac{E_j}{x_m - z_j(x')} \right) P(x')^{-1} B_\infty \end{aligned}$$

と計算されます. 部分分数分解の係数を比較すると,

$$B_j^{(m)}(x') = -P(x')E_jP(x')^{-1}B_\infty \quad (3.7)$$

より

$$\sum_{j=1}^n B_j^{(m)}(x') = -B_\infty, \quad \text{rank}(B_j^{(m)}) = 1. \quad (3.8)$$

が成り立ちます. ここで, 今後

$$r_j = \text{tr}(B_j^{(m)})$$

とおき, $r_j \notin \mathbb{Z}$ を仮定します.

他の $B^{(1)}, \dots, B^{(m-1)}$ については次の補題が成り立ちます:

Lemma 3.1. $1 \leq i \leq m-1$ に対し $h(x)B^{(i)}(x)$ の各成分が x_m に関して多項式で, 方程式 (3.1), (3.2) が可積分と仮定する. このとき次が成り立つ:

1. x' の正則関数を成分とする $n \times n$ 行列 $\tilde{B}^{(i)}(x')$ ($1 \leq i \leq m-1$) と $\mathcal{E}(x')$ が存在して,

$$B^{(i)}(x) = -(x_m I_n - T_0(x'))^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x') B_\infty + \frac{\partial \mathcal{E}(x')}{\partial x_i} \mathcal{E}(x')^{-1}, \quad (3.9)$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \mathcal{E}_{i,j}(x') = 0 \quad (3.10)$$

を満たす.

2.

$$T_0(x') = P(x') \begin{pmatrix} z_1(x') & & \\ & \ddots & \\ & & z_n(x') \end{pmatrix} P(x')^{-1}$$

をみたす正則行列 $P(x')$ に対し

$$\tilde{B}^{(i)}(x') = -P(x') \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1(x')}{\partial x_i} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial z_n(x')}{\partial x_i} \end{pmatrix} P(x')^{-1}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (3.11)$$

となる. 特に $P(x')$ で同時対角化されているため, $T_0(x'), \tilde{B}^{(1)}(x'), \dots, \tilde{B}^{(m-1)}(x')$ は可換である.

Proof. 1. の証明.

- $h(x)B^{(m)}(x)$ は

$$h(x)B^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{m,k}(x') x_m^k, \quad C_{m,n-1} = -B_\infty$$

と x_m の多項式に展開されます. ここで, $i \leq m-1$ に対しては $h(x)B^{(i)}(x)$ を

$$h(x)B^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{k_i} C_{i,k}(x') x_m^k$$

と展開したとき,

$$k_i > n \Rightarrow C_{i,k_i} = O$$

となることを示します. 実際, 可積分条件を書き下すと,

$$\frac{\partial B^{(i)}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial B^{(j)}(x)}{\partial x_i} + [B^{(i)}(x), B^{(j)}(x)] = 0$$

となります. この式に $h(x)^2$ をかけると,

$$h(x)^2 \frac{\partial B^{(i)}(x)}{\partial x_j} - h(x)^2 \frac{\partial B^{(j)}(x)}{\partial x_i} + [h(x)B^{(i)}(x), h(x)B^{(j)}(x)] = 0, \quad (3.12)$$

さらに

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (h(x)^2 B^{(i)}(x))}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial h(x)}{\partial x_j} h(x) B^{(i)}(x) - \frac{\partial (h(x)^2 B^{(j)}(x))}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} h(x) B^{(j)}(x) \\ & + [h(x)B^{(i)}(x), h(x)B^{(j)}(x)] = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

という式に変形します. $j = m$ として x_m の最高次 $x_m^{k_i+n-1}$ の係数を見ると,

$$(k_i + n)C_{i,k_i}(x') - 2nC_{i,k_i}(x') - [C_{i,k_i}(x'), B_\infty] = 0 \quad (3.14)$$

を得ます. ここで $k_i > n$ とすると, $(k_i - n)C_{i,k_i}(x') \neq O$ で, B_∞ の条件 $\lambda_p - \lambda_q \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($p \neq q$) より $C_{i,k_i}(x') = O$ となります.

- 以下, $C_{i,n}(x') = B_\epsilon^{(i)}(x')$ と書くこととします. $j = m$ として (3.13) の x_m^{2n-1} の係数を見ると

$$[B_\epsilon^{(i)}(x'), B_\infty] = O$$

となります. 従って

$$\lambda_p \neq \lambda_q \Rightarrow B_\epsilon^{(i)}(x')_{p,q} = 0, \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (3.15)$$

を得る.

- $1 \leq i, j \leq m-1$ に対して, (3.13) の x_m^{2n} の係数 (x_m に関しては微分されていない) を取ると

$$\frac{\partial B_\epsilon^{(i)}(x')}{\partial x_j} - \frac{\partial B_\epsilon^{(j)}(x')}{\partial x_i} + [B_\epsilon^{(i)}(x'), B_\epsilon^{(j)}(x')] = O$$

を得ます. これは微分方程式

$$d\mathcal{E}(x') = \left(\sum_{i=1}^{m-1} B_\epsilon^{(i)}(x') dx_i \right) \mathcal{E}(x'), \quad (3.16)$$

すなわち

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x')}{\partial x_i} \mathcal{E}(x')^{-1} = B_\epsilon^{(i)}(x'), \quad 1 \leq i \leq m$$

の可積分条件となります. したがって方程式 (3.16) の解となる行列 $\mathcal{E}(x')$ が存在します. (3.15) より,

$$\lambda_p \neq \lambda_q \Rightarrow \mathcal{E}(x')_{(p,q)} = 0 \quad (3.17)$$

ととることが出来ます.

2. の証明.

上記の 1. の証明から,

$$\tilde{B}^{(i)}(x) = -(x_m I_n - T_0(x')) (B^{(i)}(x) - B_\epsilon^{(i)}(x')) B_\infty^{-1}$$

とおきます. このとき, 計算は省略しますが,

$$P(x')^{-1} T_0(x') P(x') = \text{diag}(z_1(x'), \dots, z_n(x'))$$

を満たす行列に対し

$$P(x')^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x) P(x') = -\text{diag}\left(\frac{\partial z_1(x')}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial z_n(x')}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i \leq m-1$$

が成り立ちます. 従って特に $\tilde{B}^{(i)}(x)$ は x_m に依存しない x' の関数 $\tilde{B}^{(i)}(x')$ となります. $\square$

方程式 (3.1) は Lemma 3.1 の (3.9) により

$$Y \rightarrow \mathcal{E}^{-1} Y, \quad T_0 \rightarrow \mathcal{E}^{-1} T_0 \mathcal{E}, \quad \tilde{B}^{(i)} \rightarrow \mathcal{E}^{-1} \tilde{B}^{(i)} \mathcal{E}$$

と置き換えると, B_∞ は不変で, $\mathcal{E}$ -term をもたない ($\mathcal{E} = I_n$ の) 方程式

$$dY = \left(\sum_{i=1}^m B^{(i)}(x) dx_i \right) Y, \quad (3.18)$$

$$B^{(i)} = -(x_m I_n - T_0(x'))^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x') B_\infty, \quad \tilde{B}^{(m)}(x') = I_n \quad (3.19)$$

という形の方程式に変換されます. この方程式 (3.18), (3.19) を (標準形) 多変数大久保型微分方程式と呼ぶことにします.

(聴講者) Gauss の超幾何微分方程式の場合における $\mathcal{E}$ はどのような形になっていますか

Gauss の場合は何もしなくても $\mathcal{E}$ -term をもたないことが分かります. Appell F_1 は明日 $\mathcal{E}$ -term があることを紹介したいと思います.

9月5日 [2日目]

Theorem 3.1. 多変数大久保型微分方程式 (3.18), (3.19) に対する可積分条件は次と同値:

$$\left[T_0(x'), \tilde{B}^{(i)}(x') \right] = O, \quad \left[\tilde{B}^{(i)}(x'), \tilde{B}^{(j)}(x') \right] = O, \quad 1 \leq i, j \leq m-1, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial T_0(x')}{\partial x_i} + \tilde{B}^{(i)}(x') + \left[\tilde{B}^{(i)}(x'), B_\infty \right] = O, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}^{(i)}(x')}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{B}^{(j)}(x')}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, j \leq m-1. \quad (3.22)$$

Remark 3.1. B_∞ に対する条件 (3.5) より (3.22) は (3.21) から導かれることがわかる.

Example (Appell F_1 微分方程式). Appell F_1 微分方程式は前の (2.13) の形のように, x_2 -方向に大久保型微分方程式にすることが出来ました. Appell F_1 微分方程式に対し行列 $\mathcal{E}(x_1)$ を求めます. 補題 3.1 より $B_\epsilon^{(1)} = (\partial_{x_1} \mathcal{E}(x_1)) \mathcal{E}(x_1)^{-1}$ は $h(x) B^{(1)}(x)$ を x_2 に関し

て展開したときの x_2^3 の係数です. Appell F_1 微分方程式を大久保型に記述し直したときの式 (2.17) から

$$h(x)B^{(1)}(x) = \frac{h(x)RAR^{-1}}{x_1} + \frac{h(x)RCR^{-1}}{x_1 - 1} + \frac{h(x)RER^{-1}}{x_2 - x_1} \quad (3.23)$$

となります. ここで $h(x) = x_2(x_2 - 1)(x_2 - x_1)$ です. $RAR^{-1}, RCR^{-1}, RER^{-1}$ は定数行列のため, (3.23) での $h(x)B^{(1)}(x)$ の x_2^3 における係数は第1項と第2項から得られるので,

$$B_\epsilon^{(1)} = \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} 0 & a - b' & 0 \\ 0 & b' - c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{x_1 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b & -a - b + c - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

となります. (2.16) において $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ という B_∞ の形になっていますので, (3.10) より

$$\mathcal{E}(x_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(x_1) & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

というブロック対角行列となり, 2×2 行列 $\mathcal{E}_1(x_1)$ は

$$\frac{d\mathcal{E}_1(x_1)}{dx_1} \mathcal{E}_1(x_1)^{-1} = \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} 0 & a - b' \\ 0 & 1 - c + b' \end{pmatrix} - \frac{1}{x_1 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a + b + 1 - c \end{pmatrix}$$

を満たします. ここで, Gauss の超幾何微分方程式は

$$dY = \left\{ \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 - c \end{pmatrix} - \frac{1}{x - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab & 1 + a + b - c \end{pmatrix} \right\} Y$$

でした. $\mathcal{E}_1(x_1)$ の微分方程式とほとんど同じですが, Gauss の超幾何微分方程式として $\mathcal{E}_1(x_1)$ を記述するために, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a - b' \end{pmatrix}$ とおきます. このとき

$$\begin{aligned} \frac{d(Q\mathcal{E}_1)}{dx_1} (Q\mathcal{E}_1)^{-1} &= \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 - (c - b') \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{x_1 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (a - b')b & 1 + (a - b') + b - (c - b') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります. 従って Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1(a - b', b, c - b'; x_1)$ の一次独立な任意の解 $y_1(x_1), y_2(x_1)$ により $Q\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 \frac{d}{dx_1} y_1 & x_1 \frac{d}{dx_1} y_2 \end{pmatrix}$ と表され, $\mathcal{E}_1(x_1)$ は以下の超幾何解を用いて記述されます:

$$\mathcal{E}_1(x_1) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{x_1}{a - b'} \frac{d}{dx_1} y_1 & \frac{x_1}{a - b'} \frac{d}{dx_1} y_2 \end{pmatrix}$$

予告では, Painlevé VI 方程式の解について話つもりでしたが, 時間の都合上省略します. Appell F_1 微分方程式から得られる多変数大久保型微分方程式を用いて Painlevé VI 方程式の超幾何解が構成できます.

4 斉次大久保型微分方程式とその平坦座標, 一般化された WDVV 方程式

これから考える関数は weight を入れて全て斉次関数となるように設定します. 以降の話は n 変数の n 階の微分方程式, つまり $m = n$ とします. なぜなら, m を大きくして沢山

の変数を用意しても, 結局は (3.4) のように x_m について n 次多項式になっているため, n 変数であれば十分であるためです.

$V_1 = \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_{x_i}$ を Euler vector field とし, weight を

$$w_i > 0, \quad w_n = 1 \quad (4.1)$$

と設定します. また多変数大久保型微分方程式およびその解もすべて weighted homogeneous と仮定します. すなわち, 多変数大久保型微分方程式

$$\begin{aligned} dY &= \left(\sum_{i=1}^n B^{(i)}(x) dx_i \right) Y = T(x)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{B}^{(i)}(x') dx_i \right) B_\infty Y, \\ T(x) &= -x_n I_n + T_0(x'), \quad \tilde{B}^{(n)} = I_n \end{aligned}$$

において, $Y, B^{(i)}, T$ の各成分が weighted homogeneous とします.

Lemma 4.1.

1.

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \tilde{B}^{(i)} = -T, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i B^{(i)} = -B_\infty, \quad (4.3)$$

2.

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ならば $V_1 Y = -B_\infty Y$, すなわち

$$w(y_i) = -\lambda_i.$$

3.

$$w(B_{i,j}^{(k)}) = -w(x_k) - \lambda_i + \lambda_j, \quad w(T_{i,j}) = 1 - \lambda_i + \lambda_j, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Proof. 1. の証明. T の成分は weighted homogeneous なので, 式 (3.11) より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i x_i \tilde{B}^{(i)} &= -P(x') \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial z_n}{\partial x_i} \end{pmatrix} \right) P(x')^{-1} \\ &= -P(x') \left(V_1 \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} \right) P(x')^{-1} \\ &= -P(x') \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} P(x')^{-1} = -T(x), \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i B^{(i)} &= T^{-1} \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \tilde{B}^{(i)} \right) B_\infty = -B_\infty. \end{aligned}$$

2. の証明. 大久保型微分方程式 $\frac{\partial Y}{\partial x_k} = B^{(k)}Y$ より,

$$V_1 Y = \sum_{i=1}^n w_i x_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i B^{(i)} \right) Y = -B_\infty Y.$$

従って $V_1(y_i) = -\lambda_i y_i$, $1 \leq i \leq n$ を得る.

3. は 2. から従う. □

このように, weighted homogeneous と仮定すると, B_∞ から $Y, B^{(i)}, T$ の成分の weight が決定されます.

(3.22) より, $\partial_{x_i} C(x) = \tilde{B}^{(i)}(x')$, $1 \leq i \leq n$ を満たす weighted homogeneous な行列 $C(x)$ は一意に求められます. $\partial_{x_n} C(x) = I_n$ より $C(x) = x_n I_n + C'(x')$ という形に解けます. 更に 補題 4.1 の 1., 3. より

$$V_1 C(x) = -T(x), \quad w(C_{i,j}(x)) = 1 - \lambda_i + \lambda_j, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (4.4)$$

となります. 従って多変数大久保型微分方程式は行列 $C(x)$ により与えられ,

$$\begin{aligned} dY &= \left(\sum_{i=1}^n T(x)^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x') dx_i \right) B_\infty Y, \\ &= -(V_1 C(x))^{-1} (dC(x)) B_\infty Y \end{aligned}$$

と書いてしまいます. このとき, 積分可能条件は次のようになります:

$$\left[\frac{\partial C(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial C(x)}{\partial x_j} \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

以上のことをまとめると, 次の定理として記述されます:

Theorem 4.1. *weighted homogeneous* な多変数大久保型微分方程式は $B_\infty = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, および $w(C_{i,j}(x)) = 1 - \lambda_i + \lambda_j$ となるような各成分が *weighted homogeneous* な行列 $C(x) = x_n I_n + C'(x')$ によって

$$dY = -(V_1 C(x))^{-1} (dC(x)) B_\infty Y \quad (4.5)$$

と決定される. この方程式の積分可能条件は

$$\left[\frac{\partial C(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial C(x)}{\partial x_j} \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (4.6)$$

で与えられる.

このような行列 $C(x)$ を取れば多変数大久保型微分方程式をつくることができますが, 定理の条件に合うような $C(x)$ を実際に見つけることは大変です. 何行目でもいいですが, 例えば行列 $C(x)$ の第 n 行が

$$\det \left(\frac{\partial(C_{n,1}(x), \dots, C_{n,n}(x))}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right) \neq 0 \quad (4.7)$$

となるならば,

$$t_1 = C_{n,1}(x), t_2 = C_{n,2}(x), \dots, t_n = C_{n,n}(x)$$

を新たな座標関数として取ります. C を x の関数から t の関数としてみると,

$$C = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}, \quad C = C(t)$$

となります. この座標 $(t_1, \dots, t_n)$ を多変数大久保型微分方程式 (4.5) に関しての平坦座標 (flat coordinate) と呼びます.

(聴講者) この定義における平坦座標は有名な方の平坦座標と同じですか?

そうです. 斎藤恭司先生の実鏡映群の理論で構成した平坦座標と一致して, なおかつ, この大久保型微分方程式は実領域に制限する必要はないので複素鏡映群の場合でも平坦座標が定義できる, というわけです.

$$C(x) = x_n I_n + C'(x)$$

より,

$$t_j = \begin{cases} t'_j(x'), & (j < n) \\ x_n + t'_n(x'), & (j = n) \end{cases}$$

の形をしています. この平坦座標のもとでは積分可能条件

$$\left[\frac{\partial C(t)}{\partial t_i}, \frac{\partial C(t)}{\partial t_j} \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

の第 n 行を見ると

$$\frac{\partial C_{i,k}(t)}{\partial t_j} = \frac{\partial C_{j,k}(t)}{\partial t_i}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n$$

という形になっています. したがって, C は積分することができます.

$$\frac{\partial g_k(t)}{\partial t_i} = C_{i,k}(t), \quad 1 \leq i, k \leq n, \quad (4.8)$$

すなわち,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial t_n} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

となり, かつ

$$g_k(t) = \begin{cases} t_k t_n + g'_k(t'), & (k < n) \\ \frac{1}{2} t_n^2 + g'_n(t'), & (k = n) \end{cases} \quad (4.9)$$

を満たす weighted homogeneous な関数 $g_k(t)$ が一意に求まります. ベクトル $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$ をこの多変数大久保型微分方程式の **potential vector** と呼びます. この potential vector $\vec{g}$ は行列 $C(t)$ で書かれ, 逆に $C(t)$ は potential vector $(g_1, \dots, g_n)$ により与えられます. したがって可積分条件 (4.6) も $g_k(t)$ に対する関係式で表すことができます. 実際,

$$\left[\frac{\partial C(t)}{\partial t_i}, \frac{\partial C(t)}{\partial t_j} \right] = 0$$

の (p, q) 成分は

$$\sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial^2 g_r}{\partial t_i \partial t_p} \frac{\partial^2 g_q}{\partial t_j \partial t_r} - \frac{\partial^2 g_r}{\partial t_j \partial t_p} \frac{\partial^2 g_q}{\partial t_i \partial t_r} \right) = 0 \quad (4.10)$$

となります.. この方程式 (4.10) を (4.9) を満たす斉次関数 $g_k(t)$ に対する一般化された **WDVV** 方程式という. 一般化された, というのは質問にあったように斉藤先生の実鏡映群の理論で WDVV 方程式がありましたが, 平坦座標が複素の場合に一般化されているので, ここでも一般化された WDVV 方程式と名付けることにします.

5 (有限かつ既約な) 複素鏡映群をモノドロミー群にもつ大久保型微分方程式

G を n 次元ベクトル空間 $U_n = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_i \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}_{(u_1, \dots, u_n)}^n$ に作用する有限既約複素鏡映群 $G \curvearrowright U_n$ とし, G による orbit space を

$$X = U_n/G = \{(x_1, \dots, x_n)\}$$

とかくと, この X も n 次元ベクトル空間になります. G には n 個の斉次 G -不変多項式 $F_i(u)$, $1 \leq i \leq n$ があり (不変式の基本形), 任意の G -不変多項式 $F(u)$ は $F_i(u)$ の多項式として表されます. x_i 達は U_n 上の関数ですが G 上不変なので, $x_1, \dots, x_n$ は不変式で書くことができます. F_i の次数を d_i とすると, $\{d_1, \dots, d_n\}$ は G によって決まります.

$$d_1 \leq \dots \leq d_n$$

とすることとします. また $w_i := d_i/d_n$ とし, $w(x_i) := w_i$ で weight を定義します. このとき $w(u_i) = 1/d_n$, $1 \leq i \leq n$ です.

以下 F_i を固定し, X 上の座標関数として $x_i = F_i(u)$, $1 \leq i \leq n$ をとります. G -quotient map $\pi_G : U_n \rightarrow X$ を

$$\pi_G(u) := x = (x_1, \dots, x_n), \quad \begin{array}{c} U_n \\ \downarrow |G|:1 \\ X \end{array}$$

で定義します. 定義から, この π_G は G の元の個数だけ branch があります. $\pi_G(u)$ の branch locus $D \subset X$ の (reduced) defining function $h(x)$ を G の判別式と呼びます. $h(x)$ は上の weight に関し斉次多項式となります.

以下 D を特異点集合とする大久保型可積分系で, G をそのモノドロミー群にもち, 行列 $T(x), C(x)$ の各成分が x の斉次多項式になるような大久保型微分方程式を構成していきます. そのためには, $h(x)$ が x_n につき n 次多項式である必要があります. そこで, 次の (少し強い) 仮定を置きます:

G の判別式 $h(x)$ は x_n に関して monic な n 次多項式である.

このような仮定を満たす群を **well-generated** な群ということにします.

Lemma 5.1. 次の条件を満たす多項式係数の斉次 vector field V_i , $1 \leq i \leq n$ が存在する.

- 1) $V_1 = \sum_{k=1}^n w_k x_k \partial_{x_k} : \text{Euler vector field,}$
- 2) $V_i = x_n \partial_{x_{n-i+1}} + \sum_{k=1}^n v_{i,k}(x') \partial_{x_k}$, $(v_{i,k}(x'))$ は x' の多項式 従って $w(V_i) = 1 - w_{n-i+1}$,
- 3) V_i は D に沿った *logarithmic vector field*, すなわち $(V_i h(x))/h(x)$ は多項式となる.

行列 $M_V(x), M_{\hat{V}}(u)$ を

$$\begin{pmatrix} V_n \\ V_{n-1} \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} = M_V(x) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_n \\ V_{n-1} \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} = M_{\hat{V}}(u) \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \partial_{u_2} \\ \vdots \\ \partial_{u_n} \end{pmatrix}$$

により定義します. ここで, Lemma 5.1 より $M_V(x) = x_n I_n + (x' \text{の多項式})$ となります. 定義より

$$M_{\hat{V}}(u) = M_V(x) \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right)^{-1}$$

となります. $y(u)$ を $u_1, \dots, u_n$ の斉次一次関数とすると, 偏微分したのち外微分をかける
と O ですから,

$$\begin{aligned} O &= d \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_n} \end{pmatrix} y(u) = dM_{\hat{V}}^{-1} \begin{pmatrix} V_n \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} y(u) \quad (\hat{Y} = \begin{pmatrix} V_n \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} y(u) \text{ とおく}) \\ &= M_{\hat{V}}^{-1} d\hat{Y} - M_{\hat{V}}^{-1} (dM_{\hat{V}}) M_{\hat{V}}^{-1} \hat{Y} \quad (\text{行列の積の微分}) \end{aligned}$$

となるので,

$$d\hat{Y} = (dM_{\hat{V}}) M_{\hat{V}}^{-1} \hat{Y} \tag{5.1}$$

となって, めでたく微分方程式ができました. ただしこのままでは大久保型微分方程式ではなくて, 無限遠点で対角行列になってなければいけません. つまり, $x_n = \infty$ での留数行列 B_∞ を対角化する必要があります. $R(0) = I_n$ をみたすある斉次上三角行列

$$R(x') = \begin{pmatrix} 1 & (x' \text{の関数}) & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

によって B_∞ を対角化することが出来て, $Y = R\hat{Y}$ に対する微分方程式

$$dY = d(R\hat{Y}) = \left(R(dM_{\hat{V}}) M_{\hat{V}}^{-1} + dR \right) R^{-1} Y \tag{5.2}$$

は斉次大久保型微分方程式になります. また,

$$w(Y_i) = w(\hat{Y}_i) = w(V_{n-i+1}) + w(y(u)) = 1 - w_i + \frac{1}{d_n}$$

より,

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i = w_i - 1 - \frac{1}{d_i}$$

となります. $\hat{Y}, Y$ の第 n 成分を $\hat{Y}_n, Y_n$ とすると,

$$\hat{Y}_n = Y_n = V_1 y(u) = \frac{1}{d_n} y(u)$$

であるので, (5.1), (5.2) のモノドロミー群は G になり, 目的の大久保型微分方程式が得られたわけです.

以前, この有限既約複素鏡映群をモノドロミー群にもつ大久保型微分方程式を原岡先生と一緒に作ったときは大変な計算をして rank 3 のときに成功したと書いたわけですが, この構成方法なら rank 4 でも 5 でも計算機の性能が良ければ計算できるわけです.

(聴講者) potential vector が出てきましたが, primitive form などと関係ありますか

primitive form とは直接関係ないと思います. 単に potential vector の偏微分で大久保型微分方程式を与える行列 $C(t)$ が書けるので, potential と名付けました.

(聴講者) 斉藤先生の話とこの話はどのようにつながっていますか

斉藤先生が大久保型方程式を作ったわけではなくて, 真野先生の話では orbit space の上に bilinear form があって, それを大久保型方程式というのだそうですが, 今回の場合は大久保型微分方程式から bilinear form がすぐ作れて, 実鏡映群の場合に一致するというわけです. もちろん実鏡映群は複素鏡映群の一部なわけですから, 複素鏡映群にたいして大久保型微分方程式を作れば, 実の場合でも大久保型方程式を作れているわけです.

(聴講者) Shephard-Todd のリストのどこまで作れたのですか

私の計算機では rank 3 と rank 4 の途中です. rank 6 など恐ろしく高性能な計算機を使えばできるかもしれません.

(聴講者) 計算のネックはどこにあるんですか. たとえば, 多項式行列の逆行列とかの計算が大変になりますか.

途中に出てきた行列の積とか, $x_1, \dots, x_n$ の有理式ではなくて $u_1, \dots, u_n$ の有理式で出発してますから, u の有理式が G 不変だから x で書ける, という風にして

(聴講者) 消去法の計算が激しくなるわけですね

ええ. x に直す前は u の巨大な有理式になるわけです.

(聴講者) 消去法をもうちょっと考える必要があるんですね

G 不変なものを $x_1, \dots, x_n$ で書くということは, 対称式を基本対称式で書くことと同じようなことです. 対称式が基本対称式で書けるか, という問題は誰も難しいとは言わないですが, 具体的に書き下せと言われたら大変というだけです.

(聴講者) 群の不変式や生成系 $x_1, \dots, x_n$ の取り方で標準形の大久保型微分方程式が変わってきますか

方程式を平坦座標に直したら生成系によらず同じ大久保型微分方程式になります.

9月6日 [演習 (モノドロミーについて)]

有限既約複素鏡映群 G の作用を $G \curvearrowright U_n = \mathbb{C}_{(u_1, \dots, u_n)}^n$ とすると, $g(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n)M_g$ と $n \times n$ 行列 M_g で表現されます. ここで, G -quotient map $\pi : U_n \rightarrow X = U_n/G$ は $|G|:1$ でした.

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} V_n y(u) \\ \vdots \\ V_1 y(u) \end{pmatrix}$$

と置きます. ここで,

$$V_1 = \sum_{i=1}^n w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad V_1(u_i) = \frac{1}{d_n} u_i.$$

したがって, $V_1 y(u) = cy(u)$ となります. 今, $\hat{Y} \rightarrow R(x')\hat{Y} = Y$ とおくと,

$$R(x') = \begin{pmatrix} 1 & (x' \text{の多項式}) \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{の形のため} \quad Y = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ cy(u) \end{pmatrix}$$

と一番下の成分は変わりません.

ここで Y についての大久保型微分方程式 $dY = BY = (\sum_i B^{(i)} dx_i) Y$ において, 基本解系 Φ を

$$\Phi = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * \\ cu_1 & cu_2 & \cdots & cu_n \end{pmatrix},$$

と取ります. 基本解 Φ を path γ に沿って解析接続すると, $\gamma_* \Phi = \Phi M_\gamma$ となりますが, 一番下の行をみると

$$\gamma_*(cu_1, \dots, cu_n) = cg(u_1, \dots, u_n) = c(u_1, \dots, u_n)M_g$$

となっています. したがって

$$(u_1, \dots, u_n)M_\gamma = (u_1, \dots, u_n)M_g$$

となり, $M_\gamma = M_g$. したがって, 確かに与えられた G が大久保型微分方程式のモノドロミー群になっています.

Deligne-Mostow-Terada classification, K3 surfaces, Automorphic forms, Jacobi-Thomae identity 超幾何学校 2022.9.18

寺杣友秀 述 (永野中行 記)

はじめに

今日これから話す話は Deligne-Mostow 及び寺田の仕事に基づきます. 彼らは Appell-Lauricella の超幾何関数が周期写像 (period map) を与えるような代数曲線で, 周期写像の像が超球とほとんど同型になるための十分条件を一つ与えました. 別に Mostow はもう少し条件を緩めたものを考えています. 詳しくは論文を見てください. 証明はすごく読みにくいので, 時間があればその解説をしたいのですが, 残念ながら今日はその証明は取り上げません.

今日は, この period map からテータ関数, 或いはテータ零値 (theta constant) を使って代数曲線を復元することを見ます. つまり, inverse period map を theta constant で書くという話をします. このようなことは幾つかの場合ではかなり具体的に書ききれています. しかし, この講義のために準備をして気づいたことですが, 具体的に theta constant で書いている場合は一部であって, まだ具体的表示が与えられていないものが複数ある事に気付きました. やるべき問題はたくさんあります. 恐らく何とか解決できる問題だと思っています. しかし, どれくらい簡単に解決される問題かはやってみないとわからないかもしれません. それぞれのケースがどれくらい難しくなりそうかという点については, おいおいお話しできればと考えています.

今日はまず前半部分で一般論の話をします. この一般論はどのケースにおいても同じように適用されるでしょう. 今日の予定としては, テキスト^{*a}にも書いたように,

1. Appell-Lauricella の超幾何関数から作る period map を記述
2. Terada-Deligne-Mostow の分類
3. テータ関数の一般的準備

本講義録は, 寺杣友秀氏により「超幾何学校 2022」で行われた講義の記録です.

当日の講義は寺杣氏本人によるテキストが公開されている状態で行われました. テキストは本講演記録集や該当する web ページに掲載されているはずです. 以下, 脚注でテキストと引用される文献はこのこととなります.

本講義録では, 講義当日の雰囲気や, 口頭で示された動機付けやアイデアの展開を伝えることを目指します. このようなまとめ方に関してご寛恕を乞いたく存じます. 当日は時間的制約のためにテキストの全ては講義で扱われなかったため, テキストを含めた全体像を詳しく理解したい読者にはテキストも参照されることをお勧めします.

^{*a} プログラム <https://www.math.kobe-u.ac.jp/cm/koen/2022-09-18-hgs.html> にテキストの PDF ファイルへのリンクがあります.

4. 個々の事例

5. K3 surface + cyclic action との関連

6. Thomae の公式

とする予定です. ただし最後の 5., 6. を詳しくお話する余裕はないかもしれません.

ちょっと付け加えると, このような超幾何関数は, まずはじめに寺田さんが分類をしていて, Deligne-Mostow も分類してちゃんとした証明をつけたのですが, 論文が出てきたときに私は学生でした. 高山先生からその論文を渡してもらいましたが, 内容は忘れてしまっていました. しばらくしてこういう研究を始めてから, そういえばと思い出して読み返した, という経緯があります.

1 一般的な準備, Hodge 構造

ある程度一般的な準備として, まず最初に Hodge 構造の話をしてします. 今日はこれから代数曲線が定める Jacobian とか, 代数曲線に巡回群の作用があったり, 正則微分形式とその共役などをこれから考えるのですが, そのためには Hodge 構造をある程度一般的にまとめておいた方が都合が良いからです.

A を $\mathbf{R}$ の部分環とします. 実際に使うのは $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ くらいです. Hodge 構造は次のような条件で定義されます.

Definition 1.1. (1) H_A は A 上有限生成な自由加群である。

(2) $H_{\mathbf{C}} = H_A \otimes \mathbf{C}$ 上のフィルトレーション $F^\bullet$

$$H_{\mathbf{C}} = F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset \cdots \supset F^n \supset F^{n+1} = 0$$

が

$$H_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{i+j=n} (F^i \cap \overline{F^j}) \quad (\text{ただし } \overline{F^j} \text{ は } H_{\mathbf{R}} = H_A \otimes_A \mathbf{R} \text{ が固定される複素共役})$$

を満たす.

このとき, 二つ組 $H = (H_A, F^\bullet)$ を重み n の A -Hodge 構造と言います.

この定義のもとで,

- $H^{i,j} = F^i \cap \overline{F^j}$ を Hodge (i, j) -成分と言います.
- $H_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{i+j=n} H^{i,j}$ を Hodge 分解と言います.

ここで, Weil 作用素を定義して, Hodge 構造の条件を別の言い方で述べてみます. 代数群

$$S = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha^2 + \beta^2 \neq 0\}.$$

を考えましょう. $z = \alpha + \beta i \in \mathbf{C}^\times$ は $\mathbf{R}$ -valued point $(\alpha, \beta) \in S(\mathbf{R})$ に対応します. $(\alpha, -\beta) \in S(\mathbf{R})$ に対応する $\alpha - \beta i$ in $\mathbf{C}^\times$ を $\bar{z}$ と書きます. Hodge 構造の条件 (2) は, S の $H_{\mathbf{R}}$ への作用 ρ で, $H_{\mathbf{C}} = H_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ 上 $\rho(z) \mid_{H^{i,j}}$ が $z^i \bar{z}^j$ の乗法となるもの, つまり

$$\xi \in H^{i,j} \text{ に対して } \rho(z)(\xi) = z^i \bar{z}^j \xi$$

を満たすものが存在することと同値です.

上の $\rho(z)$ ($z \in \mathbf{C}^\times$) を用いて定義される $H_{\mathbf{R}}$ への作用素

$$\mathcal{C} = \rho(\sqrt{-1})$$

を Weil 作用素と言います. 作り方より $\mathcal{C}$ は $\xi \in H^{i,j}$ であれば $\mathcal{C}(\xi) = (\sqrt{-1})^{i-j} \xi$ を満たします. あとで偏極であったり, Siegel 上半平面の話をするときに $\mathcal{C}$ が必要になります. 今日実際に $\mathcal{C}$ を使った計算をする事になるでしょう.

次に, 偏極 (polarization) というものを定義します. 我々にとってとても重要です. $H = (H_{\mathbf{Q}}, F^i)$ を重み n の Hodge 構造とします.

Definition 1.2. $H_{\mathbf{Q}}$ 上の $\mathbf{Q}$ -値の双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を考えます. この双線型形式の $H_{\mathbf{R}}$ や $H_{\mathbf{C}}$ への自然な拡張も同じ記号で書くことにします.

- (1) $H^{i,j}$ ($i+j=n$) と $H^{k,l}$ ($k+l=n$) は $i+k \neq n$ ならば直交する: $x \in H^{i,j}$, $y \in H^{k,l}$ について $\langle x, y \rangle = 0$.
- (2) Weil 作用素 $\mathcal{C}$ で不変である: $x, y \in H_{\mathbf{R}}$ に対して $\langle \mathcal{C}(x), \mathcal{C}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (3) $\langle x, \mathcal{C}(y) \rangle$ が $H_{\mathbf{R}}$ 上で対称で正定値.

を満たすものを偏極と言います.

Remark 1.3. (2) は実は (1) から従うので不要です. ^{*b}

Weil 作用素の 2 乗 $\mathcal{C}^2$ は $H^{i,j}$ 上に $(-1)^{i+j} = (-1)^n$ で作用します. 偏極の条件 (2)(3) を用いると

$$\langle x, y \rangle = \langle \mathcal{C}(x), \mathcal{C}(y) \rangle = \langle y, \mathcal{C}^2(x) \rangle = (-1)^n \langle y, x \rangle$$

がわかります. ゆえに $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は n が偶数ならば対称形式になり, n が奇数ならば交代形式になります.

1.1 重み 1 の場合

重み $n=1$ の場合を考えてみましょう. 今日扱うのはこの場合です. まずは $n=1$ の偏極から Siegel 上半空間が出現することを見ていきます.

$n=1$ なので偏極の pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は非退化な交代形式になります. このことから $H_{\mathbf{Q}}$ は偶数次元になります. その次元を $2g$ と書くことにしましょう. 線型代数のよく知られた事実により, $H_{\mathbf{Q}}$ のシンプレクティック基底 A_i, B_i ($i=1, \dots, g$) を取ることができます. これは

$$\langle A_i, B_j \rangle = -\delta_{ij}, \quad \langle A_i, A_j \rangle = \langle B_i, B_j \rangle = 0$$

を満たすような基底のことです. すると, $H^{1,0}$ の基底 ω_i ($i=1, \dots, g$) で,

$$\langle \omega_i, B_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{1.1}$$

を満たすものが取れます. この $H^{1,0}$ の基底を標準化された基底と呼ぶことにします. B と名付けた方だけを使って正規化していることに気をつけます.

先のことを言うと, $n=1$ の場合は代数曲線のコホモロジーに対応する Hodge 構造であって, この場合に $H^{1,0}$ は代数曲線の正則 1-形式のなすベクトル空間となります.

Remark 1.4. A_i, B_i の置き方を逆にする, つまり「 A で正規化する」方が自然なこともあります. モジュラー群の作用を考える時など, 文献毎に違うこともあります. しかし今日は B で正規化をすることにします.

^{*b}例えば, 上野健爾・清水勇二, 複素構造の変形と周期, 岩波書店, 2008 の §3.1 を参照.

次の命題の証明中の計算を見ると, Weil 作用素がどういう働きをするをするかわかります.

Proposition 1.5. 上の記号のもとで,

$$\langle \omega_i, A_j \rangle = \tau_{ij} \quad (1.2)$$

として, $\tau = (\tau_{ij})_{ij}$ とおくことにします. すると,

1. 行列 τ は対称形式,
2. 虚部 $\text{Im}(\tau)$ は正定値.

Proof. (1.1), (1.2) により,

$$\omega_i = A_i - \sum_k \tau_{ik} B_k$$

が成り立ちます. 偏極の性質より $H^{1,0}$ 同士の pairing は消えるから $\langle \omega_i, \omega_j \rangle = 0$ となります. シンプレクティック基底の性質を思い出すと,

$$0 = \left\langle A_i - \sum_k \tau_{ik} B_k, A_j - \sum_l \tau_{jl} B_l \right\rangle = -\tau_{ji} + \tau_{ij}$$

です. ゆえに τ は対称です.

$\gamma_i = \omega_i + \bar{\omega}_i$ は $H_{\mathbf{R}}^1$ の元です. Weil 作用素の性質より $\mathcal{C}(\gamma_i) = \sqrt{-1}\omega_i - \sqrt{-1}\bar{\omega}_i$ なので,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_i, \mathcal{C}(\gamma_j) \rangle &= \langle \omega_i, -\sqrt{-1}\bar{\omega}_j \rangle + \langle \bar{\omega}_i, \sqrt{-1}\omega_j \rangle \\ &= \left\langle A_i - \sum_k \tau_{ik} B_k, -\sqrt{-1}A_j + \sqrt{-1} \sum_k \bar{\tau}_{jk} B_k \right\rangle \\ &\quad + \left\langle A_i - \sum_k \bar{\tau}_{ik} B_k, \sqrt{-1}A_j - \sqrt{-1} \sum_k \tau_{jk} B_k \right\rangle \\ &= \sqrt{-1}\bar{\tau}_{ji} - \sqrt{-1}\tau_{ij} - \sqrt{-1}\tau_{ji} + \sqrt{-1}\bar{\tau}_{ij} = -2\sqrt{-1}(\tau_{ij} - \bar{\tau}_{ij}) = 4 \text{Im}(\tau_{ij}). \end{aligned}$$

となり, $\text{Im}(\tau)$ は正定値です. □

Definition 1.6. 次数 g の Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ を

$$\mathfrak{S}_g = \{ \tau \in M_g \mid {}^t \tau = \tau, \text{Im}(\tau) \text{ が正定値な対称行列} \}$$

と定義します.

今日は後でテータ関数を考えます. テータ関数は無限級数で定義されますが, その収束は $\text{Im}(\tau)$ ($\tau \in \mathfrak{S}_g$) の正定値性から従う事になります.

2 Appell-Lauricella 超幾何関数

準備ができたので Section 1 の話を応用することにししょう.

d を 1 以上の自然数とします. 今まずは細かい積分路のことはあえて曖昧にして, Appell-Lauricella 超幾何関数を次の積分で定義される関数として導入します:

$$F(\lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) = \int_1^\infty x^{-\kappa_0} (x-1)^{-\kappa_1} \prod_{i=2}^{d+1} (x-\lambda_i)^{-\kappa_i} dx. \quad (2.1)$$

ここでは, $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$ のつもりで, λ_j ($j = 2, \dots, d+1$) は適切なところを動く複素数としておきます. また, $0 < \kappa_i < 1$ ($i = 0, 1, \dots, d+1$) としています. また, κ_∞ を被積分関数の無限遠点での極の位数とすると,

$$\sum_{i=0}^{d+1} \kappa_i + \kappa_\infty = 2 \quad (2.2)$$

です. $0 < \kappa_\infty < 1$ が成り立つと仮定します. 関数 F は rank が $d+1$ の線型微分方程式の解となります. この微分方程式は Appell-Lauricella の超幾何微分方程式と呼ばれています.

2.1 代数曲線 C

$\kappa_0, \dots, \kappa_{d+1}, \kappa_\infty$ が有理数の時は、この関数 F は以下のような代数曲線 C の “コホモロジーの周期” と見なすことができます. C は, Riemann 球面 $\mathbf{P}^1$ の分岐被覆

$$C : y^n = x^{m_0}(x-1)^{m_1} \prod_{i=2}^{d+1} (x-\lambda_i)^{m_i} \quad (2.3)$$

で定義される代数曲線とします. ここで, n は κ_i の分母の最小公倍数で, $m_i = n\kappa_i$ としています.

この代数曲線 C に対して, 先ほど準備した Hodge 構造の話が使えます. つまり $H^1(C, \mathbf{Z})$ に $\mathbf{Z}$ -Hodge 構造を入れることができます. C の種数が g としましょう. Hodge 構造を定めるためにはフィルトレーションを入れればいいです. $F^0 = H^1(C, \mathbf{C})$ とおきます. $F^1 = H^0(\Omega^1) = H^{1,0}$ は正則 1-形式の空間になります:

$$H^1(C, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C} = H^{0,1}(C) \oplus H^{1,0}(C), \quad H^{1,0}(C) \simeq H^0(C, \Omega^1), \quad H^{0,1}(C) \simeq H^1(C, \mathcal{O}).$$

次元を考えてみると, F^1 は g 次元, F^0 は $2g$ 次元です. $F^1 \cap \overline{F^1} = 0$ が成り立っていて, このことから Hodge 構造が定まることがわかります. さらに, $H^1(C, \mathbf{Z})$ 上の通常の交点形式 (intersection form) は今の Hodge 構造の偏極を定めます. ここで交点形式はコホモロジーが与える 1-形式同士の外積で得られる 2-型式を C 上で積分したもので計算されるものです. この交点形式が偏極を定め, よって Proposition 1.5 で述べたような意味で, C は Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ の点 τ を定めることがわかります.

次に巡回群の作用を考えます. 実はこの群作用のおかげでより詳しく Hodge 構造を考えられます. 今日は μ_n を 1 の n 乗根がなす群とします. これは巡回群と同型です. 今考えている (2.3) の曲線 C には μ_n が自然に作用します. 具体的には, $\zeta \in \mu_n$ は C に

$$g_\zeta : y \mapsto \zeta^{-1}y$$

で作用するとします. このことから, 単に Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ の点を定めるということ以上に, もっと詳しい考察ができることを以下で見ます.

Remark 2.1. 後で $\frac{dx}{y}$ のような 1-形式にこの群を作用させるので, $y \mapsto \zeta^{-1}y$ という作用の形にしています.

(2.3) で定義された曲線 C への巡回群 μ_n の作用は, $H^{1,0}(C)$ や $H^1(C, \mathbf{Q})$ への μ_n の作用を引き起こします. 大切なこととして, 正則 1-形式にも作用しています. この正則 1-形式のなす空間の基底は, 代数曲線が (2.3) のような形で書けているならば具体的に表示さ

れます。一般の場合に述べるには少し複雑な形なので、今は述べませんが、 $\frac{dx}{y}$ のように、分母に y がきていることを注意しておきます。 χ を μ_n の指標とします。つまり、群の準同型 $\chi: \mu_n \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を取ります。一般に、1 の n 乗根の円分体 $K = \mathbf{Q}(\mu_n)$ を考えると、

$$H^1(C, K) = \bigoplus_{\chi: \text{指標}} H^1(C, K)(\chi),$$

と直和分解されます。ただし、

$$H^1(C, K)(\chi) = \{v \in H^1(C, K) \mid g^*v = \chi(g)v, \forall g \in \mu_n\}.$$

同じように、係数が複素のコホモロジーを考えても

$$H^1(C, \mathbf{C}) = \bigoplus_{\chi: \text{指標}} H^1(C, \mathbf{C})(\chi)$$

と分解するのですが、Hodge 構造の定義に出てくる $H^{1,0}(C) (\subset H^1(C, \mathbf{C}))$ も

$$H^{1,0}(C) = \bigoplus_{\chi: \text{指標}} H^{1,0}(C)(\chi), \quad (H^{1,0}(C)(\chi) = \{v \in H^{1,0}(C) \mid g^*v = \chi(g)v, \forall g \in \mu_n\})$$

と直和分解されています。このようなことが群 μ_n の作用からわかるわけです。

ここからいろいろなことがわかります。例えば χ が 2 次指標でなければ (このとき指標 χ は not-real で、 χ と $\bar{\chi}$ は異なることになり)、^{*c}

$$\overline{H^{1,0}(C)(\chi)} = H^{0,1}(C)(\bar{\chi})$$

が成り立ちます。とくに、

$$\dim H^{1,0}(C)(\chi) = \dim H^{0,1}(C)(\bar{\chi})$$

がわかります。

Theorem 2.2. (正則 Lefschetz 公式)^{*d} χ を通常 of 埋め込みが与える指標 (自明な指標) とすると、

$$\begin{aligned} \dim H^{1,0}(C)(\chi) &= \sum_{i=0}^{d+1} \kappa_i + \kappa_\infty - 1 = 2 - 1 = 1, \\ \dim H^{0,1}(C)(\chi) &= \sum_{i=0}^{d+1} (1 - \kappa_i) + (1 - \kappa_\infty) - 1 = d + 3 - 2 - 1 = d. \end{aligned}$$

さらに $H^{1,0}(C)(\chi)$ の基底は $\frac{dx}{y}$ で与えられる。

この定理から、 $H^1(C, \mathbf{C})(\chi)$ は 1 次元の $H^{1,0}(C)(\chi)$ と、 d 次元の $H^{0,1}(C)(\chi)$ に分解するということがわかります。今日はこのことを用いる事になります。

^{*c}2 次指標とは $\{\pm 1\}$ に値を取る指標のことで、よって実値だけをとりま。

^{*d}[DM], (2.20), (2.23) 参照。

Remark 2.3. 1 の n 乗根の集合の埋め込みは、上の定理 2.2 で扱った自明な埋め込みだけとは限りません。実は一般の埋め込みでもこの定理は定式化できますが、今日は使わないので省略します。

この (2.3) の代数曲線 C を使ってこの後、何をするかという目標を示しておきます。 C の Hodge 構造に基づいて、複素超球から Siegel 上半空間へのモジュラー埋め込みというものを構成します。Section 1 のように、 ω_i を正規化された正則 1-形式、 $\langle \omega_i, A_j \rangle = \tau_{ij}$ として $\tau \in \mathfrak{S}_g$ が決まります。ここに μ_n の作用を考えると、 χ が 2 次でない (not-real な) 指標の時に、実はすぐ後に示すように、Hermite 形式

$$(x, y) \mapsto h(x, y)$$

を作ることができます。これはパラメータ $\lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}$ に依存しません。

2.3 節では、reference curve というものを導入して marking というものを作ります。今は群 μ_n の作用を考えていますが、まったく作用を考えない曲線の場合は、周期写像を考える時に、シンプレクティック基底 $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ を一つ決めることが必要になります。シンプレクティック基底を一つ決めると、Siegel 上半空間の点が定まります。今の状況では群 μ_n の作用がある場合を考えています。このときは話がより精密になって、Siegel 上半空間よりある意味で単純な形をしている複素超球 D_d への周期を C が定まることになります。この複素超球 D_d から Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_d$ にモジュラー埋め込みが存在する、ということを見ていきます。この話は、

- Hodge 構造
- 群 μ_n の曲線 C への作用

がベースになっていることが重要です。

Remark 2.4. 今日後で具体例として扱うのは、円分体 $K = \mathbb{Q}(\mu_n)$ が 2 次体になるような場合です。この場合はモジュラー埋め込みの記述が少し簡単になります。円分体 $K = \mathbb{Q}(\mu_n)$ が 2 次体にならない場合でも類似の研究結果が得られているものもあります ([Koi]) .

2.2 Hermite 形式 h の定義とその符号数

代数曲線 (2.3) のうち generic なものを何でもいから reference curve C_0 と固定します。今日の話では記号を簡単にするため、Section 2.1 の書き方を用いて

$$H_K^1(\chi) = H^1(C_0, K)(\chi), \quad H_{\mathbf{C}}^1(\chi) = H^1(C_0, \mathbf{C})(\chi), \quad H_{\mathbf{Z}}^1(\chi) = H^1(C_0, \mathbf{Z})(\chi) \quad (2.4)$$

のようにおきます。

以下、 χ は not-real な指標と仮定します。 C でも C_0 でも定義されるような Hermite 形式を H^1 上に次のように定義します。

Definition 2.5. $H^1(C, \mathbf{C})(\chi)$ や $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ 上の Hermite 形式 h を

$$h(\xi, \eta) = 2\langle \xi, \bar{\eta} \rangle (\bar{\omega} - \omega). \quad (2.5)$$

で定義します。ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は偏極の pairing です。 σ は μ_n の生成元で $\text{Im}(\chi(\sigma)) > 0$ なるものとしてとって、 $\omega = \chi(\sigma)$ とおいています。また、 $q(\xi) = h(\xi, \xi)$ とおきます。

この Hermite 形式 h の符号数を計算してみましょう。コホモロジー群 $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ は実構造 $H_{\mathbf{R}}^1$ と協調的ではないので、実構造と協調的になるように χ と $\bar{\chi}$ を両方加えたものを考えて、

$$H_{\mathbf{R}}^1(\chi, \bar{\chi}) = H_{\mathbf{R}}^1 \cap \left(H_{\mathbf{C}}^1(\chi) \oplus H_{\mathbf{C}}^1(\bar{\chi}) \right)$$

と定義します. これは複素共役で安定なので, $\mathbf{R}$ 上で基底が取れ,

$$H_{\mathbf{R}}^1(\chi, \bar{\chi}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = H_{\mathbf{C}}^1(\chi) \oplus H_{\mathbf{C}}^1(\bar{\chi})$$

が成り立ちます. こうすると次の $\mathbf{R}$ 上ベクトル空間の同型ができます:

$$\iota: H_{\mathbf{C}}^1(\chi) \rightarrow H_{\mathbf{R}}^1(\chi, \bar{\chi}); \xi \mapsto x = \xi + \bar{\xi}.$$

ここで, 環 $\mathbf{R}[\sigma]$ の $H_{\mathbf{R}}^1(\chi, \bar{\chi})$ への作用を, $\omega = \chi(\sigma)$ を用いて

$$\sigma(\xi + \bar{\xi}) = \omega\xi + \bar{\omega}\bar{\xi}$$

で定義します. $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ における $\mathbf{C} = \mathbf{R}[\omega]$ の作用と, $H_{\mathbf{R}}^1(\chi, \bar{\chi})$ における $\mathbf{R}[\sigma]$ の作用は同型 ι により一致しています. なぜこのようなものを考えるかという, h の符号数を計算したいからです.

Proposition 2.6. χ を *not-real* な指標とする.

1. 同型 ι によって, $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ 上の Hermite 形式 h は, $H_{\mathbf{R}}^1(\chi, \bar{\chi})$ 上の

$$h^*(x, y) = \langle x, (\sigma - \sigma^{-1})y \rangle + \langle x, y \rangle(\bar{\omega} - \omega)$$

に対応する.

2. $H^{1,0}(C)(\chi)$ は h について正定値の, $H^{0,1}(C)(\chi)$ は h について負定値の, $H^1(C, \mathbf{C})(\chi)$ の部分空間となる. また, $H^{1,0}(C)(\chi)$ と $H^{0,1}(C)(\chi)$ は互いに直交する.

Proof. $\xi, \eta \in H^{1,0}(\chi)$ に対し, $x = \xi + \bar{\xi}, y = \eta + \bar{\eta}$ とおくと, 偏極 $\langle, \rangle$ の性質から $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \bar{\xi}, \bar{\eta} \rangle = 0$ です. 上で定めた σ の作用を用いて,

$$\begin{aligned} h^*(x, y) &= \langle \xi + \bar{\xi}, (\sigma - \sigma^{-1})(\eta + \bar{\eta}) \rangle + \langle \xi + \bar{\xi}, \eta + \bar{\eta} \rangle(\bar{\omega} - \omega) \\ &= \langle \xi + \bar{\xi}, \omega\eta + \bar{\omega}\bar{\eta} \rangle - \langle \xi + \bar{\xi}, \bar{\omega}\eta + \omega\bar{\eta} \rangle + \langle \xi + \bar{\xi}, \eta + \bar{\eta} \rangle(\bar{\omega} - \omega) \\ &= 2\langle \xi, \bar{\eta} \rangle(\bar{\omega} - \omega) = h(\xi, \eta) \end{aligned}$$

と計算されます. これで 1. が示されます.

次に, ω の取り方を思い出すと, $r > 0$ を用いて $\omega - \bar{\omega} = r\sqrt{-1}$ と書けます. $\xi \in H^{1,0}(C)(\chi)$ は ι のもとで $x = \xi + \bar{\xi}$ に対応し, Weil 作用素 $\mathcal{C}$ の定義を思い出して,

$$(\sigma - \sigma^{-1})(x) = (\omega - \bar{\omega})\xi - (\omega - \bar{\omega})\bar{\xi} = r\sqrt{-1}\xi - r\sqrt{-1}\bar{\xi} = r\mathcal{C}(\xi + \bar{\xi}) = r\mathcal{C}(x). \quad (2.6)$$

よって,

$$h^*(x, x) = \langle x, (\sigma - \sigma^{-1})x \rangle + \langle x, x \rangle(\bar{\omega} - \omega) = r\langle x, \mathcal{C}(x) \rangle + 0 > 0.$$

$\xi \in H^{0,1}(C)(\chi)$ を考える場合は, Weil 作用素 $\mathcal{C}$ が作用した時の符号が定義より逆になるので, (2.6) のかわりに $(\sigma - \sigma^{-1})(x) = -r\mathcal{C}(x)$ を用いることになり,

$$h^*(x, x) = -r\langle x, \mathcal{C}(x) \rangle < 0.$$

ゆえに 2. が示されます. □

Proposition 2.6 と Theorem 2.2 を合わせて, $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ 上に入っている Hermite 形式 h の符号数が,

$$(+, -) = (\dim H^{1,0}(\chi), \dim H^{0,1}(\chi)) = (1, d) \quad (2.7)$$

となることがわかりました.

2.3 Marking について

Section 2.1 で言及したような超球への周期写像を構成するために、(2.3) の曲線 C に marking というものを考える必要があります。marking は周期写像を考えるための目印のようなものです。まず、モジュライの基点としての reference curve C_0 を考えます。reference curve として固定した C_0 から

$$H_{\mathbf{Z}}^1 = H^1(C_0, \mathbf{Z}), \quad H_K^1(\chi) = H^1(C_0, K)(\chi)$$

のようにおきます。

まず、1-コホモロジー群 $H_{\mathbf{Z}}^1(C, \mathbf{Z})$ と $H_{\mathbf{Z}}^1$ には偏極 $\langle, \rangle$ がありました。これを保つような同型 m^* を marking と呼びます：

$$m : H^1(C, \mathbf{Z}) \simeq H_{\mathbf{Z}}^1.$$

モジュライ空間上に周期写像を考えると、なぜ marking を考えなければいけないかというのがちょっとわかりにくいかもしれませんが、今の場合だと、marking を考える意義は次のように言うことができます：モジュライ問題を考えるために曲線に目印をつけておいて、それを用いて線形代数的な量を定義して、目印を変えたときに、その線形代数的な量がどのように変わるかということを見ることにより、目印のとりかたによらない性質を抽出する、という手法をとるのです。曲線の場合は Hodge 構造についてシンプレクティック基底を「目印」としてとり、この目印の取り替えによる依存性を考えることにより、曲線のモジュライ上の周期写像を考えるわけです。

今はさらに代数曲線 (2.3) に μ_n -作用があるので、 μ_n -作用と両立するような marking を考えることにより精密な議論を進めることができます。そのために primitive part というものを導入します。円分体 $K = \mathbf{Q}(\mu_n)$ については、Euler 関数 $\varphi(n)$ を用いて、 $\dim_{\mathbf{Q}} K = \varphi(n)$ が成立することが知られています。^{*f} 指標 $\chi : \mu_n \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を自然な埋め込みとします。 $t \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ について $\chi^t : \mu_n \rightarrow \mathbf{C}^\times$ は異なる指標になります。このとき、自然な同型

$$H^1(C, K)(\chi^t) \otimes_K \mathbf{C} \simeq H^1(C, \mathbf{C})(\chi^t).$$

があります。 $H^1(C, \mathbf{Q})$ の primitive part とは、 $H^1(C, \mathbf{Q})$ の $\mathbf{Q}$ -部分空間で、次のように定義されるもののことです：

$$H_{\text{prim}}^1(C, \mathbf{Q}) = \left(\bigoplus_{t \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times} H^1(C, K)(\chi^t) \right) \cap H^1(C, \mathbf{Q}).$$

同様に、ホモロジー群 $H_1(C, \mathbf{Q})$ の primitive part $H_1^{\text{prim}}(C, \mathbf{Q})$ も定義されます。更に、 $H_1^{\text{prim}}(C, \mathbf{Q})$ 内の格子 $H_1^{\text{prim}}(C, \mathbf{Z})$ を

$$H_1^{\text{prim}}(C, \mathbf{Z}) = H_1^{\text{prim}}(C, \mathbf{Q}) \cap H_1(C, \mathbf{Z})$$

と定義します。^{*g} ホモロジー群 $H_1^{\text{prim}}(C, \mathbf{Z})$ には、 $H_1(C, \mathbf{Z})$ に入っていた交点形式から自然に偏極が入り、 μ_n -作用も入っています。固定された reference curve C_0 を用いて $H_{1, \mathbf{Z}}^{\text{prim}} = H_1^{\text{prim}}(C_0, \mathbf{Z})$ を考えます。

^{*e} m は Abel 群の同型で、 $\xi_1, \xi_2 \in H^1(C, \mathbf{Z})$ に対して $\langle m(\xi_1), m(\xi_2) \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ を満たすという意味です。例えば、はじめに固定している reference curve C_0 の 1-コホモロジー群 $H_{\mathbf{Z}}^1 = H^1(C_0, \mathbf{Z})$ の基底を $c_1, \dots, c_\ell$ と固定すると、 $m^{-1}(c_1), \dots, m^{-1}(c_\ell)$ は動かす曲線 C の 1-コホモロジー群の基底で $c_1, \dots, c_\ell$ と同じ交点数を持ちます。 m の取り方は一通りとは限らず、一般にたくさんあります。

^{*f} 特に $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ です。

^{*g} [DM], (12.9) 参照。

Definition 2.7. 1. C を $\mathbf{P}^1$ 上の被覆として (2.3) で与えられる代数曲線とします. 偏極 $\langle, \rangle$ と μ_n -作用と両立するような同型 ^{*h}

$$m : H_1^{\text{prim}}(C, \mathbf{Z}) \simeq H_{1, \mathbf{Z}}^{\text{prim}}$$

のことを C の marking と言います.

2. 代数曲線 C と marking m の組 (C, m) を marked curve と言います. marked curve たちの集合 $\mathcal{M}_{\text{mk}}$ を marked curve のモジュライ空間と言います.

この marking m は偏極と μ_n -作用と両立するような同型

$$m : H^1(C, K)(\chi) \simeq H_K^1(\chi)$$

を導きます. パラメータ λ_i が動くとき曲線 C は変形します. そこで,

$$\mathcal{M} = \{(\lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) \in \mathbf{C}^d \mid \lambda_i \neq 0, 1 \text{ かつ } \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)\}$$

を naive なモジュライ空間と呼ぶことにします. こうすると, marking を忘れることによって,

$$\mathcal{M}_{\text{mk}} \rightarrow \mathcal{M}; (C, m) \mapsto (\lambda_2, \dots, \lambda_{d+1})$$

という対応があるわけです.

2.4 Marked curve のモジュライから複素超球への周期写像

これだけ準備しておくとき, 複素超球が自然に見えてくるようになります. (2.4) で定義した記号を使います. ここからは χ について次の条件を考えます.

条件: 円分体 $K = \mathbb{Q}(\mu_n)$ が 2 次体となる.

この仮定は少し弱めることもできるのですが, 以後簡単のため, この条件を仮定し, $\chi : \mu_n \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を自然な埋め込みによる指標とします. (C, m) を上の意味での marked curve とすると, m により準同型

$$H^{1,0}(C)(\chi) \subset H^1(C, K)(\chi) \otimes_K \mathbf{C} \xrightarrow{m \otimes \mathbf{C}} H_K^1(\chi) \otimes_K \mathbf{C} = H_{\mathbf{C}}^1(\chi). \quad (2.8)$$

が得られます. 先ほど導入した $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ 上の Hermite 形式 h から決まる q を用いて, 複素超球への周期写像を定義することができます. ここで, Hermite 形式 h が偏極 $\langle, \rangle$ と μ_n -作用を用いて定義されていたことを思い出しましょう. 今考えている marking m が偏極 $\langle, \rangle$ と μ_n -作用を保つことから, m はこの Hermite 形式 h を保ちます.

同型 (2.8) を介して, ベクトル空間 $H_{\mathbf{C}}^{1,0}(C)(\chi)$ は $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ の 1 次元部分ベクトル空間と見なすことができます. m は h を保つから, $m(H_{\mathbf{C}}^{1,0}(C)(\chi))$ も正定値な 1 次元空間となります. その基底を v と書くことにしましょう. そして

$$\pi(C, m) = [v] \in \mathbf{P}(H_{\mathbf{C}}^1(\chi)) \simeq \mathbf{P}^d$$

を考えましょう. ^{*i} Proposition 2.6 により, 点 $\pi(C, m)$ は, $\mathbf{P}^d$ 内の対称領域

$$D = \{[v] \in \mathbf{P}(H_{\mathbf{C}}^1(\chi)) \mid q(v) > 0\}$$

^{*h} 偏極を保つだけでなく, 任意の $g \in \mu_n, \gamma \in H_1^{\text{prim}}(C, \mathbf{Z})$ に対して $m(g_*v) = g_*(m(\gamma))$ を満たすような Abel 群の同型です.

^{*i} $[v]$ はベクトル v を射影化したものです.

の点とみなすことができます. ここで $q(v) = h(v, v)$ と置きました.

D は複素超球 D_d と同型です. 実際, わかりやすく書いてしまうと, $H_{\mathbf{C}}^1(\chi) \simeq \mathbf{C}^{d+1}$ で, 符号数 $(1, d)$ の Hermite 形式 h の直交基底による座標 $x = (x_0, x_1, \dots, x_d)$ を取れば,

$$q(x) = h(x, x) = |x_0|^2 - |x_1|^2 - \dots - |x_d|^2$$

と書くことができます. これを射影化すると, D の元は複素超球 $\{|v_1|^2 + \dots + |v_d|^2 < 1\}$ の元と見ることができます.

以上によって, μ_n -作用を持つ代数曲線 (2.3) の Hodge 構造を考えて, 超球への周期写像

$$\pi : \mathcal{M}_{mk} \rightarrow D; (C, m) \mapsto \pi(C, m)$$

を得ました.

まとめると, 代数曲線 C の marking をとって, marking による 1 次元ベクトル空間 $H^{1,0}(C)(\chi)$ の像を reference curve の $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ の射影化の中で考えると, 超球の点を与える, ことになります. この状況は次の図式で表示されます.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_{mk} & \longrightarrow & D & \longrightarrow & \mathbf{P}^d \\ & \downarrow & & & \\ & \mathcal{M} & & & \end{array}$$

Remark 2.8. この対称領域 D は, ユニタリ群

$$U(H_{\mathbf{C}}^1(\chi), q) = \{g \in \text{Aut}(H_{\mathbf{C}}^1(\chi)) \mid q(\xi) = q(g(\xi)) \text{ for all } \xi \in H_{\mathbf{C}}^1(\chi)\} = U(1, d)$$

に付随した対称領域になります. 円分体 $K = \mathbb{Q}(\mu_n)$ が 2 次体となる, という仮定のもとに, 上の図式で, marking を忘れる写像 $\mathcal{M}_{mk} \rightarrow \mathcal{M}$ は, 非常に大きな離散群 $U(1, d; \mathbf{Z})$ の作用による商を考えることになります. この $U(1, d; \mathbf{Z})$ は marking の取り替えに対応する群です.

質問 : 今日の企画は超幾何学校ということで質問です. 今の理論と先程見た超幾何積分との間の関係がまだ言及されていないようですけれど, 結局のところどのように関係するのですか.

回答 : 曲線 C が (2.3) の形で与えられている曲線とすると, 1 次元の $H^{1,0}(\chi)$ の基底は, ちょうど $\frac{dx}{y}$ で書けています. この積分が超幾何積分ですが, 周期写像はこれを用いて記述されます. つまり, 双対が与える pairing は超幾何積分で書けて, これらがちょうど超球への周期写像の座標を与えることになります.*j

2.5 Deligne-Mostow-Terada の分類

Deligne-Mostow [DM] は, 上の議論で与えた超球への周期写像 $\pi : \mathcal{M}_{mk} \rightarrow D$ が, ほとんど同型になっているための十分条件を与えました.

Theorem 2.9 (Deligne-Mostow-Terada ^{*k}). $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{d+1}, \kappa_{\infty})$ を超幾何積分 (2.1) に現れる指数とする (Section 2 参照). 条件

$$(\text{INT}) : i \neq j \text{ で } \kappa_i + \kappa_j < 1 \text{ であれば } (1 - \kappa_i - \kappa_j)^{-1} \in \mathbf{Z}$$

*j 本講義録の Section 3 には超幾何積分を具体的に用いた modular embedding の記述もあります.

*k [DM], Theorem (11.4) 参照.

が成り立つとき, 周期写像 $\pi: \mathcal{M}_{\text{mk}} \rightarrow D$ はほとんど同型になる. ここで「ほとんど同型」の意味は, 適切な *boundary* を加えた $\mathcal{M}_{\text{mk}}$ のコンパクト化を考えると同型になる, という意味である.

この定理の証明は今日はやりません.

Remark 2.10. 境界を付け加えることの正確な statement を述べることはとても大変なので今回は省略します. 実は, *stable* という言葉がこの話に関係します. これは *reflection hyperplane* が抜けていて, それを埋めることでコンパクト化ができるという感じです. ただし, *stable curve* のモジュライの *stable* とは意味が違うので注意が必要です. 詳しいことは [DM] に書いてありますが, 複雑なので, 今日は割愛します.

この条件について具体例を見てみましょう. あとで示す $N = 5$ の表にある No.21 は $n = 12$ および $(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) = (8, 5, 5, 5, 1)$ とあります. これは

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_\infty) = \left(\frac{8}{12}, \frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{12} \right)$$

という意味です. $\kappa_0, \dots, \kappa_4$ は全部足すと 2 です. これらのうちの異なる 2 つで足して 1 を超えないものは

$$\frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12}, \quad \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12}, \quad \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12}$$

になります. いずれも, 1 からこれらを引いた逆数は整数になり, 条件を満たします.

この条件を満たす κ の条件は [Td], [DM] で分類されています. N を分岐点の数として, $N > 4$ の場合について考えます. (ちなみに $N = 4$ では三角群であったり無限系列も入ったりするので, ここで書くことは控えておきます. 詳しくは [DM] を見てください. ^{*1)}

^{*1}[DM], (14.3).

表 1: $N = 5$

type no	n	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4
1	3	2	1	1	1	1
2	4	2	2	2	1	1
3	4	3	2	1	1	1
4	5	2	2	2	2	2
5	6	3	3	2	2	2
6	6	3	3	3	2	1
7	6	4	3	2	2	1
8	6	5	2	2	2	1
9	8	4	3	3	3	3
10	8	5	5	2	2	2
11	8	6	3	3	3	1
12	9	4	4	4	4	2
13	10	7	4	4	4	1
14	12	5	5	5	5	4
15	12	6	5	5	4	4
16	12	6	5	5	5	3
17	12	7	5	4	4	4
18	12	7	6	5	3	3
19	12	7	7	4	4	2
20	12	8	5	5	3	3
21	12	8	5	5	5	1
22	12	8	7	3	3	3
23	12	10	5	3	3	3
24	15	8	6	6	6	4
25	18	11	8	8	8	1
26	20	14	11	5	5	5
27	24	14	9	9	9	7

表 2: $N = 6$

type no	n	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
1	3	1	1	1	1	1	1
2	4	2	2	1	1	1	1
3	4	3	1	1	1	1	1
4	6	3	2	2	2	2	1
5	8	3	3	3	3	3	1
6	12	5	5	5	3	3	3
7	12	7	5	3	3	3	3

表 3: $N = 7$

type no	n	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
1	4	2	1	1	1	1	1	1

表 4: $N = 8$

type no	n	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
1	4	1	1	1	1	1	1	1	1

ただしこの各表で一番右の m_{N-1} は, $\frac{m_{N-1}}{n} = \kappa_\infty$ を与えるとします.

$N = 4$ の場合, つまり三角群が出てくる場合などはイメージしやすいかもしれませんが. 三角群の場合の条件 (INT) は, Schwarz 三角形を貼り合わせて空間全体をピッタリ埋めることができるという条件になります. この条件が成り立たないというのは, 三角形をどんどん重ねていってもピタッと重ならないで, オーバーラップした部分が出てしまってズレていくというような状況だと思っていただければ良いです. ^{*m}

Remark 2.11. Mostow [Mo] はこの条件を半整数条件まで緩め, より広い分類を得ています.

この定理によると周期写像 $\pi: \mathcal{M}_{\text{mk}} \rightarrow D$ がほとんど同型です. つまり, D の generic な元には $(C, m) \in \mathcal{M}_{\text{mk}}$ がいるということです. そこで,

D の generic な点を取り, (C, m) あるいは C を回復せよ

という問題が自然に生じます. 以下, この「逆周期写像」の問題を考えることとします.

さて, 実際のところ D には周期写像 π のモノドロミー群 G が作用して, ^{*n} naive なモジュライ空間 $\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} \simeq D/G$$

のようになっています.

モノドロミー群 G について幾つかのことがわかっています. これは代数群の $\mathbf{Z}$ -valued point などの lattice が現れます. ここで, lattice というのは離散群であって, この群作用で割った商空間の volume が有限になるようなもののことです. モノドロミー群としてさまざまな lattice が現れることが知られています.

このような lattice が数論的であるとは, $\mathbf{Z}$ -上の代数群の $\mathbf{Z}$ -valued point と通訳可能 (commensurable) なもののことです. つまり, 代数群の $\mathbf{Z}$ -valued point と有限指数で移り合うようなもののことです.

まず $N = 4$ の場合には, Schwarz の三角群が現れます. Schwarz の三角群は, ほとんどの場合は非数論的な離散群です. 非常に特殊な場合に限って数論的な三角群になり, これらは分類されています. ^{*o} $N \geq 5$ の場合は数論的なものも非数論的なものもあります. 数論的かどうかの判定法は, あとで演習にしましょう.

「逆周期写像」の問題でまず取り上げるべきは数論的な場合になるでしょう. 三角群の場合からも予想されることですが, 数論的でない場合では, きっちりとした計算で周期写像を記述できるかどうかはかなり難しくなります.

今日のための準備をしている間に色々調べたのですが, Deligne-Mostow-Terada の表で逆周期写像がよくわかっているものは以下挙げるものくらいのようです. ^{*p}

- $(2/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ (Shiga [S2], [S3])
- $(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ (Matsumoto [M2])

^{*m}例えば, 吉田正章, 私説超幾何関数, 共立出版, 1997 の第 3 章でこのことに触れられています.

^{*n}代数曲線 C の marking m の取り方はたくさんあります. C を決めて marking を取り替えていくと, これらは $\mathcal{M}_{\text{mk}}$ の異なる点たちを与えていきます. これらの点たちは $\mathcal{M}_{\text{mk}}$ と対応する D ではモノドロミー群 G の作用で移り合っています. モノドロミー群は marking の取り替えに対応する群です.

^{*o}例えば, K.Takeuchi, Arithmetic triangle groups, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977) pp.91-106 参照.

^{*p}テキストに詳しい記述があります.

- この場合はよくわかっています.
- $(1/6, 1/6, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ (Matsumoto and Terasoma [MT1], [ACT])
 - Mostow [Mo] のリスト, つまり条件を緩めたものを扱っています. cubic surface の moduli, 分岐する cubic 3-fold ($\mathbf{P}^1$ の) の中間 Jacobi 多様体, 周期写像で $W(E_6)$ の群の不変式で対称なもの, など, 多くのことと関係しながら非常によくわかっています.
- $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ (Matsumoto and Terasoma [MT2])
- $(2/5, 2/5, 2/5, 2/5, 2/5)$ (Koike [Koi])
- $(1/4, 1/2, 1/2, 3/4)$ (Terasoma and Yamaguchi)

上の具体例たちに共通する方法としては, 超球を Siegel 上半空間に modular embedding で埋め込みます. Siegel 上半空間ではいろいろ物事がわかっています. Siegel 上半空間でよくわかっている関数、例えばテータ定数を modular embedding で引き戻してこの逆周期写像の問題を考える, というのが基本的なアイデアになります.

というわけでこれから解くべき問題として,

**Deligne-Mostow-Terada の表で
まだ周期が具体的にわかっていない場合に
「逆周期写像」の問題を解決しよう**

を提案できるのではないでしょうか.

上に挙げた既にわかっている場合はいずれもモノドロミー群が数論的な場合です. まだわかっていない場合も多くありますが, 数論的な場合であれば, 十分この問題が解ける可能性があります. よって, これから解くべき問題として提案できると思います. 非数論的な場合はチャレンジングな問題と思います.

この問題を解くための道具としては,

- modular embedding $D_g \hookrightarrow \mathfrak{S}_g$
- テータ関数

があります. これらを以下の節で見えていきます.

3 Modular embedding の構成

逆周期写像を書くためには, 複素超球 D 上のモジュラー形式をたくさん作る必要があります. しかし多くの場合, 複素超球 D 上のモジュラー形式を直接作るのは大変なことが多いです. そこで, Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ 上のモジュラー形式をモジュラー埋め込み $D \hookrightarrow \mathfrak{S}_g$ で引き戻すというアイデアを用います.

以下, 議論を簡単にするために,

- $H^1(C, \mathbf{Q}) = H_{\text{prim}}^1(C, \mathbf{Q})$,
- $\mathbf{Q}(\mu_n)/\mathbf{Q}$ が虚二次

という場合に絞って話をします。

C_0 を reference curve とします。Section 2 と同じ記号を使います。特に, χ は not-real な指標とします。復習ですが

$$H^1 \otimes \mathbf{C} = H_{\mathbf{C}}^1(\chi) \oplus H_{\mathbf{C}}^1(\bar{\chi})$$

が成り立っているのです。 (2.7) で見たように $H_{\mathbf{C}}^1(\chi) = H^{1,0}(\chi) \oplus H^{0,1}(\chi)$ が成り立っており, $H^{1,0}(\chi)$ は 1 次元の空間で $h(v, v) > 0$ を満たすような $v \in H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ で生成されています。ここで h は Definition 2.5 で定義された Hermite 形式です。 Proposition 2.6 (2) により, この h によって $H^{1,0}(\chi)$ と $H^{0,1}(\chi)$ は互いに直交していました。 $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ も $H_{\mathbf{C}}^1(\bar{\chi})$ も $H_{\mathbf{C}}^1$ の部分空間ですが、複素共役により $H^{0,1}(\chi) \subset H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ は $H^{1,0}(\bar{\chi}) \subset H_{\mathbf{C}}^1(\bar{\chi})$ に移されます。 $H_{\mathbf{C}}^1$ の Hodge 成分 $H^{1,0}$ は

$$H^{1,0} = H^{1,0}(\chi) \oplus H^{1,0}(\bar{\chi})$$

という分解をもちます。

さて, $H^{1,0}(\chi)$ の基底を ψ と書くとこれは ψ は $h(\psi, \psi) > 0$ を満たします。前節では v と書いていたものです。これから何をやるかということ, modular embedding

$$H^{1,0}(\chi) \ni \psi \mapsto \tau = \tau(\psi) \in \mathfrak{S}_g \quad (3.1)$$

を書き下してみましょう。つまり, $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ の生成元 ψ の射影化が超球 D の点を決めているとして、 ψ から定まる Siegel 上半空間の点 τ を求めます。これによって $D \rightarrow \mathfrak{S}_g$ が定まることになります。

$\sigma \in \mu_n$ は群の生成元でした。 Section 1 の意味でのシンプレクティック基底 A_i, B_i ($i = 1, \dots, g$) に対し, σ の作用が,

$$\begin{pmatrix} \sigma_*(A_1) \\ \vdots \\ \sigma_*(A_g) \\ \sigma_*(B_1) \\ \vdots \\ \sigma_*(B_g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_g \\ B_1 \\ \vdots \\ B_g \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と書くと、 $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ は $Sp(2g)$ の元となります。 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ $g \times g$ 行列です。

これは、 $\sigma \in \mu_n$ のシンプレクティック基底への作用は、(2.3) で与えられる曲線 C への作用からきているので、シンプレクティック基底がシンプレクティック基底にうつることからわかります。

Section 2 と同じように $\omega = \chi(\sigma)$ とおきます。 $H_{\mathbf{C}}^1$ をド・ラムコホモロジーとみなしてコホモロジー類の代表系 η をシンプレクティック基底 $(A_1, \dots, A_g; B_1, \dots, B_g)$ の上で積分

して得られるベクトル

$$\eta \mapsto \begin{pmatrix} \int_{A_1} \eta \\ \vdots \\ \int_{A_g} \eta \\ \int_{B_1} \eta \\ \vdots \\ \int_{B_g} \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_A \\ \eta_B \end{pmatrix}$$

を対応させることにより $H_{\mathbf{C}}^1$ を列ベクトル空間 $\mathbf{C}^{2g}$ と同一視することにします. さて, $H_{\mathbf{C}}^1(\chi) \subset H_{\mathbf{C}}^1$ でした. $\eta \in H_{\mathbf{C}}^1$ が部分空間 $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ に入るための必要十分条件は, この記号と $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を用いて,

$$\eta \mapsto \begin{pmatrix} (\alpha - \bar{\omega})\gamma^{-1}\eta_B \\ \eta_B \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{2g}$$

とかけることになります.*^q この必要十分条件を用いると, $H_{\mathbf{C}}^1(\chi)$ の元はベクトルの下半分 η_B だけで決まってしまうので,

$$H_{\mathbf{C}}^1(\chi) \ni \eta \mapsto \eta_B \in \mathbf{C}^g \quad (3.3)$$

のような同型が定まることになります.

この議論を $\psi \in H_{\mathbf{C}}^{1,0}(\chi)$ に適用してみましょう. Section 2 で見たように, $\psi \in H^{1,0}(\chi)$ は超球 D の点を決めています. 一方, (3.3) により ψ は g 行の列ベクトル $\psi_B \in \mathbf{C}^g$ に対応しています. $h(\psi, \psi) > 0$ を満たす $\psi \in H_{\mathbf{C}}^{1,0}(\chi)$ に対応する ψ_B から $\tau \in \mathfrak{S}_g$ を求めることができれば, これが modular embedding を決定することになります. 次のように modular embedding を書き下すことができます.

Proposition 3.1. 上の記号のもとで, (3.1) の modular embedding $D \ni \psi_B \rightarrow \tau(\psi) \in \mathfrak{S}_g$ は明示的に

$$\tau = \tau(\psi) = (\alpha - \omega)\gamma^{-1} + (\omega - \bar{\omega})\gamma^{-1} \frac{\psi_B {}^t\psi_B H^*}{{}^t\psi_B H^* \psi_B}$$

と表示されます. ここで, H^* は

$$H^* = 2(\bar{\omega} - \omega) \begin{pmatrix} {}^t((\alpha - \bar{\omega})\gamma^{-1}) - (\alpha - \omega)\gamma^{-1} \end{pmatrix}$$

で定義される $g \times g$ 行列です.

黒板でこの命題の証明を見せようと思ったのですが, 細かい計算をちゃんと書くのは非常に大変なので, 詳しいことを知りたい人はテキストに書いてある証明を見てください.*^r

*^qテキスト, Section 3.2 に証明があります.

*^rテキスト, Section 3.2 を参照.

今見たように, modular embedding の計算は複雑でしたが, 大切なことは超幾何積分は上式の ψ_B に現れるということです. ψ が (2.3) の代数曲線 C で正則微分形式 $\frac{dx}{y}$ の場合を考えると, ψ_B は

$$\psi_B = \begin{pmatrix} \int_{B_1} \psi \\ \vdots \\ \int_{B_g} \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{B_1} \frac{dx}{y} \\ \vdots \\ \int_{B_g} \frac{dx}{y} \end{pmatrix}$$

のように, 超幾何積分として書けています.

4 テータ関数と Abel-Jacobi 写像

今までやってきたことをまた思い出します. marking 付きの (2.3) で与えられた代数曲線 C が与えられたときに周期写像を計算することを見ました. この周期写像はまず超球 D に値を取る形で構成されました. 超球の元は modular embedding で Siegel 上半空間の元に埋め込まれました. どのような形で埋め込まれるかは, Section 3 で公式が与えられました.

このようにして marked curve に対応する Siegel 上半空間の点ができました. 逆に Siegel 上半空間の点から, 曲線のパラメータを思い出そう, というのが「逆周期写像」の問題で, これが今考えたい問題です.

このためには, Siegel 上半空間の上で定義された保型関数をたくさん作り, 保型関数を組み合わせたり, 商を考えたりして, それで曲線 C のパラメータ λ_j を記述することができればいいわけです. これで, Siegel 上半空間の点から C のパラメータ λ_j を思い出すことができます.

なぜ Siegel 上半空間が要するか一つ注意します. 今回扱っている周期写像は超球に値をとります. 超球の上での保型関数を直接作ることができればいいのですが, 直接的に作る方法は余り知られていません. しかし, Siegel 上半空間の上ではたくさん保型関数を作ることができます. よって, modular embedding で Siegel 上半空間上の保型関数を引き戻して, 超球上の保型関数を作ることになります.

テータ定数を用いて, Siegel 上半空間の上の関数をたくさん作る, あるいはテータ関数を用いて曲線 C の Hodge 構造から定まる Jacobi 多様体の上の関数を作ることになります. 教科書 [I] などにあるテータ関数の性質を用いることになります.

この節は細かい計算までやるととても大変なので, 詳しいところまで知りたい人はテキストを参照してください.

4.1 テータ関数の定義と変換公式

今までの Section と記号が変わる点もありますが, $\mathbf{C}^g, \mathbf{Q}^g$ は行ベクトルの空間とします.

Definition 4.1. $e(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ と書くことにします. $\tau \in \mathfrak{S}_g, z \in \mathbf{C}^g, \epsilon', \epsilon'' \in \mathbf{Q}^g$ について, テータ関数を

$$\vartheta_{\epsilon'\epsilon''}(\tau, z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} e\left(\frac{1}{2}(m + \epsilon')\tau^t(m + \epsilon') + (m + \epsilon')^t(z + \epsilon'')\right)$$

と定義します. テータ零値を

$$\vartheta_{\epsilon'\epsilon''}(\tau) = \vartheta_{\epsilon'\epsilon''}(\tau, 0).$$

と定義します.

$\text{Im}(\tau)$ が正定値であることから上の無限級数が収束していることに気をつけます。実は非常に早く収束するので、数値計算も容易にできます。テータ関数の $z=0$ での値はテータ零値と呼ばれ、 $\mathfrak{S}_g$ 上の保型関数をたくさん作る時に用いられます。

テータ関数には次のように準周期性があります。

Theorem 4.2 (準周期性). テータ関数は次の性質を満たします。

1. $\delta', \delta'' \in \mathbf{Q}^g$ について

$$\vartheta_{\epsilon', \epsilon''}(z + \tau\delta' + \delta'', \tau) = e\left(-\frac{1}{2}\delta'\tau {}^t\delta' - \delta' {}^t(z + \delta'') - \delta' {}^t\epsilon''\right) \vartheta_{\epsilon' + \delta', \epsilon'' + \delta''}(z, \tau).$$

2. $m', m'' \in \mathbf{Z}^g$ について

$$\vartheta_{\epsilon' + m', \epsilon'' + m''}(z, \tau) = e(\epsilon' {}^tm'') \vartheta_{\epsilon', \epsilon''}(z, \tau).$$

3. $m', m'' \in \mathbf{Z}^g$ について

$$\begin{aligned} \vartheta_{\epsilon', \epsilon''}(z + m'', \tau) &= e(\epsilon' {}^tm'') \vartheta_{\epsilon', \epsilon''}(z, \tau), \\ \vartheta_{\epsilon', \epsilon''}(z + \tau m', \tau) &= e(-\epsilon'' {}^tm') e\left(-\frac{1}{2}m'\tau {}^tm' - m' {}^tz\right) \vartheta_{\epsilon', \epsilon''}(z, \tau). \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\epsilon', \epsilon'' \text{ について独立}}$

この性質から、テータ関数同士の適当な商をとることによって、Jacobi 多様体上の有理型関数をたくさん作ることが可能です。

4.2 Jacobi 多様体

ここでは C を種数 g の一般の代数曲線として、 C の Jacobi 多様体がどのように定義されたかを復習しておきます。

$H_1(C, \mathbf{Z}) = H_{1, \mathbf{Z}}$ のシンプレクティック基底を $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ として、この基底により (1.1) のように正規化された正則 1-form の空間の基底を $\omega_1, \dots, \omega_g$ とします。

ホモロジー群の元 A_i, B_i を

$$A_i(\omega_j) = \int_{A_i} \omega_j, \quad B_i(\omega_j) = \int_{B_i} \omega_j$$

によって $H^{1,0}$ 上の一次形式とみなします。こうすると、写像

$$\begin{array}{ccc} H_{1, \mathbf{Z}} & \rightarrow & (H^{1,0})^* \xrightarrow[\psi]{\simeq} \mathbf{C}^g \\ & & \psi \mapsto (z_1, \dots, z_g) = (\psi(\omega_1), \dots, \psi(\omega_g)) \end{array}$$

を書き下すと、

$$\begin{array}{ccc} H_{1, \mathbf{Z}} & \rightarrow & \mathbf{Z}^g \tau \oplus \mathbf{Z}^g \\ \iota: \sum_i (\alpha_i A_i + \beta_i B_i) & \mapsto & \tau \alpha + \beta \end{array}$$

という同型が誘導されます。

テータ関数の準周期性を使うことで、次の事実が証明されます。

Theorem 4.3. ^{*s} $n\epsilon', n\epsilon'', n\delta', n\delta'' \in \mathbf{Z}$ となるような十分大きな n をとると,

$$\left(\frac{\vartheta_{\epsilon', \epsilon''}(z, \tau)}{\vartheta_{\delta', \delta''}(z, \tau)} \right)^n$$

は *Jacobi* 多様体 (*Abel* 多様体の一種)

$$J = (H^{1,0})^*/H_1 = \mathbf{C}^g/(\tau\mathbf{Z}^g + \mathbf{Z}^g).$$

上の有理型関数を定めます.

ここで, 上の定理の中の *Jacobi* 多様体の定義では, H_1 の基底を $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ ととり, $(H^{1,0})^*$ の元は線型汎関数とみなしています. B で正規化された $H^{1,0}$ の基底 $\omega_1, \dots, \omega_g$ によって, 周期行列

$$\begin{pmatrix} \int_{A_1} \omega_1 & \cdots & \int_{A_1} \omega_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{A_g} \omega_1 & \cdots & \int_{A_g} \omega_g \\ \int_{B_1} \omega_1 & \cdots & \int_{B_1} \omega_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{B_g} \omega_1 & \cdots & \int_{B_g} \omega_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix}$$

の各行は $\mathbf{C}^g$ の格子 $\mathbf{Z}^g\tau + \mathbf{Z}^g$ の基底を与えています.

$b \in C$ を基点として固定します. $\tilde{b}$ を普遍被覆 $\tilde{C}$ の点とします. つまり,

$$\tilde{C} = \{(u, \gamma) \mid u \in C, \gamma \text{ は } \tilde{b} \text{ と } u \text{ を結ぶ道}\} / \text{homotopy}.$$

こうすると *Abel-Jacobi* 写像が

$$\tilde{C} \rightarrow J(C); \quad (u, \gamma) \mapsto \left(\int_{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{\gamma} \omega_g \right)$$

で定義されます.

あわせて,

$$C \xrightarrow{\text{Abel-Jacobi}} J(C) \xrightarrow{\left(\frac{\vartheta_{\epsilon', \epsilon''}(z, \tau)}{\vartheta_{\delta', \delta''}(z, \tau)} \right)^n} \mathbf{C}$$

が得られます. テータ関数の分母が恒等的に 0 ではない限り, C 上の有理型関数が得られます.

ここまでは群 μ_n の作用は使っていません.

^{*s}D.Mumford, *Tata Lectures on Theta I*, Birkhäuser, 1983, Chapter II, § 3 などを参照.

4.3 変換公式

テータ関数の零点を考察するために、テータ関数の変換公式を用います ([I]). 複雑さを避けるため、ここでは H_{prim}^1 が主偏極を持つ場合を考えます.

Section 3 で出てきた μ_n の生成元 σ の作用を表現する行列

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbf{Z})$$

を思い出します.

$$m = (m', m'') \in \frac{1}{2n}(\mathbf{Z}^g)^2 \text{ とします.}$$

$$\sigma^\# z = z(\gamma\tau + \delta)^{-1}, \quad \sigma^\# \tau = (\alpha\tau + \beta)(\gamma\tau + \delta)^{-1},$$

$$\sigma^\# m = m\sigma^{-1} + \frac{1}{2}((\gamma^t \delta)_0, (\alpha^t \beta)_0).$$

のようにおきます. このとき, 井草 [I] において, $Sp(2g)$ の作用で (z, τ) を動かしたときに, テータ関数がどのように変換されるかという公式が証明されています.

Proposition 4.4. ^{*t} 上の記号で

$$\vartheta_{\sigma^\# m}(\sigma^\# z, \sigma^\# \tau) = \mathbf{e} \left(\frac{1}{2} z(\gamma\tau + \delta)^{-1} \gamma^t z \right) \det(\gamma\tau + \delta)^{\frac{1}{2}} \vartheta_m(z, \tau) \cdot u.$$

ただし, $|u| = 1$ を満たしている.

ここで, $\exp$ の肩の $\frac{1}{2}$ はメタプレクティック群というものに関係して出現しています.

4.4 代数曲線に巡回群の作用があるときの Abel-Jacobi 写像

Section 2 の結果として,

$$H^{1,0}(\chi) = \langle \eta_1 \rangle, \quad H^{1,0}(\bar{\chi}) = \langle \eta_2, \dots, \eta_g \rangle$$

であるとしましょう. ただし, 一般に $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_g$ は Section 1 で述べたように, シンプレクティック基底に合わせて正規化された基底とは限りません. ただし, 生成元 $\sigma \in \mu_n$ の作用に対して $\chi(\sigma) = \omega$ とおくと,

$$\sigma^* \eta_1 = \omega \eta_1, \quad \sigma^* \eta_2 = \bar{\omega} \eta_2, \quad \dots, \quad \sigma^* \eta_g = \bar{\omega} \eta_g.$$

を満たしています.

正規化されてはいない周期行列が

$$\begin{pmatrix} \Omega_A \\ \Omega_B \end{pmatrix} = {}^t(A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g)(\eta_1, \dots, \eta_g) = \begin{pmatrix} \int_{A_1} \eta_1 & \cdots & \int_{A_1} \eta_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{A_g} \eta_1 & \cdots & \int_{A_g} \eta_g \\ \int_{B_1} \eta_1 & \cdots & \int_{B_g} \eta_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{B_g} \eta_1 & \cdots & \int_{B_g} \eta_g \end{pmatrix}$$

^{*t}[I], Chapter II, Theorem 6, Corollary 参照.

という形で定義されます. すると, σ -作用は簡単に表示されます:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} \begin{pmatrix} \Omega_A \\ \Omega_B \end{pmatrix} &= \sigma^t(A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g) (\eta_1, \dots, \eta_g) \\ &= {}^t(A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g) (\sigma^* \eta_1, \dots, \sigma^* \eta_g) \\ &= {}^t(A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g) (\eta_1, \dots, \eta_g) R(\omega) \\ &= \begin{pmatrix} \Omega_A \\ \Omega_B \end{pmatrix} R(\omega).\end{aligned}$$

ここで,

$$\int_{\Gamma} \sigma^* \omega_1 = \omega \int_{\Gamma} \omega_1, \quad \int_{\Gamma} \sigma^* \omega_j = \bar{\omega} \int_{\Gamma} \omega_j \quad (j \in \{2, \dots, g\}) \quad (4.1)$$

であることを用いていて,

$$R(\omega) = \text{Diag}(\omega, \bar{\omega}, \dots, \bar{\omega}).$$

としています. 正規化された基底に直すためには, 両辺に Ω_B^{-1} をかけます. $\tau = \Omega_A \Omega_B^{-1}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_A R(\omega) \Omega_B^{-1} \\ \Omega_B R(\omega) \Omega_B^{-1} \end{pmatrix}$$

となります. このようにして μ_n -作用の公式についての公式

$$\begin{aligned}\gamma\tau + \delta &= \Xi(\sigma), \\ (\alpha\tau + \beta)(\gamma\tau + \delta)^{-1} &= \tau\end{aligned}$$

が得られます. ここで, $\Xi(\sigma) = \Omega_B R(\omega) \Omega_B^{-1}$ です.

μ_n -作用がある場合に $Sp(2g)$ についてのテータ関数の変換公式は, 上の事実を井草の公式 (Proposition 4.4) に適用することで次のようにまとめられます.

Proposition 4.5. *Section 3.1 の状況のもとで, 公式が成り立つ.*

$$\vartheta_{\sigma \# m}(z \Xi(\sigma)^{-1}, \tau) = \mathbf{e} \left(\frac{1}{2} z (\gamma\tau + \delta)^{-1} \gamma^t z \right) \det(R(\omega))^{\frac{1}{2}} \vartheta_m(z, \tau) \cdot u$$

以下, $H_1^{\text{prim}} = H_1$ が成立している場合について考えます. 代数曲線 C が (2.3) で与えられているとします. ベクトル空間 $H^{1,0}(\chi)$ は

$$\eta_1 = \frac{dx}{y}$$

で生成され, ベクトル空間 $H^{1,0}(\bar{\chi})$ は

$$\eta_2 = \frac{dx}{y^*}, \quad \eta_3 = \frac{x dx}{y^*}, \quad \dots, \quad \eta_g = \frac{x^{g-2} dx}{y^*}.$$

で生成されます. ここで,

$$y^* = \frac{x(1-x) \prod_{i=2}^{d+1} (x - \lambda_i)}{y}.$$

さて, $b \in C$ が巡回群 μ_n の作用で固定されるとしましょう (群の作用で固定されるような b が取れない状況もありますが, その場合は工夫が必要です.). 先ほどと同じく, $\tilde{C}$ を C の普遍被覆とします. 今度は C への μ_n -作用は $\tilde{b}$ を固定する $\tilde{C}$ への作用を引き起こします. $\tilde{b}$ からの道は何通りもありますが, 普遍被覆で持ち上がるような道をとります. 先ほど見たことより, $\sigma \in \mu_n$ の作用は, $J(C)$ 上の作用 $z \mapsto z\Omega_B R(\omega)^{-1}\Omega_B^{-1}$ を引き起こします.

以下, 時間がなくなってきたので概略を述べるにとどめます. $\tilde{C}$ 上のベクトル値関数 I^* を

$$I^*(\tilde{z}) = \left(\int_{\tilde{b}}^{\tilde{z}} \eta_1, \int_{\tilde{b}}^{\tilde{z}} \eta_2, \dots, \int_{\tilde{b}}^{\tilde{z}} \eta_g \right)$$

で定義します. そして, $I(\tilde{z}) = I^*(\tilde{z})\Omega_B^{-1}$ とおきます.

- $\sigma \in \mu_n$ の作用で $\vartheta(I(\tilde{z}), \tau)$ がどう変化するかを計算することができます. これは正確に書き切ることができますが, 大体

$$\vartheta_\epsilon(I(\sigma\tilde{z}), \tau) = (\text{因子}) \times \vartheta_\epsilon(I(\tilde{z}), \tau)$$

という形になります. ここで, z が C の分岐点に近づくと, 上記の (因子) は 1 の巾根に近づくと証明されます.

- 代数曲線 C 上の有理型関数を与えている

$$z \mapsto \left(\frac{\vartheta_\epsilon(I(\tilde{z}), \tau)}{\vartheta_\delta(I(\tilde{z}), \tau)} \right)^n$$

の order (mod n) がわかります.

- 運が良ければ, C の分岐点のうち, C 上の有理型関数で, up to const. でテータ関数の商で表示できるようなものを見つけることができます.
- 有理型関数がたくさんあれば, 別の分岐点でもこのようなテータ関数での表示を行います.
- うまく商をとることなどをして, 分岐点 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ を回復することができます.
- 分岐点 $0, 1, \infty, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ の連比が計算されます.

Deligne-Mostow-Terada の表のうち, いくつかの場合はこのやり方で inverse period map を求めることができるとわかっています.

4.5 $(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ の例 ([M2])

ちょっとだけ例を挙げてみます. [DM] の表で $N = 6$ で type no 1 の場合, つまり $(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ の場合を考えます. これはモノドロミー群が算術的になる場合です. このときは inverse period map がどうなっているかが非常によくわかっています. この結果を簡単にまとめます. 詳細は [M2] を見てください.

まず, 互いに異なる複素数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をとり, 代数曲線

$$C: y^3 = x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

を考えます. これは Riemann 球面 $\mathbf{P}^1$ の 6 点で分岐した三重被覆であり, 種数は 4 になります. $H_1 = H_1(C)$ とおきます. すると,

$$H^{1,0}(\chi) = \left\langle \frac{dx}{y} \right\rangle, \quad H^{1,0}(\bar{\chi}) = \left\langle \frac{dx}{y^2}, \frac{xdx}{y^2}, \frac{x^2dx}{y^2} \right\rangle$$

となります. 今, reference curve C_0 を, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ かつ $0 < 1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を満たすようなものとします. すると $H_1(C_0)$ のシンプレクティック基底 $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$ を取ることができます (これは [M2] で具体的に与えられています). このシンプレクティック基底のもとで, σ の $H_1(C)$ への作用が具体的に

$$\sigma = \begin{pmatrix} O & H \\ -H & -I_4 \end{pmatrix}, \quad H = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$$

で与えられることが示されます.

以下, $g = 4$ の時のテータ関数の指標として $\epsilon \in (\frac{1}{6}\mathbf{Z}^4)^2$ で $\epsilon\sigma - \epsilon \in (\mathbf{Z}^4)^2$ を満たすようなものを考えます. この条件は $\epsilon'' = -\epsilon'H$ と同値であるため, パラメータ ϵ'' は ϵ' だけで決まることに気を付けます. 以下, このことに基づいて, パラメータ ϵ を ϵ' を 6 倍したもので代用して書くことにします.

テータ関数の零点の位数を調べることで, 次の結果を示すことができます.

Proposition 4.6. ^{*u} $\mathbf{P}^1$ の点 1 の上にある点 $\tilde{1} \in C$ を基点とすると, 関数

$$f(z) = \frac{\vartheta_{(-1,-3,-3,-3)}(I(\tilde{z}), \tau)^3}{\vartheta_{(1,3,3,3)}(I(\tilde{z}), \tau)^3}$$

は C 上の有理型関数を与える. 更に, f が与える因子 (f) は $3(0) - 3(\infty)$ であり, f は x の定数倍に等しい.

この命題を用いると,

$$\lambda_1 = \frac{f(\lambda_1)}{f(1)} = \frac{\vartheta_\epsilon(I(\tilde{\lambda}_1), \tau)^3 \vartheta_\delta(I(\tilde{1}), \tau)^3}{\vartheta_\delta(I(\tilde{\lambda}_1), \tau)^3 \vartheta_\epsilon(I(\tilde{1}), \tau)^3} = \frac{\vartheta_\epsilon(I(\tilde{\lambda}_1), \tau)^3}{\vartheta_\delta(I(\tilde{\lambda}_1), \tau)^3} = \frac{\vartheta_{(1,1,3,-3)}(\tau)^3}{\vartheta_{(1,-1,3,-3)}(\tau)^3}$$

のように λ_1 のテータ関数による表示を得ます.^{*v} ここでは, $I(\tilde{1}) = 0$ を用いています.

更に, C の 6 つの分岐点 $\infty, 0, 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ のうち, 4 点の複比も次のように見通し良く表示することができます. 6 点の同次座標が $(\nu_{0i} : \nu_{1i})$ のようであったとき, 行列

$$A = \begin{pmatrix} \nu_{01} & \nu_{02} & \nu_{03} & \nu_{04} & \nu_{05} & \nu_{06} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & \nu_{14} & \nu_{15} & \nu_{16} \end{pmatrix}$$

を考えましょう. この i 列と j 列のなす 2×2 小行列の行列式を D_{ij} とします. すると, 例えば復比

$$\lambda_1 = \frac{(\lambda_1 - 0)(1 - \infty)}{(\lambda_1 - \infty)(1 - 0)}$$

は

$$\lambda_1 = \frac{\vartheta_{(1,1,3,-3)}(\tau)^3}{\vartheta_{(1,-1,3,-3)}(\tau)^3} = \frac{D_{24}D_{13}}{D_{14}D_{23}} = \frac{D_{13}D_{24}D_{56}}{D_{14}D_{23}D_{56}}$$

のように表示されます. このように, テータ指標 $(1, 1, 3, -3)$ と $D_{13}D_{24}D_{56}$ が対応し, テータ指標 $(1, -1, 3, -3)$ と $D_{14}D_{23}D_{56}$ が対応します. より一般に, $D_{ij}D_{kl}D_{mn}$ は 15 通りありますが, 実はそれぞれにテータ指標を定めることができます.^{*w}

^{*u}[M2], §6 参照.

^{*v}[M2], §6 には λ_2, λ_3 の具体的なテータ関数表示もあります.

^{*w}[M2], §5 参照.

5 演習

Deligne-Mostow-Terada の表で, $N = 5$ の場合に, モノドロミー群が数論的であるか非数論的であるかを自分で判定してみましょう.

判定法として, 次のものがあります.

(Arith)^{*x}: $r \in \mathbf{Q}$ に対し, $\langle r \rangle$ を mod $\mathbf{Z}$ の 0 以上 1 未満の代表元とする.
 $(\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{N-1}) = \frac{1}{n}(m_0, m_1, \dots, m_{N-1})$ を Deligne-Mostow-Terada にある組とする. 全ての $t \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times - \{1, -1\}$ について

$$\left(\sum \langle t\kappa_i \rangle \right) - 1 = 0$$

または

$$\left(\sum \langle -t\kappa_i \rangle \right) - 1 = d + 1 = N - 2.$$

が成り立っていることが, 周期写像のモノドロミー群が数論的であるための必要十分条件.

5.1 数論的な場合の例

Table 1 の No.9 の場合, つまり

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \frac{1}{n}(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) = \frac{1}{8}(4, 3, 3, 3, 3)$$

の場合を考えます.

$n = 8$ の既約剰余類群は $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times = \{1, 3, 5, 7\}$ であり, 判定法 (Arith) を用いる場合は $t = 3, 5$ を考えることになります.

- $3(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \frac{1}{8}(12, 9, 9, 9, 9) \equiv \frac{1}{8}(4, 1, 1, 1, 1)$ なので,

$$\left(\sum \langle 3\kappa_i \rangle \right) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

- $5(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \frac{1}{8}(20, 15, 15, 15, 15) \equiv \frac{1}{8}(4, 7, 7, 7, 7)$ なので,

$$\left(\sum \langle 5\kappa_i \rangle \right) - 1 = 4 - 1 = 3.$$

これより, 対応するモノドロミー群が数論的とわかります.

5.2 非数論的な場合の例

Table 1 の No.15 の場合, つまり

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \frac{1}{n}(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) = \frac{1}{12}(6, 5, 5, 4, 4)$$

の場合を見てみます.

$n = 12$ の既約剰余類群は $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^\times = \{1, 5, 7, 11\}$ なので, 判定法 (Arith) で考慮されるのは $t = 5, 7$ の場合です.

^{*x}[DM], (12.7.1) 参照.

- $5(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \frac{1}{12}(30, 25, 25, 20, 20) \equiv \frac{1}{12}(6, 1, 1, 8, 8)$ なので,

$$\left(\sum \langle 5\kappa_i \rangle\right) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

- $7(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \frac{1}{12}(42, 35, 35, 28, 28) \equiv \frac{1}{12}(6, 11, 11, 4, 4)$ なので,

$$\left(\sum \langle 7\kappa_i \rangle\right) - 1 = 3 - 1 = 2.$$

この場合は非数論的になります.

参考文献

- [ACT] Allcock, D., Carlson, J.A. and Toledo, D., A complex hyperbolic structure for moduli space of cubic surfaces, C. R. Acad. Sci., 326 (1998), 49-54.
- [DM] Deligne, Pierre., Mostow, G. D., Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, Publications Mathematiques de l'IHES, Tome 63 (1986), pp. 5-89.
- [I] Igusa, J., Theta function, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (GL, volume 194), Springer Berlin Heidelberg, 1972
- [Koi] Koike, Kenji, On the family of pentagonal curves of genus 6 and associated modular forms on the ball. J. Math. Soc. Japan 55 (2003), no. 1, 165-196.
- [Kon] S. Kondo, A complex hyperbolic structure for the moduli space of curves of genus three. (English summary) J. Reine Angew. Math. 525 (2000), 219-232.
- [Kon] S. Kondo, The moduli space of curves of genus 4 and Deligne-Mostow complex reflection groups. In: Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), 383-400, Adv. Stud. Pure Math. 36, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
- [M1] Matsumoto, Keiji, Configuration space of 8 points on the projective line and a 5-dimensional Picard modular group. Compositio Math. 86 (1993), no. 3, 265-280.
- [M2] Matsumoto, Keiji, Theta constants associated with the cyclic triple coverings of the complex projective line branching at six points. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 37 (2001), no. 3, 419-440.
- [MS] Matsumoto, Keiji (J-HOKK); Shiga, Hironori (J-CHIBE-GMP), A variant of Jacobi type formula for Picard curves. (English summary) J. Math. Soc. Japan 62 (2010), no. 1, 305-319.
- [MT1] Matsumoto, K., Terasoma, T., Theta constants associated to cubic threefolds. J. Algebraic Geom. 12 (2003), no. 4, 741-775.
- [MT2] Matsumoto, Keiji; Terasoma, Tomohide, Theta constants associated to coverings of P^1 branching at eight points. Compos. Math. 140 (2004), no. 5, 1277-1301.
- [MT3] Matsumoto, Keiji; Terasoma, Tomohide, Thomae type formula for K3 surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines. J. Reine Angew. Math. 669 (2012), 121-149.

- [Mo] Moonen, Ben, The Deligne-Mostow list and special families of surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2018, no. 18, 5823-5855.
- [Mos] Mostow, G. D., Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions
- [N] Nakayashiki, Atsushi; On the Thomae formula for $Z(N)$ curves, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 33 (1997), no. 6, pp. 987-1015.
- [S1] Shiga, Hironori (J-CHIBE), On the representation of the Picard modular function by theta constants. I, II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 24 (1988), no. 3, 311-360.
- [S2] Shiga, Hironori, One attempt to the K3 modular function I. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 6 (1979), no. 4, 609-635.
- [S3] Shiga, Hironori, On the representation of the Picard modular function by theta constants. I, II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 24 (1988), no. 3, 311-360.
- [Td] Terada, T., Probleme de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergeometriques de plusieurs variables, *J. Math. Kyoto Univ.*, 13(1973), 557-578.