Rokko
Lectures in
Mathematics 2

Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間のゼータ関数

佐藤 文広
(立教大学理学部)

1996 年 5 月
神戸大学理学部数学教室

Rokko Lectures in Mathematics 2

Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間のゼータ関数

佐藤 文広
(立教大学理学部)

1996 年 5 月
神戸大学理学部数学教室

Rokko Lectures in Mathematics **2**

Eisenstein Series and Zeta Functions of Prehomogeneous Vector Spaces

By

Fumihiro SATO (Rikkyo University)

sato@rkmath.rikkyo.ac.jp

May, 1996

Edited and published by

Department of Mathematics
Faculty of Science
Kobe University
Rokko, Kobe, 657 Japan

まえがき

このノートは, 神戸大学において 1995 年 10 月 16 日 ～ 20 日 にかけて行った集中講義の講義ノートに加筆・訂正を行ったものです.

講義の主な目的は, 様々なゼータ関数の関数等式のよって来るところをなるべく統一的に理解しようという試みの一つの到達点である “弱球等質空間の Eisenstein 級数” について解説することでしたが, 天下り的に弱球等質空間から出発するのではなく, 不十分であっても Riemann ゼータ関数から始まるゼータ関数の拡張の流れの中に位置づけて説明するように努力してみました.

§1 ～ 4 までは実際の講義の内容とほとんど同じで, 早田孝博氏が整理してくださったノートによっています. 多大な労力をかけて現在の形にまで仕上げてくださった早田氏に深く感謝いたします.

一方, §5 の内容は, 集中講義では大雑把なプランとしてしか述べられなかったことで, 集中講義の後に行った計算に基づいています. この部分はいまだ端緒的な計算にとどまっているのですが, 筆者個人にとっては長い間目論んでいたことへの突破口というべきものであり, そのきっかけを集中講義という形で与えていただいたことは大変ありがたく思っています. このことを含め, あらゆる面でお世話をいただいた山崎正教授に御礼申し上げます.

1996 年 2 月 14 日
佐藤　文広

目次

1. 関数等式を満たす Dirichlet 級数の系統的構成

このノートでは, 関数等式を満たす Dirichlet 級数（ゼータ関数）を組織的に構成する方法を, 拡張のステップを順次追っていく形で紹介する.

題材を紹介するための出発点として, Riemann のゼータ関数

$$(1) \qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\operatorname{Re} s > 1)$$

から始めよう.

定理 1.1 (Riemann, 1859). (i) $\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続され, $(s-1)\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則.

(ii) $\widehat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ とおくと,

$$(2) \qquad \widehat{\zeta}(1-s) = \widehat{\zeta}(s) \qquad \text{(関数等式)}$$

が成り立つ.

Riemann の 1859 年の論文 [22] には二つの証明が載っている.

Riemann の第一証明.

$$(3) \qquad 2\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s) = i\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\,dz$$

に基づいて積分路を動かすことで証明される. ただし C は 図 1 の積分路である. □

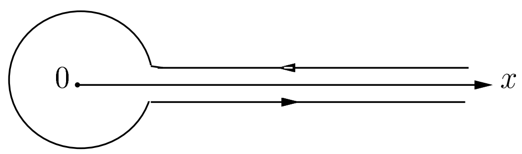


図 1. 積分路 C

Riemann は第一証明の結果として得られた関数等式の対称性に注目して, 対称性の根拠のより鮮明な次の証明に導かれた.

Riemann の第二証明. この証明はテータ級数を用いる.

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \qquad (\operatorname{Im} z > 0) \tag{4}$$

をテータ級数とする. 次の式はよく知られている (Jacobi).

$$\theta(-1/z) = \sqrt{\frac{z}{i}}\theta(z) \qquad (\text{テータの変換公式}). \tag{5}$$

これを使うと,

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}(s) &= \int_0^{+\infty} x^{s/2-1}\left(\frac{\theta(ix)-1}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1 (\dots) + \int_1^{+\infty} (\dots) \\
&= \int_1^{\infty} (x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1})\frac{(\theta(ix)-1)}{2}\,dx + \frac{1}{s(s-1)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

右辺は全ての複素数 s において意味を持ち, $s \mapsto 1-s$ で不変である. 定理はこれからすべて導かれる. □

十九世紀を通じて Dirichlet の L 関数, 二元二次形式のゼータ関数, 代数体の Dedekind ゼータ関数などが導入されてきたが, 二十世紀の初頭になると, テータ公式を用いる第二証明の拡張がいろいろなゼータ関数の関数等式の証明に利用されるようになる.

図 2. ゼータ関数の一般化の歴史

古典的ゼータ関数

Riemann (1859)

Epstein (1903/07) → (図3)

Hecke (Dedekind ゼータの関数等式の証明, 1917)

(量指標の L 関数, 1918/20)

Hey (単純環のゼータ, 1929)

Siegel (不定値二次形式のゼータ, 1938/39)

• Hamburger (関数等式での Riemann ゼータの特徴付け, 1921)

• Wilton (Ramanujan's Δの L 関数,1923)

Hecke (保型形式の L 関数, 1936)

M. Sato (概均質ベクトル空間のゼータ, 1960)

Langlands (保型 L 関数)

Epstein ゼータ関数の場合を見てみよう.

Epstein のゼータ関数 (1903). 簡単のため, 正値二次形式として $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ を考える.

$$\zeta_m(s) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} \frac{1}{(n_1^2+\cdots+n_m^2)^s} \qquad (\operatorname{Re} s > m/2) \tag{7}$$

を Epstein のゼータ関数という. $\widehat{\zeta}_m(s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_m(s)$ とおくと次が成り立つ.

$$\widehat{\zeta}_m\left(\frac{m}{2}-s\right) = \widehat{\zeta}_m(s). \tag{8}$$

証明. 証明は Riemann の第二証明の類似でできる. すなわち,

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}_m(s) &= \int_0^\infty x^{s-1}(\theta(ix)^m-1)\,dx \\ &= \int_1^\infty (x^{s-1}+x^{(m/2-s)-1})(\theta(ix)^m-1)\,dx + \frac{m/2}{s(s-m/2)}.\end{aligned} \tag{9}$$

これより解析接続, 関数等式が導かれる. □

図 2 において Riemann から Siegel までを古典的ゼータ関数と言うことにしよう. 古典的ゼータ関数から Hecke の保型形式の L 関数への矢印は, 関数等式の根拠を (5) のような変換公式の存在に求め, その一般化を目指す方向である. すなわち, 保型形式

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n e^{2n\pi iz/N}, \quad \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = \pm\left(\frac{z}{i}\right)^k \varphi(z) \tag{10}$$

が与えられたとき, Mellin 変換によって保型形式の L 関数が得られると考えるのである.

一方, 古典的ゼータ関数から概均質ベクトル空間のゼータ関数への矢印はベクトル空間上の不変式に対してゼータ関数が得られるとみる見方での一般化である. ここで不変式と言うのは古典的なゼータ関数の場合,

ゼータ関数	Riemann	Epstein	Dedekind	Hey	Siegel
不変式	x	二次形式	$N_{k/\mathbb{Q}}(x)$	reduced norm	二次形式

であり, こういうふうに「良い多項式」があればゼータ関数ができる, という理解の仕方での一般化である. この場合のテータの変換公式はただの Poisson の和公式であると理解する.

さらに図 2 にはまだ現れていないが, Epstein のゼータ関数の一般化に Selberg の Eisenstein 級数がある. Eisenstein 級数は, ゼータ関数とも保型形式ともみることができるが, ここでは「対称空間上の放物型部分群の作用による不変式のゼータ関数」という見方をとることにする.

さて, 関数等式を持つ Dirichlet 級数をまとまって作る方法は, だいたい以上の三通りにまとめられるが,[1] まず, §2 において古典的ゼータ関数から概均質ベクトル空間のゼータ関数への発展について説明する. また, この節では概均質ベクトル空間のゼータ関数の構成法を概均質多様体に拡張して述べている. この拡張自体は自明なものであるが, このノートの全体を通じて重要である.

次に §3 では, 古典的ゼータ関数の第三の拡張の方向である Epstein のゼータ関数から Selberg による $SL_n(\mathbb{Z})$ の Eisenstein 級数への一般化, および, その不定値二次形式への一般化を紹介する. ここでの Eisenstein 級数の取り扱いは, Langlands 流のものではなく, 積分表示に基づいた Riemann の第二証明の流れをくむものである.

上で, Eisenstein 級数を "「対称空間上の放物型部分群の作用による不変式のゼータ関数」とみる" と述べたが, 基礎になる等質空間を対称空間と限らなければ, 実は概均質ベクトル空間のゼータ関数も「放物型部分群の作用による不変式のゼータ関数」とみることができるのである. この見方に立つと概均質ベクトル空間のゼータ関数と Eisenstein 級数をともに含むより広いゼータ関数の族（弱球等質空間の Eisenstein 級数）が見えてくる (p. 24 の図 3 参照). §4 では, GL_n が作用する弱球等質空間についてこのことを説明する. 最後に §5 では, 弱球等質空間の Eisenstein 級数を Langlands の Eisenstein 級数の周期の正則化として得る方法を簡単な例によって解説する. この方法は non-cupidal な保型形式（現在の場合には定数関数にすぎないが）に対する一種の Rankin-Selberg 法であるとみることができる.

このノートでは, 保型 L 関数については扱わない. しかし, 一言だけ注意を述べておこう. 古典的なゼータ関数がことごとく保型 L 関数と考えられることを想起するならば, 概均質ベクトル空間のゼータ関数と Langlands の保型 L 関数との

[1] Hasse-Weil のゼータ関数は関数等式を持つと期待されているが, （少なくともこれまでは）関数等式の証明は保型 L 関数に帰着することによってなされるので, ここでは関数等式を満たす Dirichlet 級数の構成法の中に入れていない.

関係はどのようになっているのかと問うことは自然である．この問いに対して，概均質ベクトル空間のゼータ関数を弱球等質空間の Eisenstein 級数とみる見方と §5 の議論とを結びつけることにより，概均質ベクトル空間のゼータ関数も（Euler 積こそ持たないが）Rankin-Selberg 法から得られる保型 L 関数の親戚であると主張することができる．図 2 において，保型 L 関数と概均質ベクトル空間のゼータ関数は古典的ゼータ関数の異なる方向への拡張として説明したが，ある意味でその両者の合流点がここに見えているのである．

2. Riemann ゼータから概均質ベクトル空間のゼータへ

図 2 を見ていると, Riemann のゼータ関数から概均質ベクトル空間のゼータ関数への道のりは意外に長いことに気がつく. それにはそれなりの理由があり, Riemann の第二証明ではまだあからさまには見えていないもう一つの要素の発見が必要なのであった. それは, Iwasawa-Tate の理論 ([12], [15, Chapter XIV]) で初めて明確にされた局所関数等式 (local functional equation) である.

2.1. 局所関数等式 – Riemann のゼータ関数の場合 –. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数の空間, すなわち $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数で, 任意の多項式 $p(x)$ に対し

$$\sup_x |\, p(x)\partial^m f| < \infty, \qquad \partial^m f = \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} \tag{11}$$

がすべての $m = (m_1, \ldots, m_n)$ に対し成り立つものとする. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\widehat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{2\pi i x y}\, dy \tag{12}$$

を Fourier 変換とする. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は Fourier 変換で不変である. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し次の等式,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n) \qquad \text{(Poisson の和公式)} \tag{13}$$

に基づいて Riemann ゼータ関数の関数等式の証明を再定式化しよう. Poisson の和公式より,

$$\begin{aligned}
&\zeta(s)\int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{s-1}\varphi(x)\,dx \\
&\quad= \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \varphi(nx)\,dx \\
&\quad= \int_1^\infty x^{s-1} \sum_{n\neq 0} \varphi(nx)\,dx \\
&\qquad\quad + \int_1^\infty x^{(1-s)-1} \sum_{m\neq 0} \widehat{\varphi}(mx)\,dx - \left(\frac{\widehat{\varphi}(0)}{1-s} + \frac{\varphi(0)}{s}\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

右辺は任意の複素数 s で意味を持ち $(s,\varphi) \mapsto (1-s, \widehat{\varphi})$ で不変である. (14) 式の左辺に現れている積分

$$\int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{s-1}\varphi(x)\,dx \tag{15}$$

を (無限素点における) 局所ゼータ関数という. この積分は $\mathrm{Re}\, s > 0$ で絶対収束し, さらに s の有理型関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続される. ここで Riemann のゼータ関数の関数等式を既知とするならば, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し局所関数等式

$$\int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{s-1}\widehat{\varphi}(x)\,dx = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\int_{\mathbb{R}^\times}|x|^{(1-s)-1}\varphi(x)\,dx \tag{16}$$

が得られるが, 逆にこの局所関数等式を先に証明することで Riemann のゼータ関数の関数等式の証明が得られる.

試験関数 φ を $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$ と特殊化すると局所関数等式は (あらためて証明する必要はなく) Γ 関数の良く知られた公式となり, 上の議論は Riemann の第二証明そのものに他ならない.

この時点では任意の試験関数 φ を導入することの意義は見えにくいが (これについては, p. 21, 注意 6 参照), それはともかく上記の論法の拡張として

「多項式 $p(x)$, $p^*(x)$ で関数等式,

$$\int |p(x)|^{s-\kappa}\widehat{\varphi}(x)\,dx = (\Gamma\text{ - 成分})\int |p^*(x)|^{-s}\varphi(x)\,dx \tag{17}$$

を満たすものがあると Poisson の和公式と組み合わせて $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^n,\,p(x)\neq 0}\frac{1}{|p(x)|^s}$ と $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^n,\,p^*(x)\neq 0}\frac{1}{|p^*(x)|^s}$ とを結ぶ関数等式ができる」

ことを期待してもよいだろう. 概均質ベクトル空間の理論は, この期待が満たされるような多項式 p, p^* の求め方を与えるのである.

参考のために (16) の行列式版を掲げておこう. 一般に $\varphi \in \mathcal{S}(M(n,\mathbb{R}))$ に対し, 局所関数等式は以下のようになる.

$$\begin{aligned}&\int_{GL(n;\mathbb{R})}|\det(x)|^{s-n}\widehat{\varphi}(x)\,dx\\ &= 2^n(2\pi)^{n(n-1)/2-ns}\prod_{j=0}^{n-1}\cos\frac{\pi(s-j)}{2}\,\Gamma(s-j)\int_{GL(n;\mathbb{R})}|\det(x)|^{-s}\varphi(x)\,dx.\end{aligned} \tag{18}$$

ただし, dx はルベーグ測度で, 局所ゼータ関数を定義する積分は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続されたものとして考える.

2.2. 概均質ベクトル空間. この小節の内容については [14] を参照のこと. 以下, k を標数 0 の体とし, $\bar{k}$ をその代数閉包とする.

G を k 上定義された連結線形代数群とし, V を k - 構造を持つ $\bar{k}$ - ベクトル空間, すなわち, $V = V_k \otimes_k \bar{k}$ なる k - ベクトル空間 V_k が存在するとする. $\rho : G \to GL(V)$ を k 上定義された表現とする.

定義 2.1. (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間 (prehomogeneous vector space, 以下, *p.v.*) であるとは, ある Zariski - 開 $\rho(G)$ 軌道 Ω が V 内に存在するとき. またこのとき, $S = V - \Omega$ を特異点集合と言う. (G, ρ, V) が k 上定義されているとき, 特異点集合 S も自動的に k 上定義される.

定義 2.2. f を V 上の 0 でない有理関数とする. f が相対不変式 (relative invariant) とは,

$$f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x) \qquad (g \in G,\, x \in V) \tag{19}$$

なる指標 $\chi : G \to GL_1$ が存在するとき.

定理 2.3 ([14, pp. 5–6]). (i) 相対不変式 f は対応する指標 χ によって (定数倍を除いて) 一意的に決まる.

(ii) $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n \cup$ (余次元 2 以上の成分), (各 S_j は余次元 1 の成分), を S の k 上の既約分解とする. S_j の定義方程式を f_j とおく:

$$S_j = \{x \in V \mid f_j(x) = 0\}, \qquad f_j \text{ は } k \text{ 上既約な多項式.} \tag{20}$$

このとき, f_j は相対不変式で, k 上定義された任意の相対不変式は

$$c f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \cdots f_n^{\nu_n} \qquad (c \in k^\times, \nu_j \in \mathbb{Z}) \tag{21}$$

と表される.

(iii) k 上定義された相対不変式に対応する G の指標のなす群を $\mathfrak{X}_V(G)$ と表す. このとき, $\mathfrak{X}_V(G)$ は $f_1, \ldots, f_n$ に対応する指標 $\chi_1, \ldots, \chi_n$ で生成される階数 n の自由アーベル群である. また, $x \in \Omega$ に対し $G_x = \{g \in G \mid \rho(g)x = x\}$ とおくと,

$$G \text{ の指標 } \chi \text{ が相対不変式に対応} \iff \chi|_{G_x} \equiv 1.$$

上の定理 (ii) の $f_1, \ldots, f_n$ を k 上の基本相対不変式と言う.

定義 2.4. (G,ρ,V) *p.v.* が正則 (regular) とは, 相対不変式 f で $\det\left(\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$ となるものがあるとき.

G が簡約可能 (reductive) 代数群のときには, 正則という条件は次の定理によって幾何学的にチェックできる.

定理 2.5 ([33]). G が簡約可能代数群のとき, 以下は同値.

(i) (G,ρ,V) 正則 (*regular*).
(ii) S は超曲面.
(iii) Ω はアファイン多様体.
(iv) G_x $(x \in \Omega)$ は簡約可能.

ここで双対概均質ベクトル空間について説明する. (G,ρ,V) *p.v.* に対し, V^* を V の双対空間, $V_k^* = \{v^* \in V^* \mid v^*(V_k) \subset k\}$ を V^* の k - 構造, $\rho^* : G \to GL(V^*)$ を ρ の反傾表現とする. 一般には (G,ρ^*,V^*) も *p.v.* になっているとは限らないが, G が簡約可能のとき, または (G,ρ,V) が正則のときには (G,ρ^*,V^*) も *p.v.* になる.

実際, G が簡約可能のとき, (体の標数を 0 としたので代数閉体上で) 適当な座標系を取れば, G は "$g \mapsto {}^t g^{-1}$" で閉じるようにできる ([19]). このことと, V^* を V と適当な内積で同一視して $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$ とできることから, (G,ρ^*,V^*) も *p.v.* になることがすぐわかる. また, このように実現したときには, (G,ρ,V) の相対不変式と (G,ρ^*,V^*) の相対不変式とを同じものと見なせる.

(G,ρ,V) が正則のときには (G,ρ^*,V^*) が *p.v.* となるばかりでなく, (G,ρ,V) の多くの性質が (G,ρ^*,V^*) に遺伝する. 以下では, (G,ρ^*,V^*) に対して定まる諸概念をそれぞれに * をつけて表す (Ω^*, f^*, 等々).

命題 2.6. (G,ρ,V) が正則のとき, 次が成り立つ.

(i) (G,ρ^*,V^*) も正則 *p.v.* である.
(ii) Ω から Ω^* への G - 同変な k 上の同型が存在する.
(iii) S が超曲面 $\Longleftrightarrow$ S^* が超曲面.
(iv) 相対不変式に対応する G の指標の群 $\mathfrak{X}_V(G)$ と $\mathfrak{X}_{V^*}(G)$ は一致する.

略証. (G,ρ,V) の相対不変式 $p(x)$ に対して, 次の写像を考える：

$$\varphi_p : \Omega \ni x \mapsto \left(\frac{1}{p(x)}\frac{\partial p}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{p(x)}\frac{\partial p}{\partial x_n}\right) \in V^* \tag{22}$$

これは, V, V^* を双対基底を用いて $\bar{k}^n$ と同一視して表示しているが, 実際は φ_p は基底のとり方によらず定まり, G - 同変性

$$\varphi_p(\rho(g)x) = \rho^*(g)\varphi_p(x) \tag{23}$$

を満たす. ここで, (G,ρ,V) が正則ならば, $\det\left(\dfrac{\partial^2 p(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$ を満たす p がある. このような p に対しては, φ_p は支配的 (dominant), すなわち $\varphi_p(\Omega)$ は V^* で稠密であることがわかり, G - 同変性より

$$\varphi_p(\Omega) = \varphi_p(\rho(G)x_0) = \rho^*(G)\varphi_p(x_0) \tag{24}$$

となる. φ_p が支配的 (dominant) であるから $\rho^*(G)\varphi_p(x_0)$ はある V^* の開集合を含まないといけないが, それは Ω^* にほかならない. よって, (G,ρ^*,V^*) は $p.v.$ である. 次に φ_p の逆写像を考える.

$$p(\rho(g)x) = \chi(g)p(x) \tag{25}$$

より,

$$p^*(\rho^*(g)y) = \chi(g)^{-1}p^*(y) \tag{26}$$

を満たす k 上定義された相対不変式 p^* が存在することが確かめられる. p^* は $\varphi_{p^*} : \Omega^* \to V$ をつくると $\varphi_p^{-1} = \varphi_{p^*}$

$$\varphi_p : \Omega \simeq \Omega^* \tag{27}$$

を導く. よって, (1) Ω は アファイン, (2) Ω^* は アファイン, (3) $S = V - \Omega$ は超曲面, (4) $S^* = V^* - \Omega^*$ は超曲面, の 4 条件はみな同値になる. また, $y = \varphi_p(x)$ とおくと $G_x = G_y$ となる. よって, $\mathfrak{X}_V(G) = \left\{\chi \in \mathfrak{X}(G) \;\middle|\; \chi|_{G_x} \equiv 1 \ (x \in \Omega)\right\}$ より, 最後の主張を得る. □

2.3. ゼータ関数の定義. 概均質ゼータ関数は, ベクトル空間としての構造とは関係なく定義される. そのためここでは X を準射影的 (quasi-projective) な代数多様体とし, G が X に概均質的に作用している枠組で考える. そして Γ を G の離散部分群, L を X の Γ-stable な離散集合とするとき, (G, X, Γ, L) で定まる X 上の G - 相対不変式のゼータ関数を定義する.

G を $\mathbb{Q}$ 上定義された連結代数群, X を $\mathbb{Q}$ 上定義された準射影的代数多様体とする. G は X に $\mathbb{Q}$ 上作用しているとする. 以下, 次を仮定する.

仮定 1. G は X に概均質的に作用する, すなわち, ある $x_0 \in X$ に対し $\Omega = G \cdot x_0$ が X で Zariski - 開になる.

$\mathfrak{X}(G) = \mathrm{Hom}_{/\mathbb{Q}}(G, GL_1)$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された G の有理指標の群とする. G が連結より, $\mathfrak{X}(G)$ は有限階数の自由アーベル群 (free-abelian group of finite rank) になる ([11, pp. 103–104]).

定義 2.7. f を零でない有理関数とする. f が G - 相対不変式であるとは,

$$f(g \cdot x) = \chi(g) f(x) \qquad (g \in G,\ x \in X) \tag{28}$$

となる指標 $\chi : G \to GL_1$ が存在するとき (定義 2.2を参照).

特に $\chi \in \mathfrak{X}(G)$ のとき, ある定数 $c \in \mathbb{C}^\times$ により $cf \in \mathbb{Q}(X)$ となることがわかる. また,

$$\mathfrak{X}_X(G) = \{\chi \in \mathfrak{X}(G) \mid \chi \text{ は相対不変式に対応する指標 }\} \tag{29}$$

とおく.

X を代数多様体で, $\dim X = n$ とする. X 上の gauge 形式とは X 上至るところ 零点も極もない n - 形式 (n-form) のことを言い, 代数群 G がユニモジュラ (unimodular) とは G 上両側不変な gauge 形式が存在するときのことを言う.

以下, 次を仮定する.

仮定 2. $x \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ に対し, $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ と置く.

(i) G_x はユニモジュラ.

(ii) 任意の $x \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ に対し, $\mathfrak{X}(G_x^\circ) = \{1\}$. (ただし, G_x° は G_x の 代数群としての単位元の連結成分.)

仮定 2-(i) は簡単のためであるが, 仮定 2-(ii) は本質的である.

仮定 2-(ii) の帰結として, $\mathfrak{X}_X(G)$ は $\mathfrak{X}(G)$ の指数有限な部分群であることが導かれる. $l = \operatorname{rank}\mathfrak{X}_X(G) = \operatorname{rank}\mathfrak{X}(G)$ とおき, $\chi_1, \ldots, \chi_l$ を $\mathfrak{X}_X(G)$ の生成元とし, $f_1, \ldots, f_l$ を対応する相対不変式とする ($p.v.$ のときは基本相対不変式).

$$\mathfrak{X}(G)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{X}_X(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathfrak{X}(G) \otimes \mathbb{C} \tag{30}$$

の元を $\lambda = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \chi_i$, $(\lambda_i \in \mathbb{C})$ と表す. そこで

$$\begin{aligned} |f(x)|^{\lambda} &= \prod_{i=1}^{l} |f_i(x)|^{\lambda_i} \qquad (x \in \Omega_{\mathbb{R}}), \\ |\chi(g)|^{\lambda} &= \prod_{i=1}^{l} |\chi_i(g)|^{\lambda_i} \qquad (g \in G_{\mathbb{R}}) \end{aligned} \tag{31}$$

により, $\Omega_{\mathbb{R}}$ 上の関数 $|f|^{\lambda}$ と $G_{\mathbb{R}}$ の指標 (quasi character) $|\chi|^{\lambda}$ を定める. f_i のとり方は有理数倍しか違わないので $|f|^{\lambda}$ も x の関数としては定数しか違わない.

定義 2.8 (**測度の正規化**). G 上の $\mathbb{Q}$ 上定義された右不変 gauge 形式を ω_G とする. $\Delta \in \mathfrak{X}(G)$ モジュラス指標 (modulus character) を

$$\omega_G(hg) = \Delta(h)\omega_G(g) \qquad (h, g \in G) \tag{32}$$

で定義する. Ω の $\mathbb{Q}$ 上定義された G - 相対不変 gauge 形式 ω_{Ω} で

$$\omega_{\Omega}(hg) = \Delta(h)\omega_{\Omega}(g) \tag{33}$$

を満たすものを固定する. (仮定 2-(i)より存在がいえる.) また ω_G によって定まる $G_{\mathbb{R}}$ 上の右不変測度を $d\omega_G$, ω_{Ω} によって定まる Ω 上の相対不変測度を $d\omega_{\Omega}$ とかく.

G^+ を $G_{\mathbb{R}}$ の位相群としての単位元の連結成分, $G_x^+ = G_x \cap G^+$ $(x \in \Omega_{\mathbb{R}})$ とおく. $\Omega_{\mathbb{R}} = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{\nu}$ を連結成分分解とする. これは G^+ - 軌道分解でもある. G_x^+ 上の両側不変測度 $d\mu_x$ を

$$\int_{G^+} F(g) d\omega_G(g) = \int_{G^+ \cdot x} d\omega_{\Omega}(\dot{g} \cdot x) \int_{G_x^+} F(gh)\, d\mu_x(h) \qquad (F \in L^1(G)) \tag{34}$$

が成立するように正規化する.

定義 2.9 (**ゼータ関数の定義**). 仮定 1, 2 を満たす G, X, および, G の数論的部分群 Γ, $X_{\mathbb{Q}}$ に含まれる Γ-stable な離散集合 L というデータが与えられたとする.

簡単のため $\Gamma \subset G^+$ を仮定する. このとき, $\Omega_{\mathbb{R}}$ の各連結成分 Ω_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\zeta_i(L;\lambda) &= \sum_{x \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \frac{\mu(x)}{|f(x)|^\lambda} \qquad (\lambda \in \mathfrak{X}(G)_{\mathbb{C}}), \\
\mu(x) &= \int_{G_x^+/(\Gamma \cap G_x^+)} d\mu_x
\end{aligned}
\tag{35}
$$

でゼータ関数を定義する. 仮定 2-(ii) より $\mu(x) < \infty$ である (Borel–Harish-Chandra の定理 [1]). また,

$$\Phi_i(\varphi;\lambda) = \int_{\Omega_i} |f(x)|^\lambda \varphi(x)\, d\omega_\Omega(x) \tag{36}$$

で局所ゼータ関数を定義する. ゼータ積分を

$$Z(\varphi, L;\lambda) = \int_{G^+/\Gamma} |\chi(g)|^\lambda \sum_{x \in L \cap \Omega} \varphi(g \cdot x)\, d\omega_G(\dot{g}) \tag{37}$$

とおく. もしこの積分が収束していれば,

$$Z(\varphi, L;\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(L;\lambda)\Phi_i(\varphi;\lambda) \tag{38}$$

が成り立つ. 実際, 形式的に項別積分して積分公式 (34) を用いればよい ([32, p.51] を参照).

注意 1. 直接 $\displaystyle\sum_{x \in L \cap \Omega_i} \frac{1}{|f(x)|^\lambda}$ を考えることができるのなら話は簡単であり, Epstein ゼータ関数の場合などはこのようになっている. しかし一般には Γ が無限群だと発散する. そのため, 一つ一つの Γ - 軌道 $\Gamma \cdot x$ に対してそのサイズを測る量である $\mu(x)$ で重みをつけた $\Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)$ での和を考えるのである ([32, pp.48–50]).

以上は general nonsense であり, このようにして定義されたゼータ関数が実際にゼータ関数と呼ばれるにふさわしい良い性質を持つかどうかはアプリオリには分からない. そこで, 良いゼータ関数を得るにはどのような条件を課すべきかを明らかにせよ, ということが問題になる. これまでに, 以下のような場合が研究されて, 良い性質を持つゼータ関数が構成されている.

(i) 概均質ベクトル空間.
   (G, ρ, V) を $p.v.$ とし, $X = V$, $\Gamma \subset G^+$, $L = V_{\mathbb{Q}}$ の格子, とおいた場合. この場合は次の小節で詳しく見る.

(ii) Eisenstein 級数.
$\widetilde{G}$ を簡約可能代数群, G をその放物型部分群, $\widetilde{\Gamma}$ を $\widetilde{G}$ の数論的部分群, $\Gamma = G^{+} \cap \widetilde{\Gamma}$ とする. $X = \widetilde{G}/H$ を仮定 1 を満たす等質空間とし (対称空間の場合には仮定 1 は自動的に満たされる), $L = \widetilde{\Gamma} \cdot x$ $(x \in X_{\mathbb{Q}})$ とおいた場合. この場合は §3 以降で扱う.

例 1. $\widetilde{G} = GL(n)$, $H = O(n)$, $X = \mathrm{Sym}(n)^{\det \neq 0}$ とする. このとき, x が正の固有値を p 個もつとき $\mathrm{sgn}(x) = (p, n-p)$ と書くことにすると連結成分分解は次のようになる:

$$X_{\mathbb{R}} = \bigcup_{p=0}^{n} X^{(p,n-p)}, \qquad X^{(p,n-p)} = \{x \in X_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{sgn}(x) = (p, n-p)\}. \tag{39}$$

これは (ii) の典型的な例であり, §3 で詳しく論ずる.

例 2. (G, ρ, V) を $p.v.$, Γ を G の数論的部分群, L' を Γ-stable な $V_{\mathbb{Q}}$ の格子とする. このデータに対し, 群 $\widetilde{G} = G \ltimes V$ を積

$$(g, v) \cdot (g', v') = (gg', v + \rho(g)v') \tag{40}$$

で定める. $X = V$ は $\widetilde{G}$ - 等質空間である. $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \ltimes L'$, $\widetilde{L} = \widetilde{\Gamma} \cdot x$ $(x \in V_{\mathbb{Q}})$ を考えると, ($\widetilde{G}$ は簡約可能ではなく, G は $\widetilde{G}$ の放物型部分群でもないが) 概均質ベクトル空間のゼータ関数を上記の (ii) と類似な枠組みに当てはめることができる. $x = 0$ の場合が (i) で説明した場合であり, 一般の $x \in V_{\mathbb{Q}}$ に対しては対応するゼータ関数は Hurwitz のゼータ関数を一般化したようなものになる.

2.4. 概均質ベクトル空間のゼータ関数 (関数等式と解析接続). 以下, (G, ρ, V) を $\mathbb{Q}$ 上定義された $p.v.$ とする. 簡単のため次を仮定する.

仮定 3. (i) G は簡約可能代数群 (reductive algebraic group).
(ii) $S = V - \Omega$ は $\mathbb{Q}$ 上既約超曲面.
(iii) 仮定 2-(ii) が成り立つ.

この仮定と定理 2.5 より, (G, ρ, V) は正則, G_x は簡約可能代数群であることが示され, §2.3 の仮定 2-(i) は自動的に満たされる.

§2.3 の構成を概均質ベクトル空間の場合に適用しよう. 仮定より,

$$S = \{f(x) = 0\}, \qquad f \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上既約多項式}$$

で, 対応する指標を χ とおく. $\mathfrak{X}_X(G)$ は χ で生成される階数 1 の自由加群で

$$\mathfrak{X}(G)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{X}(G) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{X}_X(G) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\chi \simeq \mathbb{C}$$

と同一視する. $\Omega_{\mathbb{R}} = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_\nu$ を連結成分分解, Γ は G^+ に含まれる数論的部分群, L を $\rho(\Gamma)$ で安定 ($\rho(\Gamma)$-stable) な $V_{\mathbb{Q}}$ の格子とする. $n = \dim V$, $d = \deg f$ とし, f の斉次性などによりトーラスの元を使って

$$d\omega_\Omega(x) = \frac{dx}{|f(x)|^{n/d}} \tag{41}$$

と計算できる. するとゼータ関数, 局所ゼータ関数はそれぞれ,

$$\zeta_i(L; s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \frac{\mu(x)}{|f(x)|^s}, \tag{42}$$

$$\Phi_i(\varphi; s) = \int_{\Omega_i} |f(x)|^s \varphi(x) \frac{dx}{|f(x)|^{n/d}} \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})) \tag{43}$$

で定義される. またゼータ積分は

$$Z(\varphi, L; s) = \int_{G^+/\Gamma} |\chi(g)|^s \sum_{x \in L \cap \Omega} \varphi(\rho(g)x)\, dg \tag{44}$$

となる. (dg は G^+ の両側不変測度.)

予想 1. 仮定 2-(ii) のもとで, $\zeta_i(L; s)$, $Z(\varphi, L; s)$ は $\operatorname{Re} s > \dfrac{n}{d}$ で絶対収束.

ρ が既約表現のとき, (G, ρ, V) は 29 タイプに分類されているが, そのうちのほとんどについては証明がある ([30]). 以下では $\zeta_i(L; s)$ は $\operatorname{Re} s \gg 0$ で絶対収束すると仮定して話をすすめる.

さて, ゼータ関数の関数等式は (G, ρ, V) のゼータ関数と (G, ρ^*, V^*) のゼータ関数とを結びつけるものだが, 命題 2.6, 及び, その証明において $k = \mathbb{Q}$ として考えると, (G, ρ^*, V^*) について次の系が得られることを注意しておく.

系 2.10. 仮定 3 のもと,

(i) (G, ρ^*, V^*) も仮定 3 を満たす.
(ii) $\Omega_{\mathbb{R}}$ の連結成分の個数と $\Omega^*_{\mathbb{R}}$ の連結成分の個数は等しい.

$L^* = \{y \in V^*_{\mathbb{Q}} \mid \langle y, L \rangle \subset \mathbb{Z}\}$ とし, (G, ρ^*, V^*) に対しても $\zeta^*_i(L^*; s)$, $\Phi^*_i(\varphi^*; s)$ を定義する. これらについても, $\operatorname{Re} s \gg 0$ で絶対収束することを仮定する. このとき, ゼータ関数は以下の 4 つの性質を持つが, これらがゼータ関数の関数等式成立の根拠になる.

(I) 積分表示 (前出, (38)).

$$Z(\varphi\,, L\,; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(L\,; s)\,\Phi_i(\varphi\,; s),$$
$$Z(\varphi^*, L^*; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(L^*; s)\Phi_i(\varphi^*; s). \tag{45}$$

(II) b 関数の存在.

微分作用素 $f^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ を

$$f^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{\langle x,y\rangle} = f^*(y)e^{\langle x,y\rangle} \tag{46}$$

を満たす定数係数線形微分作用素とする．このとき S の $d = \deg f = \deg f^*$ 次多項式 $b(s)$ で

$$f^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)^{s+1} = b(s)f(x)^s \tag{47}$$

を満たすものが存在する．この $b(s)$ を (G, ρ, V) の b 関数という．$b(s)$ は s について d 次多項式である．((G, ρ^*, V^*) の b 関数もこの $b(s)$ である．)

(III) 局所関数等式.

$$\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots \\ \Phi_\nu\end{bmatrix}(\widehat{\varphi^*}; s) = \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) C(s) \begin{bmatrix}\Phi_1^*\\ \vdots \\ \Phi_\nu^*\end{bmatrix}\left(\varphi^*; \frac{n}{d} - s\right) \qquad (\varphi^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)). \tag{48}$$

ここで,

$$\widehat{\varphi^*}(x) = \int_{V_{\mathbb{R}}^*} \varphi^*(y)\exp(2\pi i\langle x, y\rangle)\,dy,$$
$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{d} \Gamma(s+\alpha_i), \qquad b(s) = b_0\prod_{i=1}^{d}(s+\alpha_i),$$
$$C(s) = (c_{ij}(s))_{i,j=1}^{\nu},\ \ c_{ij}(s) = a^s e^{d\pi i s/2} \times (e^{\pi i s} \text{ と } e^{-\pi i s} \text{ の多項式}).$$

また記号として,

$$\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots \\ \Phi_\nu\end{bmatrix}(\varphi; s) = \begin{pmatrix}\Phi_1(\varphi; s)\\ \vdots \\ \Phi_\nu(\varphi; s)\end{pmatrix} \tag{49}$$

を使った. (以下でもこの記法をしばしば利用する.)

(IV) 積分表示の関数等式.

簡単のため,

$$\widehat{\varphi^*}|_{S_\mathbb{R}} \equiv 0, \quad \varphi^*|_{S^*_\mathbb{R}} \equiv 0 \tag{50}$$

を仮定する. このとき Z, Z^* は s の整関数に解析接続され, 次の関数等式が成立する.

$$Z(\widehat{\varphi^*}, L, s) = v(L)^{-1} Z^* \left(\varphi^*, L^*; \frac{n}{d} - s\right), \qquad v(L) = \int_{V_\mathbb{R}/L} dx. \tag{51}$$

注意 2. $b(s)$ は大切な不変量である. その理由は

(i) ゼータ関数の関数等式の Γ - 成分の形を支配する.

(ii) ゼータ関数の (可能な) 極の位置を与える.

(iii) 技術的には関数等式の証明において Poisson の和公式の適用の際, $S \cap L$ および $S^* \cap L^*$ に対する和の取扱が困難であるが, その困難を消去するのに用いられる (Selberg, Shimura に由来する技法).

注意 3 (KASHIWARA **の定理**, [13]). $\alpha_i > 0 \in \mathbb{Q}$.

注意 4. 結果的には関数等式 (51) は任意の急減少関数 φ^* に対して成立する.

(I)~(IV) についての解説. b 関数の存在について (II):$F(x) = f^*\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) f(x)^{s+1}$ とおく. $F(\rho(g)x) = \chi(g)^s F(x)$ が示されることから, ある定数 $b(s)$ に対し,

$$f^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s \tag{52}$$

が成り立つ. 形から $b(s)$ が s の多項式であることも示される.

局所関数等式について (III):$g \in G^+$ に対し ${}^g\varphi^*(y) = \varphi^*(\rho^*(g)y)$ とおく. $\Phi_i(\widehat{{}^g\varphi^*}; s)$ と $\Phi_j^*({}^g\varphi^*; n/d - s)$ とが同じ G^+ - 不変性を持つことと G^+ - 軌道が ν 個あることから,

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_\nu \end{bmatrix} (\widehat{\varphi^*}; s) = A(s) \begin{bmatrix} \Phi_1^* \\ \vdots \\ \Phi_\nu^* \end{bmatrix} \left(\varphi^*; \frac{n}{d} - s\right) \qquad (\varphi^* \in C_0^\infty(\Omega^*_\mathbb{R})) \tag{53}$$

と, φ^* によらない行列 $A(s)$ を使って書ける. これを残りの $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*_\mathbb{R})$ にまで等式の成立範囲を広げればよい (テクニカルには一番難しい部分).

次に $A(s)$ の形をもう少し詳しく調べる. $\Phi_i(\varphi; s) = \int_{\Omega_i} |f(x)|^{s-n/d}\varphi(x)\,dx$ において, φ を $f(x)\varphi$ に置きかえると

$$\Phi_i(f\varphi; s) = (\operatorname{sgn} f|_{\Omega_i})\Phi_i(\varphi; s+1)$$

を得る. この両辺に関数等式を適用すると $A(s)$ と $A(s+1)$ を関係づける等式が得られる. そして適当な a に対して $A(s)/\left(a^s e^{d\pi i/2}\gamma(s-n/d)\right)$ が $s \mapsto s+2$ で周期的であることを見て $\exp(\pi i s)$ の関数であることを確かめ, さらに Liouville の定理を用いて $\exp(\pi i s)$ の Laurent 多項式であることを示せばよい.

積分表示の関数等式について (IV)： まず, 積分領域を $\chi(g) \geq 1$ と $\chi(g) \leq 1$ に分けて $Z_\pm(\widehat{\varphi^*}, L; s)$ を定義する. すなわち,

$$\begin{aligned}
Z_+(\widehat{\varphi^*}, L; s) &= \int_{G^+/\Gamma,\,\chi(g)\geq 1} \sum_{x\in L\cap\Omega} \widehat{\varphi^*}(\rho(g)x)\,dg,\\
Z_-(\widehat{\varphi^*}, L; s) &= \int_{G^+/\Gamma,\,\chi(g)\leq 1} \sum_{x\in L\cap\Omega} \widehat{\varphi^*}(\rho(g)x)\,dg,\\
Z\,(\widehat{\varphi^*}, L; s) &= Z_+(\widehat{\varphi^*}, L; s) + Z_-(\widehat{\varphi^*}, L; s).
\end{aligned} \tag{54}$$

$Z_+(\varphi, L; s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で絶対収束し, 整関数になる. 実際, 任意の s に対し $\operatorname{Re} s + M$ が収束域に入るような十分大きな自然数 M をとると,

$$\begin{aligned}
|Z_+| &\leq \int_{\chi(g)\geq 1} \chi(g)^{\operatorname{Re} s} \sum_x |\widehat{\varphi^*}(\rho(g)x)|\,dg\\
&\leq \int_{\chi(g)\geq 1} \chi(g)^{\operatorname{Re} s+M} \sum_x |\widehat{\varphi^*}(\rho(g)x)|\,dg\\
&\leq \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^{\operatorname{Re} s+M} \sum_x |\widehat{\varphi^*}(\rho(g)x)|\,dg < \infty.
\end{aligned} \tag{55}$$

一方, Z_- に Poisson の和公式を代入すると,

$$\begin{aligned}
Z_-(\widehat{\varphi^*}, L; s) &= \int_{\chi(g)\leq 1} \chi(g)^s \sum_{x\in L\cap\Omega} \widehat{\varphi^*}(\rho(g)x)\,dg\\
&= v(L)^{-1}\int_{\chi(g)\leq 1} \chi(g)^s \left(\chi(g)^{-n/d} \sum_{y\in L^*\cap\Omega^*} \varphi^*(\rho^*(g)y)\right) dg\\
&= v(L)^{-1}\int_{\chi^*(g)\geq 1} \chi^*(g)^{n/d-s} \sum_{y\in L^*\cap\Omega^*} \varphi^*(\rho^*(g)y)\,dg\\
&= v(L)^{-1} Z_+^*\left(\varphi^*, L^*; \frac{n}{d} - s\right)
\end{aligned} \tag{56}$$

で, これも $\mathbb{C}$ 全体で収束する. ここでの Poisson 和公式は

$$\sum_{x\in L}\widehat{\varphi^*}(\rho(g)x)=\chi(g)^{-n/d}v(L)^{-1}\sum_{y\in L^*}\varphi^*(\rho^*(g)y) \tag{57}$$

である. 仮定 (50) から $S_{\mathbb{R}}$, $S_{\mathbb{R}}^*$ 上では恒等的に零なので, 和を L (または L^*) のかわりに $L\cap\Omega$ (または $L^*\cap\Omega^*$) としてよい. 以上より,

$$Z(\widehat{\varphi^*},L;s)=Z_+(\widehat{\varphi^*},L;s)+v(L)^{-1}Z_+^*\left(\varphi^*,L^*;\frac{n}{d}-s\right)\qquad(\operatorname{Re}s\gg 0). \tag{58}$$

同様に,

$$Z^*\left(\varphi^*,L^*;\frac{n}{d}-s\right)=v(L)Z_+(\widehat{\varphi^*},L;s)+Z_+^*\left(\varphi^*,L^*;\frac{n}{d}-s\right)\ (\operatorname{Re}s\ll 0). \tag{59}$$

この二つの式を比較すると, (IV) が得られる.

注意 5. φ^* についての条件 (50) が無いと

$$\int_{\chi(g)\le 1}\chi(g)^s\left(\chi(g)^{-n/d}v(L)^{-1}\sum_{y\in L^*\cap S^*}\varphi^*(\rho^*(g)y)-\sum_{x\in L\cap S}\widehat{\varphi^*}(\rho(g)x)\right)dg \tag{60}$$

を計算せねばならない. これが計算できれば極におけるゼータ関数の主要部が得られるため, 重要なのだが, これは一般的な記述はできないし, 具体的に場合の計算も難しく, 計算を実行した仕事も多くない. (最近出版された [38] に幾つかの計算例が見られる.)

$\widehat{\varphi^*}|_{S_{\mathbb{R}}}\equiv\varphi^*|_{S_{\mathbb{R}}^*}\equiv 0$ を満たす関数の構成法： $\varphi_0\in C_0^\infty(\Omega_{\mathbb{R}})$ に対し, $\varphi=f^*\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0$ とおく. $\widehat{\varphi^*}=\varphi$ に対し, Fourier 逆変換 $\varphi^\vee=\varphi^*$ をとると条件が満たされる. □

定理 2.11. (G,ρ,V) を正則な *p.v.* とし, (G,V,Γ,L), (または (G,V^*,Γ,L^*)) より定まる *p.v.* ゼータ関数 $\zeta_j(L;s)$, (または $\zeta_j^*(L^*;s)$) を考える. このとき, 次の関数等式が成り立つ.

$$\begin{bmatrix}\zeta_1^*\\ \vdots\\ \zeta_\nu^*\end{bmatrix}\left(L^*;\frac{n}{d}-s\right)=v(L)\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\,{}^tC(s)\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \vdots\\ \zeta_\nu\end{bmatrix}(L;s). \tag{61}$$

(I) $\sim$ (IV) に基づく証明. (I), (III) より,

$$Z(\widehat{\varphi^*}, L; s) = (\zeta_1(L,s), \ldots, \zeta_n(L;s)) \begin{pmatrix} \Phi_1(\widehat{\varphi^*}, s) \\ \vdots \\ \Phi_\nu(\widehat{\varphi^*}, s) \end{pmatrix}$$

$$= \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) (\zeta_1(L,s), \ldots, \zeta_n(L;s))\, C(s) \begin{pmatrix} \Phi_1(\varphi^*, s) \\ \vdots \\ \Phi_\nu(\varphi^*, s) \end{pmatrix}.$$

また, (I), (IV) より, 特に $\varphi_0^* \in C_0^\infty(\Omega_i^*)$ に対し $\varphi^* = f\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_0^*$ とおくと $j \neq i$ ならば $\Phi_j^*(\varphi^*, n/d - s) = 0$ なので,

$$\begin{aligned} &v(L)^{-1}\zeta_i^*\left(L^*, \frac{n}{d} - s\right)\Phi_i^*\left(\varphi^*; \frac{n}{d} - s\right) \\ &\qquad = \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right)\sum_{j=1}^{\nu} c_{ji}(s)\zeta_j(L;s)\cdot\Phi_i^*\left(\varphi^*; \frac{n}{d} - s\right) \end{aligned} \tag{62}$$

を得る. φ_0^* は台がコンパクトで, また相対不変式は同次式であることに注意すると, 部分積分して

$$\begin{aligned} \Phi_i^*(\varphi^*; s) &= \int_{\Omega_i^*} |f^*(y)|^{s-n/d} f\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_0^*(y)\,dy \\ &= (-1)^d \int_{\Omega_i^*}\left(f\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)|f^*(y)|^{s-n/d}\right)\varphi_0^*(y)\,dy. \\ &= (-1)^d \operatorname{sgn}(f^*|_{\Omega_i^*})\, b\,(s - n/d - 1)\int_{\Omega_i^*}|f^*(y)|^{s-n/d-1}\varphi_0^*(y)\,dy \end{aligned} \tag{63}$$

を得る. 最後の積分が零にならないように φ_0^* をとれるので, (62) の両辺を局所ゼータ関数で割ればよい. $\square$

証明をもう一度見直すと, φ_0^* の台を Ω_i^* に含まれるように制限すると $Z^*(\varphi^*, L^*; s)$ が整関数であることから, 等式

$$\begin{aligned} Z^*(\varphi^*, L^*; s) &= \zeta_i^*(L^*; s)\Phi_i^*(\varphi^*; s) \\ &= \pm\zeta_i^*(L^*; s)\, b\left(s - \frac{n}{d} - 1\right)\Phi_i^*(\varphi_0^*; s - 1) \end{aligned} \tag{64}$$

より, $\zeta_i^*(L^*, s)b(s - n/d - 1)$ が整関数であることがわかる. これはつまり, b 関数が極の位置を記述していることを示している.

定理 2.12. $\zeta_i(L;s)$, $\zeta_j^*(L^*;s)$ はそれぞれ $\mathbb{C}$ 全体の有理型関数に解析接続され,

$$b\left(s-\frac{n}{d}-1\right)\zeta_i(L;s), \quad b\left(s-\frac{n}{d}-1\right)\zeta_j^*(L^*;s)$$

は至るところ正則である.

注意 6. 以上の議論で, 試験関数 φ が自由にとれることがきいていることに注意しよう. Riemann ゼータ関数に対応する局所ゼータ関数の場合は, 試験関数を任意の急減少関数に拡げることのメリットは見にくかったが, このように一般化するときには φ の自由度が大きいことが明らかに有利に働いている. また, 一般には φ を $\exp(-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2))$ のような関数に特殊化したからといって局所ゼータ関数 $\Phi_i(\varphi,s)$ を explicit に計算することは難しい (p. 44, 注意 16 参照). かえって, 局所関数等式を導くことの方が易しい場合が多い.

3. Epstein ゼータ関数から Eisenstein 級数へ

まず, Epstein のゼータ関数から復習する. 一般化の過程が見やすいように (7) とは少しだけ違った定式化をする. その後, Selberg による Eisenstein 級数との関係を詳しく見ていく.

3.1. Epstein のゼータ関数. Y を n 次正定値実対称行列とする. $x \in \mathbb{R}^n$: 縦ベクトルに対し, $Y[x] := {}^t x Y x = \sum_{i,j} y_{ij} x_i x_j$ とする. Epstein のゼータ関数を

$$\begin{aligned} \zeta(Y,s) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{Y[x]^s} \qquad (\operatorname{Re} s > n/2), \\ \widehat{\zeta}(Y,s) &= \pi^{-s}\Gamma(s)\,|\det Y|^{s/n}\,\zeta(Y,s) \end{aligned} \tag{65}$$

とする ((7) を参照). これは関数等式

$$\widehat{\zeta}(Y,s) = \widehat{\zeta}\left(Y^{-1}, \frac{n}{2} - s\right) \tag{66}$$

を持つことが示される ((8) を参照). これに対し, 次のような計算を行ってみる.

$$\begin{aligned} |\det Y|^{\frac{s}{n}} \zeta(Y,s) &= |\det Y|^{\frac{s}{n}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{Y[x]^s} \\ &= |\det Y|^{\frac{s}{n}} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \\ x\,:\,\text{原始的}}} \frac{1}{Y[tx]^s} \\ &= |\det Y|^{\frac{s}{n}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{2s}} \sum_{x\,:\,\text{原始的}} \frac{1}{Y[x]^s} \\ &= \zeta(2s) E(Y,s). \end{aligned} \tag{67}$$

ここで,

$$E(Y,s) = |\det Y|^{s/n} \sum_{x\,:\,\text{原始的}} \frac{1}{Y[x]^s} \tag{68}$$

とおいた. これを Eisenstein 級数という. 一般化の過程をみやすくするため, もうすこし解釈を加えよう.

x が原始的であるということは $\gamma \in GL(n,\mathbb{Z})$ の第一列目に x が現れることと同値である. したがって

$$\widetilde{\Gamma} = GL(n,\mathbb{Z}), \quad \Gamma_\infty^{(1,n-1)} = \{\gamma = (\gamma_{ij}) \in \widetilde{\Gamma} \mid \gamma_{21} = \gamma_{31} = \cdots = \gamma_{n1} = 0\}$$

とおくと, 次の対応は 1 : 1 である.

$$\{x : \text{原始的}\}/\{\pm 1\} \longleftrightarrow \widetilde{\Gamma}/\Gamma_{\infty}^{(1,n-1)}$$
$$x = (\gamma \text{ の第一列}) \longleftrightarrow \gamma$$

$Y[\gamma] = {}^t\gamma Y \gamma$ とし, また $n \times n$ 行列に対して $[A]_i$ を A の $i \times i$ 主小行列, またその行列式を $d_i(A) = \det([A]_i)$ で定める. この記号では $Y[x] = d_1(Y[\gamma])$ である. これらを使うと

$$E(Y,s) = 2 \sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}/\Gamma_{\infty}^{(1,n-1)}} d_1(Y[\gamma])^{-s} \det(Y[\gamma])^{s/n} \tag{69}$$

となる. 実際には $\det(Y[\gamma])^{s/n}$ の部分は γ に依存しないことに注意. X_0 を

$$X_0 = \{n \times n \text{ 正定値対称行列}\} \simeq O(n)\backslash GL(n,\mathbb{R})$$
$${}^t gg \leftarrow\!\shortmid g$$

で定義し, また,

$$P^+ = P^+_{1,n-1} = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & * \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in GL(n;\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} P_2 \in GL(n-1;\mathbb{R}), \\ p_1 \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \det P_2 > 0 \end{array} \right\} \tag{70}$$

として P^+ の X_0 への作用を考える. X_0 上の P^+ - 相対不変式を考えるとそれは $d_1(Y)$, $\det(Y)$ の巾積になっている. 実際 $p \in P^+$ に対し,

$$\begin{aligned} d_1(Y[p]) &= p_1^2 d_1(Y), \\ \det(Y[p]) &= \det(p)^2 \det(Y). \end{aligned} \tag{71}$$

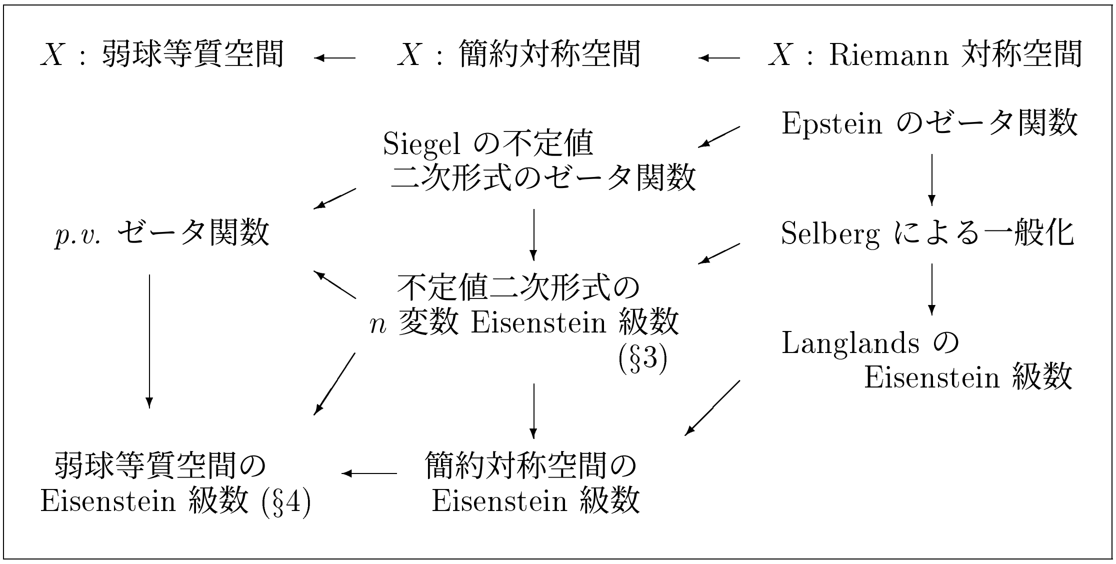
となる. 以上のデータ ($G = P^+, X = X_0$, $\Gamma_\infty^+ = \Gamma_{\infty}^{(1,n-1)} \cap P^+, L = \{Y[\gamma] \mid \gamma \in \widetilde{\Gamma}\}$) から出発して, §2.3 の構成を適用する. ゼータ関数は,

$$\begin{aligned} \zeta(L,s_1,s_2) &= \sum_{x \in L/\Gamma_\infty^+} \frac{\mu(x)}{|d_1(x)|^{s_1} |\det(x)|^{s_2}} \\ &= \sum_{\gamma \in (\widetilde{\Gamma} \cap O(Y))\backslash \widetilde{\Gamma}/\Gamma_\infty^+} \frac{\#(\Gamma_\infty^+ \cap O(Y))^{-1}}{|d_1(Y[\gamma])|^{s_1} |\det(Y[\gamma])|^{s_2}} \end{aligned} \tag{72}$$

となる. この式を見ると $\zeta(L,s,-s/n) = (\text{定数}) E(Y,s)$ という関係になっていることがわかる.

(68) 式と (72) 式とを比べてみよう. すると, Epstein のゼータ関数は実は $GL(n)$ のある (極大) 放物型部分群[2] から決まっていることが見てとれるであろう. このように定式化すると一般に $GL(n)$ の任意の放物型部分群をとっても同様に $\zeta(L,s)$ が定義できる. また G を簡約可能代数群の放物型部分群で, X として Riemann 対称空間をとるなどの一般化もみえてくるであろう.

図 3. Eisenstein 級数の一般化



3.2. Selberg の Eisenstein 級数. Selberg による Epstein のゼータ関数の一般化は以下の通りである ([34, 35] を参照). $X = X_0 = O(n)\backslash GL(n,\mathbb{R})$ とし, $G = P_{1,\dots,1}$ を上三角行列全体とする. $\widetilde{\Gamma} = GL(n,\mathbb{Z})$ に対し, $\Gamma_P = \Gamma_\infty^{(1,\dots,1)} = \widetilde{\Gamma} \cap G^+$, $L = \{Y[\gamma] \mid \gamma \in \widetilde{\Gamma}\}$ とする. このデータ $(P_{1,\dots,1}, X, \Gamma_P, L)$ から得られるゼータ関数は

$$E(Y;z) = \sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}/\Gamma_P} \prod_{i=1}^{n} d_i(Y[\gamma])^{-s_i}, \tag{73}$$

---

[2] 一般に線形代数群 G の極大連結可解部分群を G の Borel 部分群という. Borel 部分群を含む部分群を放物型 (parabolic) 部分群という. $G = GL(n)$ のとき, Borel 部分群は上三角行列群（またはそれと共役な部分群）で与えられる. 放物型部分群は, (70) のように適当なブロック分けをしたときの上三角行列のなす部分群（と共役な部分群）である.

で, $\mathrm{Re}\, s_j > 1$, $(j = 1, \ldots, n-1)$ で絶対収束する. ここでパラメータの関係は

$$\begin{cases} s_i = z_i - z_{i+1} + \dfrac{1}{2} & (i \neq n), \\ s_n = -\dfrac{n+1}{4} - z_n + \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{74}$$

で与えられる. また n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}^n$ への作用を $\sigma = (i, i+1)$ に対し,

$$\sigma(\ldots, z_i, z_{i+1}, \ldots) = (\ldots, z_{i+1}, z_i, \ldots) \tag{75}$$

で定める.

定理 3.1 (Selberg). (i) $E(Y; z)$ は $\mathbb{C}^n$ 全体に有理型関数として解析接続され,

$$\prod_{i<j} \left(z_i - z_j - \frac{1}{2} \right) \times E(Y; z)$$

は $\mathbb{C}^n$ 上至るところ正則.

(ii) $\widehat{E}(Y, z) = \prod_{i<j} \widehat{\zeta} \left(z_i - z_j + \dfrac{1}{2} \right) E(Y; z)$ とおくと, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し, 関数等式

$$\widehat{E}(Y; \sigma z) = \widehat{E}(Y; z) \tag{76}$$

を持つ. ($\widehat{\zeta}$ の定義は, 定理 1.1 参照.)

この種の Eisenstein 級数は, 任意の Riemann 対称空間 $X = K \backslash \widetilde{G}$, $G = \widetilde{G}$ の $\mathbb{Q}$ 上定義された放物型部分群に対して Langlands [16] によって拡張された (K の表現, 放物型部分群の Levi 部分群の保型形式をつけたきわめて一般的な形で). これについては [18] を見てもらうこととし, もととなる $\widetilde{G}$ の等質空間 X を一般化する方向を次節以降で考察する. すなわち, $X = K \backslash \widetilde{G}$ において, K が $\widetilde{G}$ の極大コンパクト部分群とは限らぬ場合への一般化を調べていく.

3.3. 不定値二次形式の Eisenstein 級数. まず, 不定値二次形式の Eisenstein 級数について見てみよう. $\widetilde{G} = GL(n)$, $H = O(n)$ とし, $X = H \backslash \widetilde{G} \simeq \mathrm{Sym}(n)^{\det \neq 0}$ とおく.

$$X_{\mathbb{R}} = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})^{\det \neq 0} = \bigcup_{p=0}^{n} X^{(p, n-p)}$$

を連結成分分解とする ((39) 参照). $P = P_{1,\ldots,1}$ とすると, X に対する P の相対不変式は $d_1(x), \ldots, d_{n-1}(x)$, $d_n(x) = \det(x)$ の n 個となる. Ω を Zariski - 開 P - 軌道, すなわち

$$\Omega = \{ x \in X \mid d_i(x) \neq 0 \ (1 \leq i \leq n) \} \tag{77}$$

とする. Ω の実有理点は,

$$\Omega_{\mathbb{R}} = \bigcup_{p=0}^{n} (\Omega_{\mathbb{R}} \cap X^{(p,n-p)}) = \bigcup_{p=0}^{n} \left(\bigcup_{\operatorname{sgn} \varepsilon = (p,n-p)} \Omega_\varepsilon \right) = \bigcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n} \Omega_\varepsilon \tag{78}$$

と分解する. ここで, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ であり, $\operatorname{sgn} \varepsilon = (p, n-p)$ とは ε_i のうち $+1$ が p 個あるとき. そして,

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega_{\mathbb{R}} \mid d_i(x) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_i |d_i(x)|\} \tag{79}$$

とおいた. $Y \in X_{\mathbb{R}}$ (Y が不定値のときには $Y \in X_{\mathbb{Q}}$) に対し, 次式で Eisenstein 級数 $E_\varepsilon(Y; z)$ を定義する.

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(Y; z) &= \sum_{x \in (\widetilde{\Gamma} \cdot Y \cap \Omega_\varepsilon)/\Gamma_\infty} \prod_{i=1}^{n} |d_i(x)|^{-s_i} \\ &= \sum_{\gamma}{}^{(*)} \prod_{i=1}^{n} |d_i(Y[\gamma])|^{-s_i}. \end{aligned} \tag{80}$$

最後の和 $\sum_{\gamma}^{(*)}$ は

$$\gamma \in (\widetilde{\Gamma} \cap O(Y)) \backslash \widetilde{\Gamma} / \Gamma_\infty, \quad d_j(Y[\gamma]) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_j |d_j(Y[\gamma])| \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{81}$$

となる γ を渡り, s_j と z_j の関係は (74) で与えられる.

注意 7. Selberg の Eisenstein 級数 (73) はちょうど $X^{(n,0)}$ のときにあたり, 軌道は $X^{(n,0)} = \Omega_{(1,\ldots,1)}$ と一つだけになっている. 一般には $\operatorname{sgn} Y = (p, n-p)$ だと, $\binom{n}{p}$ 個のゼータ関数ができる. (このことは Selberg 自身, [35, p.187] で述べているが結果を書いたものは無いようである.)

注意 8. $E_\varepsilon(Y, z) \neq 0$ ならば, $\operatorname{sgn} Y = \operatorname{sgn} \varepsilon$ である.

注意 9. 上で Eisenstein 級数を定義する際, Y が正定値ならば Y は任意の実行列でよかったが, Y が不定値のときには $Y \in X_{\mathbb{Q}}$ を仮定した. この有理性の仮定は本質的であり, 正定値の場合と決定的に異なる点である. 実際, Y:不定値, $Y \notin \mathbb{R}^\times \cdot M(n, \mathbb{Q})$, $n \geq 3$ と仮定すると, $E_\varepsilon(Y, z)$ は発散する. このことを見るために, 次の結果を思い出そう.

予想 2 (**一般** Raghunathan **予想**, M. Ratner **により** 1994 **年証明** [20]). G をユニモジュラ連結 Lie 群, Γ を $\operatorname{vol}(G/\Gamma) < \infty$ な離散部分群, H を巾単元で生成

されている部分群とする. このとき任意の $x \in G/\Gamma$ に対しある閉部分群 $L = L(x)$ があって, $H \cdot x$ の閉包が $L \cdot x$ に一致する.

これが証明される前に, 次のことが Dani-Margulis によって示されていた ([3]):

「Y が上の仮定を満たすとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ に対し, ある $X \in M(n, n-1; \mathbb{Z})$ が存在して

$$\|Y[X] - A\| < \varepsilon$$

が成り立つことが一般 Raghunathan 予想の $G = SL_n(\mathbb{R})$, $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ の場合から従う ([17, §5.2, Remark]).」

これから $Y \notin \mathbb{R}^\times \cdot X_\mathbb{Q}$ の場合の $E_\varepsilon(Y; z)$ の発散が示される. また関連する有名な結果として次の定理がある. 上の Dani-Margulis の注意はこの一般化であった.

Margulis **の定理** (Oppenheim **予想**). Y が上の仮定を満たすとする. α を定数とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$|Y[x] - \alpha| < \varepsilon \tag{82}$$

なる $x \in \mathbb{Z}^n$ が存在する.

さて, 不定値二次形式の Eisenstein 級数に戻ろう.

定理 3.2. (i) $E_\varepsilon(Y; z)$ は $\mathrm{Re}\, s_1 > 1, \ldots, \mathrm{Re}\, s_{n-1} > 1$ で絶対収束し, $\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数に解析接続され, $\displaystyle\prod_{i<j}\left(z_i - z_j - \frac{1}{2}\right)^2 E_\varepsilon(Y; z)$ は整関数になる.

(ii) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とし,

$$\widehat{E}_\varepsilon(Y; z) = \prod_{i<j} \widehat{\zeta}\left(z_i - z_j + \frac{1}{2}\right) E_\varepsilon(Y; z) \tag{83}$$

とおくと, 関数等式

$$\widehat{E}_\varepsilon(Y; \sigma z) = \sum_{\mathrm{sgn}\,\eta = \mathrm{sgn}\,\varepsilon = \mathrm{sgn}\, Y} C_{\varepsilon,\eta}(\sigma, z) \widehat{E}_\eta(Y; z) \tag{84}$$

を満たす. ここで, $C_{\varepsilon,\eta}(\sigma, z)$ は, $\sigma = (i, i+1)$ のときには,

$$\begin{cases} C_{\varepsilon,\eta} = 0 & (\eta \text{ が } \varepsilon \text{ とも } \sigma\varepsilon \text{ とも違うとき}), \\ C_{\varepsilon,\varepsilon} = 1 & (\sigma\varepsilon = \varepsilon), \\ \begin{bmatrix} C_{\varepsilon,\varepsilon} & C_{\varepsilon,\sigma\varepsilon} \\ C_{\sigma\varepsilon,\varepsilon} & C_{\sigma\varepsilon,\sigma\varepsilon} \end{bmatrix}(\sigma, z) = \begin{pmatrix} \sec \pi(z_{i+1} - z_i) & \tan \pi(z_{i+1} - z_i) \\ \tan \pi(z_{i+1} - z_i) & \sec \pi(z_{i+1} - z_i) \end{pmatrix} & (\sigma\varepsilon \neq \varepsilon) \end{cases}$$

と表される関数である.

定理 3.2 の証明のスケッチ.

第一の証明. $\prod_{i<j}\zeta\left(z_i-z_j+\dfrac{1}{2}\right)E_\varepsilon(Y;z)$ を考えるとこれは次の $p.v.$ のゼータ関数になっている.

$$
\begin{aligned}
G &= SO(Y)\times GL(n-1)\times GL(n-2)\times\cdots\times GL(1),\\
V &= M(n,n-1)\oplus M(n-1,n-2)\oplus\cdots\oplus M(2,1),\\
\rho(g_n,\ldots,g_2,g_1)(v_{n-1},\ldots,v_2,v_1) &= (g_nv_{n-1}g_{n-1}^{-1},\ldots,g_{i+1}g_ig_i^{-1},\ldots,g_2v_1g_1^{-1}).
\end{aligned}
$$

この $p.v.$ にゼータ関数の一般論を適用する. この方法による収束の証明については [24], 関数等式の証明については [23] を参照. □

第二の証明. 以下, §2.3 に合わせて左作用で書く. P を下三角行列全体, $X=\mathrm{Sym}(n)^{\det\neq0}$, $\widetilde{\Gamma}=GL(n,\mathbb{Z})$, $\Gamma_\infty=\widetilde{\Gamma}\cap P$ とする. §2.3 の積分表示や, ゼータ関数の定義を使って証明をするのだが, 実際は関数等式の証明には使いにくいので次のように少し修正を加える. 定理の関数等式を証明するためには $\sigma=(i,i+1)$ について証明すれば十分である. この方針にしたがってデータを取り換える. まず,

$$
\begin{aligned}
P^{(i)} &= \left\{\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0\\ * & m & 0\\ * & * & p_2\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{matrix} p_1\in GL(i-1),\ p_2\in GL(n-i-1),\\ p_1,\ p_2 \text{ は下三角},\ m\in GL(2)\end{matrix}\right\},\\
G^{(i)} &= P^{(i)}\times GL(1),\\
X^{(i)} &= \mathrm{Sym}(n)^{\det\neq0}\oplus M(2,1).
\end{aligned}
\tag{85}
$$

$G^{(i)}$ の $X^{(i)}$ への作用は,

$$
(p,t)\cdot(x,v)=(px\,{}^tp,mvt^{-1})\qquad ((p,t)\in G^{(i)},\ (x,v)\in X^{(i)})
\tag{86}
$$

で与え, また,

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\infty^{(i)} &= (\widetilde{\Gamma}\cap P^{(i)})\times\{1\},\\
L^{(i)} &= \widetilde{\Gamma}\cdot Y\oplus\mathbb{Z}^2
\end{aligned}
\tag{87}
$$

とする. $G^{(i)}$ は $X^{(i)}$ に概均質に作用する. 基本相対不変式は,

$$
\begin{cases}
f_j(x,v)=d_j(x) & (j\neq i),\\
f_i(x,v)=d_{i+1}(x)\,m(x)[v].
\end{cases}
\tag{88}
$$

ただし,

$$m(x) = ([x]_{i+1}^{-1} \text{ の右下の } 2 \times 2 \text{ 小行列})$$

とした. 開 $G^{(i)}$ 軌道は,

$$\Omega^{(i)} = \{(x,v) \in X^{(i)} \mid f_j(x,v) \neq 0,\ \ (1 \le j \le n)\} \tag{89}$$

で, 実有理点の分解は

$$\begin{aligned} \Omega^{(i)}_{\mathbb{R}} &= \bigcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n} \Omega^{(i)}_{\varepsilon}, \\ \Omega^{(i)}_{\varepsilon} &= \{(x,v) \in \Omega^{(i)}_{\mathbb{R}} \mid \operatorname{sgn} f_j(x,v) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_j,\ (1 \le j \le n)\}, \end{aligned} \tag{90}$$

で与えられ, 指標群は

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(G^{(i)})_{\mathbb{C}} &= \mathfrak{X}(G^{(i)}) \otimes \mathbb{C} \\ &= (\mathfrak{X}(P^{(i)}) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\mathfrak{X}(GL(1)) \otimes \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{X}(P) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}} \end{aligned} \tag{91}$$

で, この同型は, p の (j,j) 成分を p_j と略記することにして,

$$\begin{cases} \mathfrak{X}(P^{(i)})_{\mathbb{C}} \ni \chi \mapsto \chi|_P, \\ \mathfrak{X}(GL(1)) \ni t \mapsto (t : p = (p_{ij}) \mapsto p_{i+1}), \end{cases} \tag{92}$$

によって, また $\lambda \in \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}$ と z の対応は,

$$\lambda = \sum_j z_j \chi_j^{(2)} - \frac{1}{2}\Delta_P, \quad \chi_j^{(2)}(p) = p_j^2, \quad \Delta_P(p) = \prod_{j=1}^{n} p_j^{-(n-2j+1)} \tag{93}$$

によって与えられる. ただし Δ_P は P の右不変 gauge 形式によってきまるモジュラス指標である. $|\chi|^\lambda$ は同型を通して $\mathfrak{X}(G^{(i)})_{\mathbb{C}}$ の元とみなすと,

$$\begin{aligned} |\chi(p,t)|^\lambda = \prod_{j \neq i, i+1} & p_j^{2z_j + (n-2j+1)/2} \cdot (p_i p_{i+1})^{2z_i + (n-2i+1)/2} \\ & \times t^{2z_{i+1} + (n-2z_{i+1}+1)/2 - 2z_i - (n-2z_i+1)/2} \end{aligned} \tag{94}$$

となる.

さて, $E_\varepsilon(Y;z)$ の新しい積分表示を求めよう. $\varphi \in C_0^\infty(X^{(p,n-p)}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対し, ゼータ積分は

$$Z^{(i)}(\varphi, L^{(i)}; \lambda) = \int_{G^{(i)}_{\mathbb{R}}/\Gamma^{(i)}} |\chi(p,t)|^\lambda \sum_{(x,v) \in L^{(i)} \cap \Omega^{(i)}} \varphi((p,t)\cdot(x,v))\, d\omega_{P^{(i)}}(p)\, \frac{dt}{t}$$

となる ((37) 参照). すると局所ゼータ関数 ((36) 参照)

$$\Phi^{(i)}_{\varepsilon}(\varphi, \lambda) = \int_{\Omega^{(i)}_{\varepsilon}} |f(x,v)|^\lambda \varphi(x,v)\, d\omega_{\Omega^{(i)}}(x,v)$$

を使って,

$$Z^{(i)}(\varphi, L^{(i)}; \lambda) = \zeta\left(z_i - z_{i+1} + \frac{1}{2}\right) \sum_{\operatorname{sgn}\varepsilon=(p,n-p)} E_\varepsilon(Y; z)\Phi_\varepsilon^{(i)}(\varphi; \lambda)$$

が成り立つことが示される ((38) 参照).

φ の変数 v に関する部分 Fourier 変換を

$$\widehat{\varphi}(x, v^*) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, v) \exp(2\pi i\, {}^t v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v^*)\, dv \tag{95}$$

とする. (内積をこう捻っておくと双対側の作用の記述が少し簡単になる.) これを使って, 積分表示の関数等式と局所ゼータ関数等式が得られる.

(i) 積分表示の関数等式. $\sigma \in \mathfrak{S}$ に対し,

$$Z^{(i)}(\widehat{\varphi}, L^{(i)}; \lambda) = Z^{(i)}(\varphi, L^{(i)}; \sigma\lambda). \tag{96}$$

この証明は, 変数 v に関する Poisson の和公式を使って $p.v.$ のときと同様に議論をする.

(ii) 局所関数等式.

(a) $\varepsilon = \sigma\varepsilon$ のとき,

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon^{(i)}(\widehat{\varphi}; \lambda) &= \pi^{-2(z_i - z_{i+1} + 1/2)} \\ &\quad \times \Gamma\left(z_i - z_{i+1} + \frac{1}{2}\right)^2 \cos\pi(z_i - z_{i+1})\Phi_\varepsilon^{(i)}(\varphi; \sigma\lambda).\end{aligned} \tag{97}$$

(b) $\varepsilon \neq \sigma\varepsilon$ のとき,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Phi_\varepsilon^{(i)} \\ \Phi_{\sigma\varepsilon}^{(i)} \end{bmatrix}(\widehat{\varphi}; \lambda) &= \pi^{-2(z_i - z_{i+1} + 1/2)}\Gamma\left(z_i - z_{i+1} + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & \sin\pi(z_{i+1} - z_i) \\ \sin\pi(z_{i+1} - z_i) & i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_\varepsilon^{(i)} \\ \Phi_{\sigma\varepsilon}^{(i)} \end{bmatrix}(\varphi, \sigma\lambda).\end{aligned} \tag{98}$$

この証明は, $\Phi_\varepsilon^{(i)}(\widehat{\varphi}; \lambda)$ を

$$\int (x \text{ についての積分}) \int (x \text{ を固定して } v \text{ の積分})$$

の形に書いた場合, v での積分が本質的に二元二次形式に対する局所ゼータ関数,

$$\int |x^2 + y^2|^s \widehat{f}(x, y)\, dx\, dy \tag{99}$$

になり, そこに関数等式を適用する.

以上の結果を総合すると $p.v.$ のゼータ関数のときと同様にして定理の関数等式が得られる. $\square$

注意 10. 証明の要点は, $\Gamma_\infty \subset \Gamma_\infty^{(i)}$ という大きめの群でまず分けておいて, それぞれをさらに分割することにある.

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(Y;s) &= \sum_{\substack{x\in GL(n,\mathbb{Z})\cdot Y/\Gamma_\infty \\ x\in\Omega_\varepsilon}} \prod_j |d_j(x)|^{-s_j} \\ &= \sum_{x\in GL(n,\mathbb{Z})\cdot Y/\Gamma_\infty^{(i)}} \prod_{j\neq i} |d_j(x)|^{-s_j} d_{i+1}(x)^{-s_i} \sum_{\gamma\in\sim\backslash GL(2,\mathbb{Z})/\left(\begin{smallmatrix}1&0\\ \mathbb{Z}&1\end{smallmatrix}\right)} d_1(m(x)[\gamma])^{-s_i} \end{aligned}$$

今の場合, 後半の γ に関する和は $\mathrm{Sym}(2)^{\det\neq 0}$ の Eisenstein 級数になっている. $\mathrm{Sym}(2)^{\det\neq 0}$ の Eisenstein 級数とは, 本質的には二元二次形式のゼータ関数であり, その関数等式が $E_\varepsilon(Y;s)$ の関数等式に反映する. このことを正当化するのが, 上に与えた証明である. 証明の詳細は [25] にある. [25] では, $\widetilde{G}$ が $\mathbb{Q}$ 上分解する単連結な半単純代数群, H が $\widetilde{G}_\mathbb{R}$ の極大コンパクト群の複素化の場合に書いてあるが, 議論のポイントは上の通りである.

4. 弱球等質空間の Eisenstein 級数

$\widetilde{G}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された連結簡約可能代数群, H を $\mathbb{Q}$ 上定義された閉部分群とし, $X = \widetilde{G}/H$ とおく. このとき, X は $\mathbb{Q}$ 上定義された準射影的代数多様体の構造を持っている.

4.1. 弱球等質空間の Eisenstein 級数.

定義 4.1. X が球等質空間 (spherical variety) とは $\widetilde{G}$ の Borel 部分群 $\widetilde{B}$ の作用に関して Zariski - 開軌道があるとき.

定義 4.2. X が弱球等質空間とは $\widetilde{G}$ のある ($\widetilde{G}$ と異なる) 放物型部分群 P の作用に関して Zariski - 開軌道があるとき. P を明示したいときには P - 球等質空間という.

X が球等質であれば, 弱球等質 ($\widetilde{B}$ - 球等質) である.

X を $\mathbb{Q}$ 上定義された放物型部分群 P に対し P - 球等質とする. $\widetilde{\Gamma}$ を $\widetilde{G}$ の数論的部分群, $\Gamma = \Gamma_P = \widetilde{\Gamma} \cap P$, また, $x \in X_{\mathbb{Q}}$ に対して $L = \widetilde{\Gamma} \cdot x$ とおく. この § ではデータ (P, X, Γ_P, L) が仮定 2-(ii) を満たすとして, §2.3 に従ってゼータ関数を定義し, その性質を見ていく.

$\lambda \in \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}$ に対し,

$$\zeta_i(L;\lambda) = \sum_{y \in (\widetilde{\Gamma}\cdot x \cap \Omega_i)/\Gamma_P} \frac{\mu(y)}{|f(y)|^{\lambda}} \tag{100}$$

がゼータ関数であった. $\lambda = z - \frac{1}{2}\Delta_P$ とおくと関数等式がきれいになるので

$$E_i(P;x,z) = \zeta_i\left(L; z - \frac{1}{2}\Delta_P\right) \tag{101}$$

を弱球等質空間 X の Eisenstein 級数と定義する. 関数等式を記述する際, 一般に P も変わるのでそれも明示的に書くことにする.

希望としては, かなり一般的な条件のもとで $E_i(P;x,z)$ は良いゼータ関数を与えることを期待したい. すなわち,

(i) 収束, $z \in \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}$ について解析接続ができる等ということ.
(ii) $\widetilde{G}$ の Weyl 群の作用で関数等式を満たす.

(iii) $E_i(P;x,\lambda)$ を $x\in X_{\mathbb{Q}}/\widetilde{\Gamma}$ の関数と見ると $\widetilde{\Gamma}$ - 同値類の良い不変量を与える.

等など.

本節では, $\widetilde{G}=GL(n)$ (または $GL(m_1)\times\cdots\times GL(m_l)$), $\widetilde{\Gamma}=GL(n,\mathbb{Z})$ (または $GL(m_1,\mathbb{Z})\times\cdots\times GL(m_l,\mathbb{Z})$) の場合に (i), (ii) が若干の条件の下で成り立つことを説明したい. この場合は $p.v.$ とおおいに関係しているのでその理論を持ち込むことができるのである. (iii) については, このノートでは触れない. [9], [10] を見てほしい.

注意 11. ゼータ関数 ζ_i を Eisenstein 級数と呼ぶ理由の一つは, それが放物型部分群の不変式から構成され $X_{\mathbb{R}}$ において x の属す連結成分が Riemann 対称空間のときには Langlands の Eisenstein 級数に一致しているからであるが, もう一つの理由として $x\in X_{\mathbb{Q}}$ の関数と見たとき Hecke 作用素の "固有関数" を与え, $X_{\mathbb{Q}}$ の合同部分群位相に関する完備化上の調和解析において連続スペクトルを記述すると予想されるからである. 上記の希望 (iii) はこのことと関係している. これについては, やはり [10] を参照のこと.

$\widetilde{G}=GL(m_1)\times\cdots\times GL(m_l)$, H を $\widetilde{G}$ の閉部分群, P を放物型部分群, $X=\widetilde{G}/H$ とする. $\widetilde{G}_{\mathbb{Q}}$ - 共役で P は次の形をしているとしてよい:

$$P=P^{(1)}_{e_1^{(1)},\dots,e_{r_1}^{(1)}}\times\cdots\times P^{(l)}_{e_1^{(l)},\dots,e_{r_l}^{(l)}},\qquad \sum_{j=1}^{r_k}e_j^{(k)}=m_k,$$

$$P^{(j)}_{e_1^{(j)},\dots,e_{r_j}^{(j)}}=\left\{\begin{pmatrix}p_1 & & & \text{\Large 0}\\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large $*$} & & & p_j\end{pmatrix}\;\middle|\; p_k\ \text{は}\ GL(e_k^{(j)})\ \text{の下三角行列}\right\}. \tag{102}$$

X が P - 球等質になるのはいつかを書き出してみよう. $n_j^{(i)}=e_1^{(i)}+\cdots+e_j^{(i)}$, $(1\le j\le r_i)$ とおく. また,

$$\begin{aligned} G'&=\left(\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{r_i-1}GL(n_j^{(i)})\right)\times H,\\ V&=\bigoplus_{i=1}^{l}\bigoplus_{j=1}^{r_i-1}M(n_j^{(i)},n_{j+1}^{(i)}) \end{aligned}\tag{103}$$

とおき,

$$\rho((g_j^{(i)}),h)(v_j^{(i)})=(g_j^{(i)}v_j^{(i)}g_{j+1}^{(i)}{}^{-1}) \tag{104}$$

で G' の V への作用を定める. ただし, $h=(g^{(1)}_{r_1},\dots,g^{(l)}_{r_l})\in H$ とした.

補題 4.3 ([27, Prop. 3.2, Th. 3.6]). (i) $X=\widetilde{G}/H$ が P-球等質になることと (G',ρ,V) が *p.v.* であることとは同値.

(ii) $x_0=eH\in X_{\mathbb{Q}}$ に対し, データ $(P,X,\Gamma_P,\widetilde{\Gamma}\cdot x_0)$ から定まる *Eisenstein* 級数 $E_i(P;x_0,z)$ は (G',ρ,V) のゼータ関数を用いて表せる.

注意 12. 定理 3.2 の第一証明に現れた *p.v.* はこの (G',ρ,V) である.

実はある意味で, 逆も成り立つ. すなわち, Epstein のゼータ関数を Eisenstein 級数に読み替えた §3.1 の議論が一般化されて, 任意の *p.v.* のゼータ関数はある $GL(m_1)\times\cdots\times GL(m_l)$ の作用する弱球等質空間の Eisenstein 級数と見ることができる. したがって,

$$(p.v.\ \text{のゼータ関数}) \Longleftrightarrow (\text{一般線形群の弱球等質空間の Eisenstein 級数})$$

と言ってよい. では, 両者は全く同等かというと, 視点の転換にはそれなりの意味があって, 弱球等質空間側で見る利点として次のような点が挙げられる.

(i) 関数等式が見やすくなる.

(ii) 一般化しやすい. (表現論との関係, 保型 L 関数との関係など, 示唆的なことがある.)

(iii) 概均質ベクトル空間の位置づけが明確になる. 概均質ベクトル空間の理論は一般線形群の理論なのである.

以下では弱球等質空間上で一般論がどこまで展開できるかを紹介しよう.

4.2. 収束と解析接続.

$\mathfrak{X}_X(P)$ の部分半群,

$$\mathfrak{X}^+_X(P)=\{\chi\in\mathfrak{X}_X(P)\mid \chi\ \text{の相対不変式は}\ X\ \text{上至るところ正則}\} \tag{105}$$

をとる. また $\mathfrak{X}(P)_{\mathbb{R}}=\mathfrak{X}_X(P)\otimes\mathbb{R}$ において, $\mathfrak{X}^+_X(P)$ の張る錐 (cone) の内点を $\mathfrak{X}(P)^+_{\mathbb{R}}$ で表す. すなわち

$$\mathfrak{X}(P)^+_{\mathbb{R}}=\left\{\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^+_X(P)}a_\chi\chi\ \middle|\ a_\chi>0\right\}. \tag{106}$$

また $\mathfrak{X}(P)^+_{\mathbb{C}}=\mathfrak{X}(P)^+_{\mathbb{R}}+i\mathfrak{X}(P)_{\mathbb{R}}$ とおく.

定理 4.4 (**収束の十分条件**, [28, Th. 3.1]). 次の仮定

(i) $\mathfrak{X}(H^\circ)=\{1\}$, $\quad H^\circ=H$ の単位元連結成分

(ii) ある $x \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ に対し $P_x^{(1)} = \{p \in P \mid px = x,\ \chi(p) = 1\ (\chi \in \mathfrak{X}(P))\}$ は連結半単純 または $\{1\}$.

が満たされるとき, $E_i(P; x, z)$ は $z \in -\dfrac{1}{2}\Delta_P + \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}^{+}$ で絶対収束.

この定理より §3.3 において (80) で定義された $E_\varepsilon(Y; z)$ の $\mathrm{Re}\, s_1, \dots, \mathrm{Re}\, s_{n-1} > 1$ での収束がわかる (定理 3.2). また, この定理の結果は多くの場合 best possible である.

定理 4.5 (**解析接続**, [28, Th. 3.2]). 次の三条件を仮定する.

(i) ある定数 δ に対し $E_i(P; x, z)$ は $\delta + \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}^{+}$ で収束する.

(ii) $\mathfrak{X}(H^\circ) = \{1\}$, H° は簡約可能.

(iii) P_x $(x \in \Omega)$ は簡約可能.

このとき, $E_i(P; x, z)$ は z の有理型関数として $\mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}$ $(\simeq \mathbb{C}^r)$ 全体に解析接続される.

系 4.6 ([28, Cor. 3.3]). H が簡約可能なとき, 定理 4.4 の仮定 (i), (ii) が満たされていれば定理 4.5 の結論は正しい.

4.3. 関数等式. 一般の場合も余り変わらないので, 簡単のため $\widetilde{G} = GL(m)$ としよう. $P \subset Q \subseteq \widetilde{G}$ を考える. $Q = L_Q N_Q$ と分解する. ただし,

$$L_Q = \begin{pmatrix} L_1 & & & 0 \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L_l \end{pmatrix}, \qquad N_Q = \begin{pmatrix} 1_{e_1} & & & 0 \\ & 1_{e_2} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1_{e_l} \end{pmatrix}, \tag{107}$$

また,

$$w = w_Q = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_l \end{pmatrix}, \quad J_j = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in GL(e_j) \tag{108}$$

とする. $P_Q = P \cap L_Q$ を L_Q の放物型部分群とし, ${}^wP = (w\, {}^tP_Q w^{-1}) \cdot N_Q$ とおく. この ${}^wP$ すなわち, もとの P のブロックの大きさを並べ換えて作られる新しい放物型部分群を P に同伴的な放物型部分群という. w により, $L_{{}^wP} \ni h \mapsto whw^{-1} \in L_P$

の引き戻しで自然に $w : \mathfrak{X}(P) \simeq \mathfrak{X}({}^wP)$ あるいは, $w : \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{X}({}^wP)_{\mathbb{C}}$ が導かれる. (同じ記号 w で書く.)

P から作られる Eisenstein 級数と${}^wP$ から作られる Eisenstein 級数との間に関数等式があることを期待したいのであるが, 一般には勝手な Q ではダメで以下のような条件が必要になる.

P が $X = \widetilde{G}/H$ に概均質に作用しているとき, Q も概均質作用する. Ω_Q を開 Q - 軌道とし $Q_x = \{a \in Q \mid a \cdot x = x\}$ とおく. 完全列 (exact sequence)

$$1 \to N_Q \to Q \to L_Q \to 1 \tag{109}$$

において Q_x の L_Q 内の像を H_Q とし, $X_Q = L_Q/H_Q$ とおく. X が P - 球等質なので次の補題が成立する.

補題 4.7. *X_Q は P_Q - 球等質である.*

定義 4.8. P と P' が (H, Q) - 同伴的とは次の二条件が成り立つときである.

(i) P, P' を含むある放物型部分群 Q が存在して $P' = {}^{w_Q}P$.

(ii) P_Q - 球等質空間 X_Q に対し (103), (104) のやり方で定義される $p.v.$ が正則.

注意 13. H, H_Q, P_x がすべて簡約可能ならば 定義 4.8 (ii) が成立する.

定義 4.9. P と P' が H - 同伴的とは, 放物型部分群の列 $\{P_j\}$, $\{Q_j\}$ で

$$P = P_0,\ P_n = P',\ P_{j-1} \subset Q_j,\ P_j \subset Q_j \quad (0 \le j \le n)$$

を満たし 各 P_{j-1}, P_j は (H, Q_j) - 同伴的なもの, が存在するとき.

P, P' が H - 同伴的のとき, 上のような P と P' を結ぶ放物型部分群の列 $\{Q_j\}$ から定まる写像

$$w = w_{Q_n} \circ w_{Q_{n-1}} \circ \cdots \circ w_{Q_1} : \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{X}(P')_{\mathbb{C}}$$

の全体を $W_H(P, P')$ で表す. また, $\mathcal{P}$ で放物型部分群の H - 同伴類全体を表す. $W_H(P, P')$ は G の Weyl 群の部分集合となっている.

定理 4.10 (**関数等式**, [28, Theorem 3.5]). *P, $P' \in \mathcal{P}$ に対し, 各 Eisenstein 級数 $E_i(P; x, z)$, $E_i(P'; x, z)$ について定理 4.5 が成り立つとする. このとき任意の*

$w \in W_H(P, P')$ について,

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_\nu \end{bmatrix}(P'; x, wz) = C_{\mathrm{sph}}(w, z) \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_\nu \end{bmatrix}(P; x, z) \times C_{\mathrm{Eis}}(w, z) \tag{110}$$

が成り立つ. ここで, $C_{\mathrm{Eis}}(w, z)$ は P, $\widetilde{\Gamma}$ のみに依存し $\widehat{\zeta}(s)$ の積で記述される関数であり, $C_{\mathrm{sph}}(w, z)$ は $X_{\mathbb{R}}$, P のみに依存する $\nu \times \nu$ 行列で成分が $\Gamma(s)$ や $e^{\pi i s/2}$ で記述される関数である (注意 14 を参照).

例 3. §3.3 の $E_\varepsilon(Y; s)$ にこの定理を適用してみよう. $\widetilde{G} = GL(n)$, $H = O(n)$, $X = \mathrm{Sym}(n)^{\det \neq 0}$ のとき. P を下三角行列全体とし, Q として (85) の行列群 $P^{(i)}$ をとる. すると,

$$w_Q = \begin{pmatrix} 1_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-i-1} \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから ${}^{w_Q}P = P$ である. すべての i を考えることにより $\mathcal{P} = \{P\}$ であり, $W_H(P, P) = \mathfrak{S}_n$ となることがわかる. この n 次対称群が関数等式を記述する群になっている.

定理 4.10 の証明の方針. P, P' を (H, Q) - 同伴的とする. $X_Q = L_Q/H_Q$, $P_Q = P \cap L_Q$ に対し, (103), (104) の方法で正則 *p.v.* $(G'_Q = G''_Q \times H_Q, \rho_Q, V_Q)$ をつくる. $Q \times G''_Q$ の $X_Q \times V_Q$ への作用を

$$(q, g'') \cdot (x, v) = (q \cdot x,\ \rho_Q(g'', \ell(q))v)$$

で定義する. ただし, $q = \ell(q)n(q) \in L_Q N_Q$ である. 反傾表現 ρ_Q^* を使って $X_Q \times V_Q^*$ への作用も同様に定まる. データ $(Q \times G''_Q, X_Q \times V_Q, \Gamma \times G''_Q(\mathbb{Z}), \widetilde{\Gamma} \cdot x \times V_Q(\mathbb{Z}))$ から 出発して積分表示 $Z_Q(\varphi; \lambda)$ をつくる. 一方, 同様に $(Q \times G''_Q, X_Q \times V_Q^*, \Gamma \times G''_Q(\mathbb{Z}), \widetilde{\Gamma} \cdot x \times V_Q^*(\mathbb{Z}))$ から出発して $Z_Q^*(\varphi^*; \lambda)$ をつくる. V_Q 変数に関する部分 Fourier 変換

$$\widehat{\varphi}(x, v^*) = \int_{V_Q(\mathbb{R})} \varphi(x, v) \exp(2\pi i \langle v, v^* \rangle)\, dv \tag{111}$$

を使うことにより, $Z_Q(\varphi,\lambda)$ と $Z_Q^*(\varphi^*,\lambda)$ の間の関数等式を得ることができる. 局所関数等式も同様にして得られる. これは実質的に $p.v.$ (G'_Q,ρ_Q,V_Q) の場合の局所関数等式である. そして, §3 でやったのと同様に積分表示, 積分表示の関数等式, 局所関数等式, b 関数から, Eisenstein 級数の $w = w_Q$ に対する関数等式が得られる. (技術的には複雑になっているが, 定理 3.2 の第二証明と全く同じ考え方である.) □

4.4. $C_{\mathbf{sph}}(w,z)$ の解釈. $\widetilde{G} = GL(m_1)\times\cdots\times GL(m_l)$ に対し, $\widetilde{G}^+$ の極大コンパクト群 $K = SO(m_1)_{\mathbb{R}}\times\cdots\times SO(m_l)_{\mathbb{R}}$ をとる. dk で K 上の両側不変測度を表す.

定理 4.11 ([28, Th. 3.7]). $z \in \mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}$, $x \in X_{\mathbb{R}}$, $\Omega_{\mathbb{R}} = \bigcup_i \Omega_i$, (連結成分分解) とし,

$$\omega_i(P;x,z) = \int_{\{k\in K \mid k\cdot x\in\Omega_i\}} |f(k\cdot x)|^{z+\Delta_P/2}\,dk \tag{112}$$

とおく. このとき $\omega_i(P;x,z)$ は $z \in -\frac{1}{2}\Delta_P + \mathfrak{X}(P)^+_{\mathbb{C}}$ で絶対収束し, $\mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}$ 上の有理型関数に解析接続される. また $w \in W_H(P,P')$ に対し関数等式

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_\nu\end{bmatrix}(P;x,z) = {}^tC_{\mathrm{sph}}(w,z)\begin{bmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_\nu\end{bmatrix}(P';x,wz) \tag{113}$$

が成り立つ.

注意 14. $\mathrm{Ind}_{P^+}^{G_{\mathbb{R}}^+}(|x|^{z+\Delta_P/2})$ が $X_{\mathbb{R}}$ 上に実現され, そのときの K - 不変元が ω_i である. この定理から $C_{\mathrm{sph}}(w,z)$ が $X_{\mathbb{R}}$ にしか依存しないことがわかる.

例 4. 次の場合を考えよう.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{G} = GL(2)\times GL(2)\times GL(2),\\
&H = \Delta(SL(2)) = \{(h,h,h) \mid h\in SL(2)\},\\
&X = \widetilde{G}/H,\\
&P = B\times B\times B, \qquad B = \left\{\begin{pmatrix} * & 0\\ * & * \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

P は X に概均質に作用する．さて，基本相対不変式を計算しよう．座標を $x = (x_1, x_2, x_3) \cdot H \in X$ ととる．

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x_2 x_3^\vee)_{12}, & f_4(x) &= \det x_1, \\ f_2(x) &= (x_3 x_1^\vee)_{12}, & f_5(x) &= \det x_2, \\ f_3(x) &= (x_1 x_2^\vee)_{12}, & f_6(x) &= \det x_3, \end{aligned} \tag{114}$$

ここで，

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ に対し，} g^\vee = (\det g) g^{-1} (\text{余因子行列}), \quad (g)_{ij} = g \text{ の } (i,j)\text{ - 成分}$$

とした．f_j に対応する指標を χ_j とすると，

$$\begin{aligned} \chi_i(b) &= \chi_i(b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}) = b_{11}^{(j)} b_{11}^{(k)}, \qquad \{i,j,k\} = \{1,2,3\}, \\ \chi_{3+i}(b) &= \det b^{(i)}, \qquad (i = 1,2,3). \end{aligned} \tag{115}$$

また，

$$\mathfrak{X}(P)^+_{\mathbb{C}} = \left\{ \lambda = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \chi_i \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\lambda_j > 0,\ j = 1,2,3 \right\} \tag{116}$$

となる．$\widetilde{\Gamma} = GL(2,\mathbb{Z}) \times GL(2,\mathbb{Z}) \times GL(2,\mathbb{Z})$ に対し，Eisenstein 級数を書くと次のようになる．(Eisenstein 級数は $\Omega_{\mathbb{R}}$ の各連結成分によらずに同じものが出てくることがわかるので一つだけ書くことにする.)

$$\begin{aligned} E(P; x, z) &= \prod_{k=1}^{3} |\det x_k|^{-z_2^{(k)} + 1/2} \\ &\quad \times \sum_{\substack{y \in \Gamma_P \backslash \widetilde{\Gamma} \cdot x \\ f_j(y) \neq 0}} \prod_{i=1}^{3} |f_i(y)|^{-(1 + \sum_{j=1}^{3} (-1)^{\delta_{ij}} (z_1^{(j)} - z_2^{(j)}))/2}. \end{aligned} \tag{117}$$

ただし，$z = \sum_j^3 \sum_i^2 z_i^{(j)} \Lambda_i^{(j)}$，$(\Lambda_i^{(j)} = b_{11}^{(j)}\ (i=1),\ = \det b^{(j)}\ (i=2))$ とおいた．この場合，$\mathcal{P} = \{P\}$ で $W_H(P,P) = \langle \sigma_1 \rangle \times \langle \sigma_2 \rangle \times \langle \sigma_3 \rangle \simeq \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ である．$\sigma_j : z_1^{(j)} \to z_2^{(j)}$ (互換) に対し，

定理 4.12. (i) $E(P; x, z)$ は

$$\sum_{j=1}^{3} (-1)^{\delta_{ij}} (\mathrm{Re}\, z_1^{(j)} - \mathrm{Re}\, z_2^{(j)}) > 1 \qquad (i = 1,2,3) \tag{118}$$

で絶対収束し，$\mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^6$ 上の有理型関数に解析接続される．

(ii) 次の関数

$$\left(\sum_{j=1}^{3}(z_1^{(j)}-z_2^{(j)})-1\right)\prod_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}(-1)^{\delta_{ij}}(z_1^{(j)}-z_2^{(j)})-1\right) \times\prod_{i=1}^{3}\zeta(z_1^{(i)}-z_2^{(i)}+1)E(P;x,z) \tag{119}$$

は $\mathfrak{X}(P)_{\mathbb{C}}$ 上整関数.

(iii) 次の関数

$$\begin{aligned}&\widehat{E}(P;x,z)\\ &=\prod_{i=1}^{3}\widehat{\zeta}(z_1^{(i)}-z_2^{(i)}+1)E(P;x,z)\,\Gamma\left(\frac{\sum_{j=1}^{3}(z_1^{(j)}-z_2^{(j)})+1}{4}\right)\\ &\quad\times\prod_{i=1}^{3}\Gamma\left(\frac{z_2^{(i)}-z_1^{(i)}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sum_{j=1}^{3}(-1)^{\delta_{ij}}(z_1^{(i)}-z_2^{(j)})+1}{4}\right)\end{aligned} \tag{120}$$

は $W_H(P,P)$ の作用で不変.

注意 15. この場合,

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{Eis}}&=\prod_{i=1}^{3}\widehat{\zeta}(z_1^{(i)}-z_2^{(i)}+1),\\ C_{\mathrm{sph}}&=\Gamma\left(\frac{\sum_{j=1}^{3}(z_1^{(j)}-z_2^{(j)})+1}{4}\right)\\ &\quad\times\prod_{i=1}^{3}\Gamma\left(\frac{z_2^{(i)}-z_1^{(i)}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sum_{j=1}^{3}(-1)^{\delta_{ij}}(z_1^{(i)}-z_2^{(j)})+1}{4}\right)\end{aligned} \tag{121}$$

である.

例 5 (**関数等式を持たない例**). $\widetilde{G}=GL(n)$ とし, H として対角成分がすべて 1 の下三角行列全体を取る. P は下三角行列全体とする. $xH\in X=\widetilde{G}/H$ に対し, 基本相対不変式は

$$f_j=\begin{vmatrix}x_{1,j} & x_{1,j+1} & \dots & x_{1,n}\\ x_{2,j} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n-j+1,j} & x_{n-j+1,j+1} & \dots & x_{n-j+1,n}\end{vmatrix}\qquad(1\le j\le n) \tag{122}$$

となる. このとき $\tilde{\Gamma}$ に対し, Eisenstein 級数を考えるのだが, 実は

$$E(P;x,z)=(\text{定数})\prod_{i=1}^{n}|t_i|^{-z_i-(n-2i+1)/2}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\zeta(z_i-z_j)}{\zeta(z_i-z_j+1)} \tag{123}$$

と計算できてしまう. ただし, $x=\gamma\,\mathrm{diag}([t_1,\ldots,t_n])H$. この Eisenstein 級数には関数等式は存在しない. というのは, 関数等式の形は x に依存してはならないのであるが, 上の式の $\{t_j\}$ の現れ方を見ると, そのような z の変数変換はありえないからである. また, P に対し (H,Q) - 同伴的になるような P' が存在せず, $W_H(P,P')=\emptyset$ $(P\neq P')$, $W_H(P,P)=1$ であることからもこのことは説明できる.

5. Rankin-Selberg 法との関係

前節では, $\widetilde{G} = GL(n_1) \times \cdots \times GL(n_r)$ が作用する弱球等質空間の場合には, 概均質ベクトル空間の理論を援用することにより Eisenstein 級数がかなり一般的に調べられることを見た. しかし, $\widetilde{G}$ が $GL(n)$ の直積とは限らぬ一般の簡約可能代数群の場合には概均質ベクトル空間の理論はもはや役に立たない. このようなケースを取り扱ったものに [25] があるが, これとて §3 で見たような, 関数等式が二元二次形式のゼータ関数のそれに帰着する場合に限られており, 一般の場合に通用するものではなかった. この節の目的は, どのようにしてこの制限を乗り越えたらよいかを考えることである. 本節の内容の詳細は, 現在準備中のプレプリント [29] に含まれる予定である.

5.1. ゼータ積分と Eisenstein period. §4 の関数等式の変換行列は次のような形をしていた:

$$(C_{\mathrm{sph}} = X_{\mathbb{R}} \text{ の上の球関数の関数等式}) \otimes (C_{\mathrm{Eis}} = \text{Langlands Eisenstein 級数})$$

よって 弱球等質空間の Eisenstein 級数も何らかの方法で Langlands の Eisenstein 級数から作られていると想像することができる.[3] ところで, §4 でのやりかたでは大きな Q という放物型部分群のデータから得られるゼータ積分を利用していて, もともとの P でのゼータ積分は役に立っていない. そこを反省して直接, データ $(P, X, \Gamma_P, \widetilde{\Gamma}{\cdot}x)$ から得られるゼータ積分 ((37) 式参照)

$$Z(\varphi; z) = \int_{P^+/\Gamma_P} |\chi(p)|^{z-\Delta_P/2} \sum_{y \in \widetilde{\Gamma}\cdot x \cap \Omega} \varphi(p \cdot y)\, d\omega_P(p) \tag{124}$$

($d\omega_P$ は P の右不変測度) を出発点にしてみよう.

試験関数 $\varphi \in C_0^\infty(X_{\mathbb{R}})$ に対して,

$$\int_{H^+} \psi(gh^{-1})\, d_r h = \varphi(gx), \qquad H^+ = \left\{ g \in \widetilde{G}^+ \mid g \cdot x = x \right\} \tag{125}$$

[3] この節では, Langlands の Eisenstein 級数と弱球等質空間の Eisenstein 級数が同時に現れて混乱しやすいかもしれない. そこで, 区別しやすいように Langlands のそれに対しては, “Langlands の” ないしは “実解析的” という形容詞を付けることにする.

となる $\psi \in C_0^\infty(\widetilde{G}^+)$ をとる ($d_r h$ は H^+ の右不変測度). これを使うと, $\Gamma_H = \widetilde{\Gamma} \cap H^+$ とおいて,

$$Z(\varphi; z) = \int_{P^+/\Gamma_P} |\chi(p)|^{z-\Delta_P/2} \sum_{\substack{\gamma \in \widetilde{\Gamma}/\Gamma_H \\ \gamma x \in \Omega}} \int_{H^+} \psi(p\gamma h^{-1})\, d_r h\, d\omega_P(p) \tag{126}$$

とかける. これは (積分の絶対収束が成り立っているとして)

$$Z(\varphi; z) = \int_{H^+/\Gamma_H} d_r h \int_{P^+/\Gamma_P} |\chi(p)|^{z-\Delta_P/2} \sum_{\substack{\gamma \in \widetilde{\Gamma} \\ \gamma x \in \Omega}} \psi(p\gamma h^{-1})\, d\omega_P(p) \tag{127}$$

となる. P^+/Γ_P での積分はだいたい Langlands 風の Eisenstein 級数の形になっている. この点を明確にするため, さらに変形をしてみよう.

K を $\widetilde{G}^+$ の極大コンパクト部分群とし, $\psi \in C_0^\infty(\widetilde{G}^+)$ を両側 K - 不変と仮定する. Iwasawa 分解 $\widetilde{G}^+ = P^+K$ に従って, $g = p(g)k(g)$ と分解する.

$$\begin{aligned}
&\int_{P^+/\Gamma_P} |\chi(p)|^{z-\Delta_P/2} \sum_{\substack{\gamma \in \widetilde{\Gamma} \\ \gamma x \in \Omega}} \psi(p\gamma h^{-1})\, d\omega_P(p) \\
&\qquad = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_P \backslash \widetilde{\Gamma} \\ \gamma x \in \Omega}} \int_{P^+} |\chi(p)|^{z-\Delta_P/2} \psi(p\gamma h^{-1})\, d\omega_P(p)
\end{aligned}$$

$\gamma h^{-1} = p(\gamma h^{-1}) k(\gamma h^{-1})$ と分解すると ψ は特に右 K - 不変であることから,

$$= \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_P \backslash \widetilde{\Gamma} \\ \gamma x \in \Omega}} \int_{P^+} |\chi(p)|^{z-\Delta_P/2} \psi(p \cdot p(\gamma h^{-1}))\, d\omega_P(p)$$

$p \cdot p(\gamma h^{-1})$ をあらためて p と置き換えて,

$$= \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_P \backslash \widetilde{\Gamma} \\ \gamma x \in \Omega}} |\chi(p(\gamma h^{-1}))|^{-(z-\Delta_P/2)} \int_{P^+} |\chi(p)|^{z-\Delta_P/2} \psi(p)\, d\omega_P(p)$$

となる. ここで,

$$E_\Omega(g; z) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_P \backslash \widetilde{\Gamma} \\ \gamma \cdot x \in \Omega}} |\chi(p(\gamma g))|^{-(z-\Delta_P/2)} \qquad (g \in \widetilde{G}^+), \tag{128}$$

また,

$$\widehat{\psi}(z) = \int_{P^+} |\chi(p)|^{z-\Delta_P/2} \psi(p)\, d\omega_P(p) \tag{129}$$

と定める. ($\widehat{\psi}$ は $\widetilde{G}^+$ の帯球関数による球 Fourier 変換で, $\widetilde{G}^+$ の Weyl 群の作用に関して関数等式を満たしている.) この E_Ω の定義において, 和の条件 $\gamma \cdot x \in \Omega$ がなければ本物の Langlands の Eisenstein 級数 $E(g; z)$ である. これらの記号を使うと, K - 不変な φ に対し, 両側 K - 不変な ψ が定まり,

$$\sum_i E_i(P; x, z)\Phi_i(\varphi; z) = Z(\varphi; z) = \int_{H^+/\Gamma_H} E_\Omega(h^{-1}; z)\, d_r h \times \widehat{\psi}(z) \tag{130}$$

が成り立つ. ここで, 左側の等号の成立は (38) による. 一方, φ が K - 不変のとき, 局所ゼータ関数は

$$\Phi_i(\varphi; z) = \int_{X_\mathbb{R}} \omega_i(P; y, z)\varphi(y)\, d\omega_X(y) \tag{131}$$

とかける. この積分は上述のような ψ を取ってやると, $\widetilde{G}^+$ 上の積分に直せ, そこで Iwasawa 分解を利用すると容易に

$$\Phi_i(\varphi; z) = \widehat{\psi}(z)\omega_i(P; x, z) \tag{132}$$

となって, 結局, 積分表示から試験関数 φ の効果を取り除いた公式

$$\sum_i E_i(P; x, z)\omega_i(P; x, z) = \int_{H^+/\Gamma_H} E_\Omega(h^{-1}; z)\, d_r h \tag{133}$$

が得られた.

注意 16. §2.4 の注意 6 で, 試験関数を特殊なものにとっても局所ゼータ関数の explicit な計算は難しいといったのは, とどのつまりは球関数 $\omega_i(P; x, z)$ の explicit な計算が難しいということである. この球関数は多変数の超幾何関数のようなものであり, 少なからぬ場合に Heckman-Opdam の超幾何関数で表される ([7] 参照). この種の事実のもっとも早い例は, Siegel の不定値二次形式のゼータ関数についての論文 ([36]) の中に見られる. そこでは不定値二次形式に対する局所ゼータ関数が, Gauss の超幾何関数を用いて表されており, この場合の局所関数等式が超幾何関数の接続公式に他ならないことが見て取れる.

さて, (133) の右辺が Langlands の Eisenstein 級数と同じ関数等式を満たすならば, 球関数 $\omega_i(P; x, z)$ の満たす関数等式と組み合わせて $E_i(P; x, z)$ が $C_{\mathrm{sph}} \otimes C_{\mathrm{Eis}}$ 型の関数等式を満たすであろうと予想される. ここで, 球関数が関数等式を持つことは表現論的に見てかなり自然なことである. しかし, (133) の右辺を見てみると, E_Ω は一般には Langlands Eisenstein 級数の部分和であって, Langlands Eisenstein 級数の性質をそのまま引き継いでいるということは, 自明ではない.

そこで, まず, もっとも易しい場合として H^+/Γ_H がコンパクトな場合を見てみる. 必要な事実がきちんと証明されている場合に限るために, $X = \widetilde{G}/H$ が簡約対称空間, すなわち, ある対合 θ で $H = \{g \in \widetilde{G} \mid g^\theta = g\}$ とかけているとする. $x \in X_{\mathbb{Q}}$ に対し, $H_x = \{g \in \widetilde{G} \mid gx = x\}$ が $\mathbb{Q}$ - 非等方的 ($\mathbb{Q}$-anisotropic), すなわち, $H_x(\mathbb{R})/H_x(\mathbb{Z})$ がコンパクトと仮定する.

定理 5.1 ([8]). 上の仮定のもと $\widetilde{\Gamma} \cdot x \subset \Omega$.

したがって, 特に $E_\Omega = E$ となり, (133) の右辺は Langlands Eisenstein 級数そのものをコンパクト集合上で積分したものとなり, その性質は容易に調べられる.

一方, この場合, $\Phi_i(\varphi; z)$, $\omega_i(P; x, z)$ の関数等式も知られている (van den Ban [2]). これらを合わせると, $E_i(P; x, z)$ の解析接続・関数等式が出てくる.

この論法の最も簡単な例は, Hecke-Siegel によるものである ([37, Chap II, §3]). すなわち, $\mathcal{H}$ を上半平面とし, 実解析的 Eisenstein 級数を

$$E(z,s) = \sum_{(c,d)=1} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \tag{134}$$

で定める. ω を実二次無理数, ω' をその共役としてそれを結ぶ半円上の部分円弧 C (単数群の作用での基本領域) での積分

$$\int_C (\text{保型形式}) \times E(h^{-1}, s)\, dh \tag{135}$$

を考えると, 実二次体の Hecke の量指標の L 関数が出てくるという計算がある. ここで保型形式とは言っているが, この場合には単なる指数関数で Fourier 係数を考えているにすぎない. さて, これを我々の議論でとらえ直すと, Hecke の量指標の L 関数は不定値二次形式の (保型形式付き) 概均質ゼータ関数で, 領域 C での積分は $H^+ = SO(1,1)_{\mathbb{R}}$ に対する H^+/Γ_H での積分と等しい.

これまで, 保型形式付きのゼータ関数は考えてこなかったが, Hecke-Siegel の場合のように H^+/Γ_H の保型形式や, さらに放物型部分群の Levi 部分群の保型形式を考えることは当然なされるべきことである (概均質ベクトル空間のゼータ関数の場合は [26] である程度論じられている). このようにすると, 結局は, Langlands の Eisenstein 級数を部分群に制限して部分群上の保型形式と内積を取るという, いわゆる Rankin-Selberg 積分を考えることに他ならない.

たとえば, $GL(n)$ の尖点形式 (cusp form) のスタンダード L 関数は Godement-Jacquet による積分表示を持っていた. これは概均質ベクトル空間のゼータ関数と

しての積分表示だと言ってよい．一方, Godement-Jacquet 積分表示は P. Shapiro-Rallis によって Rankin-Selberg 積分として解釈された ([6] などを見よ)．これを我々の立場で見直してみよう．まずこの L 関数は $(GL(n)\times GL(n), M(n))$ の概均質ゼータ関数である．そこで

$$(136) \qquad (\widetilde{G}=GL(n^2), H=(GL(n)\times GL(n))/(\text{中心}),\ P=P_{1,n^2-1})$$

というデータを考えると, $(GL(n)\times GL(n), M(n))$ の概均質性は $X=\widetilde{G}/H$ が P - 球等質となることと同値であり, ベクトル空間 $M(n)$ を基礎にした Godement-Jacquet の積分表示をこの弱球等質空間に対応するゼータ積分に書き換えることができる．さらに, そのゼータ積分を, この §5 で説明したやり方で Rankin-Selberg 積分に書き換えてやると P. Shapiro-Rallis による積分表示が得られることになる．この節で説明したことは, P. Shapiro-Rallis が行ったことが任意の概均質ベクトル空間のゼータ関数について実行できるということを含んでいる．

このように保型形式付きにし, しかも考えている保型形式が尖点形式であると, $E_\Omega\neq E$ となっていることからくる困難がしばしば解消されてしまうことに注意しよう．そのために必要な幾何学的条件が P. Shapiro-Rallis における「Ω の外にある軌道は neglisible である」という条件である．一方, 我々の考えているケースは保型形式が定数関数というやさしそうに見えるケースであるが, 定数関数は尖点形式でないために $E_\Omega\neq E$ という困難が直接響いてくる．すなわち, (133) の右辺の E_Ω を E で置き換えた積分は一般には発散してしまうのである．次節では, このような場合をどう扱うか, 具体例の計算を通じて紹介する．

5.2. Eisenstein period の正則化：具体例. この節では, $\widetilde{G}=R_{\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]/\mathbb{Q}}(SL(2))$, $H=SL(2)$ の場合を例にとって (133) の右辺をいかに調べていくかを説明する．その準備として [4] による Eisenstein period の正則化を紹介しよう．

$\widetilde{G}^+=SL_2(\mathbb{C})$, $H^+=SL_2(\mathbb{R})$, $\widetilde{\Gamma}=SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$, $\Gamma_H=\widetilde{\Gamma}\cap H=SL_2(\mathbb{Z})$ とおく．P^+ を上三角行列のなす $\widetilde{G}^+$ の部分群とする．P^+ は $\widetilde{G}^+$ の極小放物型部分群である．

$$M=\left\{ m_\theta=\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta}\end{pmatrix} \;\middle|\; \theta\in\mathbb{R}\right\},\quad A=\left\{ a_y=\begin{pmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2}\end{pmatrix} \;\middle|\; y\in\mathbb{R}_+\right\},$$

$$N=\left\{ n_z=\begin{pmatrix} 1 & z\\ & 1\end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{C}\right\},\qquad K=SU(2).$$

とおく. このとき $P^+ = ANM$ (Langlands 分解), $\widetilde{G}^+ = ANK$ (Iwasawa 分解) が成り立つ. $N' = N \cap H$, $K' = K \cap H = SO(2)$ とおく. このとき $H^+ = AN'K'$ は H^+ の Iwasawa 分解を与える. $\widetilde{G}^+$ の Haar 測度 dg, および, H^+ の Haar 測度 dh を

$$dg = \frac{dz\,dy\,dk}{y^3}, \quad g = n_z a_y k \quad (z \in \mathbb{C},\ y > 0,\ k \in K),$$
$$dh = \frac{dx\,dy\,dk'}{y^2}, \quad h = n_x a_y k' \quad (x \in \mathbb{R},\ y > 0,\ k' \in K'),$$

によって正規化する. $y(n_z a_y k) = y$ によって定義される左 N - 不変, 右 K - 不変な関数 $y(g)$ を考える. このとき, $\widetilde{\Gamma}$ に対して実解析的 Eisenstein 級数が

$$E(g, \lambda) = \sum_{\gamma \in \Gamma_P \backslash \widetilde{\Gamma}} y(\gamma g)^\lambda$$

によって定義される. 級数 $E(g, \lambda)$ は $\operatorname{Re}\lambda > 2$ において絶対収束し, λ の有理型関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続される. また, $\lambda = 2$ において 1 位の極を持つほかいたるところ正則である. $E(g, \lambda)$ の N に沿った Fourier 展開の定数項を $E^P(g, \lambda)$ とおくと

$$E^P(g, \lambda) = \int_{\Gamma_N \backslash N} E(ng, \lambda)\, dn = y(g)^\lambda + \varphi(\lambda) y(g)^{2-\lambda}$$

と計算される. ここで

$$\varphi(\lambda) = \frac{\widehat{\zeta}_{\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]}(\lambda - 1)}{\widehat{\zeta}_{\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]}(\lambda)}, \qquad \widehat{\zeta}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(\lambda) = \pi^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(\lambda)$$

である. さらに, 関数等式

$$E(g, \lambda) = \varphi(\lambda) E(g, 2 - \lambda)$$

が成り立つ.

さて, 我々が望むことは発散積分 (Eisenstein period という)

$$\int_{H^+/\Gamma_H} E(h^{-1}, \lambda)\, dh \tag{137}$$

に意味づけを与え, それを (133) の右辺を調べることに応用することであった.

[4] は (137) を次のように取り扱った. まず, λ の整関数 f で任意の垂直帯領域 $c_1 < \operatorname{Re}\lambda < c_2$ において $|y| \to \infty$ のとき急減少となるものを考え,

$$E_f(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0 > 2} f(\lambda) E(g, \lambda)\, d\lambda, \qquad E_f^H(g) = \int_{\Gamma_H \backslash H^+} E_f(hg)\, dh$$

とおく. この $E_f^H(g)$ を $H^+g \in H^+\backslash\widetilde{G}^+$ の関数と見て, $\widetilde{G}^+$ - 不変微分作用素の固有関数で展開してやる. その結果, 何らかの "固有関数" $E^H(H^+g;\lambda)$ を用いて

$$E_f^H(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0>2} f(\lambda)E^H(H^+g;\lambda)\,d\lambda$$

のように表されたならば,

$$\text{regularized} \int_{\Gamma_H\backslash H^+} E(hg;\lambda)\,dh = E^H(H^+g;\lambda)$$

と考えるのである.

[4] は, いわゆる truncation の方法を用いれば一般の半単純対称空間でこの計算が実行できると主張している (詳細は未発表). 具体的に書かれている $\widetilde{G}^+ = SL(2,\mathbb{C})$, $H^+ = SL(2,\mathbb{R})$ の場合の結果を紹介するために, 記号を用意する.

まず, $H^+ = SL(2,\mathbb{R})$ の $\Gamma_H = SL(2,\mathbb{Z})$ に関する標準的な基本領域を $\mathcal{F}$ とする：

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2} \end{pmatrix} k' \;\middle|\; -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2},\ x^2+y^2 \ge 1,\ k' \in SO(2) \right\}.$$

$T > 1$ を固定し,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}_H(T) \cup \mathcal{F}_P(T), \\ \mathcal{F}_H(T) &= \{h \in \mathcal{F} \mid y(h) \le T\}, \\ \mathcal{F}_P(T) &= \{h \in \mathcal{F} \mid y(h) > T\} \end{aligned}$$

と分解する. このとき, [4] の結果は, 次のようなものである.

定理 5.2.

$$E_f^H(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0>2} f(\lambda)E^{G,H}(g,\lambda)\,d\lambda - f(1)\int_{K'} y(k'g)\,dk', \tag{138}$$

$$\begin{aligned} E^{G,H}(g,\lambda) &= \int_{\mathcal{F}_H(T)} E(hg,\lambda)\,dh + \int_{\mathcal{F}_P(T)} (E-E^P)(hg,\lambda)\,dh \\ &\quad + \varphi(\lambda)\frac{T^{1-\lambda}}{\lambda-1}\int_{K'} y(k'g)^{2-\lambda}\,dk' + \frac{T^{\lambda-1}}{1-\lambda}\int_{K'} y(k'g)^{\lambda}\,dk'. \end{aligned} \tag{139}$$

したがって, λ - 変数に関する超関数のように考えて

$$\text{regularized} \int_{\Gamma_H\backslash H^+} E(hg,\lambda)\,dh = E^{G,H}(g,\lambda) - 2\pi i\,\delta(\lambda-1)\int_{K'} y(k'g)\,dk'$$

と書くと分かりやすいであろう. $E^{G,H}$ の定義に現れる積分は (1) $\mathcal{F}_H(T)$ がコンパクトであること, (2) $E - E^P$ は $y(g) \to \infty$ のとき急減少であることにより $\lambda \neq 0, 1, 2$ で収束して, $E^{G,H}$ は λ に有理型に依存する $H^+ \backslash \widetilde{G}^+$ 上の不変微分作用素 (Laplacian) に対する右 K - 不変な固有関数を与える. さらに, 実解析的 Eisenstein 級数 $E(g, \lambda)$ と同じ関数等式

$$E^{G,H}(g, \lambda) = \varphi(\lambda) E^{G,H}(g, 2 - \lambda) \tag{140}$$

を満たすことも見やすい. しかし, この $E^{G,H}$ の表示は, 基本領域における尖点の近傍を定める人為的なパラメータ T を含んでおり, 十分明示的であるとは言えない.

次に, E_f^H を別なやり方で計算して, 上の結果を (133) の右辺と結びつけよう. このことから, $E^{G,H}$ についてのカットオフパラメータ T に依存しない明示公式も得られる. 計算のポイントは, 実解析的 Eisenstein 級数の定義の γ に関する和を両側剰余類 $P^+ \backslash \widetilde{G}^+ / H^+$ に対応する部分和に分けてやることである. そのためには, P - 相対不変式と $P^+ \backslash \widetilde{G}^+ / H^+$ の具体的な記述が必要である.

補題 5.3. (i)

$$f(g) = f(gH) = \frac{c\bar{d} - \bar{c}d}{i} \qquad \left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \widetilde{G}^+ \right).$$

とおく. このとき

$$f(pgh) = |p_1|^{-2} f(g) \qquad \left(p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & p_1^{-1} \end{pmatrix} \in P^+,\ g \in \widetilde{G}^+,\ h \in H^+ \right).$$

(ii) $\widetilde{G}^+$ の (P^+, H^+) - 両側剰余類分解は次で与えられる:

$$\begin{aligned} &\widetilde{G}^+ = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S, \quad \Omega_i = \left\{ g \in \widetilde{G}^+ \;\middle|\; \mathrm{sgn}(f(g)) = (-1)^{i-1} \right\}, \\ &S = \left\{ g \in \widetilde{G}^+ \;\middle|\; f(g) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{141}$$

(iii) Γ を

$$\Gamma = \Gamma_{\Omega,1} \cup \Gamma_{\Omega,2} \cup \Gamma_S, \quad \Gamma_{\Omega,i} = \Gamma \cap \Omega_i, \quad \Gamma_S = \Gamma \cap S.$$

と分解するとき, 自然な全単射

$$\Gamma_P \cap H \backslash \Gamma_H \longrightarrow \Gamma_P \backslash \Gamma_S.$$

が存在する.

実解析的 Eisenstein 級数 $E(g,\lambda)$ を補題 5.3 の (iii) に従って部分和に分ける. すなわち,

$$E_\Omega(g,\lambda) = \sum_{\gamma\in\Gamma_P\backslash\Gamma_{\Omega,1}} y(\gamma g)^\lambda + \sum_{\gamma\in\Gamma_P\backslash\Gamma_{\Omega,2}} y(\gamma g)^\lambda$$
$$E_S(g,\lambda) = \sum_{\gamma\in\Gamma_P\backslash\Gamma_S} y(\gamma g)^\lambda.$$

とおく. 明らかに

$$E(g,\lambda) = E_\Omega(g,\lambda) + E_S(g,\lambda)$$

である. E_Ω を $E(g,\lambda)$ の H-*generic* 部分, E_S を H-*singular* 部分と呼ぼう.

E_f^H も上の分解に応じて二つの部分に分ける：

(142) $$E_f^{H,\Omega}(Hg) = \int_{\Gamma_H\backslash H} dh\, \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0} E_\Omega(hg;\lambda)\, d\lambda,$$

(143) $$E_f^{H,S}(Hg) = \int_{\Gamma_H\backslash H} dh\, \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0} E_S(hg;\lambda)\, d\lambda.$$

H-generic 部分 E_Ω の $\Gamma_H\backslash H^+$ 上での積分が, (133) の右辺であり,

(144) $$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_H\backslash H} E_\Omega(hg;\lambda)\, dh\\ &= E_1(P,\Gamma;x_0;\lambda)\omega_1(g^{-1}x_0;\lambda) + E_2(P,\Gamma;x_0;\lambda)\omega_2(g^{-1}x_0;\lambda)\end{aligned}$$

を得る. ここで $x_0 = 1\cdot H^+ \in \widetilde{G}^+/H^+$ とし,

$$E_i(P,\Gamma;x_0;\lambda) = \sum_{\gamma\in\Gamma_P\backslash\Gamma_{\Omega,i}/\Gamma_H} |f(\gamma H)|^\lambda,$$

$$\omega_i(g^{-1}x_0;\lambda) = \int_{\left\{u\in SU(2)\,\middle|\, ug^{-1}\cdot x_0\in\Omega_i\right\}} \left|f(ug^{-1}H)\right|^{\lambda-2} du$$

とおいた. $E_f^{H,\Omega}$ の計算では, 積分の順序を交換でき (144) 式が使える.

Eisenstein period の計算に発散の困難を持ち込むのは, 後者の H-singular 部分の積分であり, これを計算するためには [4] のように $E_f^{H,S}$ を用いた正則化をする必要がある. 計算結果は次のようになる.

命題 5.4.

$$E_f^{H,S}(Hg) = -f(1)\int_{K'} y(k'g)\, dk'.$$

証明.

$$
\begin{aligned}
E_f^{H,S}(Hg) &= \int_{\Gamma_H\backslash H^+} dh\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0} f(\lambda)\sum_{\gamma\in\Gamma_P\cap H^+\backslash\Gamma_H} y(\gamma hg)^\lambda\,d\lambda\\
&= \int_{\Gamma_P\cap H^+\backslash H^+} dh\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0} f(\lambda)y(hg)^\lambda\,d\lambda\\
&= \int_{K'} dk'\int_0^\infty \frac{dy}{y^2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0} f(\lambda)(y\cdot y(k'g))^\lambda\,d\lambda\\
&= -\int_{K'} y(k'g)\,dk'\int_0^\infty y\cdot\frac{dy}{y}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0} f(\lambda)y^{-\lambda}\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

ここで Mellin 変換の逆変換公式を用いると

$$
E_f^{H,S}(Hg) = -\int_{K'} y(k'g)\,dk'\cdot f(1).
$$

が得られた．以上の積分の変形の正当性は, $f(\lambda)$ の急減少性によって保証される．□

(144) 式と命題 5.4 を合わせると, 次が得られる.

(145)
$$
\begin{aligned}
E_f^H(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,\lambda=\lambda_0} f(\lambda)\Big\{&E_1(P,\Gamma;x_0;\lambda)\omega_1(g^{-1}x_0;\lambda)\\
&+E_2(P,\Gamma;x_0;\lambda)\omega_2(g^{-1}x_0;\lambda)\Big\}\,d\lambda - f(1)\int_{K'} y(k'g)\,dk'.
\end{aligned}
$$

この等式と [4] で得られている (138) を比較すると,

$$
E^{G,H}(g,\lambda) = E_1(P,\Gamma;x_0;\lambda)\omega_1(g^{-1}x_0;\lambda) + E_2(P,\Gamma;x_0;\lambda)\omega_2(g^{-1}x_0;\lambda)
$$

となる．すでに見たように $E^{G,H}(g,\lambda)$ は解析接続・関数等式について実解析的 Eisenstein 級数 $E(g,\lambda)$ の性質を引き継いでいる．従って, この等式と ω_i $(i=1,2)$ の満たす関数等式

$$
\omega_1(gH;2-\lambda) = -\omega_2(gH;\lambda)
$$

から, 求める Eisenstein 級数 E_i $(i=1,2)$ の解析接続・関数等式が得られる.

注意 17. 以上の議論は, 原理的には群 $\tilde{G}$ の特殊性に依存しないため, 拡張して一般の弱球等質空間の Eisenstein 級数の解析的性質を調べるために利用できる．概均質ベクトル空間のゼータ関数の場合には関数等式の理論がすでに存在しているが, この節の方法と従来の方法の比較ははなはだ興味深い.

実は, (144) に現れる Eisenstein 級数, 球関数は explicit に計算できるので, 明示公式を与えそれが確かに実解析的 Eisenstein 級数から得られるはずの性質を持っていることを見てみよう.

定理 5.5. $g \in \widetilde{G}^+ = SL_2(\mathbb{C})$ から得られる符号が $(1,1)$ であるエルミート行列：$g \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} {}^t\bar{g}$ の正の固有値を e^α とおく. このとき,

$$E_i(P, \Gamma; x_0; \lambda) = \frac{1}{2^\lambda} \cdot \frac{\zeta(\lambda)\zeta(\lambda - 1)}{\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(\lambda)} \qquad (i = 1, 2),$$

$$\omega_1(gH, \lambda) = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot \frac{e^{\alpha(\lambda-1)}}{e^\alpha + e^{-\alpha}},$$

$$\omega_2(gH, \lambda) = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot \frac{e^{-\alpha(\lambda-1)}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}.$$

これにより, $E^{G,H}$ を具体的に書き表すと,

$$E^{G,H}(g, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\widehat{\zeta}(\lambda - 1)\widehat{\zeta}(\lambda)}{\widehat{\zeta}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(\lambda)} \cdot \frac{\cosh(\alpha(\lambda - 1))}{\cosh(\alpha)}$$

となる. ここで,

$$\widehat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \qquad \widehat{\zeta}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s)$$

とおいた. この明示公式と Riemann ゼータ関数, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の Dedekind ゼータ関数の関数等式により,

$$E^{G,H}(g, 2 - \lambda) = \frac{\widehat{\zeta}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(\lambda)}{\widehat{\zeta}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(\lambda - 1)} E^{G,H}(g, \lambda).$$

が成り立つことは明らかである. 一方, この関数等式は実解析的 Eisenstein 級数 $E(g, \lambda)$ の関数等式から出てくる (140) と確かに一致している.

注意 18. 尖点的でない保型形式への Rankin-Selberg 法の拡張の試みとして, Zagier [39] がある. Zagier が扱った場合のうちのいくつかは, この節で論じた Eisenstein period として見ることもでき, 本質的には同じ結果を与えている.

参考文献

[1] A. Borel and Harish-Chandra, *Algebraic groups and discontinuous groups*, Ann. of Math. **75** (1962), 485–535.

[2] E. P. van den Ban, *The principal series for a reductive symmetric space II. Eisenstein integrals*, J. Funct. Anal. **109** (1992), 331–441.

[3] S. G. Dani and G. A. Margulis, *Values of quadratic forms at primitive integral points*, Invent. Math. **98** (1989), 405–424.

[4] W. Duke, Z. Rudnick and P. Sarnak, *Density of integer points on affine homogeneous varieties*, Duke Math. J. **71** (1993), 143–179.

[5] P. Epstein, *Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen I*, Math. Ann. **56** (1903), 615–644, II ibid. 63 (1907) 205–216.

[6] S. Gelbart and F. Shahidi, *Analytic properties of automorphic L-functions*, Perspectives in Math. vol. 6, Academic Press, 1988.

[7] G. Heckman and H. Schlichtkrull, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces*, Perspectives in Math. vol. 16, Academic Press, 1994.

[8] A. G. Helminck and S. P. Wang, *On rationality properties of involutions of reductive groups*, Adv. in Math. **99** (1993), 26–96.

[9] Y. Hironaka and F. Sato, *Fourier-Eisenstein transform and Plancherel formula for rational binary quadratic forms*, Nagoya Math. J. **128** (1992), 121–151.

[10] ———, *Eisenstein series on reductive symmetric spaces and representation of Hecke algebras*, J. reine angew. Math. **445** (1993), 45–108.

[11] G. E. Humphreys, *Introduction to linear algebraic groups*, Graduate texts in Math., vol. 21, Springer-Verlag, 1975.

[12] K. Iwasawa, *Letter to J. Dieudonne*, Zeta Functions in Geometry (Kurokawa and Sunada, eds.), Advanced Studies in pure Math., vol. 21, 1993, pp. 445–450.

[13] M. Kashiwara, *b-functions and holonomic systems (rationality of roots of b-functions)*, Invent. Math. **38** (1976), 33–53.

[14] T. Kimura, 概均質ベクトル空間入門, 概均質ベクトル空間の研究 (A. Gyoja, ed.), 数理研講究録, vol. 924, 1995, pp. 263–296.

[15] S. Lang, *Algebraic number theory*, 2nd ed., Graduate texts in Math., vol. 110, Springer-Verlag, New York, 1994.

[16] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lec. Notes in Math. No. 544, Springer-Verlag, 1976

[17] G. A. Margulis, *Dynamical and Ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces with applications to number theory*, Proceedings of International Conference of Math. in Kyoto, No. 1, 1990, pp. 193–215.

[18] C. Moeglin et J. -L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et série d'Eisenstein*, Progress in Math. No. 113, Birkhäuser, 1993.

[19] G. D. Mostow, *Self-adjoint groups*, Ann. of Math. (2) **62** (1955), 44–55.

[20] M. Ratner, *Invariant measures and orbit closures for unipotent actions on homogeneous spaces with applications to number theory*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), 236–256.

[21] ———, *Raghunathan's conjectures for cartesian products of real and p-adic Lie groups*, Duke Math. J. **77** (1995), No. 2, 275–382.

[22] B. Riemann, *Üeber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Gesammelte mathematische Werke, Chap. VII (1859), 145–153.

[23] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces III : Eisenstein series for indefinite quadratic forms*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), 177–212.

[24] ———, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II : A convergence criterion*, Tôhoku Math. J. (2) **35** (1983), 77–99.

[25] ———, *Eisenstein series on semisimple symmetric spaces of Chevalley groups*, Adv. Studies in pure Math. **7** (1985), 295–332.

[26] ———, *Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms*, Proc. Ind. Acad. (K.G.Ramanathan memorial issue) **104** (1994), 99–135.

[27] ———, *Eisenstein series on weakly shperical homogeneous spaces and zeta functions of prehomogeneous vector spaces*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **44** (1995), No. 1, 129–150.

[28] ———, *Eisenstein series on weakly spherical homogenoeous spaces of $GL(n)$*, Rikkyo Univ. preprint, 1995.

[29] ———, *Regularization of Eisenstein periods*, in preparation.

[30] ———, *Report on the convergence of zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces*, 概均質ベクトル空間の研究 (A. Gyoja, ed.), 数理研講究録, vol. 924, 1995, pp. 61–73.

[31] ———, 概均質ベクトル空間に関連する文献, 同上, pp. 263–296.

[32] ———, 概均質ベクトル空間のゼータ関数入門, 同上, pp. 46–60.

[33] M. Sato and T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants*, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1–155.

[34] A. Selberg, *Collected papers*, vol. 1, Springer-Verlag, 1989.

[35] ———, *Discontinuous groups and harmonic analysis*, Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1962 (Djursholm), Inst. Mittag-Leffler, 1963, pp. 177–189.

[36] C. L. Siegel, *Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen I, II*, Math. Z. **43** (1938), 682–708; Math. Z. **44** (1939), 398–426.

[37] ———, *Advanced analytic number theory*, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1980.

[38] A. Yukie, *Shintani zeta functions*, vol. 183, Lec. Notes of London Math. Soc., 1993.

[39] D. Zagier, *The Rankin-Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **28** (1982), 415–437.