§1. 序

サイコロを振って 6 の目の出る確率, 硬貨投げで表の出る確率, 壷から赤玉を取り出す確率, トランプゲームでスペードのエースを引く確率 ... これらは素朴に理解されるように, 結果を決定論的に断定出来ない場合に, 人々が「合理的」な判断を下す基準として採用する確率の概念である. 2 つの区別のつかないサイコロを振った時, 丁か半の出る割合, 3 つの区別のつかないサイコロを振って出た目の数の合計が 9 になる場合と 10 になる場合の割合をどう判断あるいは予測するかは, それほど自明ではない.

考え得る可能なすべての場合 (全事象という) の集合を考えて, 特別に実現しやすい場合がある, という根拠が見つからないという消極的な根拠によっておのおのの場合 (根元事象という) が等確率で実現するであろうと仮定することは比較的受け入れやすいであろう. ただし, この全事象の集合の要素の数が有限であることが大前提である.

かくして, 全事象の個数に対して, 期待する事象に含まれる根元事象の数の比を, この事象が実現するであろう確率である, と判断するのがもっとも「合理的」である, と主張したのが 19 世紀, ラプラスによって確立された「古典的」確率論であった ([16]). (蛇足, 確率と確立；ワープロの漢字変換に注意しよう. 「確率」と「確立」を間違える確率が極めて高いことは確立された経験則である.)

ところで, 硬貨投げをある回数で止める, ということを予め仮定しなければどうなるであろうか. 考え得る可能な場合の集合 (全事象) はもはや有限集合ではなくなる. しかし, 1 回毎に表が出るか裏が出るかが確率 2 分の 1 の硬貨投げを無限に続けることは, 思考実験上は可能であり, n 回までに表が出た回数 S_n の, n 回までの相対頻度

S_n/n が n を限りなく大きくした時, 確率論的にどのようなことが言えるかを問題にすることは可能である．ここに至って, ラプラスの「古典的」確率論の限界は明かである．全事象の集合が無限集合である時, 事象の「確率」はどの様に考えるべきであろうか？ この問に対する答えは, 20 世紀の解析学を一変させたルベーグ積分論 ([17]) の登場によって初めて可能になった．コルモゴロフの公理的確率論 ([11]) の誕生である．

この講義録はコルモゴロフ流の公理的確率論の初歩を前提に, 最も基本的と考えられている Brown 運動についてのいくつかの基本的定理を, 可能な限り予備知識なしに証明をつけて解説する．さらに, Brown 運動を典型例として含む正規過程のクラス (定常増分を持つ自己相似過程, fractional Browon 運動) に拡張して考えた時, 次元とパラメータはどういう関係にあるか, を考察する．従来, Brown 運動はマルコフ過程, ないしマルチンゲール性を全面に出して議論されることが多かった．しかし, Brown 運動には別の側面もあることも知ってもらいたい．なお, 確率論の基礎的知識については, 西尾真喜子 ([21]) または伊藤清 ([8]) を参照されたい．

§2. 1次元 Brown 運動

ある時間毎にランダムな値を取る現象を記述するためには, その現象を各時刻 t 毎に確率変数 $X(t)$ で表現すればよい. 一般にパラメーター空間 T の各要素 t に対して, 確率変数 $X(t)$ を対応させて考えた時, 確率過程 $\{X(t); t \in T\}$ と記す. 普通は, $T = [0, \infty)$, $(-\infty, +\infty)$ を考えて,「時刻」という表現を用いる. 特に, T として 2 次元以上のユークリッド空間の部分集合を用いる場合, 確率場といい, T として $\mathbf{N}$ (自然数) または, $\mathbf{Z}$ (整数) を用いた場合は確率変数列とか時系列ということが多い.

1827 年, イギリスの植物学者 R. Brown は液体に浮いた花粉の微粒子を顕微鏡下で観察し, 何ら力を作用させないのに絶えず一見不規則な運動をする微粒子に興味を覚えて, 微粒子の軌跡を詳細に記録した. 後に, それは液体の分子がランダムに衝突することによって引き起こされている, と理解されるようになった. 1905 年, かの有名なアインシュタインによって, この Brown 運動と呼ばれるようになった現象は, 正規分布に従う確率過程とみなせることが物理的考察によって導かれた. 1923 年 ([25]), N. Wiener によって, この確率過程は, 連続関数の全体を全事象の空間とする確率過程として表現できるということが数学的に証明された. 従って, Brown 運動のことを Wiener 過程ともいう.

Brown 運動 $\{B(t); t \in T = [0, \infty)\}$ は確率過程として, 多くの基本的性質を持っており, それぞれのクラスの確率過程の典型となっている. (各々の確率過程のより詳しい定義については, 数学辞典第 3 版を参照されたい.) すなわち, Brown 運動は次に挙げる確率過程のクラスに属する.

1. 加法過程である, (独立増分過程, または Lévy 過程ともいう),
2. 強マルコフ過程である,
3. 正規過程である, (ガウス過程ともいう),
4. $U(t) = e^{-t/2}B(e^t)$ は正規定常過程である, (Ohlenstein-Ulenbeck 過程ともいう),
5. 二乗可積分マルチンゲールである,
6. 定常増分を持つ自己相似過程である. 以上の各クラスにプラスアルファの性質を付け加えると Brown 運動を特徴付けることが出来る. 逆にいうと Brown 運動を数学的に定義する仕方はいろいろある, ということでもある. この講義では正規過程を中心に話すので, 正規過程としての Brown 運動を定義する.

定義 2.1. 実数値をとる確率過程 $\{ B(t) ; t \in T = [0, +\infty) \}$ が次の性質を満たすとき, $\{ B(t) ; t \in T = [0, +\infty) \}$ を Brown 運動という.

(i) ${}^\forall t \in T$ に対して, $B(t)$ は確率変数である.

(ii) 任意の $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, ${}^\forall a_k \in \mathbf{R}$ (実数), $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $\sum_{k=1}^{n} a_k B(t_k)$ の分布は平均 0 の正規分布である. *

(iii) $0 \le {}^\forall s \le {}^\forall t$ に対して $E[B(s)B(t)] = s$.

(iv) $P(\{ \omega \in \Omega ; B(t, \omega)$ は T 上の連続関数である $\}) = 1$.

$B(t)$ を確率変数とみる以上, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ すなわち, 全事象の空間 Ω, σ-加法族 $\mathcal{F}$ 上で定義された確率 P があらかじめ与えられていることを仮定している. 仮定 (i) より, $B(t)$ は Ω 上で定義され

* (ii) を満たす確率過程を平均 0 の正規過程 (centered Gaussian process) という. T がもっと一般の集合の場合, 平均 0 の正規系 (centered Gaussian system) という.

た確率変数, つまり, Ω 上で定義された実数値をとる関数であり, 根元事象 $\omega \in \Omega$ を与えると, 実数値 $B(t, \omega)$ (実現値という) が定まる.

ここで, ω を固定して, t を T 上で動かすと $B(t, \omega)$ は T 上で定義された実数値関数となる. このようにみなした時, ${}^{\forall}\omega$ に対して, $B(t, \omega)\ ;\ t \in T$ を確率過程 $\{\, B(t) ; t \in T \,\}$ の軌跡 (sample path) または見本関数 (sample function) という. 上記 (iv) の仮定は, 見本関数が確率 1 で連続関数であることを言っている. ここで, 数学的には, 測度論上の困難な問題があって, 見本関数が連続となるような根元事象の全体が $\mathcal{F}$ に属するか？すなわち確率を考えることが出来る事象であるか, ということは自明ではなく, 一般には正しくない. しかし, これ以上の仮定を設けることなく, $\{\, B(t) ; t \in T \,\}$ を適当に定義しなおせば, 見本関数が連続関数であるような集合が事象になることが知られている (これを「可分変形」 (separable modification) という).

実は, 仮定の (iv) は次の意味で不要である. つまり, 新しい全事象の空間として

$$\Omega_0 = \{\, \omega(t) ; t \in T = [\,0, +\infty), \omega(t) \text{ は連続関数で } \omega(0) = 0 \,\},$$

$$\mathcal{F} = {}^{\forall}t \in T,\, \Omega_0 \ni \omega \longmapsto \omega(t) \in R \text{ を可測にする最小の } \sigma\text{-加法族},$$

として, $(\Omega_0, \mathcal{F})$ 上に確率測度 P をうまく定義して, Ω_0 上の確率過程を

$${}^{\forall}\omega \in \Omega_0,\ B^*(t, \omega) = \omega(t),$$

として定義すると $B^*(t)$ が上記の仮定 (i)–(iv) を満たすように出来ることが知られている.

この場合, (iv) は明かで, 確率過程 $B^*(t)$ の見本関数は定義から, すべて連続関数である. なお, 仮定 (i), (ii), (iii) を満

たすすべての確率過程 $B(t)$ に対して, 任意の有限次元確率変数 $\{B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n)\}$ の $\mathbf{R}^n$ (n 次元ユークリッド空間) 上の分布は一致する (今の場合, n 次元正規分布). 一般に, 同じパラメーター空間を持つ 2 つの確率過程があって, その任意の有限次元分布が一致する時, 2 つの確率過程は「同値」(equivalent) である, または, 一方を他方の表現 (version) である, という (必ずしも同一の確率空間上で定義されている必要はない). 確率過程の研究は, 結局のところ確率分布 (無限次元確率測度) の性質を調べることが目的であるから, あらかじめもっとも都合のよい性質をもつ version を研究の対象にすればよい. その意味で, 「Brown 運動」といった時は, 定義 1.1. の (i) から (iv) までを仮定するのが普通である. (ワープロの漢字変換で「仮定」と「過程」に注意せよ) これらの仮定より Brown 運動が持っている他の性質を証明することができる. 次にそれらを示そう.

定理 2.1. Brown 運動は加法過程である.

証明. n 次元確率変数 $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ の分布が平均 0 を持つ非退化正規分布は, よく知られているように分散–共分散行列つまり, 実対称正則正定値行列 $V_n = (v_{i,j}), 1 \leq i,\ j \leq n$ によって一意に決まり, その (確率) 密度関数は

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det V_n)^{1/2}} e^{(V_n^{-1}\vec{x},\vec{x})/2},$$

で与えられる. ここで, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (,) はユークリッドの内積を表す. 従って, この密度関数の形から $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ と X_n が独立であるための必要十分条件は

$$1 \leq {}^{\forall} i < n, \quad E[X_i X_n] = v_{i,n} = 0$$

が成り立つことである，ということが容易に分かる (密度関数が積の形に表されるから)．退化している場合も含めた正規分布の定義は次のようにする．$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の分布は，その任意の一次結合 $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ が 1 次元正規分布を持つ時，n 次元正規分布であるという．分布の台が k 次元部分空間，つまり高々 k 次元の非退化正規分布であるための必要十分条件は，分散-共分散行列 V_n のランクが k であることである．

以上のことに注意すると Brown 運動 $\{B(t); t \in T\}$ が加法過程であることを示すには，任意の組 $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ に対して

$$E\big[\big(B(t_4) - B(t_3)\big)\big(B(t_2) - B(t_1)\big)\big] = 0 \tag{1}$$

をいえばよい．ところが，定義の (iii) より (1) 式の

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= E\big[B(t_4)B(t_2) - B(t_3)B(t_2) - B(t_4)B(t_1) + B(t_3)B(t_1)\big] \\ &= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0.\end{aligned}$$

定理 2.2. $\{U(t) = e^{-t/2}B(e^t); t \in (-\infty, +\infty)\}$ は平均 0 の正規定常過程である．すなわち，共分散 $E\big[U(t+h)U(t)\big]$ が h のみに依存する関数である正規過程である．(共分散が時刻の差だけからなる関数である場合，弱定常過程という．正規過程の場合は弱定常過程であれば強定常過程である．)

証明. $h \geq 0$ とする．定義の (iii) より，

$$E\big[U(t+h)U(t)\big] = e^{-(t+h)/2-t/2}E\big[B(e^{(t+h)})B(e^t)\big] = e^{-h/2}$$

$h < 0$ の時も同様に $E\big[U(t+h)U(t)\big] = e^{h/2}$ を得る．結局，任意の h に対して，

$$E\big[U(t+h)U(t)\big] = e^{-|h|/2}.$$

定理 2.3. Brown 運動は定常増分を持つインデックス 1/2 の自己相似過程である．ここで, 確率過程 $\{X(t)\,;\,t\in T=[0,+\infty)\}$ がインデックス H の自己相似過程であるとは, ${}^{\exists}H>0$, ${}^{\forall}c>0$ に対して, 確率過程 $\{c^{-H}X(ct)\,;\,t\in T=[0,+\infty)\}$ が, もとの確率過程 $\{X(t)\,;\,t\in T=[0,+\infty)\}$ と同値である場合をいう．また, 定常増分を持つ, とは, ${}^{\forall}b>0$ に対して, 確率過程 $\{X(t+b)-X(b)\,;\,t\in T\}$ がもとの確率過程 $\{X(t)\,;\,t\in T=[0,+\infty)\}$ と同値である場合をいう．

証明. 平均 0 の正規過程の場合, 任意の有限次元分布は分散–共分散行列によって決まるから, 結局, 任意の 2 点における共分散を計算すれば容易に結論を得る．読者は自ら確認されよ．$H>0$ の仮定は $\{X(t)\,;\,t\in T=[0,+\infty)\}$ の原点における確率連続性で置き換えることが出来る．

Brown 運動がマルコフ過程 (スローガン的にいえば, 未来の事象の確率は現在の情報だけに依存し, 過去の情報とは独立となるような確率過程) であることは Brown 運動が加法過程であることから直ちに導かれる．さらに強マルコフ性を満たすことについては, マルコフ過程論の教科書を参照されたい．二乗可積分マルチンゲールであることは独立増分性を使うと定義から明かであるが, この講義では用いないので省略する, というより, 普通の教科書ではマルチンゲール性から証明する話を, ここではすべて独立増分性から証明する．マルチンゲールの一般論を述べるためには, それだけで一冊の教科書が必要である．

Brown 運動の見本関数の性質はいろいろ知られていて, フランスの数学者 P. Lévy に負うところが多い．それらの性質は, 微分方程式論等で扱う「普通」の連続関数の性質とは驚くほど異なり, 一言

でいえば, かっては「病理的」(pathological) と表現された. 例えば 1875 年頃, かの有名な Weierstrass は至るところ微分不可能な連続関数を構成して, 当時の数学者を驚かせたが, Brown 運動の見本関数は確率 1 でこの性質を持っている. しかし, このような性質は最近流行の「フラクタル」的観点からあらためて見直されようとしている.

この節では, ごく基本的な性質を可能な限り証明付きで示す. Brown 運動の見本関数は確率 1 で連続関数であるから, $[0,1]$ 上に制限するとよく知られているように一様連続である. 一様連続ではあるが, 「普通の」関数と違って, 至るところ微分不可能である. そのことを示すのが次の定理である. まず, 連続関数の 1 点における α-ヘルダー連続性を定義する.

定義 2.2. $[0,1]$ 上で定義された連続関数 f と $t_0 \in [0,1]$ に対して, ${}^{\exists}\delta > 0$, ${}^{\exists}c > 0$, such that $t_0 < {}^{\forall}t < t_0 + \delta$

$$|f(t) - f(t_0)| \le c|t - t_0|^{\alpha}$$

が成立する時, 関数 f は点 t_0 で右 α-ヘルダー連続性を満たすという. 左ヘルダー連続性も同様に定義出来る.

定理 2.4. Brown 運動の見本関数は, 確率 1 で, ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対してどの点においても, 右及び左 $(1/2+\varepsilon)$-ヘルダー連続性を満たさない.

証明. ${}^{\forall}\varepsilon > 0$, $\varepsilon N > 1$ となる自然数 N を定める.

$$\begin{aligned} A(t,\alpha,K,h) &= \{\,\omega\,;\, 0 < {}^{\forall}s < h,\ |B(t+s,\omega) - B(t,\omega)| \le K\,s^{\alpha}\,\}, \\ B(k,n,K) &= \Big\{\,\omega\,;{}^{\forall}j = 1,2,\ldots,N, \\ &\qquad\qquad \big|B\big((k+j)2^{-n},\omega\big) - B\big((k+j-1)2^{-n},\omega\big)\big| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \le 2KN2^{-(1/2+\varepsilon)n}\,\Big\} \end{aligned}$$

とおく. グラフを描いてみると容易に分かるように,

$$\bigcup_{0 \le t \le 1} A(t, \alpha, K, (N+1)2^{-n}) \subset \bigcup_{k=0}^{2^n - N} B(k, n, K)$$

だから, $B_n(K) = \bigcup_{k=0}^{2^n-N} B(k,n,K)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&P(\{\,\omega\,;\, B(t,\omega)\,\text{がある時刻}\, t \in [\,0,1\,]\,\text{で右}\,(1/2+\varepsilon)\text{-ヘルダー連続}\,\}) \\
&\quad \le P\Big(\bigcup_{K=1}^{+\infty} \bigcap_{m=1}^{+\infty} \bigcup_{n=m}^{+\infty} B_n(K)\Big) \\
&\quad \le \lim_{K \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} P\big(B_n(K)\big).
\end{aligned}$$

ここで, 独立増分性より,

$$P\big(B_n(K)\big) \le \sum_{k=1}^{2^n} P\big(B(k,n,K)\big) \le \mathrm{const.}\, 2^n 2^{-N\varepsilon n}$$

で, これは収束する一般項をなすから, ボレル-カンテリの第 1 補題より

$$P(\{\,\omega\,;\, B(t,\omega)\,\text{がある}\, t \in [\,0,1\,]\,\text{で右}\,(1/2+\varepsilon)\text{-ヘルダー連続}\,\}) = 0$$

を得る.

さらに, 詳しい評価については次の Lévy の結果が知られている.

定理 2.5.

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\substack{0 \le |s-t| \le h, \\ 0 \le s,t \le 1}} \frac{|B(s,\omega) - B(t,\omega)|}{\sqrt{2h \log 1/h}} = 1, \quad \text{a.s.}$$

ここで, “a.s.” は almost sure(ly) のことで, 命題が成立するような事象の確率が 1 であることを意味する. 日本語では “殆ど確実に”

という．日常語としてはあいまいな感じがするが, 数学用語としては正確に定義されているから注意して用いること．

証明. McKean の本 ([20], pp.14–16) に Brown 運動の独立増分性を用いた簡潔な証明があるので, それに沿って証明する．まず, 下からの評価式 (lower bound) を証明する．$g(h) = \sqrt{2h \log 1/h}$ とおいておく．${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して, 独立増分性より,

$$\begin{aligned}
&P\Big(\max_{1\le k\le 2^n}\big(B(k2^{-n},\omega) - B((k-1)2^{-n},\omega)\big) \le (1-\varepsilon)g(2^{-n})\Big) \\
&= \left(1 - \int_{(1-\varepsilon)\sqrt{\log 2^n}}^{+\infty} e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}\, dx\right)^{2^n} \\
&= (1-I_n)^{2^n} \\
&< \exp(-2^n I_n).
\end{aligned}$$

ここで, I_n の下からの評価が必要である．部分積分によって, $a > 0$ に対して,

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{e^{-a^2/2}}{a} - \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-x^2/2}\, dx$$

より,

$$\frac{e^{-a^2/2}}{a} \ge \int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx \ge \frac{e^{-a^2/2}}{a} - \frac{1}{a^2}\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

従って,

$$\frac{e^{-a^2/2}}{a} \ge \int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx \ge \frac{e^{-a^2/2}}{a + 1/a}$$

を得る．これを用いると, 十分大きな n に対して

$$2^n I_n \ge \text{const.}\, \frac{2^n}{\sqrt{n}} \exp\big(-(1-\varepsilon)^2 \log 2^n\big) > 2^{\delta n}.$$

$\exp(-2^{\delta n})$ は収束する級数の一般項であるから, よく知られたボレル-カンテリの第 1 補題より,

$$P\left(\left\{\omega\,;\ \max_{1\le k\le 2^n}\bigl(B(k2^{-n},\omega)-B((k-1)2^{-n},\omega)\bigr) \le (1-\varepsilon)g(2^{-n})\ ,\ \text{i.o.}\right\}\right)=0.$$

ここで, i.o. は infinitely often の略で, 事象列が無限回起こることをいっている. 集合論的には上極限集合のことである. 言い換えると,

$$\liminf_{n\to+\infty}\max_{1\le k\le 2^n}\frac{B(k2^{-n},\omega)-B((k-1)2^{-n},\omega)}{(1-\varepsilon)g(2^{-n})}>1,\quad \text{a.s.}$$

を意味するが,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\sup_{\substack{0\le|s-t|\le h,\\ 0\le s,t\le 1}}\frac{|B(s,\omega)-B(t,\omega)|}{\sqrt{2h\log 1/h}}\\
&\quad\ge\liminf_{n\to+\infty}\max_{1\le k\le 2^n}\frac{B(k2^{-n},\omega)-B((k-1)2^{-n},\omega)}{(1-\varepsilon)g(2^{-n})}
\end{aligned}$$

であるから, 結局下からの評価が証明された.

次に上からの評価に移る. $^\forall\varepsilon>0$ に対して, δ を $(1+\varepsilon)^2>(1+\delta)/(1-\delta)$ が満たされるように十分小さくとっておく. このとき,

$$\begin{aligned}
&P\left(\left\{\omega\,;\ \max_{\substack{0\le k=j-i\le 2^{\delta n},\\ 0\le i<j\le 2^n}}\bigl|B(j2^{-n},\omega)-B(i2^{-n},\omega)\bigr| \ge(1+\varepsilon)g(k2^{-n})\right\}\right)\\
&\le\sum_{\substack{1\le k\le 2^{\delta n},\\ 0\le i<j\le 2^n}}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log(2^n/k)}}e^{-x^2/2}\,dx\\
&\le\text{const.}2^{(1+\delta)n}2^{-(1-\delta)(1+\varepsilon)^2 n}/\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

δ の選び方から, 2 の肩は $-(\text{positive const.})n$ となって, これは $\sqrt{n}$ で割ってももちろん収束する級数の一般項であるから, 再びボレル-カ

ンテリの第1補題より, 確率1で, $n_0=n_0(\omega)$ が存在して, $^\forall n\geq n_0$, $^\forall(j-i)=k\leq 2^{\delta n}$ に対して,

$$\left|B(j2^{-n},\omega)-B(i2^{-n},\omega)\right|\leq(1+\varepsilon)g(k2^{-n})$$

が成り立つことを意味する.

$0\leq s<t\leq 1,\ 2^{-(n+1)(1-\delta)}\leq t-s<2^{-n(1-\delta)}$ に対しては,

$$s=k_n(s)2^{-n}-\sum_{p=n+1}^{+\infty}k_p(s)2^{-p},\quad t=k_n(t)2^{-n}+\sum_{p=n+1}^{+\infty}k_p(t)2^{-p},$$

$$2^{-(n+1)(1-\delta)}-2^{-n+1}\leq\big(k_n(t)-k_n(s)\big)2^{-n}\leq 2^{-n\delta}$$

と表されるから,

$$s_n=k_n(s)2^{-n},\quad s_q=k_n(s)2^{-n}-\sum_{p=n+1}^{q}k_p(s)2^{-p},\quad n<q,$$

$$t_n=k_n(t)2^{-n},\quad t_q=k_n(t)2^{-n}+\sum_{p=n+1}^{q}k_p(t)2^{-p},\quad n<q,$$

とおくと, 三角不等式より,

$$\begin{aligned}
&\left|B(t,\omega)-B(s,\omega)\right|\\
&\quad\leq\sum_{q=n+1}^{+\infty}\left|B(t_q,\omega)-B(t_{q-1},\omega)\right|+\left|B(t_n,\omega)-B(s_n,\omega)\right|\\
&\qquad+\sum_{q=n+1}^{+\infty}\left|B(s_q,\omega)-B(s_{q-1},\omega)\right|\\
&\quad\leq 2\sum_{q=n+1}^{+\infty}(1+\varepsilon)g(2^{-q})+(1+\varepsilon)g((k_n(t)-k_n(s))2^{-n}).
\end{aligned}$$

簡単な計算により,

$$\sum_{q=n+1}^{+\infty}(1+\varepsilon)g(2^{-q})\leq\mathrm{const.}\ g(2^{-n}),$$

$$\lim_{n\to+\infty}g(2^{-n})\ /\ g\big((k_n(t)-k_n(s))2^{-n}\big)=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}g(t-s)\ /\ g\big((k_n(t)-k_n(s))2^{-n}\big)=1$$

を得るから, 以上の推論を合わせると上からの評価式が証明される.

以上によって, Brown 運動の見本関数が「普通」の関数のような滑らかな関数でないことが理解されたことと思うが, いわゆる確率解析で用いられる最も重要な性質は, むしろ次に紹介する quadratic variation が時間に比例する定数である, という性質であろう.

定理 2.6. $\Delta_n = \{\, 0 \le t_1^n < t_2^n < \cdots \}$, $n = 1, 2, \ldots$ を T の分割の列とし, $\Delta_n(t) = \{\, t_k^n \in \Delta_n\,;\, t_k^n \le t \,\}$, $|\Delta_n| = \sup_k |t_k^n - t_{k-1}^n| < +\infty$ とする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta_n| < +\infty$$

ならば,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{t_k^n \in \Delta_n(t)} |B(t_k^n, \omega) - B(t_{k-1}^n, \omega)|^2 = t, \quad \text{a.s.}$$

証明.

$$I_n = E\left[\left(\sum_{t_k^n \in \Delta_n(t)} \Big(\big|B(t_k^n) - B(t_{k-1}^n)\big|^2 - \big(t_k^n - t_{k-1}^n\big)\Big)\right)^2\right]$$

を計算しよう. Brown 運動の加法性 (独立増分) と正規性

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 1)^2 e^{-x^2/2}\, dx = 2$$

より

$$I_n = 2 \sum_{t_k^n \in \Delta_n(t)} (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \le 2|\Delta_n| \sum_{t_k^n \in \Delta_n(t)} (t_k^n - t_{k-1}^n) \le 2t|\Delta_n|.$$

仮定より,

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}\Big(\big|B(t_k^n)-B(t_{k-1}^n)\big|^2-(t_k^n-t_{k-1}^n)\Big)\Bigg)^2\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} I_n \leq 2t\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta_n| < +\infty.$$

従って,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}\Big(\big|B(t_k^n)-B(t_{k-1}^n)\big|^2-(t_k^n-t_{k-1}^n)\Big)\Bigg)^2 < +\infty, \quad \text{a.s.}$$

故に,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}\Big(\big|B(t_k^n,\omega)-B(t_{k-1}^n,\omega)\big|^2-(t_k^n-t_{k-1}^n)\Big)=0, \quad \text{a.s.},$$
$$\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}(t_k^n-t_{k-1}^n)=t$$

より, 結論を得る. ここで, 例外集合は t に無関係にとれることに注意しよう. なお, 分割点の取り方を変えても $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|\Delta_n| < +\infty$ を満たしている限り, 確率 1 で極限値は同じであるが, 収束しない例外集合 (その確率は 0) は異なる.

Remark 2.1. 上記の条件 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|\Delta_n| < +\infty$ はもっと弱めることができる. オーダーとしては $|\Delta_n| = o(1/\log n)$ が best possible である ([1], Theorem 4.5).

Remark 2.2. 上記の証明では, 増分の 2 次のモーメントの直交性を用いているだけで, 独立増分性までは使っていない. Brown 運動の真価は上記の定理を発展させて, 独立増分性をフルに用いる確率

解析なる理論が展開できることにある. ちなみに, C^1-クラスの実関数 f に対しては

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}\left|f(t_k^n)-f(t_{k-1}^n)\right|=\int_0^t|f'(s)|\,ds$$

であって, もちろん

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}\left|f(t_k^n)-f(t_{k-1}^n)\right|^2=0$$

である.

Remark 2.3. 確率過程の見本関数の性質は極めてデリケートであって, 確率 0 の除外集合が何に依存して決まるかをよく注意しなければばならない. 上記の定理において分割 Δ_n は根元事象 ω に依存しないようにとっているが, もし, 各 ω 毎に分割を適当に選んでよいならば

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}\left|B(t_k^n,\omega)-B(t_{k-1}^n,\omega)\right|^2=+\infty,\quad \text{a.s.}$$

である ([23]).

§3. Elementary Stochastic Calculus

確率解析の真髄を理解するために実解析の話から始める．有名な解析学の基本定理 (ニュートンの公式)

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s)\,ds \tag{2}$$

をどうやって証明すべきであろうか．この等式が成り立つことを前提に例えば, 両辺の微分が一致して定数は 0 であることを示す, というようなやり方ではなく, この公式がどうして発見できたか？という道筋がわかるような証明をしよう．同じことはガウスの発散定理やストークスの定理についてもいえる．殆ど全ての教科書は微分を積分する (上記の公式では右辺が左辺に等しいことを示す) 方法をもちいているが, それでは何故あのような自明でない公式が得られるのか理解できない．そこで, 上記の公式の左辺から右辺を導く, という仕方で証明してみよう．実はその着想が実解析から確率解析への飛躍を導くのである．

(2) の証明. 連続関数 f と分割の列 $\Delta_n = \{\, 0 \le t_1^n < t_2^n < \cdots \}$ に対して, 明らかに

$$f(t) - f(0) = \lim_{|\Delta_n| \to 0} \sum_{t_k^n \in \Delta_n(t)} \bigl(f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n) \bigr).$$

ここで, 増分の第 1 近似 (微分) を考える．

$$f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n) = f'(t_{k-1}^n)(t_k^n - t_{k-1}^n) + o\bigl(|\Delta_n|\bigr)$$

$\displaystyle\sum_{t_k^n \in \Delta_n(t)} o\bigl(|\Delta_n|\bigr) = o(1)$ だから, ($o\bigl(g(x)\bigr)$ はランダウの記号, スモール・オーと読む, 後では $O\bigl(g(x)\bigr)$ ラージ・オーも用いる．) 結局,

$$f(t) - f(0) = \lim_{|\Delta_n| \to 0} \sum_{t_k^n \in \Delta_n(t)} f'(t_{k-1}^n)(t_k^n - t_{k-1}^n).$$

右辺はリーマン和に他ならず, 収束することが証明できて, リーマン積分

$$\int_0^t f'(s)\,ds$$

である.

さて, ここで話を確率論に戻そう. 先にも述べたように Brown 運動の見本関数は滑らかな関数とは大いに異なり, (2) は成立せず, 標語的にいえば $\bigl(B(t)-B(s)\bigr)^2 \approx (t-s)$ あるいは Lévy に従えば, $dB=\sqrt{dt}$ と理解される. 「普通」の滑らかな関数の近似式,

$$\Delta f = f'dt + \frac{f''}{2!}(dt)^2 + \cdots$$

のアナロジーで考えると dB は意味をなさず $(dB)^2 = dt$ であるから, 第 2 近似で初めて「通常」の第 1 近似が現れる, という構造になっている. 平均をとると 0 になる, という意味で「通常」では 0 になっている, この隠れた第 1 近似を "explicit" に表したのが確率積分である, ということも出来る. かくして解析学における基本定理に対応する確率解析の基本定理「Itô の公式」が得られる.

定理 3.1. Brown 運動 $\{\,B(t)\,;\,t\in T\,\}$ と $f\in C^2$ に対して,

$$f\bigl(B(t)\bigr)-f\bigl(B(s)\bigr)=\int_s^t f'\bigl(B(u)\bigr)\,dB(u)+\frac{1}{2}\int_s^t f''(B(u))\,du,\ \text{ a.s.}$$

が成り立つ. ここで, 右辺の第 1 項はきちんと定義していないが,「普通」の意味では定義できないため, 「確率積分」といわれる項である. 定義は証明中に与えるであろう.

証明. Brown 運動は定常増分を持つ確率過程であるから, $s=0$ の場合を証明すればよい. 例によって分割 Δ_n をとり, 左辺を変形し

てゆく. $B(t,\omega)$, f は連続関数であるから,

$$\begin{aligned}
&f\bigl(B(t,\omega)\bigr)-f\bigl(B(0,\omega)\bigr)\\
&\quad=\lim_{|\Delta_n|\to 0}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}\Bigl(f\bigl(B(t_k^n,\omega)\bigr)-f\bigl(B(t_{k-1}^n,\omega)\bigr)\Bigr).
\end{aligned}$$

ここで $\Delta B_{n,k}=B(t_k^n,\omega)-B(t_{k-1}^n,\omega)$ とおいて,

$$\begin{aligned}
f\bigl(B(t_k^n,\omega)\bigr)-f\bigl(B(t_{k-1}^n,\omega)\bigr)=f'\bigl(B(t_{k-1}^n,\omega)\bigr)&\Delta B_{n,k}\\
&+\frac{1}{2}f''\bigl(B(t_{k-1}^n,\omega)\bigr)(\Delta B_{n,k})^2\\
&+o\bigl(|\Delta B_{n,k}|^2\bigr).
\end{aligned}$$

ここで, 定理 2.6. より,

$$\begin{aligned}
\lim_{|\Delta_n|\to 0}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}o\bigl(|\Delta B_{n,k}|^2\bigr)&=\lim_{|\Delta_n|\to 0}o\Biggl(\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}|\Delta B_{n,k}|^2\Biggr)\\
&=0,\quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

次に, 定理 2.6. の証明を拡張して, 条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta_n|<\infty$ の下で,

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}f''\bigl(B(t_{k-1}^n,\omega)\bigr)(\Delta B_{n,k})^2=\int_0^t f''\bigl(B(s,\omega)\bigr)\,ds,\quad \text{a.s.}$$

を証明する. $|f''|$ は連続関数だから, 有限区間で有界である. 従って, 定数 K で押さえられるとする. $\Delta t_{n,k}=t_k^n-t_{k-1}^n$ とおいて,

$$\begin{aligned}
E_n&=E\Biggl[\Biggl(\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}f''\bigl(B(t_{k-1}^n,\omega)\bigr)\bigl((\Delta B_{n,k})^2-\Delta t_{n,k}\bigr)\Biggr)^2\Biggr]\\
&=\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}E\Bigl[f''^2\bigl(B(t_{k-1}^n,\omega)\bigr)\bigl((\Delta B_{n,k})^2-\Delta t_{n,k}\bigr)^2\Bigr]\\
&\quad+\sum_{\substack{t_k^n,t_{k'}^n\in\Delta_n(t),\\ k\neq k'}}E\Bigl[f''(B(t_{k-1}^n,\omega))f''\bigl(B(t_{k'-1}^n,\omega)\bigr)\\
&\qquad\qquad\times\bigl((\Delta B_{n,k})^2-\Delta t_{n,k}\bigr)\bigl((\Delta B_{n,k'})^2-\Delta t_{n,k'}\bigr)\Bigr]\\
&=E_{n,1}+E_{n,2}\quad\text{とおく.}
\end{aligned}$$

以下の評価の方法は定理 2.6. と同様なのであるが, 唯一基本的に前の場合と異なるところは, $\Delta B_{n,k}$ の係数に ω の関数 $f''\big(B(t^n_{k-1},\omega)\big)$ がかかっていることである. それなのに, 何故, 同様な変形が可能なのであろうか. ここで, Brown 運動の独立増分性がきいてくる. その上, 係数が $B(t^n_{k-1},\omega)$ の関数であって, $B(t^n_k,\omega)$ の関数でないことに注意してほしい. 従って,

$$\begin{aligned}
E_{n,2} &= \sum_{\substack{t^n_k, t^n_{k'} \in \Delta_n(t), \\ k\neq k'}} E\Big[f''\big(B(t^n_{k-1},\omega)\big)f''\big(B(t^n_{k'-1},\omega)\big) \\
&\qquad \times \big((\Delta B_{n,k})^2 - \Delta t_{n,k}\big)\big((\Delta B_{n,k'})^2 - \Delta t_{n,k'}\big)\Big] \\
&= 2 \sum_{\substack{t^n_k, t^n_{k'} \in \Delta_n(t), \\ k< k'}} E\Big[f''\big(B(t^n_{k-1},\omega)\big)f''\big(B(t^n_{k'-1},\omega)\big) \\
&\qquad \big((\Delta B_{n,k})^2 - \Delta t_{n,k}\big)\Big] \\
&\qquad\qquad \times E\Big[\big((\Delta B_{n,k'})^2 - \Delta t_{n,k'}\big)\Big] \\
&= 0, \\
E_{n,1} &= \sum_{t^n_k \in \Delta_n(t)} E\left[f''^2\big(B(t^n_{k-1},\omega)\big)(\Delta t_{n,k})^2\left(\frac{(\Delta B_{n,k})^2}{\Delta t_{n,k}} - 1\right)^2\right] \\
&= \sum_{t^n_k \in \Delta_n(t)} (\Delta t_{n,k})^2 E\Big[f''^2\big(B(t^n_{k-1},\omega)\big)\Big] E\left[\left(\frac{(\Delta B_{n,k})^2}{\Delta t_{n,k}-1}\right)^2\right] \\
&\le 2K^2 \sum_{t^n_k \in \Delta_n(t)} (\Delta t_{n,k})^2 \\
&\le 2K^2 t|\Delta_n|.
\end{aligned}$$

従って, 定理 2.6. と同様にして, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\Delta_n| < +\infty$ の条件下で,

$$\begin{aligned}
&\lim_{|\Delta_n|\to 0} \sum_{t^n_k \in \Delta_n(t)} f''\big(B(t^n_{k-1},\omega)\big)(\Delta B_{n,k})^2 \\
&\quad = \lim_{|\Delta_n|\to 0} \sum_{t^n_k \in \Delta_n(t)} f''\big(B(t^n_{k-1},\omega)\big)\Delta t_{n,k} \\
&\quad = \int_0^t f''\big(B(s,\omega)\big)\,ds, \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

かくして, 左辺と右辺の第 2 項の極限が存在することがわかったから, 右辺の第 1 項は

$$
\begin{aligned}
&\lim_{|\Delta_n|\to 0} \sum_{t_k^n \in \Delta_n(t)} f'\bigl(B(t_{k-1}^n, \omega)\bigr)\Delta B_{n,k} \\
&\quad = f\bigl(B(t,\omega)\bigr) - f\bigl(B(0,\omega)\bigr) - \frac{1}{2}\int_0^t f''\bigl(B(s,\omega)\bigr)\,ds, \quad \text{a.s.}
\end{aligned}
$$

によって, きちんと定義された確率変数となる. それを,

$$
\int_0^t f'\bigl(B(s)\bigr)\,dB(s)
$$

と記して, 確率積分と称する. ここで, 注意すべきことは「普通」のリーマン積分においては, リーマン和 $\sum f'(\xi_k)(t_k^n - t_{k-1}^n)$ において, ξ_k は区間, $[\,t_{k-1}^n, t_k^n\,]$ のどの点を選んでもよかったが, 確率積分の場合は, 途中の証明で独立増分性を用いているため, この ξ_k は必ず, $B(t_{k-1}^n, \omega)$ を選ばなければならないことである. 実際 $\bigl(B(t_{k-1}^n, \omega) + B(t_k^n, \omega)\bigr)\,/\,2$ を選ぶことにすると, 極限の値が変わり, その場合はストラトノビッチ積分という. なお, 分割点の取り方を変えても $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\Delta_n| < +\infty$ を満たしている限り, 確率 1 で同じ極限値に収束するが, 収束しない例外集合 (その確率は 0) は異なる.

§4. 複素 Brown 運動

d 個の独立な 1 次元 Brown 運動 $\{ B_k(t)\,;\, k=1,2,\ldots,d \}$ を考えて, それを d 次元ユークリッド空間の値をとる確率過程

$$\left\{ B^d(t) = \bigl(B_1(t), B_2(t), \ldots, B_d(t)\bigr)\,;\, t \in T = [\,0,\infty) \right\}$$

とみなしたとき, $\{ B^d(t)\,;\, t \in T \}$ を d 次元 Brown 運動という. ここでいう独立性は各 t を止める毎に d 個の実数値確率変数 $\{ B_k(t)\,;\, k = 1,2,\ldots,d \}$ が独立である, ということよりはるかに強いことを仮定していることに注意. 構成的には, 異なる確率空間 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, P_k)$ 上で定義された 1 次元 Brown 運動 $\{ B_k(t,\omega_k)\,;\, t \in T,\ \omega_k \in \Omega_k \}$; $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ d$ を用意しておき, 直積で出来る新しい確率空間 $\Bigl(\Omega = \prod_{k=1}^{d} \Omega_k, \mathcal{F} = \bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{F}_k, P = \prod_{k=1}^{d} P_k\Bigr)$ を用意して,

$$B^d(t,\omega) = \bigl(B_1(t,\omega_1), B_2(t,\omega_2), \ldots, B_d(t,\omega_d)\bigr),$$
$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_d)$$

とおいてやると

$$\left\{ B^d(t) = \bigl(B_1(t), B_2(t), \ldots, B_d(t)\bigr)\,;\, t \in [\,0,\infty) \right\}$$

は d 次元 Brown 運動となる.

多次元 Brown 運動の見本関数の性質は次元数によって定性的性質が大いに異なる場合があって, 興味がつきない. 例えば, 1 次元の場合は直線という位相的性質から容易に, 確率 1 で, 見本関数は任意の点を無限回訪問 (英語では hit する, というがえらい違いだ) するが, 2 次元以上であると, 特定の点を訪問する確率は 0 である. しかし, 2 次元の場合は, 確率 1 で, 任意の点の任意の近傍を無限回訪問す

る (neighborhood recurrent) であるが, 3 次元以上ではこの確率は 0 である. 2 次元, 3 次元の Brown 運動の見本関数は, 確率 1 で自分自身 (見本関数) を少なくとも 1 回訪問する (double point を持つ) が 4 次元以上では, この確率は 0 である. 2 次元の場合はさらに強く, 確率 1 で, 自分自身を連続濃度回訪問する. このように, 1 次元の場合には考えられない多くの興味有る性質が多次元 Brown 運動の見本関数について知られている.

特に, $d = 2$ の場合, 2 次元ユークリッド空間に複素構造を導入して複素平面とみたとき, 2 次元 Brown 運動とは言わないで, 複素 Brown 運動という. 複素数として扱うことによって, 古典的函数論が応用できて, 著しい結果が得られるのである. この節では Lévy の定理として知られている有名な結果を前節の確率解析の考え方を応用して証明し, この定理から導かれる簡単な (しかし, 内容的には深い) 結果を紹介する.

複素数を $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$, $i = \sqrt{-1}$ で表し, 複素 Brown 運動を $B(t,\omega) = B_1(t,\omega) + iB_2(t,\omega)$ で表す. $\{B_1(t)\}$ と $\{B_2(t)\}$ は 2 つの独立な 1 次元 Brown 運動である. $f(z)$ を複素平面 C で定義された正則関数 (整関数) とする. ここで,

$$X_z(t,\omega) = f(B(t,\omega) + z) - f(z), \quad t \in T = [\,0, +\infty)$$

とおくと, 連続な見本関数を持つ複素数値確率過程が定義される. P. Lévy の天才的直感は, この見本関数が実は本質的に元の Brown 運動の見本関数と同じである, ということを見抜いた. 正確にいうと, 見本関数毎に時間パラメータを変えて得られる新しい確率過程は元の複素 Brown 運動と同値である, という主張である. どのよう

に時間変更すればよいかを以下に説明する.

$$\Theta(t,\omega)=\int_0^t \left|f'(B(s,\omega)+z)\right|^2 ds$$

とおくと, 確率 1 で $\Theta(t,\omega)$ は真に単調増加な関数であるから, その逆関数を $\theta(t,\omega)$ とする. $\Theta\circ\theta(t,\omega)=\theta\circ\Theta(t,\omega)=t$, a.s. である. このとき,

定理 4.1. 任意の z に対して, $B^*(t,\omega)=X_z(\theta(t,\omega),\omega)$ は複素 Brown 運動である.

証明. $z=0$ としても証明のやり方は変わらないので, 以下では $X_0(t)=X(t)$ とおいて, 話を進める. §2 でも説明したように, Brown 運動であることを示すためには, 任意の $0\le t_0<t_1<\cdots<t_n$ に対して, $\{\,B^*(t_k)-B^*(t_{k-1})\,;\,k=1,2,\ldots,n\,\}$ が独立で各々が平均 0, 分散 (t_k-t_{k-1}), 共分散 0 の 2 次元正規分布を持つことを示せばよい.

まず, $\{\,B^*(t)-B^*(s)\,\}$, $0\le s<t$ の分布が平均 0, 分散 $(t-s)$, 共分散 0 の 2 次元正規分布であることを示そう. そのためには特性関数を調べればよい.

$$\varphi(\xi,t)=E\Big[\exp\Big(i\,\mathrm{Re}\big(\bar{\xi}\big(B^*(t)-B^*(s)\big)\big)\Big)\Big]$$

とおいて, $\varphi(\xi,t)$ を t の関数として考察する. 右辺の変形のためには, マルコフ時間とマルコフ性の拡張であるところの強マルコフ性の概念が必要であるが, ここではそれらの一般論にふれる余裕がない. しかし Brown 運動だけを扱っている限りは Brown 運動の独立増分性を用いればことが足りる.

$$B^*(t,\omega)=X(\theta(t,\omega),\omega)=f\big(B(\theta(t,\omega),\omega)\big)-f(0)$$

であるから, 結局もとの Brown 運動 $B(t)$ の時間が確率変数になっている場合を扱わなければならない．そのために, まず確率変数 $\theta(t,\omega)$ を滑らかな関数で近似する．これは, $\theta(t,\omega)$ は定義から 1 階連続的微分可能な関数であるが, Brown 運動の見本関数の連続性が $(1/2-\varepsilon)$-ヘルダー連続性しかないため, $\theta(t,\omega)$ の第 2 近似までを必要とするためである．よく知られているように, 関数を無限回微分可能な関数で近似するには次のようにする．まず, 区間 $[\,0,1\,]$ の外では 0 を取り, $(0,1)$ 上で正の値をとり, 積分すると 1 になるような無限回微分可能な関数 $\eta(x)$ を用意する．例えば, $(0,1)$ で

$$\eta(x)=\exp\bigl(-1/(x-1)^2\bigr)\ \Big/ \int_{-1}^{1}\exp\bigl(-1/(y-1)^2\bigr)\,dy$$

とおけばよい．さらに, $\varepsilon>0$ に対して, $\eta_\varepsilon(x)=\eta(x/\varepsilon)\ /\ \varepsilon$ とおくと, $\eta_\varepsilon(x)$ は区間 $(-\varepsilon,+\varepsilon)$ 上で正, それ以外のところで 0 をとる関数で, 積分すると 1 となる．この関数を用いて,

$$\Theta_\varepsilon(t,\omega)=\int_0^{+\infty}\Theta(s,\omega)\eta_\varepsilon(t-s-\varepsilon)\,ds$$

とおくと, 関数 $\Theta_\varepsilon(t,\omega)$ は $\varepsilon\downarrow 0$ の時, 区間 $[\,0,+\infty)$ 上で広義一様収束する．ここで, 被積分関数の中身を ε だけ引いてあるのは, こうすることによって実は積分の範囲を実質的に $[\,0,t\,]$ とするためである．ただ単に元の関数を近似するだけならばこの工夫は必要ないが, ここで確率論のいやらしさがあって, 後で Brown 運動の時間が t までの見本関数の情報によって決まる関数であるかどうか, ($\mathcal{F}_t$-可測性) といった議論をするときに効いてくるのである．さらに, $\Theta_\varepsilon(t,\omega)$ が単調増加関数であることも明らかであるから, その逆関数を $\theta_\varepsilon(t,\omega)$ とすると, $\theta_\varepsilon(t,\omega)$ もやはり区間 $[\,0,+\infty)$ 上で $\theta(t,\omega)$ に広義一様収

束する無限回微分可能な関数である．従って，

$$\varphi(\xi,t)-1=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E\biggl[\exp\biggl(i\,\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\Bigl(f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t,\omega),\omega)\bigr) - f\bigl(B(\theta_\varepsilon(s,\omega),\omega)\bigr)\Bigr)\Bigr\}\biggr)\biggr].$$

ここで，前節のアイディアを再び用いて，分割の列を $\Delta_n;\, n=1,2,\ldots$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\varphi(\xi,t)-1\\
&=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\to+\infty}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t-s)}\\
&\quad E\biggl[\exp\biggl(i\,\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\Bigl(f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega\bigr)-f\bigl(B(\theta_\varepsilon(s,\omega),\omega)\bigr)\Bigr)\Bigr\}\biggr)\\
&\qquad -\exp\biggl(i\,\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\Bigl(f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\bigr)\\
&\qquad\qquad - f\bigl(B(\theta_\varepsilon(s,\omega),\omega)\bigr)\Bigr)\Bigr\}\biggr)\biggr]\\
&=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\to+\infty}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t-s)}\\
&\quad E\biggl[\exp\biggl(i\,\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\Bigl(f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\bigr)\\
&\qquad\qquad - f\bigl(B(\theta_\varepsilon(s,\omega),\omega)\bigr)\Bigr)\Bigr\}\biggr)\\
&\qquad\times\biggl(\exp\biggl(i\,\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\Bigl(f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega)\bigr)\\
&\qquad\qquad - f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\bigr)\Bigr)\Bigr\}\biggr)-1\biggr)\biggr].
\end{aligned}$$

ここで，初等関数の展開式 $\exp(ix)-1=ix-x^2/2+O\bigl(|x|^3\bigr)$ という簡単な関係式を用いる．ここでも第 2 近似まで正確に書き下していることに注意してほしい．

$$\begin{aligned}
\Delta f_{n,k}&=f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega)\bigr)-f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\bigr),\\
\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k}&=B(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega)-B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)
\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}&\exp\Bigl(i\,\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\Bigl(f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega)\bigr)\\&\qquad\qquad -f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\bigr)\Bigr)\Bigr\}\Bigr)-1\\&\quad = i\,\mathrm{Re}(\bar{\xi}\Delta f_{n,k})-\frac{1}{2}\bigl(\mathrm{Re}(\bar{\xi}\Delta f_{n,k})\bigr)^2+O\bigl(|\Delta f_{n,k}|^3\bigr).\end{aligned}$$

あとはいつものアイディアで関数を展開すればよいわけであるが,「普通」の函数論の展開とどう違うか, 比較しながら理解出来るように, さしあたって $\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k}=\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ とおいて, 普通の展開を考える. ただし, 第 2 近似までを考えるのがポイントである.

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\frac{1}{2}f''(z)(\Delta z)^2+O\bigl(|\Delta z|^3\bigr)$$

において, 二乗の項を無視しないで, ただ

$$(\Delta x)^2=(\Delta y)^2,\ (\Delta x)(\Delta y)=0$$

としてみる. 実数ではこのようなことは無意味であるが, 確率論的には後で考察するようにある意味で可能である. そうすると, $(\Delta z)^2=(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x\Delta y=0$ だから第 2 項が消えて,

$$\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\bigl(f(z+\Delta z)-f(z)\bigr)\Bigr\}=\mathrm{Re}\bigl\{\bar{\xi}f'(z)\Delta z\bigr\}+O\bigl(|\Delta z|^3\bigr)$$

となる. さらに,

$$\Bigl(\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\bigl(f(z+\Delta z)-f(z)\bigr)\Bigr\}\Bigr)^2=\Bigl(\mathrm{Re}\bigl\{\bar{\xi}f'(z)\Delta z\bigr\}\Bigr)^2+O\bigl(|\Delta z|^3\bigr)$$

($\bar{\xi}=\xi_1-i\xi_2$ とおいて,)

$$\begin{aligned}&\Bigl(\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\bigl(f(z+\Delta z)-f(z)\bigr)\Bigr\}\Bigr)^2\\&\quad=\Bigl(\Bigl(\xi_1\,\mathrm{Re}\bigl\{f'(z)\bigr)+\xi_2\,\mathrm{Im}\bigl\{f'(z)\bigr\}\Bigr)\Delta x\\&\qquad\qquad+\Bigl(\xi_2\,\mathrm{Re}\bigl\{f'(z)\bigr\}-\xi_1\,\mathrm{Im}\bigl\{f'(z)\bigr\}\Bigr)\Delta y\Bigr)^2+O\bigl(|\Delta z|^3\bigr).\end{aligned}$$

ここで, 再び $(\Delta x)^2=(\Delta y)^2$, $(\Delta x)(\Delta y)=0$ なる関係を用いると,

$$\left(\mathrm{Re}\Big\{\bar{\xi}\big(f(z+\Delta z)-f(z)\big)\Big\}\right)^2=(\xi_1^2+\xi_2^2)\big|f'(z)\big|^2(\Delta x)^2+O\big(|\Delta z|^3\big)$$

なる関係式が得られる. さて, 確率論にもどって, $\Delta f_{n,k}$ を展開する.

$$\begin{aligned}\Delta f_{n,k}=f'&\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k}\\&+\frac{1}{2}f''\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)(\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k})^2\\&+O\big(|\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k}|^3\big).\end{aligned}$$

ここで,

$$\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k}=B(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega)-B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)$$

だったから, 今度は $\theta_\varepsilon(t,\omega)$ を近似してやると (ここでも, 第 2 近似まで必要で, 関数 $\theta(t,\omega)$ の滑らかさを増してやる必要があった.)

$\Delta_{n,k}t=t_k^n-t_{k-1}^n$ とおいて,

$$\begin{aligned}\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega)=\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega)&+\theta_\varepsilon'(t_{k-1}^n+s,\omega)\Delta_{n,k}t\\&+\frac{1}{2}\theta_\varepsilon''(t_{k-1}^n+s,\omega)(\Delta_{n,k}t)^2+O\big(|\Delta_{n,k}t|^3\big).\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}&E\Big[f'\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k}\Big]\\&\quad=E\Big[f'\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)\\&\qquad\times\big(B(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega)-B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)\Big]\\&\quad=E\Bigg[f'\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)\\&\qquad\times\bigg(B\Big(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega)+\theta_\varepsilon'(t_{k-1}^n+s,\omega)\Delta_{n,k}t\\&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\theta_\varepsilon''(t_{k-1}^n+s,\omega)(\Delta_{n,k}t)^2+O\big(|\Delta_{n,k}t|^3\big),\omega\Big)\\&\qquad\qquad-B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\bigg)\Bigg].\end{aligned}$$

Brown 運動の見本関数のヘルダー連続性は, 十分小さな $\gamma > 0$ に対して $(1/2 - \gamma)$ 程度であったから,

$$\begin{aligned}\Delta_{\theta,\varepsilon} B_{n,k} &= B\Big(\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega) + \theta'_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)\Delta_{n,k}t \\ &\qquad + \frac{1}{2}\theta''_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)(\Delta_{n,k}t)^2 + O\big(|\Delta_{n,k}t|^3\big),\omega\Big) \\ &\quad - B(\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega),\omega) \\ &= B\Big(\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega) + \theta'_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)\Delta_{n,k}t \\ &\qquad + \frac{1}{2}\theta''_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)(\Delta_{n,k}t)^2,\omega\Big) \\ &\quad - B(\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega),\omega) + O\big(|\Delta_{n,k}t|^{3/2-3\gamma}\big). \qquad (3)\end{aligned}$$

例によって, $O\big(|\Delta_{n,k}t|^{3/2-3\gamma}\big)$ の部分は k について加えても $|\Delta_n t|^{1/2-3\gamma}$ のオーダーだから, 結局 γ を 1/6 より小さく選んでおけば, この項は 0 に収束することが分かる. 次に

$$B\Big(\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega) + \theta'_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)\Delta_{n,k}t + \frac{1}{2}\theta''_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)(\Delta_{n,k}t)^2,\omega\Big) - B(\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega),\omega)$$

の部分を考える. 関数 $\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)$ の定義から, 事象 $\{\,\omega\,;\,\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega) \le u\,\}$ は元の Brown 運動の見本関数の, 時刻 u までの情報によって決まる. 従って, その導関数は時刻 $u+\mu$, $^\forall\mu > 0$ の情報によって決まる. Brown 運動の独立増分性は, 正確には $\{\,B(s,\omega)\,;\,0 \le s \le u\,\}$ を可測にする最小の σ 加法族を $\mathcal{F}_u$ とするとき, $\mathcal{F}_{u+0} = \bigcap_{\mu>0} \mathcal{F}_{u+\mu}$ が任意の $v > 0$ に対して $B(v) - B(u)$ と独立である, ということが知られているから, いわゆる強マルコフ性によって, (強マルコフ性を用いたくないのであれば, ここで $\theta_\varepsilon(t,\omega)$ を離散近似して普通のマルコフ性, 今の場合であれば独立増分性を用いればよい)

$$B\Big(\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega) + \theta'_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)\Delta_{n,k}t + \frac{1}{2}\theta''_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega)(\Delta_{n,k}t)^2,\omega\Big) - B(\theta_\varepsilon(t^n_{k-1}+s,\omega),\omega)$$

は $\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega)=u$ のとき,

$$B(u+a(u),\omega)-B(u,\omega)$$

となって, $\mathcal{F}_{u+0}$ とは独立となる. 従って, 平均 0 の正規分布を持つから,

$$E\biggl[\exp\Bigl(i\,\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\Bigl(f\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\bigr)-f\bigl(B(\theta_\varepsilon(s,\omega),\omega)\bigr)\Bigr)\Bigr\}\Bigr)$$
$$\times f'\bigl(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\bigr)\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k}\biggr]=0$$

となる. 次に

$$(\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k})^2$$

を考察しよう. 今度は (3) 式のところで, 第 1 近似までを考えればよくて,

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k}\\
&\quad=B\Bigl(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega)+\theta_\varepsilon'(t_{k-1}^n+s,\omega)\Delta_{n,k}t+O\bigl(|\Delta_{n,k}t|^2\bigr),\omega\Bigr)\\
&\qquad\quad-B\bigl(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega\bigr)\\
&\quad=B\bigl(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega)+\theta_\varepsilon'(t_{k-1}^n+s,\omega)\Delta_{n,k}t,\omega\bigr)\\
&\qquad\quad-B\bigl(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega\bigr)+O\bigl(|\Delta_{n,k}t|^{1-2\gamma}\bigr).
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k})^2=\Bigl(&B\bigl(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega)+\theta_\varepsilon'(t_{k-1}^n+s,\omega)\Delta_{n,k}t,\omega\bigr)\\
&-B\bigl(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega\bigr)\Bigr)^2+O\bigl(|\Delta_{n,k}t|^{3/2-3\gamma}\bigr)
\end{aligned}$$

となるから, $O\big(|\Delta_{n,k}t|^{3/2-3\gamma}\big)$ の項は $\gamma < 1/6$ となるように選んでおけば k について加えた後 $n \to +\infty$ とした時, 0 に収束する.

$$\Big(B\big(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n + s, \omega) + \theta'_\varepsilon(t_{k-1}^n + s, \omega)\Delta_{n,k}t, \omega\big) \\ - B\big(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n + s, \omega), \omega\big)\Big)^2$$

の部分は, 先程と同じ理由によって,

$$\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n + s, \omega) + \theta'_\varepsilon(t_{k-1}^n + s, \omega)$$

のところの ω を定数のごとくに見なして分散を計算してよい. 従って, 先程の仮定が正当化されて,

$$(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 = \theta'_\varepsilon(t_{k-1}^n + s, \omega)\Delta_{n,k}t.$$

また, $B(t,\omega) = B_1(t,\omega) + iB_2(t,\omega)$ において, $\{B_1(t)\}$ と $\{B_2(t)\}$ は独立だから,

$$(\Delta x)(\Delta y) = 0$$

も正当化されて, 結局

$$E\Bigg[\exp\bigg(i\,\mathrm{Re}\Big\{\bar{\xi}\big(f(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n + s, \omega), \omega)) - f\big(B(\theta_\varepsilon(s, \omega), \omega)\big)\Big\}\bigg) \\ \times f''\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n + s, \omega), \omega)\big)(\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k})^2\Bigg] = 0$$

となる. 次に,

$$\big(\mathrm{Re}\{\bar{\xi}\Delta f_{n,k}\}\big)^2$$

を考察する. 今と同じ理由で $(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2$, $(\Delta x)(\Delta y) = 0$ となるから,

$$\bigg(\mathrm{Re}\Big\{\bar{\xi}\Big(f\big(B(\theta_\varepsilon(t_k^n + s, \omega), \omega)\big) - f\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1} + s, \omega), \omega)\big)\Big)\Big\}\bigg)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= (\xi_1^2+\xi_2^2)\big|f'\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)\big| \\
&\qquad \times \big(B_1(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega)-B_1(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)^2 \\
&\quad + O\big(|\Delta_{\theta,\varepsilon}B_{n,k})|^3\big). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

第 2 項は例によって k について加えても 0 に収束する項だから無視する. 第 1 項の

$$
\big(B_1(\theta_\varepsilon(t_k^n+s,\omega),\omega)-B_1(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big)^2
$$

の部分はやはり, 前と同様に強マルコフ性の考察により, 平均をとるときは,

$$
\theta_\varepsilon'(t_{k-1}^n+s,\omega)\Delta_{n,k}t.
$$

で置き換えてよい. 逆関数の微分の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
&\theta_\varepsilon'(t_{k-1}^n+s,\omega)\Delta_{n,k}t \\
&\quad = \frac{1}{\Theta_\varepsilon'(t_{k-1}^n+s,\omega)} \\
&\quad = \frac{\Delta_{n,k}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega)} \big|f'\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega)-u),\omega)\big|^2\eta_\varepsilon(u-\varepsilon)\,du}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\varepsilon\downarrow 0$ とすると, (4) 式は

$$
(\xi_1^2+\xi_2^2)\Delta_{n,k}t
$$

に収束することになる. $n\to+\infty$ と $\varepsilon\downarrow 0$ の交換が気になる向きは, これらの収束が t に関して広義一様であることを確認されたい. かくして,

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\xi,t)-1 \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\to+\infty}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t-s)} E\Bigg[\exp\bigg(i\,\mathrm{Re}\Big\{\bar{\xi}\Big(f\big(B(\theta_\varepsilon(t_{k-1}^n+s,\omega),\omega)\big) \\
&\qquad\qquad -f\big(B(\theta_\varepsilon(s,\omega),\omega)\big)\Big)\Big\}\bigg)\Delta_{n,k}t\Bigg] \\
&= -\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2)\int_s^t \varphi(\xi,u)\,du.
\end{aligned}
$$

この積分方程式は容易に解けて (両辺を t で微分して, 微分方程式に直す)

$$\varphi(\xi,t)=\exp\bigl(-(\xi_1^2+\xi_2^2)(t-s)/2\bigr). \tag{5}$$

これは, 平均 0, 分散 $(t-s)$, 共分散 0 の 2 次元正規分布の特性関数に他ならない.

次に, 独立増分性を示す. そのため, 任意の複素数 ξ_k; $k=1,2,\ldots,n$ に対して, 特性関数

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=E\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}_k\bigl(B^*(t_k)-B^*(t_{k-1})\bigr)\Bigr\}\right)\right]$$

を計算する.

$$\begin{aligned}
&B^*(t_n,\omega)-B^*(t_{n-1},\omega)\\
&\qquad=f\bigl(B(\theta(t_n,\omega),\omega)+z\bigr)-f\bigl(B(\theta(t_{n-1},\omega),\omega)+z\bigr)\\
&t_n=\int_0^{\theta(t_n,\omega)}\bigl|f'(B(s,\omega)+z)\bigr|^2\,ds
\end{aligned}$$

であったから,

$$\begin{aligned}
&t_n-t_{n-1}\\
&\quad=\int_0^{\theta(t_n,\omega)-\theta(t_{n-1},\omega)}\bigl|f'\bigl(B(s+\theta(t_{n-1},\omega),\omega)+z\bigr)\bigr|^2\,ds\\
&\quad=\int_0^{\theta(t_n,\omega)-\theta(t_{n-1},\omega)}\bigl|f'\bigl(B(s+\theta(t_{n-1},\omega),\omega)-B(\theta(t_{n-1},\omega),\omega)\\
&\qquad\qquad\qquad+B(\theta(t_{n-1},\omega),\omega)+z\bigr)\bigr|^2\,ds
\end{aligned}$$

と表される.

$$\theta(t_{n-1},\omega)=u,\quad t_n-t_{n-1}=t\geq 0,\quad \widehat{\theta}(t,\omega)=\theta(t,\omega)-\theta(t_{n-1},\omega)$$

とおくと,

$$t=\int_0^{\widehat{\theta}(t,\omega)}\bigl|f'\bigl(B(s+u,\omega)-B(u,\omega)+B(u,\omega)+z\bigr)\bigr|^2\,ds.$$

これらの値は u を固定したとき, すべて $\{\, B(t,\omega)-B(u,\omega)\, ;\, u\le t\,\}$ の情報で決まるから, ここで強マルコフ性を用いると,

$$\varphi(\xi,z,s,t)=E\Bigl[\exp\Bigl(i\,\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}\bigl(X_z(\theta(t,\omega),\omega)-X_z(\theta(s,\omega),\omega)\bigr)\Bigr\}\Bigr)\Bigr]$$

とおいて,

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)&=E\Bigl[\exp\Bigl(i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}_k\bigl(B^*(t_k)-B^*(t_{k-1})\bigr)\Bigr\}\Bigr)\Bigr]\\&=E\Bigl[\exp\Bigl(i\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{Re}\Bigl\{\bar{\xi}_k\bigl(B^*(t_k)-B^*(t_{k-1})\bigr)\Bigr\}\Bigr)\\&\qquad\times\varphi\bigl(\xi_n,B(\theta(t_{n-1},\omega),\omega)+z,0,t_n-t_{n-1}\bigr)\Bigr]\end{aligned}$$

を得る. ところが, (5) 式より,

$$\varphi\bigl(\xi_n,B(\theta(t^n_{k-1},\omega),\omega)+z,0,t_n-t_{n-1}\bigr)=\exp\bigl(-(|\xi_n|^2(t_n-t_{n-1})/2\bigr)$$

だったから,

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1})\exp\bigl(-|\xi_n|^2(t_n-t_{n-1})/2\bigr).$$

このあとは, 帰納法によって最終的に

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)$$

を得て, $\{\, B^*(t_k)-B^*(t_{k-1})\, ;\, k=1,2,\dots,n\,\}$ の独立性が証明された.

以上やさしい証明ではなかったが, 証明の道筋はきわめて明瞭で, 使っているアイディアも難しいことではない. ただ, 実解析と違って,

確率論では近似計算のとき, 第 2 近似まで考慮する必要がある, ということが最大の特徴である.

この定理の応用を考える前に, 後で必要になる 2 次元 Brown 運動の見本関数の基本的性質を 1 つだけ証明しておく.

定理 4.2. 2 次元 Brown 運動は neighborhood recurrent である, つまり,

$$P\left(\left\{\omega\,;\begin{matrix}{}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\forall}z\in C,\ {}^{\exists}t_1<t_2<\cdots<t_n\to+\infty\,;\\ {}^{\forall}n,\ |B(t_n,\omega)-z|<\varepsilon\end{matrix}\right\}\right)=1.$$

証明. まず, ${}^{\forall}\varepsilon>0$, ${}^{\forall}z\in C$ に対して,

$$P\big(\{\,\omega\,;\,{}^{\exists}t_1<t_2<\cdots<t_n\to+\infty\,;\,{}^{\forall}n,\ |B(t_n,\omega)-z|<\varepsilon\,\}\big)=1.$$

を示す. $z=x+iy$ として,

$$A_n=\{\,\omega\,;\,|B_1(n,\omega)-x|<\varepsilon/2,\ |B_2(n,\omega)-y|<\varepsilon/2\,\}$$

とおくと,

$$\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m}^{+\infty}A_n \subset\{\,\omega\,;\,{}^{\exists}t_1<t_2<\cdots<t_n\to+\infty\,;\,{}^{\forall}n,\ |B(t_n,\omega)-z|<\varepsilon\,\}$$

だから, A_n の上極限集合の確率が 1 であることを示せばよい. そのためには, よく知られたボレル–カンテリの第 2 補題を少し拡張した形を適用して, まず確率が正であることを示す. 普通の教科書にでているものは, 独立性を仮定するが, 今の場合, A_n は独立事象列にはならないため, シュワルツの不等式を用いた若干の計算が必要である. つづいて, Hewitt-Savage の 0-1 法則 ([6], p.122, Theorem 3 お

および p.123 の Example を見よ) を適応して求める確率が 1 であることを結論する. 0-1 法則も普通の教科書には Kolmogoroff の 0-1 法則までしか載っていないが, 今の場合適用出来ない.

簡単な計算によって,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \int_{|u-x|<\varepsilon/2} \frac{e^{-u^2/(2n)}}{\sqrt{2\pi n}}\, du \int_{|v-y|<\varepsilon/2} \frac{e^{-v^2/(2n)}}{\sqrt{2\pi n}}\, dv \\ &\geq \text{const.} \frac{\varepsilon^2}{n}. \end{aligned}$$

を得る. この評価式によって, まず

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$$

がわかる. 次に, $n < m$ に対して,

$$\begin{aligned} &P(A_n \cap A_m) \\ &= \iint\limits_{\substack{|u-x/\sqrt{n}|<\varepsilon/\sqrt{n}, \\ |v-y/\sqrt{n}|<\varepsilon/\sqrt{n}}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-n/m}} \\ &\qquad\qquad \times \exp\left(-\frac{u^2+v^2-2\sqrt{n/m}\,uv}{2(1-n/m)}\right) du\, dv \\ &\quad \times \iint\limits_{\substack{|u'-x/\sqrt{m}|<\varepsilon/\sqrt{m}, \\ |v'-y/\sqrt{m}|<\varepsilon/\sqrt{m}}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-n/m}} \\ &\qquad\qquad \times \exp\left(-\frac{u'^2+v'^2-2\sqrt{n/m}\,u'v'}{2(1-n/m)}\right) du'\, dv'. \end{aligned}$$

ここで, m を n に比べて十分大きくとれば, 相関係数は 0 に近づくから,

$$\begin{aligned} &{}^{\forall}\delta > 0,\ {}^{\exists}q > 0 \text{ such that } {}^{\forall}m > qn\,; \\ &\qquad\qquad P(A_n \cap A_m) \leq (1+\delta)P(A_n)P(A_m). \end{aligned}$$

一方，$n < m \le qn$ に対しては，積分範囲と被積分関数の係数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-n/m}}$ に注意して

$$P(A_n \cap A_m) \le \text{const.}\ \frac{1}{m-n} P(A_n)$$

を得る．従って，

$$\sum_{n<m\le qn} P(A_n \cap A_m) \le \text{const.}\ (\log n) P(A_n).$$

ここで, シュワルツの不等式を応用する．$\chi(A)$ は集合 A の indicator function つまり, 集合 A 上で 1, その他のところで 0 をとる関数とする．$M > qn$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{m=n}^{M} P(A_m)\right)^2 \\
&\quad = \left(E\left[\left(\sum_{m=n}^{M} \chi(A_m)\right)\chi\left(\bigcup_{m=n}^{M} A_m\right)\right]\right)^2 \\
&\quad \le E\left[\left(\sum_{m=n}^{M} \chi(A_m)\right)^2\right] E\left[\left(\chi\left(\bigcup_{m=n}^{M} A_m\right)\right)^2\right] \\
&\quad = \left(\sum_{m=n}^{M} P(A_m) + 2\sum_{n\le m<m'\le M} P(A_m \cap A_{m'})\right) P\left(\bigcup_{m=n}^{M} A_m\right) \\
&\quad \le \left(\sum_{m=n}^{M} P(A_m) + 2\sum_{\substack{n\le m<m'\le qm,\\ m'\le M}} P(A_m \cap A_{m'}) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2\sum_{n\le m<qm<m'\le M} P(A_m \cap A_{m'})\right) P\left(\bigcup_{m=n}^{M} A_m\right) \\
&\quad \le \left(\sum_{m=n}^{M} P(A_m) + \text{const.}\ \sum_{m=n}^{M} (\log m) P(A_m) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (1+\delta)\left(\sum_{m=n}^{M} P(A_m)\right)^2\right) P\left(\bigcup_{m=n}^{M} A_m\right).
\end{aligned}$$

ここで, $\sum\limits_{m=n}^{M} P(A_m)$ は $(\log M - \log n)$ のオーダーだから, 定数 $C > 0$ が存在して

$$P\Bigl(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\Bigr) \geq \lim_{M\to+\infty} \frac{\Bigl(\sum\limits_{m=n}^{M} P(A_m)\Bigr)^2}{\sum\limits_{m=n}^{M} P(A_m) + C\log M \sum\limits_{m=n}^{M} P(A_m) + (1+\delta)\Bigl(\sum\limits_{m=n}^{M} P(A_m)\Bigr)^2}$$

$$\geq \text{positive constant independent of } n.$$

従って,

$$P\Bigl(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\Bigr) > 0$$

次に, 事象 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty} A_m$ の確率は 0 か 1 しか取らないことを示す (Hewitt-Savage の 0-1 法則). Brown 運動の独立増分性より $B(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\bigl(B(k) - B(k-1)\bigr)$ は独立, 同分布を持つ確率変数列 (i.i.d.) の和で表され, ある近傍に戻って来る, という事象はこの確率変数列の有限個の並べ替えに関して不変である (symmetric). 求める事象を A とすると, 一般に $B(k) - B(k-1)$; $k = 1, 2, \ldots, n$ で決まる事象 C_n が存在して $\lim\limits_{n\to+\infty} P(C_n) = P(A)$ と出来る. ところが, この事象は symmetric だから $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$ 番目の確率変数を用いても同じことが言える. そのようにして決まる事象を C_n の代わりに, D_n で表す. 独立性より,

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n \cap D_n) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n)P(D_n) = P(A)^2.$$

この等式より $P(A) = 0$ or 1 が結論される. (証明終わり)

　さて, いよいよ定理 4.1. と定理 4.2. を用いて, いわゆる代数学の基本定理の確率論的証明を与えよう.

定理 4.3.(代数学の基本定理) 複素係数の代数方程式は必ず複素数の範囲で解を持つ.

証明. n を自然数として,

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,\ a_0 \neq 0,\ a_k \in \mathbf{C},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

とおく. 代数学の基本定理とは, $f(z) = 0$ が少なくとも 1 つの複素根を持つことである. いま, ε に対して,

$$A(\varepsilon) = \{\, z \in C\,;\, |f(z)| \leq \varepsilon \,\}$$

とおく.

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$$

だから, 明らかに $A(\varepsilon)$ は有界閉集合, つまりコンパクトである. 次に, 複素 Brown 運動 $\{B(t, \omega)$ を用いて, 確率過程 $X(t, \omega) = f\big(B(t, \omega)\big)$ を定義すると, 定理 4.1. より, $X(t, \omega)$ の見本関数は, 確率 1 で, 適当な時間変更によって複素 Brown 運動とみなすことが出来るから, 定理 4.2. により原点の ε-近傍に到達し得る, つまり, $A(\varepsilon)$ は空集合ではない. 定義から $A(\varepsilon)$ は単調減少だから,

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} A(\varepsilon) \neq \phi.$$

f の連続性より, $\bigcap_{\varepsilon > 0} A(\varepsilon) \ni z$ に対して $f(z) = 0$ を得る. 代数学の基本定理の証明は幾通りも知られているが, Brown 運動の基本的性質を仮定すれば, おそらく一番短い証明の一つであろう. ([12])

定理 4.1. から出発して, 逆に 2 次元 Brown 運動の見本関数の性質を導くことも出来る.

定理 4.4. 2 次元 Brown 運動は任意に指定した点には, 確率 1 で, 到達しない.

証明. 原点以外の点 $z_0 \neq 0$ については定理 4.1. を利用して簡単に証明できる. すなわち,

$$f(z) = -z_0 e^z + z_0$$

とおくと, $f\big(B(t,\omega)\big)$ は原点から出発し, 時間変更を適当に行えば Brown 運動と同じ行動をする見本関数である. ところが, 指数関数は決して 0 とならないから, $f(z)$ は決して z_0 に等しくならない, つまり, Brown 運動の見本関数は, 決して点 z_0 に到達しない.

次に, 原点に到達しないことを示す. 原点から出発した Brown 運動は任意の $t(>0)$ 時間後には原点以外の点にいるから, マルコフ性を用いると, 上の事実より再び原点に戻ることはない ([9], p61-p62; [10], Theorem 2.10.).

3 次元以上の Brown 運動に関してはこの講義録の定理 2.4. と同様のアイディアで直接証明できる ([9], p62, Problem 3).

§5. Fractional Brown 運動

第 1 節でも述べたように, Brown 運動の拡張は Brown 運動の持つどの性質に着目するかによって, 様々な方向がある. ここでは, 正規性と定常増分を持つ自己相似性 (定義は第 1 節を参照のこと) に着目する. この場合, これらの性質を持つ確率過程のクラスはパラメーター $0 < H \le 1$ で表され, Brown 運動は丁度まん中の $H = 1/2$ の場合である.

まず, パラメーターの範囲について, 必ずしも正規過程である必要もない, より一般の場合について調べる.

定理 5.1. $\{X(t)\,;\, t \in T = [0, +\infty)\}$ を定常増分を持つインデックス $H > 0$ の自己相似過程とする. この時, $0 < E\big[X(1)^2\big] < +\infty$ ならば $H \le 1$ である.

証明. 定常増分性と自己相似性を繰り返し使って計算すると, $0 < s < t$ に対して,

$$E\Big[\big(X(t) - X(s)\big)^2\Big] = E\big[X(t-s)^2\big] = (t-s)^{2H} E\big[X(1)^2\big].$$

一方, シュワルツの不等式も使って,

$$\begin{aligned} E\Big[\big(X(t) - X(s)\big)^2\Big] &= E\big[X(t)^2 + X(s)^2 - 2X(t)X(s)\big] \\ &\ge E\big[X(t)^2 + X(s)^2\big] - 2\sqrt{E\big[X(t)^2\big]E\big[X(s)^2\big]} \\ &= \big(t^{2H} + s^{2H} - 2t^H s^H\big) E\big[X(1)^2\big]. \end{aligned}$$

従って,

$$2t^H s^H \ge t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}.$$

ここで, $t=2,\ s=1$ とおくと, $2^{1+H} \geq 2^{2H}$, すなわち, $2 \geq 2^H$ となって, $H \leq 1$ が導かれる.

次に, 存在証明を与えよう.

定理 5.2. 平均 0 で, 定常増分を持つ インデックス $0 < H \leq 1$ を持つ自己相似, 正規過程が存在する. これを (centered) fractional Brown 運動という.

一般的にいって, 数学における存在証明は基本的であり, かつ結構難しい. 多くの分野において, 研究対象の存在を疑うことはあまりなく, 一人数学者のみが存在証明をうるさく言うので嫌われやすい. ちなみに, 君自身の存在証明を試みてみよう. 生まれて以来このかた, 君は本当に何野何がしなのだろうか？それを誰が証明してくれるのであろうか？

なお, $H=1$ の場合は平均 0 の正規分布を持つ確率変数 X に対して, $X(t)=tX$ とおけば, 明らかに定常増分を持つインデックス $H=1$ の自己相似正規過程となるから, 以下においては $H<1$ の場合のみを考察する.

定理 5.2. の証明には若干の準備が必要である. そのために, 確率論の標準的教科書に載っているはずの幾つかの定理を証明なしに述べる. まず, 必要な定義から始める.

定義 5.1. 空でない任意の集合 T 上で定義された 2 変数の実対称関数 $f(s,t)$; $s,\ t \in T,\ f(s,t)=f(t,s)$ が正定値 (または, 正の定符号 positive definite) 関数であるとは,

$$
{}^{\forall} n \in \mathbf{N},\ {}^{\forall} \xi_k \in \mathbf{R},\ {}^{\forall} t_k \in T,\ k=1,2,\ldots,n,
$$

に対して,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k f(t_j, t_k) \geq 0$$

が成立するときをいう. 以下, 簡単のためにこの関数を p.d. と略記する. なお, 右辺が > 0 の場合とを厳密に区別する必要があるときは, 非負定値 (non-negative definite) とか positive-semi definite といって区別する.

定義 5.2. 空でない任意の集合 T 上で定義された 2 変数の実対称関数 $g(s,t)$; $s,\ t \in T$, $g(s,t) = g(t,s)$ が conditionally negative definite 関数であるとは,

$$^\forall n \in \mathbf{N},\ ^\forall \xi_k \in \mathbf{R}, \text{ such that } \sum_{k=1}^{n} \xi_k = 0,\ ^\forall t_k \in T,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

に対して,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k f(t_j, t_k) \leq 0$$

が成立するときをいう. 以下, この関数を c.n.d. と略記する.

定理 5.3. 任意の正定値関数 $f(s,t)$; $s,\ t \in T$ に対して, 平均が 0 で, 分散–共分散が $f(s,t)$ であるような正規確率場 $X(t)$; $t \in T$ が存在する. (従って $f(s,t) = E[X(s)X(t)]$ である.)

定理 5.4.

(i) 2 つの関数 $f_1(s,t)$, $f_2(s,t)$ が p.d. ならば, 積 $F(s,t) = f_1(s,t)f_2(s,t)$ も p.d.

(ii) $f(s,t)$ が p.d. ならば, $^\forall \alpha > 0$ に対して, $F(s,t) = e^{\alpha f(s,t)}$ も p.d.

(iii) $g(s,t)$ を c.n.d. ならば, $g_0(s,t) = g(s,t) - g(0,0)$ も c.n.d. で, $f(s,t) = \frac{1}{2}(g_0(0,s) + g_0(0,t) - g_0(s,t))$ は p.d.

(iv) $g(s,t)$ が c.n.d. であるための必要十分条件は, $^{\forall}\alpha > 0$ に対して, $f(s,t) = e^{-\alpha g(s,t)}$ が p.d. であること.

証明. 最初に, 定理 5.3. を使って, (i) を確率論的に証明する. 勿論, 線形代数を用いても証明できる. (読者自ら試みよ.)

定理 5.3. より存在が保証された $f_k(s,t) = E[X_k(s)X_k(t)]$; $k = 1$, 2 を満たす, 独立な 2 つの正規確率場 $\{X_k(t)\,;\, t \in T\}$; $k = 1$, 2 を用意する. 今, $Y(t) = X_1(t)X_2(t)$ で新しい確率場を定義すると, X_k の正規性より, $Y(t)$ は任意次数の高次モーメントを持つから,

$$
\begin{aligned}
0 &\le E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j Y(t_j)\right)^2\right] \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k E[Y(t_j)Y(t_k)],
\end{aligned}
$$

ここで, 独立性を使うと,

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k E[X_1(t_j)X_1(t_k)]E[X_2(t_j)X_2(t_k)] \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k f_1(t_j,t_k) f_2(t_j,t_k).
\end{aligned}
$$

(ii) の証明. (i) より, $f(s,t)^n$; $n \in \mathbf{N}$ は p.d. であり, 定数は勿論 p.d. だから, $F(s,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha^n f(s,t)^n}{n!} = e^{\alpha f(s,t)}$ は p.d. (iii) は定義より明らか.

(iv)(必要条件) $g(0,0) = 0$ と仮定して一般性を失わない. (iii) より, $f(s,t) = \frac{1}{2}\big(g(0,s) + g(0,t) - g(s,t)\big)$, $e^{2\alpha f(s,t)}$ は p.d. で, $g(s,t) = g(0,s) + g(0,t) - 2f(s,t)$ だから,

$$
\sum_{j,\,k=1}^{n} \xi_j \xi k e^{-\alpha g(t_j,t_k)} = \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k e^{-\alpha g(0,t_j)} e^{-\alpha g(0,t_k)} e^{2\alpha f(t_j,t_k)}.
$$

ここで, $\xi_j' = \xi_j e^{-\alpha g(0,t_j)}$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j' \xi_k' e^{2\alpha f(t_j,t_k)} \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

(十分性) $\alpha > 0$ に対して,

$$
e^{-\alpha x} = 1 - \alpha(x-u) + \alpha^2 \int_0^x (x-u) e^{-\alpha u}\, du.
$$

ここで, $x = g(s,t)$ とおき, $\sum_{j=1}^{n} \xi_j = 0$ に対して, 仮定より

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k e^{-\alpha g(t_j,t_k)} \\
&= -\alpha \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k g(t_j,t_k) \\
&\qquad + \alpha^2 \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k \int_0^{g(t_j,t_k)} \big(g(t_j,t_k) - u\big) e^{-\alpha u}\, du.
\end{aligned}
$$

ここで, 両辺を α で割った後, $\alpha \downarrow 0$ とすると $0 \leq -\sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k g(t_j,t_k)$ となって, $g(s,t)$ が c.n.d. であることがわかった.

以上の準備のもとに定理 5.2. の証明を始める. 平均 0 の正規過程は共分散 $f(s,t) = E[X(s)X(t)]$ できまるから, $\{\, X(t)\,;\, t \in T = [\,0, +\infty)\,\}$ が定常増分を持つ, インデックス H の自己相似正規過程とすると, $0 \leq s < t$ に対して,

$$
\begin{aligned}
f(s,t) &= \frac{1}{2}\Big(E\big[X(t)^2\big] + E\big[X(s)^2\big] - E\big[\big(X(t) - X(s)\big)^2\big]\Big) \\
&= \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}) E\big[X(1)^2\big]
\end{aligned}
$$

でなければならないから, 定理 5.3. より $f(s,t)$ が p.d. であることを示せばよい. そのためには, 定理 5.4. より $g(s,t) = |t-s|^{2H}$ が

$0 < H \leq 1$ の範囲内で c.n.d. であることを示せばよいが, 同定理 (iv) より, $e^{-\alpha g(s,t)}$ が p.d. であることを示せばよい. ところが, これも確率論でよく知られているように, 関数 $g(x) = e^{-|x|^{2H}}$ は $0 < 2H \leq 2$ の範囲で $2H$ 次の対称安定分布の特性関数であるから, 1 次元分布 μ_{2H} が存在して次のように表される.

$$e^{-|x|^{2H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} d\mu(u).$$

従って,

$$\begin{aligned}
\sum_{j,\,k=1}^{n} \xi_j \xi_k e^{-\alpha|t_j - t_k|^{2H}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k e^{i\alpha^{1/(2H)}(t_j - t_k)u} \right) d\mu(u) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{i\alpha^{1/(2H)} t_k u} \right|^2 d\mu(u) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

以上の考察によって, 存在が保証された, 定常増分を持つ, インデックス H $(0 \leq H < 1)$ を持つ, 自己相似正規過程を fractional Brown 運動というわけである. 「fractional Brown 運動」という名前をつけたのは, フラクタルで有名な Mandelbrot 先生である ([19]). このような正規確率過程そのものはづっと以前から知られていて, その見本関数等の性質は研究されていたが, 有名人に名前を付けてもらうと世間的に認知されるのが容易である. 五つ子自体は昔からあるが, 偉いお坊さんに名前を付けて貰うと後々御利益があるのと同じである.

§6. d-次元 fractional Brown 運動

d-次元 fractional Brown 運動は, d-次元 Brown 運動の場合と同様に独立な d 個の 1 次元 fractional Brown 運動を各座標成分とする d-次元確率過程として定義される. そこで, d-次元 fractional Brown 運動の見本関数の性質は d-次元 Brown 運動と同じであろうか？ まず, 1 次元の場合, 標語的にいうと, Brown 運動で $t^{1/2}$ となっているところを t^H に置き換えればよい. 例えば, 見本関数の連続性は, $(H+\varepsilon)$-ヘルダー連続性を持たない, という具合である. ただし, 一様連続性の (定理 2.5.) の分母は $|t-s|^H\sqrt{2\log 1/|t-s|}$ であって, 後半の平方根は分布が正規分布であることに由来している. すなわち, $\{X(t)\,;\,0\le t<+\infty\}$ をインデックス H の fractional Brown 運動とすると, 次の定理が知られている ([18],Theorem 7).

定理 **6.1.**
$$\lim_{h\to 0}\sup_{\substack{0\le|s-t|\le h,\\ 0\le s,t\le 1}}\frac{|X(s,\omega)-X(t,\omega)|}{h^H\sqrt{2\log 1/h}}=1,\quad \text{a.s.}$$

しからば, Brown 運動の quadratic variation はどうなるか, というと Brown 運動の場合は $2=1/H$ だったと理解すればよい. 次の定理が知られている ([14], 原論文では正規定常過程の場合を扱ってあるが, 証明には定常増分性しか使ってない. 著者が定常性と定常増分性の違いを十分認識していなかったせいである.)

定理 6.2. $\Delta_n=\{\,0\le t_1^n<t_2^n<\cdots\}$, $n=1,2,\ldots$ を T の分割の列とし, $\Delta_n(t)=\{\,t_k^n\in\Delta_n\,;\,t_k^n\le t\,\}$ とおく. ただし,

$$c>0, 2\alpha>\beta>\alpha, \max_k|t_k^n-t_{k-1}^n|\le c2^{-\alpha n}, \min_k|t_k^n-t_{k-1}^n|\ge c2^{-\beta n}$$

を満たす c, α, β が存在するとする．このとき，

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{t_k^n\in\Delta_n(t)}|X(t_k^n,\omega)-X(t_{k-1}^n,\omega)|^{1/H}=bt,\quad \text{a.s.}$$

where

$$b=2\int_0^{+\infty}x^{1/H}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx$$

d-次元 fractional Brown 運動の recurrence はどうなるか？ 実は，recurrent non-recurrent (transient という) の境目は $Hd=1$ という公式で与えられる．Brown 運動の場合，$H=1/2$ だから，$d=2$ となって，2 次元が境目となる．正確には，$Hd\le 1$ ならば neighborhood recurrent である ([13], Theorem 10, 11)．さらに，$Hd<1$ ならば point recurrent である．この条件下では 1 次元 Brown 運動の場合と同様に局所時間 (local times) の存在が言えるからである ([22]. さらに，$d>1/H$ ならば，確率 1 で transient である．

§4. で述べた double points については次のことが知られている ([15])．

定理 6.3. $Hd>2$ ならば，d-次元 fractional Brown 運動は，確率 1 で，double points を持たない．逆に，$Hd<2$ ならば，確率 1 で，double points を持つ．

さらに，k-重点については $Hd=k/(k-1)$ が境目であることが知られている ([7])．いずれの場合も等号の場合は未解決であるが，Brown 運動の場合から結果は予想される．Brown 運動の場合 4 次元以上では double points を持たない ([2]) が，3 次元の場合は double points を持ち，3 重点を持たない ([5])．2 次元の Brown 運動の場合はもっと詳しく連続濃度の重点を持ち，そのハウスドルフ次元が 2 であることが知られている ([24], Theorem 3, (iii))．

このように, $H = 1/d$; $d =$ 次元, という場合は境目の次元が現れて, その場合見本関数はかなり特異な振る舞いをする可能性があることが予想されるが, まだまだ知られていない性質があるように思われる.

§7. 参考文献

[1] Dudley, R. M.; Sample functions of the Gaussian process. Ann. Prob. vol. 1, no. 1 (1973), 66-103.

[2] Dvoretzky, A. Erdős, P. and Kakutani, S.; Double points of paths of Brownian motion in n-space. Acta Sci. Math. Szeged, 12B (1950), 75-81.

[3] Dvoretzky, A. Erdős, P. and Kakutani, S.; Multiple points of paths of Brownian motion in the plane. Bulletin of the Research Council of Israel, vol. III, no. 4 (1954), 364-371.

[4] Dvoretzky, A. Erdős, P. and Kakutani, S.; Points of multiplicity c of plane Brownian paths. Bull Res. Council Israel Sect. F7 (1958), 175-180.

[5] Dvoretzky, A. , Erdős, P. , Kakutani, S. and Taylor, S. J.; Triple points of Brownian paths in 3-space. Proc. Camb. Phil. Soc. vol. 53 (1957), 856-862.

[6] Feller, W.; An Introduction to Probability Theory and its Applications. vol. II. John Wiley & Sons. Inc. 1966.

[7] Goldman, A.; Points multiples des trafectoires de processus Gaussiens. Z. Wahr. Geb. 57 (1981), 481-494.

[8] Itô, Kiyosi (伊藤 清); 確率論 I, II. 岩波講座「基礎数学」6, 12, 1977 年.

[9] Itô, Kiyosi and McKean, Jr. H. P.; Diffusion processes and their sample paths. 1965. Math. Wiss. Band 125 (Springer-Verlag).

[10] Knight, F. B.; Essentials of Brownian Motion and diffusion. 1981. Mathematical Surveys, No. 18. Amer. Math. Soc.

[11] Kolmogoroff, A. N.; Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin (1933). 「確率論の基礎概念」, 根本伸司, 一条 洋 訳, 東京図書, 1969 年.

[12] Kôno, Norio (河野敬雄); Démonstration probabiliste du théorème de d'Alembert. Seminaire de Probabilités XIX 1983/84, pp. 207–208. Springer Lecture Notes in Math. vol. 1123 (1986), Edit par J. Azéma et M. Yor.

[13] Kôno, Norio (河野敬雄); Sur la minoration asymptotique et le caractére transitoire des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs dans R^d. Z. Wahr. Geb. 33 (1975), pp. 95–112.

[14] Kôno, Norio (河野敬雄); Oscillation of sample functions in stationary Gaussian processes. Osaka J. Math. vol. 6, no. 1 (1969), 1-12.

[15] Kôno, Norio (河野敬雄); Double points of a Gaussian sample path. Z. Wahr. Geb. 45 (1978), 175-180.

[16] Laplace, P. S.; Théorie Analytique des Probabilités, (1812). 「確率論—確率の解析的理論—」伊藤清, 樋口順四郎訳, 共立出版, 1986 年.

[17] Lebesgue, Henri; Intégrale, Longueur, Aire, (1902) (学位論文), 「積分・長さおよび面積」, 吉田耕作, 松原 稔 訳, 共立出版, 1969 年.

[18] Marcus, M. B.; Hölder conditions for Gaussian processes with stationary increments. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 134, no. 1 (1968), 29-52.

[19] Mandelbrot, B. B. and Van Ness, J. W.; Fractional Brown-

ian motions, fractional noises and applications. SIAM Rev. 10 (1968), pp. 422–437.

[20] McKean, Jr. H. P.; Stochastic Integrals. Academic Press, 1969.

[21] Nisio, Makiko (西尾真喜子); 確率論, 実教出版, 1978 年.

[22] Pitt, L. D.; Local times for Gaussian vector fields. Indiana Univ. Math. J. vol. 27, no. 2 (1978), 309-330.

[23] Taylor, S. J.; Exact asymptotic estimates of Browninan path variation, Duke Math. J. vol. 39 (1972), pp. 219–241.

[24] Taylor, S. J.; Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process. Z. Wahr. Geb. 5 (1966), 247-264.

[25] Wiener, N.; Differential space. J. Math. and Phys., 2 (1923), pp. 131–174.