p進体上の簡約代数群の admissible 表現論入門

高橋 哲也

1998年9月3日

前書き

本講義録は神戸大学において1996年度に「p進体上の reductive 代数群の admissible 表現」というタイトルで行った集中講義の原稿に加筆・訂正したものです．内容としては, W. Casselman 氏のプレプリント「Introduction to the Theory of Admissible Representations of p-adic Reductive Groups」([1]) の前半部分 (第１章を除いて第５章まで) の解説ですが, 全てを含んでいる訳ではありません．この Casselman 氏のプレプリントは, p 進代数群の表現論にとって極めて基本的で重要なもので頻繁に引用されていて, 論文もしくは本として出版されることが多くの人々に望まれてきましたが, プレプリントのままです．この講義録が, この不幸な状況を少しでも改善し, p 進体上の代数群の表現論を研究する若い日本人数学者の増加に役立つことを望みます．

以下, 本書の内容について簡単に説明します．予備知識としては学部程度の代数学と有限群の表現論程度であり, この分野について全く知らない人でも十分読めると思います．また, 証明もくどいと思われることを厭わず丁寧に書きました．(特に, 前半は) 第１章は, TDLC 群 (totally disconnected, locally compact group) の表現論の一般論についてまとめてあります．([1] の第２章にあたる）smooth, admissible 表現の定義から始め, ２種類の誘導表現と Frobenius の相互律, Hecke 環の表現との対応, (distribution) character 等について全て証明付きで解説してあります．第２章は, p 進体 F 上の reductive 代数群 $\mathbf{G}$ の F-valued points の群 $G = \mathbf{G}(F)$ の admissible 表現と Jacquet functor の基本的な定義と定理の解説です．この章では, 代数群の構造に関する幾つかの定理を [1] の第１章から証明なしで引用しています．(岩澤分解, 岩堀分解等) 第１節では Jacquet functor が admissibility を保つという基本的な定理 (定理 2.10) の証明が目標です．Casselman 氏が p 進代数群の表現論の “corner stone ” と言うほど大切な定理です．第２節では, G の admissible 表現 π が supercuspidal 表現である (matrix coefficient が support compact mod center) ということが, 全ての proper parabolic に対して π の Jacquet module が消えるということと同値であるという定理を示している．(定理 2.20) この定理も普段当たり前のものとして使われているが証明をきちんと述べると結構大変です．上記の２つの定理より, G の既約 admissible 表現 の分類は、G の 既約 supercuspidal

表現の分類と、$\mathbf{G}$ の parabolic subgroup $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$ に対し、$M = \mathbf{M}(F)$ の既約 supercuspidal 表現 σ の G への parabolic induction の既約成分を求めることに、還元されます．しかし, $G = GL_n(F)$ の時は, どちらも分かっていますが他の古典群ではランクの低い場合を除いて殆ど分かっていません．(まだまだ, やることはたくさん残っている分野なのです．)

２年前の集中講義のの講義録が今頃出るのは, 筆者の怠慢以外の何者でもありません．しかし, それでも出す価値があると, 周囲の方から励ましていただいたお蔭でなんとか不完全ながらも完成にこぎつけることができました．なお最後になりましたが, この集中講義をする機会を与えて下さった山崎正氏, 途中の原稿に丁寧に目を通していただいて貴重な助言をいただいた齋藤裕氏に心から感謝致します.

1998 年 9 月 3 日
高橋　哲也

目 次

第1章　TDLC 群の表現論

1.1　基本概念の定義

この章では, totally disconnected, locally compact 群（略して TDLC 群）の表現論の基本について述べる．([1] の §2 の内容．) 実際に考えるのは次の章で述べるように非アルキメデス的局所体 (non-Archimedean local field) F 上の代数群の F-valued points のなす群の表現である．これらの群は TDLC 群であり, その表現論の一般論は TDLC 群の表現論として述べることができる．

定義 1.1　位相群 G が TDLC (totally disconnected, locally compact) 群であるとは, G の 単位元の任意の近傍が コンパクト開部分群を含むことをいうのであるが, ここでは条件を強めて G のコンパクト開部分群からなる可算集合 $\{K_n\}$ で

1. $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_i \supset \cdots$
2. $\{K_n\}$ が G の単位元の基本近傍系

となるものがあることとする.（可算集合という部分が条件が強くなっている.）この可算性を仮定しないと証明に Zorn の補題が必要な部分があるので仮定に入れておく．また, 応用上これで十分である．

例 1.1　以下の群は, TDLC 群である．

1. pro-finite group（$\Longleftrightarrow$ totally disconnected, compact group）
   (但し, これは単位元の任意の近傍が コンパクト開部分群を含むという意味での TDLC 群で考えて)
2. 非アルキメデス的局所体 F に対して, F, $F^{\times}$.（P_F を F の整数環の極大イデアルとすると $\{P_F^n\}$, $\{1+P_F^n\}$ がそれぞれ単位元の基本近傍系）
3. G を 非アルキメデス的局所体 F 上の代数群としたとき G の F-valued points のなす群 $G(F)$

以下, 群 G は TDLC 群と仮定する．また, G の表現は $\mathbb{C}$ 上の表現とする．即ち, G の表現とは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V と G から $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}} V$ への準同型 π からなる組 (π, V) のことである．V を省略して単に π と書くこともある．G の表現 (π, V) に対して $v \in V$ の固定化群を G_v, G の部分群 K に対して K-fixed vector の成す部分空間を V^K とおく．即ち,

$$G_v = \{g \in G \mid \pi(g)v = v\} \tag{1.1}$$

$$V^K = \{v \in V \mid \pi(g)v = v \quad \forall g \in K\} \tag{1.2}$$

定義 1.2　G の表現 (π, V) が smooth であるとは $\forall v \in V$ に対して G_v が G の 開部分群となることである．この条件は $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^{K_n}$ と同値である．($\{K_n\}$ は単位元の基本近傍系となるコンパクト開部分群の集合である．)

以下, TDLC 群の表現は全て smooth と仮定する．ここで扱う表現は無限次元であることが普通である．しかし, なんらかの有限性がなければ実際に扱うのは困難である．そのための条件が admissibility である．

定義 1.3　(π, V) を G の smooth 表現とする．

1. (π, V) が admissible$\underset{\mathrm{def}}{\iff}$ 任意の G の 開部分群 K に対して, $\dim_{\mathbb{C}} V^K < \infty$
2. G の部分群 K に対して (π, V) が K-finite であるとは, $\forall v \in V$ に対して v はある有限次元 K 部分空間にはいることを言う．(V の部分空間 W が K 部分空間 $\iff \pi(k)w \in W$ for all $k \in K, w \in W$) 言い換えると、$\forall v \in V$ に対して $\dim_{\mathbb{C}}\langle \pi(k)v \mid k \in K\rangle < \infty$ が成り立つことである．($\langle \pi(k)v \mid k \in K\rangle$ は $\pi(k)v$ ($k \in K$) で生成されるベクトル空間)
3. Z を G の中心 (center) とし, ω を Z の１次元表現とする．G の smooth 表現 (π, V) が ω-表現であるとは, $\pi(z)v = \omega(z)v$ for all $v \in V, z \in Z$ が成り立つことをいう．このとき, ω を π の central character という．
4. (π, V) が既約 (irreducible) であるとは, V が $\{0\}$ 以外に真の G 部分空間 を持たないことを言う．

admissible 表現は, V^K が有限次元なので後に述べるように Hecke 環の理論が使え, 指標が定義される等の利点がある．この admissible 表現についての基礎理論を述べることがこの講義録の目的である．まず, admissible 表現の１つの特徴づけについて述べる．

命題 1.1　(π, V) が G の admissible 表現
$\Longleftrightarrow$ 任意の コンパクト開部分群 K に対して π を K に制限すると各既約成分は重複度有限, 即ち

$$V = \bigoplus_{\tau \in \hat{K}} m_\tau \tau \quad \text{as } K\text{-module} \quad (m_\tau \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

ここで, $\widehat{K}$ は, K の既約 smooth 表現の同値類の成す集合のことである．(K はコンパクトだから既約 smooth 表現とは単に既約有限次元表現のことである．)

この証明には, 次の 2 つの補題を用いる．この 2 つの補題はそれ自体大切なものである．

補題 1.2　(π, V) を G の smooth 表現とする．G の コンパクト開部分群 K に対して

$$\mathrm{p}_K(v) = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K \pi(k) v \, dk \tag{1.3}$$

と定義する．

1. p_K は, V から V^K への射影である．
2. V の部分空間 $V(K)$ を次のように定義する．
$$V(K) = \langle \pi(k)v - v \mid k \in K, v \in V \rangle \tag{1.4}$$
このとき, $V(K) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{p}_K$ である．
3. $V = V^K \oplus V(K)$.

証明：　1. $\pi : \mathrm{smooth}$ より $K_v = G_v \cap K$ とおくと K/K_v はコンパクトかつ離散的で有限集合．よって,

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_K(v) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K \pi(k) v \, dk \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \sum_{k \in K/K_v} \mathrm{vol}(K_v) \pi(k) v \\ &= \frac{1}{[K : K_v]} \sum_{k \in K/K_v} \pi(k) v \end{aligned} \tag{1.5}$$

従って, $\mathrm{p}_K(v)$ は実際には有限和で K の 測度 (measure) の取り方によらず定まる.

$$\mathrm{p}_K(v) \in V^K,\ \mathrm{p}_K(v) = v \quad \text{for all} \quad v \in V^K,\ \mathrm{p}_K^2 = \mathrm{p}_K$$

は (1.5) より明らか. ゆえに, p_K は, V から V^K への射影である.

2. $\mathrm{p}_K(\pi(k)v - v) = 0$ より, $V(K) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{p}_K$. 一方, (1.5) より

$$(1-\mathrm{p}_K)v = \frac{1}{[K:K_v]} \sum_{k \in K/K_v} (v - \pi(k)v)$$

従って, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{p}_K = (1-\mathrm{p}_K)V \subset V(K)$

3. 完全列

$$0 \to (1-\mathrm{p}_K)V \to V \xrightarrow{\mathrm{p}_K} \mathrm{p}_K V = V^K \to 0 \tag{1.6}$$

は, $\mathrm{p}_K : V^K \to V$ によって 分裂 (split) する. 従って, $V = V^K \oplus V(K)$. □

補題 1.3　K を コンパクト TDLC 群とすると, コンパクト正規開部分群の列 $\{K_i\}$ で単位元の基本近傍系となるものが存在する.

証明：　$\{K_i\}$ をコンパクト部分群の列で単位元の基本近傍系となるものとする. K_i が開部分群だから K/K_i はコンパクトかつ離散的で有限集合. $K_i' = \bigcap_{k \in K/K_i} kK_ik^{-1}$ とおけば, K_i' は K の正規部分群で $\{K_i'\}$ が求めるコンパクト正規開部分群の列となる. □

命題 1.1 の証明を始めよう. まず, π が admissible とし, コンパクト開部分群 K を固定する. 補題 1.3 より K のコンパクト正規開部分群の列 $\{K_i\}$ で K の単位元の基本近傍系となるものがとれる. 補題 1.2 より

$$V = V^{K_1} \oplus V(K_1)$$

K_1 は K の正規部分群だから $\forall k \in K$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi(k)\,\mathrm{p}_{K_1}(v) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(K_1)} \int_{K_1} \pi(k)\pi(k')v\,dk' \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(K_1)} \int_{K_1} \pi(kk'k^{-1})\pi(k)v\,dk' \\
&= \mathrm{p}_{K_1}(\pi(k)v)
\end{aligned}$$

ゆえに, $V(K_1)$, V^{K_1} は K 部分空間. π が admissible より V^{K_1} は有限次元で K/K_1-加群と思えるから, K の既約表現の有限重複度の直和である. (K/K_1 は有

限群であることに注意．) $V_i = ((V(K_1)(K_2)\cdots(K_i))$ とおき, 以下この操作を繰り返せば K-module として

$$V = V^{K_1} \oplus V_1^{K_2} \oplus \cdots \oplus V_i^{K_{i+1}} \oplus \cdots$$

となり, $V_i^{K_{i+1}}$ は有限次元で K の既約表現のうち K_{i+1} 上 trivialであるものの 有限重複度の直和である．K の既約表現はある i に対して K_i 上 trivial だから V に現れる K の既約表現は, ある i があって $V_i^{K_{i+1}}$ に含まれる．

逆に, $V = \bigoplus_{\tau\in\hat{K}} m_\tau \tau$ $(m_\tau < \infty)$ とする．G' を G のコンパクト開部分群とすると $V^{G'} \subset V^{K_i}$ となる i が存在する．V^{K_i} は, K/K_i-module だから仮定より有限次元である．よって (π, V) は admissible である．□

smooth 表現は, コンパクト開部分群 K に対して K-finite であるが, admissible 表現に対してはより強く次が言える．

補題 1.4　Z を G の center, H を $H/H\cap Z$ がコンパクトとなる G の閉部分群とする．このとき, G の任意の admissible 表現は H-finite である．

証明：　(π, V) を G の admissible 表現, K を G のコンパクト開部分群とする．V^K は 有限次元で Z-不変である．また, $K\cap H$ の $H/H\cap Z$ への像は指数有限だから $\langle \pi(h)v \mid h\in H, v\in V^K\rangle$ は, 有限次元 H-不変空間である．□

smooth 表現の (π, V) の反傾表現 (contragredient representation) を定義しよう．単純に (π, V) の algebraic dual をとっただけでは smooth にならないので smooth な部分だけを取り出さなければならない．

定義 1.4　G の smooth 表現 (π, V) に対して (π^*, V^*) を (π, V) の algebraic dual とする．即ち, $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ とし, $\pi^* : G \to \mathrm{Aut}(V^*)$ を

$$\pi^*(g)(v^*) = v^* \circ \pi(g^{-1})$$

と定義する．また, $v^*(v) = \langle v, v^*\rangle$ と書く．このとき定義より

$$\langle \pi(g)v, \pi^*(g)v^*\rangle = \langle v, v^*\rangle \tag{1.7}$$

が成り立つ．更に, $V\times V^*$ 上の pairing $(v, v^*) \mapsto \langle v, v^*\rangle$ は非退化であることも algebraic dual の定義より明らかである．

先程も述べたように (π^*, V^*) は smooth とは限らない．contragredient を定義するためにひとつ補題を準備する．

補題 1.5　G の任意のコンパクト開部分群 K に対して $(V^K)^* = (V^*)^K$

証明：　分裂する完全列 (1.6) の dual を取って分裂する完全列

$$0 \to (V^K)^* = (\mathrm{p}_K V)^* \overset{\mathrm{p}_K^*}{\to} V^* \overset{\mathrm{res}}{\to} (V(K))^* = ((1-\mathrm{p}_K)V)^* \to 0$$

を得る．($\mathrm{p}_K^* : V^* \to (V^K)^*$ によって分裂する．) 但し, $(\mathrm{p}_K^*(v^*))(v) = v^*(\mathrm{p}_K(v))$ for $v^* \in V^*, v \in V$ で res は 制限写像を表す．$\mathrm{Ker}\,\mathrm{res} = \mathrm{p}_K^*((V^K)^*) = (V^K)^* \underset{\mathrm{def}}{=} V(K)^\perp$ とおくと,

$$\begin{aligned} v^* \in V(K)^\perp &\iff v^*(\pi(k)v - v) = 0 \quad \forall k, \forall v \\ &\iff v^*(\pi(k)v) = v^*(v) \quad \forall k, \forall v \\ &\iff \pi^*(k^{-1})v^* = v^* \quad \forall k, \forall v \\ &\iff v^* \in (V^*)^K \end{aligned}$$

より $V(K)^\perp = (V^*)^K$ を得る．よって $(V^K)^* = (V^*)^K$ である． □

定義 1.5　smooth 表現 (π, V) に対し,

$$\tilde{V} = V^*_{smooth} = \bigcup_{K:\text{cpt open}} \mathrm{p}_K^*((V^K)^*), \quad \tilde{\pi}(g) = \pi^*(g)|_{\tilde{V}}$$

と定義し $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ を (π, V) の反傾表現 (contragredient representation) と呼ぶ．(但し, $\pi^*(g)|_{\tilde{V}}$ は $\pi^*(g)$ の $\tilde{V}$ への制限を表す．) 定義より明らかに $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ は smooth である．

$V \times V^*$ 上の pairing $(v, v^*) \mapsto \langle v, v^* \rangle$ は非退化であったが V^* を $\tilde{V}$ に制限しても非退化である．

補題 1.6　pairing $V \times \tilde{V}$ 上の pairing $(v, \tilde{v}) \mapsto \langle v, \tilde{v} \rangle$ は非退化である．

証明：　$\langle v, \tilde{v} \rangle = 0$ for $\forall \tilde{v} \in \tilde{V} \implies v = 0$ を示す．$v \in V^K$ となるコンパクト開部分群 K をとる．$V^K \times (V^K)^*$ 上の pairing $(v, \tilde{v}) \mapsto \langle v, \tilde{v} \rangle$ は非退化で $(V^K)^* = (V^*)^K = \tilde{V}^K$ より $v = 0$. □

admissibility は contragredient をとることで保たれる．

命題 1.7　(π, V) : smooth 表現につき以下は同値である．

1. (π, V) が admissible
2. $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ が admissible
3. $V \to \tilde{\tilde{V}}$ (canonical injection) が全射

証明：　$1 \Longleftrightarrow 2$ は, $\dim \tilde{V}^K = \dim V^K$ より直ちに従う.
　$1 \Longleftrightarrow 3$ は, $V = \bigcup V^K$, $\tilde{V} = \bigcup (V^*)^K$ より $V^K \to (V^K)^{**}$ (canonical injection) が V^K が 有限次元のときのみ全射になることを示せばよい. これは, 一般のベクトル空間 W について

$$W \simeq W^{**} \Longleftrightarrow \dim W < \infty$$

がなりたつことより従う. □

　ユニタリー表現の話はこの講義録では深く触れないので定義のみを書いておく.

定義 1.6　G の smooth 表現 (π, V) は V 上に正定値 G-invariant Hermitian form が存在するときユニタリー表現であると言う. 定義より明らかに (π, V) がユニタリー表現のときは $(\tilde{\pi}, \tilde{V}) \simeq (\pi, V)$ である。

　最後に表現の matrix coefficient , supercuspidal 表現の定義をしておく.

定義 1.7　(π, V) を G の smooth 表現とする. $v \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$ に対して
$f_{v,\tilde{v}}(g) = \langle \pi(g)v, \tilde{v} \rangle$ とおく. $f_{v,\tilde{v}}$ の形の G 上の関数を π の matrix coefficient という.

定義 1.8　(π, V) を G の admissible 表現, Z を G の center(中心) とする. π が supercuspidal であるとは, π の 任意の matrix coefficient $f_{v,\tilde{v}}$ の support がコンパクト mod Z, 即ち, G のあるコンパクト集合 C が存在して $\mathrm{Supp}\, f_{v,\tilde{v}} \subset ZC$ が成り立つことを言う.

1.2　Hecke 環の表現との関係

　TDLC 群 G の表現は, G の Hecke 環の表現と深い関係がある. まず G の測度と modulus character についてまとめておく.

定義 1.9　TDLC 群 G に対して $\delta_G \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}_+^\times)$ を

$$\delta_G(g) = [gKg^{-1} : K] \quad (K : \text{compact open})$$

によって定義する. 但し, $[gKg^{-1} : K] = [gKg^{-1} : K \cap gKg^{-1}]/[K : K \cap gKg^{-1}]$ である. まず, K の取り方によらないことは K' を別のコンパクト開部分群とすると $[gKg^{-1} : gK'g^{-1}] = [K : K']$ よりわかる. また $gKg^{-1}/K \cap gKg^{-1}$ はコンパクトかつ離散的だから有限集合である. よって $\delta_G(g) \in \mathbb{Q}_+^\times$ である. $\delta_G(xy) = \delta_G(x)\delta_G(y)$ も定義より明らかである.
　δ_G を G の modulus character という.

例 1.2　G が以下のような群の場合は $\delta_G = 1$ である．$\delta_G = 1$ である群は unimodular と呼ばれる．

1. G がアーベル群のとき．(明らか．)
2. G がコンパクト群のとき．($K = G$ ととればよい．)
3. $G = [G, G]$ のとき．(δ_G はアーベル群への準同型だから．)
4. Z を G の center とするとき G/Z がコンパクト．($\delta_G(z) = 1$ for $z \in Z$ より δ_G は G/Z を factor through するから．)
5. ある G のコンパクト開部分群 H に対して $G = [G, G]\,\mathrm{Nor}_G(H)$ となるとき．($\because$ H 上 $\delta_G = 1$ で δ_G はアーベル群への準同型だから $\delta_G = 1$ on $\mathrm{Nor}_G(H)$．但し, $\mathrm{Nor}_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$．)

以下, とくに断らないかぎり, G の測度は右不変測度をとることとする．modulus character δ_G は G の左不変測度と右不変測度の ‘ずれ’ をはかっているものである．即ち,

補題 1.8　f を G 上の locally constant, compactly supported function とする．$g' \in G$ に対して

$$\int_G f(g'g)\,dg = \delta_G(g')^{-1} \int_G f(g)\,dg \tag{1.8}$$

が成り立つ．従って, $\delta_G^{-1} dg$ は左不変測度である．

証明：　f は locally constant, compactly supported だから $f(kx) = f(x)$ for $k \in K$, $x \in \mathrm{Supp}\, f$ となるコンパクト開部分群 K がある．

$$\int_G f(g'g)\,dg = \mathrm{vol}(g'^{-1}Kg') \sum_{g \in g'^{-1}Kg' \backslash G} f(g'g)$$

(f が compactly supported より有限和)

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{vol}(g'^{-1}Kg') \sum_{g_1 \in K \backslash G} f(g_1) \quad \Bigl(G = \coprod_{g \in g'^{-1}Kg' \backslash G} g'^{-1}Kg'g = \coprod_{g \in K \backslash G} Kg'g\Bigr) \\
&= \frac{\mathrm{vol}(g'^{-1}Kg')}{\mathrm{vol}(K)} \int_G f(g_1)\,dg_1 \\
&= \delta_G(g')^{-1} \int_G f(g)\,dg
\end{aligned}$$

□

注意 1.1　[2], [3] 等では左不変測度をとっていて modulus character も上の記号でいえば δ_G^{-1} となっている．比較して読まれる際には注意していただきたい．

定義 1.10　1. TDLC 群 G に対して

$$\mathcal{H}(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f \text{ locally constant, compactly supported}\}$$

とし, $\mathcal{H}(G)$ に積を $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G)$ に対し

$$(f_1 * f_2) = \int_G f_1(gg_0^{-1}) f_2(g_0)\, dg_0$$

によっていれる．この $\mathbb{C}$-algebra を G の Hecke 環 という．(勿論, 一般には非可換)

2. K を G のコンパクト開部分群とする．

$$\mathcal{H}(G,K) = \{f \in \mathcal{H}(G) \mid f(k_1 g k_2) = f(g) \text{ for all } k_1, k_2 \in K\}$$

と定義する。$\mathcal{H}(G,K)$ は $\mathcal{H}(G)$ の subalgebra で

$$\mathcal{H}(G) = \bigcup_{K:\text{cpt open}} \mathcal{H}(G,K)$$

が成り立つ。

3. G の center Z の 1 次元表現 ω に対して

$$\mathcal{H}(G)_\omega = \left\{ f : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \quad \text{locally constant, compactly supported} \quad \text{mod } Z \\ f(zg) = \omega^{-1}(z) f(g) \quad \forall z \in Z \end{array} \right\}$$

と定義し, $\mathcal{H}(G)_\omega$ に積を f_1, $f_2 \in \mathcal{H}(G)_\omega$ に対し

$$(f_1 *_\omega f_2)(g) = \int_{G/Z} f_1(gg_0^{-1}) f_2(g_0)\, dg_0$$

によっていれる．$\mathcal{H}(G)_\omega$ も $\mathbb{C}$-algebra である．

注意 1.2　$\mathcal{H}(G,K)$ のことを Hecke 環と呼ぶのが普通である．$\mathcal{H}(G)$ は Schwartz-Bruhat space ともよばれ, このときは $C_c(G)$ と書かれる．

$\mathcal{H}(G)$ には単位元は存在しないが $\mathcal{H}(G,K)$ には単位元が存在する．

補題 1.9　ch_K を K の特性関数 (characteristic function) とする.

$$e_K = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} ch_K \tag{1.9}$$

とおくと e_K は $\mathcal{H}(G, K)$ の単位元となる.

証明：　$f \in \mathcal{H}(G, K)$ に対して

$$\begin{aligned}
(f * e_K)(g) &= \int_G f(gg_0^{-1}) \frac{1}{\mathrm{vol}\, K} ch_K(g_0)\, dg_0 \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K f(gk^{-1})\, dk \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K f(g)\, dk \\
&= f(g)
\end{aligned}$$

$e_K * f = f$ も同様に示せる. □

(π, V) を G の smooth 表現とする. このとき V は自然に $\mathcal{H}(G)$-加群と思える. 即ち, $f \in \mathcal{H}(G)$ に対して

$$\pi(f)v \underset{\mathrm{def}}{=} \int_G f(g)\pi(g)v\, dg \tag{1.10}$$

と定義する. (右辺は実際には有限和である.)

同様に, G の ω-表現 (π, V) は $f \in \mathcal{H}(G)_\omega$ に対して

$$\pi(f)v \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{G/Z} f(g)\pi(g)v\, dg \tag{1.11}$$

と定義することにより自然に $\mathcal{H}(G)_\omega$-加群と思える.

補題 1.10　$f \to \pi(f)$ は $\mathcal{H}(G)$, $(\mathcal{H}(G)_\omega)$ から $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ への algebra homomorphism である.

証明：　$f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G)$ に対して $\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1)\pi(f_2)$ が成り立つことを言えば

よい．

$$
\begin{aligned}
\pi(f_1)(\pi(f_2)v) &= \pi(f_1)\int_G f_2(g)\pi(g)v\,dg \\
&= \int_G\int_G f_1(g')f_2(g)\pi(g'g)v\,dg\,dg' \\
&= \int_G f_2(g)\int_G f_1(g')\pi(g'g)v\,dg'dg \quad (\text{積分の順序交換}) \\
&= \int_G f_2(g)\int_G f_1(g''g^{-1})\pi(g'')v\,dg''dg \quad (g''=g'g) \\
&= \int_G (f_1 * f_2)(g'')\pi(g'')v\,dg'' \quad (\text{積分の順序交換}) \\
&= \pi(f_1 * f_2)v
\end{aligned}
$$

(実際には有限和だから積分の順序交換は何の問題もない．) $\mathcal{H}(G)_\omega$ に対しても全く同様に示すことができる．□

このように G の smooth 表現は $\mathcal{H}(G)$ の表現とも思えるのである．以下, 両者の密接な関係についてみていく．

補題 1.11　(π_i, V_i) $(i=1,\,2)$ を G の smooth 表現とすると

$$\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(V_1,V_2)$$

が成り立つ．

証明：　$(\subset)$ $\varphi : V_1 \to V_2$ を G-morphism とする．即ち, $\varphi\circ\pi_1 = \pi_2\circ\varphi$ とする．v を固定すると $\pi_i(f)v$ は 有限個の g についての $\pi_i(g)v$ の和として表されるから $\varphi\circ\pi_1(f) = \pi_2(f)\circ\varphi$

$(\supset)$ $\varphi : V_1 \to V_2$ を $\mathcal{H}(G)$-morphism とする．$v\in V_1$ と $x\in G$ を任意に取る．π_i は smooth だから G のコンパクト開部分群 K で v, $\pi_1(x)v \in V_1^K$, $\varphi(v)$, $\pi_2(x)\varphi(v)\in V_2^K$ となるものが取れる．$f = \mathrm{vol}(KxK)^{-1}ch_{KxK}\in\mathcal{H}(G,K)$ と f を定義すると

$$
\begin{aligned}
\pi_1(f)v &= \frac{1}{\mathrm{vol}(KxK)}\int_{KxK}\pi_1(g)v\,dg \\
&= \pi_1(x)v \quad (\because v, \pi_1(x)v\in V^K)
\end{aligned}
$$

となり, また $\pi_2(f)\varphi(v) = \pi_2(x)\varphi(v)$ も同様に成り立つ．φ は $\mathcal{H}(G)$-morphism より $\varphi(\pi_1(f)v) = \pi_2(f)\varphi(v)$．よって $\varphi(\pi_1(x)v) = \pi_2(x)\varphi(v)$ が任意の x, v に対して成り立つ．□

注意 1.3　1. $\pi(e_K)$ は V から V^K への 射影 p_K (cf. (1.3)) と一致する．

2. 1. より $V^K = \pi(e_K)V$ だから V^K は $\mathcal{H}(G,K)$-subspace である．($\because \pi(f)v = \pi(e_K)\pi(f)v \in V^K$ for $f \in \mathcal{H}(G,K)$)

3. $e_K * \mathcal{H}(G) * e_K = \mathcal{H}(G,K)$ が成り立つ．(定義より明らか．)

4. (π, V) が ω-表現のときは

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)_\omega}(V_1, V_2)$$

が成り立つ．証明は, 補題 1.11 と全く同じようにできる．

補題 1.12　(π, V) が G の既約 smooth 表現で $V^K \neq 0$ とすると $(\pi|_{\mathcal{H}(G,K)}, V^K)$ は既約 $\mathcal{H}(G,K)$-module である．

証明：　$0 \neq v \in V^K$ となる v をとる．補題 1.11 より V は 既約$\mathcal{H}(G)$-module である．よって $\mathcal{H}(G)v = V$ ($\mathcal{H}(G)v = \{\pi(f)v \mid f \in \mathcal{H}(G)\}$) となる．また, 上の注意を使うと $e_K * \mathcal{H}(G)v = \pi(e_K)V = V^K$ で 更に $v \in V^K$ を使うと $e_K * \mathcal{H}(G) * e_K(v) = \mathcal{H}(G,K)V = V^K$. よって V^K は既約 $\mathcal{H}(G,K)$-module である．$\square$

上の補題より $\mathcal{H}(G,K)$ の構造がよくわかる K に対しては K-fixed vector をもつ G の表現は “わかる”．例えば G が 簡約代数群 (reductive algebraic group) の F-valued points のなす群のとき K が極大コンパクト部分群, あるいは岩堀部分群ならば $\mathcal{H}(G,K)$ の構造がわかっていて K-fixed vector をもつ G の既約表現もかなりわかる．(cf. [50], [54])

補題 1.13　G の既約 smooth 表現 (π_i, V_i) $(i = 1, 2)$ が $V_i^K \neq 0$ を満たすとする．$(\pi_1|_{\mathcal{H}(G,K)}, V_1^K)$ と $(\pi_2|_{\mathcal{H}(G,K)}, V_2^K)$ が $\mathcal{H}(G,K)$-module として同型ならば π_1 と π_2 は G の表現として同型である．

証明：　$(\pi_i|_{\mathcal{H}(G,K)}, V_i^K) = \bar{\pi}_i$ とおく．$\bar{\pi}_1 \simeq \bar{\pi}_2$ as $\mathcal{H}(G,K)$-module だから $\mathcal{H}(G,K)$-isomorphism $\Phi : V_1^K \to V_2^K$ が存在する．$0 \neq v_1 \in V_1^K$ となる v_1 をとり $v_2 = \Phi(v_1)$ とおく．このとき, 次が成り立つ．

$$\text{任意の } f \in \mathcal{H}(G) \text{ に対して} \pi_1(f)v_1 = 0 \text{ ならば } \pi_2(f)v_2 = 0 \qquad (*)$$

(証明はあとでする．) これをみとめると写像

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \to & V_2 \\ \pi_1(f)v_1 & \mapsto & \pi_2(f)v_2 \end{array}$$

が well-defined, non-zero $\mathcal{H}(G)$-morphism になる．V_i は既約よりこの写像は同型である．

$(*)$ の証明: $\mathcal{H}(G)$ の V_i への作用を π_i を省略して書く．即ち, $\pi_i(f)v_i = f(v_i)$ と書く．まず

$$f(v_1) = 0 \Longleftrightarrow e_K * \mathcal{H}(G) * f(v_1) = 0 \qquad (**)$$

を示す．$(\Longrightarrow)$ は明らかなので $(\Longleftarrow)$ を示せばよい．$f(v_1) \neq 0$ とすると V_1 が既約より $\mathcal{H}(G) * f(v_1) = V_1$．注意 1.3 1. より $e_K * \mathcal{H}(G) * f(v_1) = V_1^K$．仮定より $V_1^K \neq 0$ なので $e_K * \mathcal{H}(G) * f(v_1) \neq 0$

$(**)$ を用いると

$$\begin{array}{ccccc} f(v_1) = 0 & \overset{**}{\Longleftrightarrow} & e_K * \mathcal{H}(G) * f(v_1) & = & e_K * \mathcal{H}(G) * f * e_K(v_1) = 0 \\ & & & & \downarrow \Phi \\ f(v_2) = 0 & \overset{**}{\Longleftrightarrow} & e_K * \mathcal{H}(G) * f(v_2) & = & e_K * \mathcal{H}(G) * f * e_K(v_2) = 0 \end{array}$$

よって $(*)$ が示せた． □

この補題の系として既約 admissible 表現に対する Schur's Lemma が示される．

系 1.14 (π, V) を G の既約 admissible 表現とする．intertwining map $f : V \to V$ はスカラーである．即ち, $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}$ である．

証明： $V^K \neq 0$ となる K をとる．(π, V) は admissible だから $\dim V^K < \infty$．補題 1.12,1.13 より $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G,K)}(V^K, V^K) = \mathbb{C}$ を示せばよいがこれは普通の Schur's Lemma である． □

Schur's Lemma の系として次が成り立つ．

系 1.15 (π, V) を G の既約 admissible 表現とすると, ある Z の 1 次元表現 ω があって π は ω-表現である．

次に admissible 表現に対して表現の指標 (character) が定義できることを示す．但し, ここでいう character とは distribution のことで G 上で定義される function ではないが, 標数 0 の 非アルキメデス的局所体 F 上の簡約代数群 $\mathbf{G}$ の F-valued points のなす群 $\mathbf{G}(F)$ に対しては $\mathbf{G}(F)$ の dense open set 上の関数とみなせる．(2.1 参照のこと．)

補題 1.16 (π, V) を smooth 表現とすると以下は同値.

1. (π, V) は admissible

2. 任意の $f \in \mathcal{H}(G)$ に対して $\dim \operatorname{Im} \pi(f) < \infty$

証明：　$(1 \Rightarrow 2)$ (π, V) admissible より任意のコンパクト開部分群 K に対して $\dim V^K = \dim \operatorname{Im} \pi(e_K) < \infty$ である．$f \in \mathcal{H}(G)$ に対して $f \in \mathcal{H}(G, K)$ となる K をとると $\mathcal{H}(G,K) = e_K * \mathcal{H}(G) * e_K$ より $f = e_K * f' * e_K$ と書ける．従って $\operatorname{Im} \pi(f) \subset \operatorname{Im} \pi(e_K)$．　よって $\dim \operatorname{Im} \pi(f) < \infty$.

$(2 \Rightarrow 1)$ $e_K \in \mathcal{H}(G,K) \subset \mathcal{H}(G)$ で $V^K = \operatorname{Im} \pi(e_K)$ より $\dim V^K < \infty$．よって (π, V) は admissible. □

定義 1.11　上の補題より G の admissible 表現 (π, V) に対して

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \pi : &\mathcal{H}(G) \to \mathbb{C} \\ &f \quad \mapsto \operatorname{tr} \pi(f) \end{aligned}$$

が定義できる．($\operatorname{Im} \pi(f)$ が有限次元だから普通のトレースがとれる．) この $\operatorname{tr} \pi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(G), \mathbb{C})$ を π の (distribution) character という．

命題 1.17　$\pi_1, \ldots, \pi_m$ を G の既約 admissible 表現で, 互いに同値でないものとする ($\pi_i \not\simeq \pi_j$ if $i \neq j$)．このとき, $\operatorname{tr} \pi_1, \ldots, \operatorname{tr} \pi_m$ は 1 次独立である．即ち,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \operatorname{tr} \pi_i(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(G) \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$$

この証明は長いので先にこの命題から直ちにわかる系を述べておこう．

系 1.18　distribution character は既約 admissible 表現の同値類を決定する．即ち, π_1, π_2 を G の既約 admissible 表現とすると

$$\operatorname{tr} \pi_1 = \operatorname{tr} \pi_2 \Longleftrightarrow \pi_1 \sim \pi_2$$

命題 1.17 の証明を始める．G の既約 admissible 表現 (π_i, V_i) $(i = 1, \ldots, m)$ に対してコンパクト開部分群 K を $V_i^K \neq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ となるようにとる．補題 1.12, 1.13 より $\bar{\pi}_i = (\pi_i|_{\mathcal{H}(G,K)}, V_i^K)$ は既約 $\mathcal{H}(G,K)$-module で $\bar{\pi}_i$ はどの 2 つも互いに同値でない．従って, $\operatorname{tr} \bar{\pi}_i$ が 1 次独立を言えばよい．$\mathcal{H}(G,K)$ は単位元をもつ $\mathbb{C}$-algebra であり, あとは単位元をもつ $\mathbb{C}$-algebra の一般論から証明できる．以下この証明中は R を単位元をもつ $\mathbb{C}$-algebra とする．いくつか補題を用意する．

補題 1.19　(ρ, V) を R の既約有限次元表現, $A \subset \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$ を $\rho(R)A \subset A$ となる加法群とする．このとき, 任意の $\{u_1, \ldots, u_n\}$ $(u_i \in V)$ に対して

$$A^{\perp} + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C} u_i = (\{u_1, \ldots, u_n\}^{\perp} \cap A)^{\perp}$$

が成り立つ．但し, $S \subset V$ に対して $S^{\perp} = \{a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V \mid aS = 0\}$, $T \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ に対して　$T^{\perp} = \{v \in V \mid Tv = 0\}$ とする．

証明：　n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のとき $(u_1^{\perp} \cap A)(A^{\perp} + \mathbb{C}u_1) = 0$ は明らか．ゆえに, $A^{\perp} + \mathbb{C}u_1 \subset (u_1^{\perp} \cap A)^{\perp}$．逆の包含関係を示す．$v \in (u_1^{\perp} \cap A)^{\perp}$ とする．$\rho(R)A \subset A$ より Au_1 は V の R-部分加群 である．V の既約性より $Au_1 = \{0\}$ または $V = Au_1$ である．$V = Au_1$ のとき $au_1 \mapsto av$ が V から自分自身への R-同型を定義する．Schur's Lemma よりこの写像はスカラー倍なので $av = cau_1$ $(\forall a \in A)$ となる $c \in \mathbb{C}$ が存在する．ゆえに, $v \in A^{\perp} + \mathbb{C}u_1$．$Au_1 = \{0\}$ のときは $v \in A^{\perp}$ より明らかである．

$n-1$ のときに主張が正しいとする．即ち,

$$A^{\perp} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{C}u_i = (\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^{\perp} \cap A)^{\perp} \tag{1.12}$$

と仮定する．$A' = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^{\perp} \cap A$ とおく．A' は A の部分群で $\rho(R)A' \subset A'$ が成り立つ．従って, $n = 1$ のときの結果が使えて $A'^{\perp} + \mathbb{C}u_n = (u_n^{\perp} \cap A')^{\perp}$ を得る．$u_n^{\perp} \cap A' = \{u_1, \ldots, u_n\}^{\perp} \cap A$ と (1.12) より

$$\begin{aligned}(\{u_1, \ldots, u_n\}^{\perp} \cap A)^{\perp} &= A'^{\perp} + \mathbb{C}u_n \\ &= (\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^{\perp} \cap A)^{\perp} + \mathbb{C}u_n \\ &= A^{\perp} + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}u_i\end{aligned}$$

□

注意 1.4　上の補題と次の補題の 1 の証明は [71] (p. 27–28) から引用した．

補題 1.20　R を単位元 $1 = 1_R$ を持つ $\mathbb{C}$-algebra とする．

1. (ρ, V) を R の既約 n 次元表現, $(\dim_{\mathbb{C}} V = n)$ とし, $M = \mathrm{Ker}\,\rho$ とおく．このとき
$$R/M = \mathrm{End}\, V \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$
2. (ρ_i, V_i) $(i = 1, 2)$ を R の既約 n_i 次元表現とする．$M_i = \mathrm{Ker}\,\rho_i$ としたとき $M_1 = M_2 \Longrightarrow \rho_1 \sim \rho_2$
3. (ρ_i, V_i) $(1 \le i \le N)$ を R の互いに同型でない既約 n_i 次元表現とする．R から R/M_i $(M_i = \mathrm{Ker}\,\rho_i)$ への 射影を p_i とすると写像
$$\begin{aligned}R &\longrightarrow \prod_{i=1}^{N} R/M_i \\ r &\longmapsto \quad (p_i(r))\end{aligned}$$

の kernel は $\bigcap\limits_{i=1}^{N} M_i$ なので,

$$R\Big/\bigcap_{i=1}^{N} M_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{N} R/M_i$$

が得られるのが, この写像は全単射である.

証明：　1. $\tilde{R} = R/M$ とおき, $\tilde{R} \subset \operatorname{End} V$ とみなす. $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\{y_1, \dots, y_n\}$ が共に 1 次独立であるとき $rx_i = y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ となる $r \in \tilde{R}$ が存在することを示せばよい. $S_j = \sum_{i \neq j} \mathbb{C}x_i$ とおくと, 補題 1.19 より

$$((S_j^{\perp}) \cap \tilde{R})^{\perp} = \tilde{R}^{\perp} + S_j$$

$\tilde{R}^{\perp}$ は V の R-部分加群 だから V の既約性より $\tilde{R}^{\perp} = 0$. よって $x_j \notin ((S_j^{\perp}) \cap \tilde{R})^{\perp}$ $(x_j \notin S_j$ に注意) ゆえに,

$$\begin{cases} r_j x_i = 0 & (i \neq j) \\ r_j x_j = u_j \neq 0 \end{cases}$$

となる r_j が存在する. V は既約だから $a_j u_j = y_j$ となる $a_j \in R$ がある. $r = \sum_{j=1}^{n} a_j r_j$ とおくと $rx_j = y_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

2. 1. より ρ_i が同型写像 $R/M_i \to \operatorname{End} V_i$ を 誘導する. これを $\bar{\rho}_i$ とし, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_1 \circ \bar{\rho}_2^{-1}$ とおく. $(\rho_i = \bar{\rho}_i \circ p_i)$. $M_1 = M_2$ とすると $\operatorname{End} V_1 \simeq \operatorname{End} V_2$ だから $\dim V_1 = \dim V_2$. この次元を n とおく. このとき $\operatorname{End} V_i \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ である. $\mathbb{C}$-同型 $V_2 \simeq \mathbb{C}^n$ と, $\varphi : V_1 \to V_2$ をひとつとって固定し, $\Phi : \operatorname{End} V_1 \to \operatorname{End} V_2$ を $\Phi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ と定義する. このとき, $\Phi \circ \bar{\rho} \in \operatorname{Aut}(\operatorname{End} V_2) = \operatorname{Aut}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Skolem-Noether の定理より $\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ で $\Phi \circ \bar{\rho} = \mathrm{Int}_{\alpha}$ となるものがある. 但し, $\mathrm{Int}_{\alpha}(x) = \alpha^{-1} x \alpha$ $(x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ である. ゆえに,

$$\varphi \circ \bar{\rho}(\rho_2(r)) \circ \varphi^{-1} = \alpha^{-1} \circ \rho_2(r) \circ \alpha \quad \text{for } r \in R$$

となり, $(\alpha \circ \varphi) \circ \rho_1(r) = \rho_2(r) \circ (\alpha \circ \varphi)$ を得る. よって $\rho_1 \sim \rho_2$.

3. Chinese Remainder Theorem の証明と同様に

$$M_i + \bigcap_{j \neq i} M_j = R \quad \text{for all } i$$

を示せばよい. N に関する帰納法で証明する. $M_N + \bigcap\limits_{j \neq N} M_j \subsetneq R$ と仮定し矛盾を導く. 左辺は M_N を含む両側イデアルであり, また R/M_N は $\mathbb{C}$ 上の 単純代

数 (simple algebra) だから $M_N + \bigcap_{j\neq N} M_j = M_N$ となる．ゆえに, $\bigcap_{j\neq N} M_j \subset M_N$ を得る．従って, R から $R\Big/\bigcap_{j\neq N} M_j$ への 射影を p とすると全射 $\varphi : R\Big/\bigcap_{j\neq N} M_j \to R/M_N$ で $p_N = \varphi\circ p$ となるものが存在する．また, 帰納法の仮定より同型写像 $\iota : R\Big/\bigcap_{j\neq N} M_j \to \prod_{j\neq N} R/M_j$ で $\iota\circ p = \prod_{j\neq N} p_j$ となるものが存在する．

$$
\begin{array}{ccccc}
\prod_{j\neq N} R/M_j & \xleftarrow{\prod_{j\neq N} p_j} & R & \xrightarrow{p_N} & R/M_N \\
\| & & \downarrow p & & \| \\
\prod_{j\neq N} R/M_j & \xleftarrow{\iota} & R/\bigcap_{j\neq N} M_j & \xrightarrow{\varphi} & R/M_N
\end{array}
$$

e_j を R/M_j の単位元とする．$\{e_j \mid j\neq N\}$ は $\prod_{j\neq N} R/M_j$ の 互いに直交する中心的巾等元 (orthogonal central idempotent) で, $\sum_{j\neq N} e_j$ が $\prod_{j\neq N} R/M_j$ の単位元であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
p_N(1_R) &= \varphi\circ p(1_R) \\
&= \varphi(\iota^{-1}(\sum_{j\neq N} e_j)) \\
&= \sum_{j\neq N} (\varphi\circ\iota^{-1})(e_j)
\end{aligned}
$$

が得られる．R/M_N は 単純で $\varphi\circ\iota^{-1}(e_j)$ は中心的巾等元だからある j が存在して $\varphi\circ\iota^{-1}(e_i) = 0 \quad (i\neq j)$ となる．

$$
p_N(r) = rp_N(1_R) = r\varphi\circ\iota^{-1}(e_j) = \varphi\circ\iota^{-1}(re_j)
$$

だから, $re_j = 0 \Longrightarrow p_N(r) = 0$ を得る．$re_j = 0 \Longleftrightarrow p_j(r) = 0$ より $M_j \subset M_N$ となるが, R/M_j は 単純だから $M_j = M_N$．2. より $\rho_j \sim \rho_N$ となって仮定に反する． □

この補題の系として次が得られて, 命題の証明が完了する．

系 1.21　$\{\mathrm{tr}\,\rho_i \mid 1\leq i\leq N\}$ は 1 次独立.

証明：　$\sum_{i=1}^{N} c_i\,\mathrm{tr}\,\rho_i(r) = 0$ とする．補題 1.20 3. より $r\in R$ で

$$
\begin{cases}
p_i(r) = \dfrac{1}{n_i} 1_{R/M_i} & \\
p_j(r) = 0 & j\neq i
\end{cases}
$$

となるものが存在する．この r に対して

$$\operatorname{tr}\rho_j(r) = \operatorname{tr}\bar{\rho}_j(p_j(r)) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

が成り立つ．ゆえに, $c_i = 0 \ \ (1 \leq i \leq N)$. □

1.3　誘導表現と Frobenius reciprocity

この節では2種類の誘導表現 (induction と compact induction) と Frobenius reciprocity について述べる．

定義 1.12　TDLC 群 G と $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 W に対して

$$\begin{aligned}
C(G,W) &= \{f : G \to W \mid f \text{ は locally constant}\} \\
C_R(G,W) &= \left\{ f \in C(G,W) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K : \text{コンパクト開部分群 s.t.} \\ f(gk) = f(g)\ \forall k \in K, \forall g \in G \end{array} \right\} \\
C_L(G,W) &= \left\{ f \in C(G,W) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K : \text{コンパクト開部分群 s.t.} \\ f(kg) = f(g)\ \forall k \in K, \forall g \in G \end{array} \right\} \\
C_c(G,W) &= \{f \in C(G,W) \mid f \text{ compactly supported}\}
\end{aligned}$$

と定義する．G は左から $R(g)$, 右から $L(g)$ で $C(G,W)$ に作用する．但し, $(R(g)f)(x) = f(xg)$, $(L(g)f)(x) = f(gx)$ とそれぞれ右移動, 左移動を表す.

補題 1.22　上記の記号のもとで,

$$C_c(G,W) \subset C_R(G,W) \cap C_L(G,W)$$

証明：　$C_c(G,W) \subset C_R(G,W)$ を示す．　$f \in C_c(G,W)$, $g \in \operatorname{Supp} f$ とする．f は locally constant だから g によって決まるコンパクト開部分群 K_g で $f(gk) = f(g)\ \forall k \in K_g$ となるものがある．$\bigcup_{g \in \operatorname{Supp} f} gK_g$ は $\operatorname{Supp} f$ の開被覆であるが $\operatorname{Supp} f$ はコンパクトより有限個の g_i があって $\operatorname{Supp} f = \bigcup_{\text{finite}} g_i K_{g_i}$ となる．$K = \bigcap_i K_{g_i}$ とおくと $k_i \in K_{g_i}$ にたいして $f(g_i k_i k) = f(g_i k_i)\ \forall k \in K$ となる．よって $f \in C_c(G,W)^{R(K)} \subset C_R(G,W)$．($C_c(G,W)^{R(K)}$ は 右 K-不変な $C_c(G,W)$ の元の成す集合) $C_c(G,W) \subset C_L(G,W)$ も同様に示せる. □

2種類の誘導表現の定義をする．

定義 1.13 H を G の閉部分群, (σ, W) を H の smooth 表現とする.

$$V = \{f \in C_R(G, W) \mid f(hg) = \sigma(h)f(g) \quad \forall h \in H, \forall g \in G\}$$
$$V_c = \left\{ f \in C_R(G, W) \;\middle|\; \begin{array}{l} f(hg) = \sigma(h)f(g) \quad \forall h \in H, \forall g \in G \\ \mathrm{Supp}\, f \subset HC, \quad \text{for} \quad \exists C : \text{compact set} \end{array} \right\}$$

とおく. $V_c \subset V$ が成り立つ. V, V_c は smooth $R(G)$ module であることも明らか.

$$\mathrm{ind}_H^G \sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} (R, V) \tag{1.13}$$
$$\text{c-ind}_H^G \sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} (R, V_c) \tag{1.14}$$

と定義し $\mathrm{ind}_H^G \sigma$ を H の表現 σ の G への誘導表現, c-ind_H^G を H の表現 σ の G へのコンパクト誘導表現とよぶ.

注意 1.5 (1) 定義より明らかに $H \backslash G$ がコンパクトのときは, ind_H^G と c-ind_H^G は一致する. 従って, 第 2 章で扱う parabolic induction では両者の区別はなくなる.

(2) ここで定義した誘導表現は, unnormalized version と呼ぶべきものである. 第 2 章で定義する parabolic induction では σ を modulus character でひねっている. 詳しくは第 2 章を見よ. またここで用いた記号 ind, c-ind は一般的なものではない. ([1] では ind は Ind, c-ind は Ind_c という記号が用いられている.)

上で定義した V, V_c に対して K-fixed subspace を調べる.

補題 1.23 K を G のコンパクト開部分群とする. $x \in G$ に対して

$$V_x = \left\{ f \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathrm{Supp}\, f \subset HxK \\ f(hxk) = \sigma(h)f(x) \quad \forall h \in H, \forall k \in K \end{array} \right\}$$

と定義する. このとき,

$$\begin{array}{ccc} V_x & \simeq & W^{H \cap xKx^{-1}} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

が成り立つ.

証明: $f \in V_x$ に対して, $h \in H \cap xKx^{-1}$, 即ち $k \in K$ があって $h = xkx^{-1}$ とすると,

$$\begin{aligned} \sigma(h)f(x) &= f(hx) \\ &= f(xkx^{-1}x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となる．従って, $f(x) \in W^{H\cap xKx^{-1}}$．$f \in V_x$ は $f(x)$ のみで決まるので単射は明らか．全射を示す．$w \in W^{H\cap xKx^{-1}}$ に対し f を

$$\begin{cases} f(hxk) = \sigma(h)w & h \in H, k \in K \\ f(x) = 0 & x \notin HxK \end{cases}$$

と定義する．これが well-defined を示せばよい．$hxk = h'xk'$ とすると $h^{-1}h' = xkk'^{-1}x \in H \cap xKx^{-1}$ となる．従って,

$$\begin{aligned} f(h'xk') &= \sigma(h')w \\ &= \sigma(h)\sigma(h^{-1}h')w \\ &= \sigma(h)w \end{aligned}$$

よって, f の well-defined が言えて, 全射が証明された． □

補題 1.24　$X_K = H\backslash G/K, X_K^* = \{x \in X_K \mid W^{H\cap xKx^{-1}} \neq 0\}$ とおく．このとき, 図式

$$\begin{array}{ccccc} V^K & \longrightarrow & \prod_{x\in X_K^*} V_x & \longrightarrow & \prod_{x\in X_K^*} W^{H\cap xKx^{-1}} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ V_c^K & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X_K^*} V_x & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X_K^*} W^{H\cap xKx^{-1}} \end{array}$$

において横の列の写像は全て全単射である．但し, 横の列の写像は

$$f_x = \begin{cases} f|_{HxK} & \text{on } HxK \\ 0 & \text{outside of } HxK \end{cases}$$

として

$$f \mapsto (f_x)_{x\in X_K^*} \mapsto (f(x))_{x\in X_K^*}$$

によって定まる写像であり, 縦の列は自然な inclusion である．

証明：　右側の写像については補題 1.23 より明らかである．また上の列の左側の写像が全単射であることは V^K, V_x の定義より明らかである．下の列の左側の写像が全単射であることを示す．$f \in V_c^K$ とし $x \in \operatorname{Supp} f$ とする．このとき, $HxK \subset \operatorname{Supp} f$ であるから

$$\operatorname{Supp} f \subset H \text{ (cpt set)} \iff f \text{ は有限個の } x \in X_K^* \text{ に対してのみ } f(x) \neq 0$$

よって, $f \mapsto (f_x)_{x\in X_K^*}$ を V_c^K に制限すると $\bigoplus_{x\in X_K^*} V_x$ への全単射になる． □

系 1.25 σ が admissible とすると

$$\dim V^K < \infty \iff \dim V_c^K < \infty \iff |X_K^*| < \infty$$

が成り立つ．またこの条件のうち１つ（全部）が成り立つとき $V^K = V_c{}^K$ である．

証明： σ が admissible より $\dim W^{H\cap xKx^{-1}} < \infty$ 従って, 上の補題より直ちにわかる． □

上の系と補題 1.24 より次の命題が従う．

命題 1.26 σ が H の admissible 表現であるとき, 次の 1.- 4. は同値である．

1. $\mathrm{ind}_H^G \sigma = \text{c-ind}_H^G \sigma$.
2. $\mathrm{ind}_H^G \sigma$ が admissible 表現である．
3. $\text{c-ind}_H^G \sigma$ が admissible 表現である．
4. $|X_K^*| < \infty$ が任意のコンパクト開部分群 K に対して成り立つ．

定理 1.27 (Frobenius reciprocity 1) H を G の閉部分群, (σ, W) を H の smooth 表現, (π, V) を G の smooth 表現とする．このとき,

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{ind}_H^G \sigma) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\pi|_H, \sigma) \\ \Phi \quad\quad &\longmapsto \lambda \circ \Phi \end{aligned}$$

が成り立つ．但し, $\lambda : \mathrm{ind}_H^G \sigma \to W$ は $\lambda(f) = f(1)$ で定まる写像である．

証明： 逆写像を作る．$F \in \mathrm{Hom}_H(\pi|_H, W)$ に対して $\Psi_F : V \to \mathrm{ind}_H^G \sigma$ を $\Psi_F(v) = \Phi_v$ ($\Phi_v(g) = F(\pi(g)v)$) と定義する．$h \in H$, $g \in G$ に対して $F(\pi(h)v) = \sigma(h)F(v)$ だから

$$\begin{aligned} \Phi_v(hg) &= F(\pi(hg)v) \\ &= \sigma(h)\Phi_v(g) \end{aligned}$$

よって $\Phi_v \in \mathrm{ind}_H^G \sigma$．$\Psi_F$ が G-hom なのは明らか．故に, $\Psi_F \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{ind}_H^G \sigma)$．$\Psi : \mathrm{Hom}_H(\pi|_H, \sigma) \to \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{ind}_H^G \sigma)$ を $\Psi(F) = \Psi_F$ と定義する．Ψ と Λ が互

いに逆写像であることを示す.

$$\begin{aligned}(((\Psi\circ\Lambda)(\Phi))(v))(g) &= (\Psi((\lambda\circ\Phi)(v)))(g)\\ &= (\lambda\circ\Phi)(\pi(g)v)\\ &= \Phi(\pi(g)v)(1)\\ &= R(g)\Phi(v)(1)\\ &= \Phi(v)(g),\\ ((\Lambda\circ\Psi)(F))(v) &= \Lambda(\Psi_F(v))\\ &= \Phi_v(1)\\ &= F(v)\end{aligned}$$

よって Λ は逆写像を持つので全単射である. □

誘導表現に関する連鎖律は直接示せるが, Frobenius reciprocity から簡単にわかる.

系 1.28　H_1 を G の閉部分群, H_2 を H_1 の閉部分群, σ を H_2 の smooth 表現とすると

$$\mathrm{ind}_{H_1}^G \mathrm{ind}_{H_2}^{H_1} \sigma \simeq \mathrm{ind}_{H_2}^G \sigma, \quad \text{c-ind}_{H_1}^G \text{c-ind}_{H_2}^{H_1} \sigma \simeq \text{c-ind}_{H_2}^G \sigma$$

が成り立つ

証明：　adjoint functor の一意性より functor の合成の adjoint は adjoint functor の向きを逆にした合成になることと functor を represent する object の同型を除いた一意性とを使うと, 定理 1.27 より $\mathrm{ind}_{H_1}^G \mathrm{ind}_{H_2}^{H_1} \sigma \simeq \mathrm{ind}_{H_2}^G \sigma$ が得られる. コンパクト誘導表現については, 加えて support の条件をチェックすればよいがこれは明らかである. □

コンパクト誘導表現に関する次の結果もよく用いられる.

命題 1.29　H を G の閉部分群とする. $f, f' \in \mathcal{H}(G), \varphi \in \mathcal{H}(H)$ に対して

$$(L_H(\varphi)f)(x) = \int_H \varphi(h)f(hx)\,dh, \quad (R(f')f)(x) = \int_G f'(g)f(xg)\,dg$$

と定義する. このとき,

$$\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} (\sigma \otimes \delta_H^{-1}) \simeq \text{c-ind}_H^G \sigma \quad \text{as } \mathcal{H}(G)\text{-module}$$

が成り立つ. 但し, $\mathcal{H}(H)$ は $\mathcal{H}(G)$ に右から L_H で作用していると思い, 左辺は $f' \cdot (f \otimes w) = R(f')f \otimes w$ で $\mathcal{H}(G)$-module とみている.

証明： σ の表現空間を W とする．$f \in \mathcal{H}(G)$ と $w \in W$ に対して G 上の関数 $F_{f,w}$ を $F_{f,w}(g) = \int_H f(hg)\sigma(h^{-1})w\,dh$ と定義する．$h' \in H$ に対して

$$\begin{aligned} F_{f,w}(h'g) &= \int_H f(hh'g)\sigma(h^{-1})w\,dh \\ &= \int_H f(hg)\sigma(h'h^{-1})w\,dh \\ &= \sigma(h)F_{f,w}(g) \end{aligned}$$

より $F_{f,w} \in \text{c-ind}_H^G\,\sigma$ である．従って $\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathbb{C}} W$ から $\text{c-ind}_H^G\,\sigma$ への写像 F を $F(f \otimes w) = F_{f,w}$ によって定義できる．$\mathcal{H}(H)$ は $\mathcal{H}(G)$ に L_H で作用し, W に $\sigma \otimes \delta_H^{-1}$ に作用すると思うと F は balanced map as $\mathcal{H}(H)$-module である．即ち, $F_{L(\varphi)f,w} = F_{f,((\sigma\otimes\delta_H^{-1})(\varphi))(w)}$ が成り立つ．これは,

$$\begin{aligned} F_{L(h')f,w} &= \int_H f(h'hg)\sigma(h^{-1})w\,dh \\ &= \delta_H(h')^{-1}\int_H f(hg)\sigma(h^{-1}h')w\,dh \quad (\because \text{補題 } 1.8) \\ &= \int_H f(hg)\sigma(h^{-1})(\sigma\otimes\delta_H^{-1})(h')w\,dh \\ &= F_{f,((\sigma\otimes\delta_H^{-1})(h))(w)} \end{aligned}$$

であり, $L(\varphi)$ は $L(h)$ の形の有限和に書けることからわかる．従って F は

$$\bar{F} : \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} (\sigma \otimes \delta_H^{-1}) \to \text{c-ind}_H^G\,\sigma$$

に factor する．これが $\mathcal{H}(G)$-同型であることを示す．$\mathcal{H}(G)$-hom は明らかだから全単射を言えばよい．

$\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathbb{C}} W = \bigcup_{K:\text{cpt open}} \mathcal{H}(G)^{R(K)} \otimes W$ と $\mathcal{H}(G)^{R(K)}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底として $\{ch_{xK} \mid x \in G/K\}$ が取れること, さらに, $h \in H$ に対して

$$ch_{h^{-1}xK} \otimes_{\mathcal{H}(H)} w = ch_{xK} \otimes_{\mathcal{H}(H)} ((\sigma\otimes\delta_H^{-1})(h))(w) \quad \text{in } \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} \sigma \otimes \delta_H^{-1}$$

が成り立つことより $\mathcal{H}(G)^K \otimes_{\mathcal{H}(H)} W$ の元 f は

$$f = \sum_{x \in H\backslash G/K} \text{vol}(H \cap xKx^{-1})^{-1} ch_{xK} \otimes w_x \quad (w_x \in W)$$

の形にかけることに注意しておく．$f_x = \text{vol}(K_x)^{-1}ch_{xK}, K_x = H \cap xKx^{-1}$ とおく．

・$\bar{F}$ の全射性の証明

補題 1.2 の記号を用いる．即ち，W から W^{K_x} への射影 p_{K_x} を $\mathrm{p}_{K_x}(w) = \mathrm{vol}(K_x^{-1})\int_{K_x}\sigma(h)w\,dh$ によって定め，$W_{K_x} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{p}_{K_x}$ とする．補題 1.24 より $\sum_{x\in X_K^*} F_{f_x,w_x} \mapsto (F_{f_x,w_x}(x))_{x\in X_K^*}$ が $(\text{c-ind}_H^G\sigma)^K$ から $\oplus_{x\in X_K^*}W^{K_x}$ への同型を与える．従って，$F_{f_x,w_x}(x) = \mathrm{p}_{K_x}(w_x)$ を示せば p_{K_x} の全射性より $\bar{F}$ が全射であることが言える．$hx\in xK \Longleftrightarrow h\in K_x$ より

$$\begin{aligned} F_{f_x,w_x}(x) &= \int_H f_x(hx)\sigma(h^{-1})w_x\,dh \\ &= \mathrm{vol}(K_x)^{-1}\int_{K_x}\sigma(h^{-1})w_x\,dh \\ &= \mathrm{p}_{K_x}(w_x) \end{aligned}$$

・$\bar{F}$ の単射性の証明

$\bar{F}(\sum_{x\in H\backslash G/K} f_x\otimes w_x) = 0$ は $\mathrm{p}_{K_x}(w_x) = 0$ for all $x\in X_K^*$，即ち $w_x\in W_{K_x}$ for all $x\in X_K^*$ と同値だから $w_x\in W_{K_x}$ for all $x\in X_K^*$ として $f_x\otimes w_x = 0$ を示せばよい．任意の $h\in K_x$ に対して

$$L(h)f_x\otimes w_x = f_x\otimes\sigma\delta_H^{-1}(h)w_x$$

であるが，(左辺)$= f_x\otimes w_x$，(右辺)$= f_x\otimes\sigma(h)w_x$ (K_x は compact より $\delta_H = 1$ on K_x) だから $f_x\otimes(\sigma(h)-1)w_x = 0$．$W_{K_x}$ は $(\sigma(h)-1)w$ の形の元で生成されるから $w_x\in W_{K_x}$ なら $f_x\otimes w_x = 0$ が示された．□

ind の contragredient は c-ind で表される．

命題 1.30　(σ, W) を H の smooth 表現とし，$\tau = \delta_H(\delta_G)^{-1}|_H$ とすると

$$\widetilde{\text{c-ind}_H^G\sigma} \simeq \mathrm{ind}_H^G(\tilde{\sigma}\otimes\tau)$$

証明：　$f\in$ $\text{c-ind}_H^G\sigma$，$f'\in\mathrm{ind}_H^G(\tilde{\sigma}\otimes\tau)$ に対して，$\varphi(g) = \varphi_{f,f'}(g) = \langle f(g), f'(g)\rangle$ とおく．但し，$\langle\ ,\ \rangle$ は W と $\widetilde{W}$ の pairing である．$(f,f')\mapsto\varphi_{f,f'}$ は $\mathrm{ind}_H^G\sigma\times\mathrm{ind}_H^G(\tilde{\sigma}\otimes\tau)$ から $\mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(G,\mathbb{C})$ への双線形写像で以下を満たす．

1. $f\in$ $(\text{c-ind}_H^G\sigma)^K$，$f'\in(\mathrm{ind}_H^G(\tilde{\sigma}\otimes\tau))^K$ に対して，$\varphi_{f,f'}(gk) = \varphi_{f,f'}(g)$ for all $k\in K$
2. $\varphi_{f,f'}(hg) = \tau(h)\varphi_{f,f'}(g)$ for all $h\in H$
3. $\mathrm{Supp}\,\varphi_{f,f'}\subset\mathrm{Supp}\,f\cap\mathrm{Supp}\,f'$ より $\mathrm{Supp}\,\varphi_{f,f'}$ は compact mod H
4. $\varphi_{R(g)f,R(g)f'} = R(g)\varphi_{f,f'}$

(いずれも容易に確かめられる．) ここで一つ補題を用意する．

補題 1.31 G-不変な線形汎関数 $I' : \text{c-ind}_H^G \tau \to \mathbb{C}$ で

$$I'(\varphi) = \sum_{x \in H\backslash G/K} v_K(x)\varphi(x) \quad \text{for} \quad \varphi \in (\text{c-ind}_H^G \tau)^K$$

(但し $v_K(x) = \text{vol}(xKx^{-1})/\text{vol}(H \cap xKx^{-1})$) となるものが存在する．

証明： G の trivial 表現に対応する $\mathcal{H}(G)$ 上の G-不変な線形汎関数 $I(f) = \int_G f(g)\,dg$ は, $I(L(h)f) = \delta_G(h)^{-1}I(f)$ for $h \in H$ より $\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} \delta_G|_H^{-1}$ を factor する．この factor map を $\bar{I}$ とする．$\bar{I}$ は $\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} \delta_G|_H^{-1}$ 上の G 不変な線形汎関数である．また, 命題 1.29 で $W = \mathbb{C}, \sigma = \tau$ とおくと $(\text{c-ind}_H^G \delta_H \delta_G|_H^{-1})^K$ から $\mathcal{H}(G)^K \otimes_{\mathcal{H}(H)} \mathbb{C}$ への $\mathcal{H}(G,K)$ 同型は

$$\bar{F}^{-1}(\varphi) = \sum_{x \in H\backslash G/K} f_x \otimes \varphi(x)$$

($f_x = \text{vol}(xKx^{-1} \cap H)^{-1} ch_{xK}$) で与えられる．$I' = \bar{I} \circ \bar{F}^{-1}$ とおくと I' は G-不変な線形汎関数で

$$\begin{aligned}
\bar{I}(f_x) &= \int_G f_x(g)\,dg \\
&= \int_G f_x(xg)\delta_G(x)\,dg \\
&= \frac{\delta_G(x)}{\text{vol}(xKx^{-1} \cap H)}\,\text{vol}(K) \\
&= v_K(x)
\end{aligned}$$

より $\varphi \in (\text{c-ind}_H^G \delta_H \delta_G|_H^{-1})^K$ に対して

$$\begin{aligned}
I'(\varphi) &= \bar{I}\Big(\sum_{x \in H\backslash G/K} f_x \otimes \varphi(x)\Big) \\
&= \sum_{x \in H\backslash G/K} v_K(x)\varphi(x)
\end{aligned}$$

となる． □

命題の証明を続ける．補題 1.31 の I' を用いて $\langle f, f' \rangle = I'(\varphi_{f,f'})$ とおくと

$$\begin{array}{ccc}
\text{c-ind}_H^G \sigma \times \text{ind}_H^G \sigma \otimes \tau & \to & \mathbb{C} \\
(f, \ f') & \mapsto & \langle f, f' \rangle
\end{array}$$

は G-不変な双線形形式である．従って，$f' \mapsto (f \mapsto \langle f, f' \rangle)$ が $\mathrm{ind}_H^G(\widetilde{\sigma} \otimes \tau)$ から $\widetilde{\text{c-ind}_H^G \sigma}$ への G-hom を定義する．補題 1.31 より $f \in (\text{c-ind}_H^G \sigma)^K$, $f' \in (\mathrm{ind}_H^G \widetilde{\sigma} \otimes \tau)^K$ に対して

$$\langle f, f' \rangle = \sum_{x \in H \backslash G / K} v_K(x) \langle f(x), f'(x) \rangle \tag{1.15}$$

が成り立つ．補題 1.24 より，$f' \mapsto \langle f, f' \rangle$ が $(\mathrm{ind}_H^G(\widetilde{\sigma} \otimes \tau))^K$ から $(\widetilde{\text{c-ind}_H^G \sigma})^K$ への同型写像を与える． □

この命題より次の系が得られる．これは supercuspidal 表現の構成とその ε-factor の計算において基本となるものである．

系 1.32 H を G の開部分群 (σ, W) を H の smooth 表現で $\mathrm{Ker}\,\sigma$ が H の開部分群となるものとする．このとき，任意の $w \in W$, $\tilde{w} \in \widetilde{W}$ に対して G 上の関数

$$g \mapsto \begin{cases} \sigma_{w,\tilde{w}}(g) = \langle \sigma(g) w, \tilde{w} \rangle & \text{if } g \in H \\ 0 & \text{if } g \notin H \end{cases}$$

は $\pi = \text{c-ind}_H^G \sigma$ の matrix coefficient である．

証明： H が G の開部分群であることより $\delta_G|_H = \delta_H$．従って，命題 1.30 を用いると $\tilde{\pi} \simeq \mathrm{ind}_H^G \tilde{\sigma}$ が得られる．また $K = \mathrm{Ker}\,\sigma = \mathrm{Ker}\,\tilde{\sigma}$ は H の開部分群である．$w \in W, \tilde{w} \in \tilde{W}$ に対して $f \in \text{c-ind}_H^G \sigma$, $f' \in \mathrm{ind}_H^G \tilde{\sigma}$ を

$$f(g) = \begin{cases} \sigma(g) w & \text{if } g \in H \\ 0 & \text{if } g \notin H \end{cases}, \quad f'(g) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(g) \tilde{w} & \text{if } g \in H \\ 0 & \text{if } g \notin H \end{cases}$$

とおく．明らかに $f \in (\text{c-ind}_H^G \sigma)^K$, $f' \in (\mathrm{ind}_H^G \tilde{\sigma})^K$ であるので，(1.15) より

$$\begin{aligned} \langle \pi(g) f, f' \rangle &= \sum_{x \in H \backslash G / K} v_K(x) \langle f(xg), f'(x) \rangle \\ &= \langle f(g), f'(1) \rangle \\ &= \begin{cases} \langle \sigma(g) w, \tilde{w} \rangle & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases} \end{aligned}$$

□

定理 1.27, 命題 1.30 よりもう一つの Frobenius reciprocity を示すことができる．

定理 1.33 (Frobenius reciprocity 2) H を G の閉部分群, (σ, W) を H の smooth 表現, (π, V) を G の smooth 表現とする．このとき,

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-ind}_H^G\,\sigma, \tilde{\pi}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\sigma \otimes \tau, \widetilde{\pi|_H})$$

が成り立つ．但し, $\tau = \delta_H(\delta_G)^{-1}|_H$ である．

証明： G の smooth 表現 $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ に対して $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \tilde{\pi_2}), \mathrm{Hom}_G(\pi_2, \tilde{\pi_1})$ は, どちらも $V_1 \times V_2$ 上の G-不変双線形形式のなす空間と同一視できる．(対応は左辺は $\varphi \mapsto ((v_1, v_2) \mapsto \langle v_2, \varphi(v_1)\rangle_{V_2})$, 右辺は $\varphi \mapsto ((v_1, v_2) \mapsto \langle v_1, \varphi(v_2)\rangle_{V_1})$.) よって $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \tilde{\pi_2}) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi_2, \tilde{\pi_1})$. この式と 定理 1.27, 命題 1.30 を用いると

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-ind}_H^G\,\sigma, \tilde{\pi}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\sigma \otimes \tau, \widetilde{\pi|_H})$$

が得られる． □

H が開部分群ならば $\tau = 1$ で $\widetilde{\pi|_H} = \tilde{\pi}|_H$ だから次の系が得られる．

系 1.34 H が G の開部分群ならば

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-ind}_H^G\,\sigma, \tilde{\pi}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\sigma, \tilde{\pi}|_H)$$

が成り立つ．

注意 1.6 この定理 1.33 を示すために

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(\text{c-ind}_H^G\,\sigma, V) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\text{c-ind}_H^G\,\sigma, V) \quad \text{by 補題 1.11} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} (\sigma \otimes \delta_H^{-1}), V) \quad \text{by 命題 1.29}\end{aligned}$$

$\otimes$ と Hom の adjointness より

$$\begin{aligned}&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\sigma \otimes \delta_H^{-1}, V) \\ &= \mathrm{Hom}_H(\sigma \otimes \delta_H^{-1}, V)\end{aligned}$$

とするのは間違いである．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} (\sigma \otimes \delta_H^{-1}), V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\sigma \otimes \delta_H^{-1}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V))$$

は成り立つのだが $\mathcal{H}(G)$ には単位元がないので $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V) = V$ は一般には成り立たないのである．(cf. [2] p.124 (33) 式).

第2章　p 進簡約代数群の表現論入門

2.1　parabolic induction と Jacquet functor

F を非アルキメデス的局所体, $\mathbf{G}$ を F 上の連結簡約代数群 (connected reductive algebraic group) $G = \mathbf{G}(F)$ (F-valued points のなす群) とする．G は TDLC 群なので第１章の理論が使える．いくつか第１章に関連した G に関する事実をまとめておく。

定理 2.1　G は unimodular である．すなわち, $\delta_G = 1$ で 両側不変な G 上の測度が存在する．

定理 2.2　F の標数が 0 のときは, G の admissible 表現 (π, V) の distribution character $\mathrm{tr}\,\pi$ に対して G の regular element のなす集合 G_{reg} 上の locally constant,locally L^1- function χ_π が存在して

$$\mathrm{tr}\,\pi(f) = \int_G \chi_\pi(g) f(g)\,dg$$

を満たす．G_{reg} は G の dense open set であることに注意する．χ_π を π の character と呼ぶこともある．

この定理は p 進代数群の調和解析に欠かせない重要なものであるが非常に深い結果で証明しようと思えばこの講義録全体より長くなると思われる． 証明は ([19]) にある．

なお Casselman のプレプリントの第１節で述べられている代数群とそのリー環に関する用語と幾つかの基本的な知識については必要に応じて証明なしで引用する．

$\mathbf{P}$ を $\mathbf{G}$ の F 上定義された parabolic 部分群とし $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$ をその Levi 分解とする．$P = \mathbf{P}(F)$, $M = \mathbf{M}(F)$, $N = \mathbf{N}$ とおく．G, M, N は unimodular であるが, P は unimodular でなく,

$$\delta_P(mn) = |\det \mathrm{Ad}(m)_{\mathfrak{n}}|_F \quad m \in M,\ n \in N$$

となる．但し, $\mathfrak{n}$ は N の Lie 環で $\mathrm{Ad}(m)$ は m の $\mathfrak{n}$ への adjoint action, また, $|\quad|_F$ は $|x|_F = q_F^{-v_F(x)}$ で定義される F の絶対値 (q_F は F の剰余体の元の数で, v_F は

F の整数環の素元 ϖ_F に対して $v_F(\varpi_F)=1$ と正規化された F の付値である．）以下, 簡単のために G の parabolic 部分群 P という言い方をする.

まず parabolic induction を定義する．第 1 章で定義した ind を用いて定義される.

定義 2.1 (σ, W) を M の smooth 表現とし, N 上 trivial として P の smooth 表現と思う．このとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma &= \mathrm{ind}_P^G\,\delta_P^{1/2}\otimes\sigma \\ &= \{f\in C_R(G,W)\mid f(pg)=\delta_P^{1/2}(p)\sigma(p)f(g)\quad \forall p\in P\}\end{aligned}$$

と定義し $\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma$ を σ の G への parabolic induction という．$P\backslash G$ はコンパクトより, parabolic induction では 定義に ind を用いても c-ind を用いても同じであることに注意しておく.

補題 2.3 (σ, W) が M の admissible 表現ならば $\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma$ は G の admissible 表現である.

証明： $V=\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma$ とおき, K を G の開コンパクト部分群とする.

$$V^K=\{f: G\to W\mid f(pgk)=\delta_P^{1/2}(p)\sigma(p)f(g)\quad \forall p\in P,\forall k\in K\}$$

となる．$P\backslash G$ コンパクトより $P\backslash G/K$ は有限集合である．$G=PXK$ となる有限集合 X をとる．このとき 写像

$$\begin{array}{ccc} V^K & \to & \prod_{x\in X} W^{M\cap xKx^{-1}} \\ f & \mapsto & (f(x))_{x\in X}\end{array}$$

は補題 1.23 より単射であり, σ が admissible だから右辺は有限次元である．よって V^K は有限次元となる. □

次の事実 (岩澤分解) については証明なしで用いる．([8], [9] などを参照せよ．）

定理 2.4 G のあるコンパクト部分群 K で $G=PK$ となるものが存在する.

補題 2.5 $G=PK$ となる G のコンパクト部分群 K に対して $(\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma)|_K \simeq \mathrm{Ind}_{K\cap P}^K\,\sigma|_{K\cap P}$

証明： $G=PK$ より明らかである. □

命題 2.6 $\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma$ の反傾表現は $\mathrm{Ind}_P^G\,\tilde\sigma$ に同型である．($\tilde\sigma$ は σ の反傾表現) 従って, σ が ユニタリーなら $\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma$ もユニタリーである.

証明：　命題 1.30 と $\delta_G = 1$ より

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma} &\simeq (\text{c-ind}_P^G\,\sigma \otimes \delta_P^{1/2})\widehat{\ } \\ &\simeq \mathrm{ind}_P^G(\tilde{\sigma} \otimes \delta_P^{-1/2} \otimes \delta_P) \\ &= \mathrm{Ind}_P^G\,\tilde{\sigma}\end{aligned}$$

□

注意 2.1　$\mathrm{Ind}_P^G\,\sigma$ の定義に $\delta_P^{1/2}$ がついているのは, このユニタリーを保つという性質の為である. 従って, ユニタリー性を問題にしないときは $\delta_P^{1/2}$ のない定義 $\mathrm{ind}_P^G\,\sigma$ でもよいのであるが parabolic induction というときは Ind_P^G が用いられるのでここでもその慣例に従っておく.

p 進体上の代数群の表現論において大切な道具である Jacquet functor について定義を与える. 以下, Jacquet functor がこの章の主題である.

定義 2.2　(π, V) を G の smooth 表現, $P = MN$ を G の parabolic 部分群とする.

$$V(N) = \langle \pi(n)v - v \mid n \in N, v \in V \rangle \quad (\pi(n)v - v \text{ で生成される部分空間})$$

と定義し, $V_N = V/V(N)$ とおく. M の 表現 (π_N, V_N) を

$$\pi_N(m)\bar{v} = \delta_P^{-1/2}\overline{\pi(m)v} \quad (\bar{v} \text{ は } v \in V \text{ の } V_N \text{ での像})$$

と定義し, (π_N, V_N) を (π, V) の $P = MN$ に関する Jacquet module と呼ぶ. 明らかに (π_N, V_N) は M の smooth 表現である. G の smooth 表現のカテゴリから M の smooth 表現のカテゴリへの functor $\pi \mapsto \pi_N$ を Jacquet functor と呼ぶ.

注意 2.2　$\delta_P^{-1/2}$ をつけない定義もある. (unnormalized Jacquet functor) この定義もよく用いられるが, 後に述べるように parabolic induction との adjoint functor となるためには $\delta_P^{-1/2}$ をつけておく必要がある.

また, (π_N, V_N) は (π, V) の P への制限 $(\pi|_P, V)$ で N の作用をつぶしたものであるから P の表現から M の表現への functor とも思える.

$V(N)$ は次のように特徴づけられる.

補題 2.7

$$V(N) = \left\{ v \in V \;\middle|\; \int_{N'} \pi(n)v\,dn = 0 \text{ for some compact subgroup } N' \text{ of } N \right\}$$

証明： $\subset$ は明らか．$\supset$ を示す．$\int_{N'} \pi(n)v\,dn = 0$ とする．G の開コンパクト部分群 K で $K \subset G_v$ となるものがとれる．この K に対して $N'/N' \cap K$ はコンパクトかつ離散的だから有限集合で

$$\sum_{n \in N'/N' \cap K} \pi(n)v = 0 \quad \text{和は有限和}$$

となる．ゆえに, $\sum_{n \in N'/N' \cap K}(\pi(n) - 1)v = -|N'/N' \cap K|v$ となり $v \in V(N)$． □

補題 2.8 $U \longrightarrow V \longrightarrow W$ が P-加群として exact なら $U_N \longrightarrow V_N \longrightarrow W_N$ は M-加群として exact である．

証明： $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$ (exact) として $0 \longrightarrow U_N \xrightarrow{\bar{f}} V_N \xrightarrow{\bar{g}} W_N \longrightarrow 0$ (exact) を示せばよい．$p \in P$ の U, V, W への作用を $\pi(p)$ で表すこととする．$n \in N$, $u \in U$, $v \in V$ に対して

$$f(\pi(n)u - u) = \pi(n)f(u) - f(u) \in V(N)$$
$$g(\pi(n)v - v) = \pi(n)g(v) - g(v) \in W(N)$$

が成り立つから $\bar{f}, \bar{g}$ が well-defined である．$x \in V$ が $\bar{x} \in \operatorname{Ker} \bar{g}$ とすると

$$g(x) = \sum_i c_i(\pi(n_i)w_i - w_i) \quad n_i \in N, w_i \in W$$

と書けるが g は全射より $w_i = g(v_i)$ となる $v_i \in V$ がある．よって,

$$x - \sum_i c_i(\pi(n_i)v_i - v_i) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$$

となり $\bar{x} \in \operatorname{Im} \bar{f}$．ゆえに $\operatorname{Ker} \bar{g} \subset \operatorname{Im} \bar{f}$ だが, $\bar{f} \circ \bar{g} = 0$ は明らかだから $\operatorname{Ker} \bar{g} = \operatorname{Im} \bar{f}$ が得られた．$\bar{g}$ の全射は g が全射より明らかである．

$\bar{f}$ の単射性の証明に補題 2.7 を用いる．

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x) = 0 &\Longrightarrow f(x) \in V(N) \\
&\Longrightarrow \int_{N'} \pi(n)f(x)\,dn = 0 \ \text{ for some } \ N' \\
&\Longrightarrow f\left(\int_{N'} \pi(n)x\,dn\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \int_{N'} \pi(n)x\,dn = 0 \ \ (\because f \text{ は単射}) \\
&\Longrightarrow x \in U(N)
\end{aligned}$$

□

第 1 章で述べた Frobenius reciprocity を parabolic induction と Jacquet functor にあてはめてみよう.

定理 2.9 (π, V) を G の smooth 表現, $P = MN$ を G の parabolic 部分群とし, (σ, U) を M の smooth 表現とする. σ を N 上 trivial として P の表現とも見なす. このとき,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_P^G \sigma) \simeq \mathrm{Hom}_P(\pi|_P, \sigma \otimes \delta_P^{1/2}) \simeq \mathrm{Hom}_M(\pi_N, \sigma)$$

が成り立つ.

証明：　前の $\simeq$ は定理 1.27 より, 後の $\simeq$ は Jacquet functor の定義より直ちに従う. □

次の定理がこの章の主定理であり, p 進体上の代数群の表現論の出発点とも言うべき定理である.

定理 2.10 $P = MN$ を G の parabolic 部分群とする.

1. (π, V) が G-module として有限生成ならば (π_N, V_N) は M-module として有限生成である.

2. (π, V) が G の admissible 表現ならば (π_N, V_N) は M の admissible 表現である.

1 の証明：X を V の有限集合で $\pi(G)X = V$ となるものとする. G のコンパクト開部分群 K を $X \subset V^K$ となるようにとる. $|P \backslash G/K| < \infty$ より G の有限集合 Γ で $P\Gamma K = G$ となるものが存在する. $\pi(G)X = V$ と $X \subset V^K$ より $\pi(P\Gamma)X = V$. よって V_N は M-module として $\pi(\Gamma)X$ で生成される.

2 の証明：π が admissible ならば, π_N が admissible の証明のための準備としてルート系に関する記号と定義, 岩堀分解 (Iwahori factorization) に関する定理等を準備する.

定義 2.3 $\mathbf{P}_\emptyset = \mathbf{M}_\emptyset \mathbf{N}_\emptyset$ を F 上定義された minimal parabolic 部分群とし $\mathbf{P}_\emptyset$ の maximal F-split torus を $\mathbf{A}_\emptyset$ とする.

1. $\mathbf{A}_\emptyset$ の non-trivial rational character α が $\mathbf{G}$ の $\mathbf{A}_\emptyset$ に関するルートであるとは, $\mathbf{G}$ の Lie algebra $\mathfrak{g}$ の固有空間

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(a)x = \alpha(a)x \quad \text{for all} \quad a \in \mathbf{A}_\emptyset\}$$

が non-trivial になることをいう.

2. ルート α が $\mathbf{P}_\emptyset$ に関して positive であるとは $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_\emptyset$ ($\mathfrak{n}_\emptyset$ は $\mathbf{N}_\emptyset$ の Lie algebra) となることをいう．各ルートは $X(\mathbf{A}_\emptyset)\otimes\mathbb{R}$ に埋めこんで考える．($X(\mathbf{A}_\emptyset)$ は $\mathbf{A}_\emptyset$ の rational character のなす群．)

3. $\Sigma = \{\alpha \mid \alpha$ は ルートで $\alpha = 2\beta$ となるルート β がない $\}$ とし Σ^+ を Σ の $\mathbf{P}_\emptyset$ に関する positive root の集合, Δ を simple roots の集合とする．

4. $\Theta \subset \Delta$ に対して $\mathbf{A}_\Theta$ を $\cap_{\alpha\in\Theta}\operatorname{Ker}\alpha$ の連結成分, $\mathbf{P}_\Theta$ を Θ に対応する standard parabolic 部分群とする．(standard とは $\mathbf{P}_\emptyset$ を含むことを意味する．) 即ち, $\mathbf{M}_\Theta$ は $\mathbf{A}_\Theta$ の centralizer で $\mathbf{N}_\Theta = \prod_{\alpha\in\Theta}\mathbf{N}_\alpha$ である．($\mathbf{N}_\alpha$ は Lie algebra が $\mathfrak{n}_\alpha + \mathfrak{n}_{2\alpha}$ となる unipotent 群である．)

定義 2.4 $P = MN$ を G の parabolic 部分群, $P^- = MN^-$ を P の opposite parabolic 部分群, K を G のコンパクト開部分群とする．

K が P に関する岩堀分解 (Iwahori factorization) をもつとは, 以下の 1. - 2. が成り立つこととする．

1. $N_K^- \times M_K \times N_K$ から K への積写像 $(n^-, m, n) \mapsto n^-mn$ は同相写像である．但し, $N_K^- = N^-\cap K$, $M_K = M\cap K$, $N_K = N\cap K$ である．

2. 任意の $a \in A^-$ に対して $aN_Ka^{-1} \subset N_K$, $a^{-1}N_K^-a \subset N_K^-$ が成り立つ．

   但し, A^- は以下のように定義される torus の subset である．P が standard ($P_\emptyset$ を含む) のときは $P = P_\Theta$ ($\Theta\subset\Delta$) となる Θ が存在するのでその Θ と $0 < \varepsilon \le 1$ に対して

$$A_\Theta^-(\varepsilon) = \{a \in A_\Theta \mid |\alpha(a)| \le \varepsilon \ \text{ for all } \alpha \in \Delta - \Theta\}$$

   と定義し, $A_\Theta^-(1) = A_\Theta^-$ とおく．一般の P についてはある $\Theta \subset \Delta$ と $g \in G$ によって $gPg^{-1} = P_\Theta$ と書けるので, $A^-(\varepsilon) = g^{-1}A_\Theta^-(\varepsilon)g$ と定義する．

次の岩堀分解に関する定理は証明なしに引用する．([1] Proposition 1.4.4, 本質的には [54])

定理 2.11 G のコンパクト開部分群からなる単位元の基本近傍系 $\{K_n\}$ で以下を満たすものが存在する．

1. 任意の n に対して K_n は K_0 の正規部分群である．

2. P が standard parabolic 部分群であるとき K_n は P に関する岩堀分解をもつ．

注意 2.3　この定理の証明はしないが $G = \mathrm{GL}_n(F)$ のときに $\{K_\nu\}$ をどうとればよいかを示しておく.

$$P_\emptyset = B = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

に対して $K_0 = GL_n(\mathcal{O}), K_\nu = 1 + \mathrm{M}_n(P_F^\nu)(\nu \geq 1)$ ととれば K_ν は K_0 の正規部分群で K_ν は B を含む parabolic 部分群 P に対して岩堀分解をもつ.

（証明）: maximal parabolic に対して示せば十分である.

$$P = P_l = \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathrm{GL}_l(F), d \in \mathrm{GL}_{n-l}(F) \right\} \quad (1 \leq l \leq n-1)$$

とおく. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_\nu$ に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_l & 0 \\ x & 1_{n-l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_l & y \\ 0 & 1_{n-l} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1_l & 0 \\ x & 1_{n-l} \end{pmatrix} \in N_\nu^-$, $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in M_\nu$, $\begin{pmatrix} 1_l & y \\ 0 & 1_{n-l} \end{pmatrix} \in N_\nu$ が唯一つの解 $\alpha = a$, $x = ca^{-1}$, $y = a^{-1}b$, $\delta = d - ca^{-1}b$ を持つ．また

$$A_l^- = \left\{ \begin{pmatrix} a1_l & 0 \\ 0 & d1_{n-l} \end{pmatrix} \;\middle|\; ad^{-1} \in \mathcal{O}^\times \right\}$$

だから $aN_\nu a^{-1} \subset N_\nu$, $a^{-1}N_\nu^- a \subset N_\nu^-$ for $a \in A_l^-$ も成り立つ. □

定理 2.12　(π, V) を G の admissible 表現, $P = MN$ を G の parabolic 部分群とする．K_0 を G のコンパクト開部分群で P に関して岩堀分解をもつとする．φ を V から $V_N = V/V(N)$ への標準的な射影とすると $\varphi(V^{K_0}) = V_N^{M_0}$, $(M_0 = K_0 \cap M)$ が成り立つ.

(π, V) admissible $\Longrightarrow$ (π_N, V_N) admissible の証明は定理 2.11, 2.12 より明らかにわかる．従って, 定理 2.12 を証明すれば, 定理 2.10 が証明される．次の補題は簡単だがよく用いられる．([1] では Jacquet's first lemma と呼ばれている．)

補題 2.13 定理 2.12 と同じ記号のもとで

$$v \in V^{M_0 N_0^-} \Longrightarrow \mathrm{p}_{K_0}(v) = \mathrm{p}_{N_0}(v) \text{ かつ } v - \mathrm{p}_{K_0}(v) \in V(N_0)$$

が成り立つ．

証明： $v_0 = \mathrm{p}_{K_0}(v)$ とおく．$\pi(mn')v = v$ for $m \in M_0$, $n' \in N_0^-$ より

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{\mathrm{vol}(K_0)} \int_{N_0} dn \int_{M_0 N_0^-} \pi(n)\pi(mn')v\, dm\, dn' \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(N_0)} \int_{N_0} \pi(n)v\, dn \\ &= \mathrm{p}_{N_0}(v) \end{aligned}$$

また補題 2.7 より, $v - v_0 = v - \mathrm{p}_{N_0}(v) \in V(N_0)$ □

この補題の系として次が得られる．

系 2.14 $\varphi(V^{K_0}) = \varphi(V^{M_0 N_0^-})$

（定理 2.12 の証明）: $\bar{U}$ を $V_N^{M_0}$ の有限次元部分空間とする．$\varphi(U) = \bar{U}$ となる V^{M_0} の有限次元部分空間 U をとり, N^- のコンパクト開部分群 N_1^- で $U \subset V^{M_0 N_1^-}$ となるものをとる．補題を一つ用意する．

補題 2.15 ([1] 1.4.3) $P = MN$ を G の parabolic 部分群, N_1, N_2 を N のコンパクト開部分群とする．このとき, $a \in A^-(\varepsilon) \Longrightarrow aN_2a^{-1} \subset N_1$ となる $0 < \varepsilon \leq 1$ が存在する．

証明： $\mathbf{G}$ が F 上 split し, $P_\emptyset$ を minimal parabolic, $P = P_\Theta$ と仮定する．このとき $N = \prod_{\alpha \in \Sigma^+ - \Sigma_\Theta^+} N_\alpha$ で $A = A_\Theta$ の N_α への conjugate action は α で作用するから明らか．G が F 上 split しないときは G が split する F の有限次拡大へ base extension して split case に帰着する． □

この補題より $a \in A = A_\emptyset$ を $a^{-1}N_0^- a \subset N_1^-$ となるようにとれる．このとき, $u \in U, n \in N_0^-$ に対して

$$\pi(n)\pi(a)u = \pi(a)\pi(a^{-1}na)u = \pi(a)u$$

だから $\pi(a)U \subset V^{M_0 N_0^-}$ となる．よって系 2.14 より $\varphi(\pi(a)U) = \pi_N(a)\bar{U} \subset \varphi(V^{K_0})$．$(\pi, V)$ は admissible より V^{K_0} は有限次元だから $\varphi(V^{K_0})$ も有限次元である．よって $\dim \pi_N(a)\bar{U} = \dim \bar{U} \leq \dim \varphi(V^{K_0}) \leq \dim V^{K_0}$．任意の有限次元部分空間の次元が $\dim V^{K_0}$ 以下であることより $V_N^{M_0}$ 自身が有限次元である．従って $V_N^{M_0} = \bar{U}$ としてよい．このとき $\pi_N(a)\bar{U} \subset \varphi(V^{K_0}) \subset V_N^{M_0} = \bar{U}$ で $\dim \pi_N(a)\bar{U} = \dim \bar{U}$ だから $\varphi(V^{K_0}) = V_N^{M_0}$ である． □

2.2　supercuspidal 表現について

この節では supercuspidal 表現の性質について述べる．目標は, G の admissible 表現が supercuspidal 表現 (matrix coefficient の support が compact mod center) になることと G の proper parabolic 部分群に対する Jacquet module がすべて消えることが同値であることを示すことである．

定義 2.5　G の admissible 表現 (π, V) が absolutely cuspidal であるとは G の任意の proper parabolic 部分群 $P = MN$ に対して $V_N = 0$ となることと定義する．

注意 2.4　(1) $P_1 \subset P_2$ ならば $N_2 \subset N_1$ より $V(N_2) \subset V(N_1)$ となるので absolutely cuspidal を確かめるには maximal parabolic $P = MN$ に対して $V_N = 0$ を示せばよい．

(2) 上に述べたように, absolutely cuspidal は G が簡約代数群の F-valued points のなす群のときは, supercuspidal と同じである．用語として absolutely cuspidal は最近はほとんど用いられず, supercuspidal が定着している．

定理 2.16　(π, V) を G の既約 admissible 表現とする．このとき G の parabolic 部分群 $P = MN$ と M の既約 absolutely cuspidal 表現 (σ, W) で $\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G \sigma$ となるものが存在する．

証明：　G の F-rank r (G の maximal F-split torus の次元) に関する帰納法で証明する．$r = 0$ のときは proper parabolic が存在しないので全ての admissible 表現は absolutely cuspidal である．　$r > 0$ とする．　π が absolutely cuspidal なら $P = M = G, \sigma = \pi$ ととればよいので π が absolutely cuspidal でないとする．定義より G の proper parabolic 部分群 $P = MN$ で $V_N = V/V(N) \neq 0$ となるものがある．定理 2.10 より (π_N, V_N) は有限生成 admissible 表現である．V_N の M-module としての生成元を $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とする．V の $V(N)$ を含む proper subspace で　M-invariant なものの成す集合に包含関係で順序をいれると帰納的順序集合になる．(有限生成が効く．) Zorn の補題より極大元がありそれを V' とすると V/V' は V_N の既約 quotient M-module．$(\rho, W) = (\bar{\pi}_N, V/V')$ とおくと, 定理 2.9 と π が既約より $\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G \rho$. M の F-rank $< r$ より帰納法の仮定が使えてある M の parabolic 部分群 $Q = M_Q N_Q$ と M_Q の既約 absolutely cuspidal 表現 σ で $\rho \hookrightarrow \mathrm{Ind}_Q^M \sigma$ となるものが存在する．ゆえに, Ind の連鎖律 (系 1.28) より $\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G \mathrm{Ind}_Q^M \sigma \simeq \mathrm{Ind}_Q^G \sigma$. □

まず absolutely cuspidal ならば supercuspidal であることを示す．そのために必要な事実 ([1]1.4.6) を一つ準備する．本質的には G の Cartan 分解である．(G が compact center をもつときは Cartan 分解そのもの．) 証明は Bruhat-Tits theory ([12]) の結果を使わねばならないのでここでは省略する．

命題 2.17 (Cartan decomposition)　$\mathbf{P}_\emptyset$ を $\mathbf{G}$ の minimal parabolic $/F$, $\mathbf{A}_\emptyset$ を $\mathbf{G}$ の maximal F-split torus $\subset \mathbf{P}_\emptyset$ とする．このとき, 以下の 1.-3. を満たす G の開部分群 Γ が存在する．

1. $G = \Gamma A_\emptyset^- \Gamma$
2. $\mathbf{A}_\emptyset(\mathcal{O}) \subset \Gamma$
3. $\Gamma/\Gamma \cap Z$ はコンパクト

もう一つ簡単な補題を用意する．

補題 2.18　N_0, N_1 を N のコンパクト開部分群とする．$v \in V(N_1), mN_1m^{-1} \subset N_0$ となる $m \in M$ に対して $\mathrm{p}_{N_0}(\pi(m)v) = 0$ となる．

証明：　$v \in V(N_1), N_1 \subset m^{-1}N_0m$ に注意すると

$$\begin{aligned}\mathrm{p}_{N_0}(\pi(m)v) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(N_0)}\int_{N_0}\pi(n)\pi(m)v\,dn\\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(N_0)}\pi(m)\int_{m^{-1}N_0m}\pi(n)v\,dn\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

定理 2.19　(π, V) を G の absolutely cuspidal 表現とすると, (π, V) は supercuspidal である．即ち, matrix coefficient $f_{v,\tilde{v}}(g) = \langle \pi(g)v, \tilde{v}\rangle$ は support がコンパクト mod Z である．

証明：　命題 2.17 の Γ をとる．$\Lambda : A_\emptyset^- \to (F^\times)^n$ $(n = |\Delta|)$ を $\Lambda(a) = (\alpha(a))_{\alpha\in\Delta}$, $\Lambda' : A_\emptyset^- \to \mathbb{Z}^n$ を $\Lambda'(a) = (\log_q|\alpha(a)|_F)_{\alpha\in\Delta}$ と定義する．$\mathrm{Ker}\,\Lambda = \cap_{\alpha\in\Delta}\mathrm{Ker}\,\alpha$ は Z の split component A_Δ に等しいので, $\mathrm{Ker}\,\Lambda' = \mathbf{A}_\emptyset(\mathcal{O})A_\Delta$ となる．$A_\emptyset(\Theta) \subset \Gamma$ より

$$\{a \in A_\emptyset^- \mid \epsilon \le |\alpha(a)| \le 1 \quad \forall\alpha \in \Delta\}/A_\Delta$$

が　mod Γ で有限である．(Λ' の像を考えればコンパクトかつ discrete で有限．) 従って, $\Gamma/\Gamma \cap Z$ がコンパクトより

$$\exists\varepsilon \ \text{ s.t. } \ f_{v,\tilde{v}}(g) = 0 \ \text{ if } \ g \in \Gamma a\Gamma, |\alpha(a)| < \varepsilon \ \text{ for some } \ \alpha \in \Delta \qquad (*)$$

を示せば $\mathrm{Supp}\, f_{v,\tilde{v}}$ がコンパクト mod Z が言える．以下これを示す．$\alpha \in \Delta$ に対して $P = MN$ を $\Delta - \{\alpha\}$ に対応する maximal parabolic 部分群とする．(全ての maximal standard parabolic はこの形になる．) $v \in V, \tilde{v} \in \tilde{V}$ を固定する．(π, V) が absolutely cuspidal より $V = V(N)$ であり, 補題 1.4 より (π, V) は Γ-finite だから N

のコンパクト部分群 $N_1 \subset N_2$ で $\pi(\Gamma)v \subset V(N_2)$, $\tilde{\pi}(\Gamma)\tilde{v} \subset \tilde{V}^{N_1}$ となるものがとれる．補題 2.15 より $\varepsilon_P > 0$ を $a \in A_\emptyset^-$, $|\alpha(a)| < \varepsilon_P$ ならば $aN_2a^{-1} \subset N_1$ となるようにとれる．$a \in A_\emptyset^-(\varepsilon_P)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して $\langle \pi(\gamma_1 a \gamma_2)v, \tilde{v} \rangle = \langle \pi(a)\pi(\gamma_2)v, \tilde{\pi}(\gamma_1^{-1})\tilde{v} \rangle$ であるが, 補題 2.18 より $\gamma_2 \in \Gamma$ に対して $\mathrm{p}_{N_1}(\pi(a)\pi(\gamma_2)v) = 0$. $\tilde{\pi}(\gamma_1^{-1})\tilde{v} \in \tilde{V}^{N_1}$ より $\langle \pi(a)\pi(\gamma_2)v, \tilde{\pi}(\gamma_1^{-1})\tilde{v} \rangle = 0$. ε を P が maximal standard parabolic を走ったときの ε_P の最小値ととれば $(*)$ を満たす. □

次に, supercuspidal $\Longrightarrow$ absolutely cuspidal を示して, この節の主定理を得る.

定理 2.20 G の admissible 表現 (π, V) に対して以下は同値である.

1. (π, V) が absolutely cuspidal.
2. $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ が absolutely cuspidal.
3. (π, V) が supercuspidal.

証明： 定理 2.19 と $\tilde{\tilde{V}} = V$ より 3. $\Longrightarrow$ 1. を示せばよい．proper parabolic $P = MN$ を任意にとり minimal parabolic $P_\emptyset$ を $P_\emptyset \subset P$ となるようにとる．従って $P = P_\Theta = M_\Theta N_\Theta$ のように書ける．K_0 を P に関する岩堀分解をもつ任意のコンパクト開部分群とする．$v \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$ に対して, $\mathrm{Supp}\, f_{v,\tilde{v}}$ は compact $\mod Z$ だから $\langle \pi(a)v, \tilde{v} \rangle = 0$ for $a \in A_\Theta^-(\varepsilon)$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．($\because$ 定理 2.19 の証明の最初の部分から, $\{a \in A_\emptyset^- | \epsilon \le |\alpha(a)| \le 1 \forall \alpha \in \Delta\}$ の外では $\langle \pi(a)v, \tilde{v} \rangle = 0$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．)

V^{K_0}, $\tilde{V}^{K_0}$ は有限次元だから $\varepsilon > 0$ を任意の $v \in V^{K_0}$, $\tilde{v} \in \tilde{V}^{K_0}$ に対して $\langle \pi(a)v, \tilde{v} \rangle = 0$ for $a \in A_\Theta^-(\varepsilon)$ となるように取れる．$\langle\ ,\ \rangle$ を $V^{K_0} \times \tilde{V}^{K_0}$ 上に制限しても非退化だから, $v \in V^{K_0}$, $a \in A_\Theta^-(\varepsilon)$ に対して $\mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)v) = 0$ となる.

N_1 を N のコンパクト開部分群で $V^{K_0} \cap V(N) \subset V(N_1)$ となるものとする．補題 2.15 より $\varepsilon' > 0$ で $a \in A_\Theta^-(\varepsilon') \Longrightarrow aN_1a^{-1} \subset N_0 = N \cap K_0$ となるものが存在する．$\min(\varepsilon, \varepsilon')$ を改めて ε とおく.

２つの補題を用意する.

補題 2.21 $\varphi : V \to V_N$ を標準的な射影とする．$v \in V^{K_0}$, $a \in A_\Theta^-$ ならば $\varphi(\mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)v)) = \delta_P^{1/2}(a)\pi_N(a)\varphi(v)$ が成り立つ.

証明： 岩堀分解の定義より $K_0 = N_0 \times M_0 \times N_0^-$ と $a^{-1}N_0^-a \subset N_0^-$, $aN_0a^{-1} \subset N_0$ が成り立つ．ゆえに, $v \in V^{K_0}$, $m \in M_0$, $n^- \in N_0^-$ に対して

$$\begin{aligned}\pi(mn^-)(\pi(a)v) &= \pi(a)\pi(a^{-1}mn^-a)v \\ &= \pi(a)v.\end{aligned}$$

よって $\pi(a)v \in V^{M_0 N_0^-}$ である．補題 2.13 より $\mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)v) = \mathrm{p}_{N_0}(\pi(a)v)$ を得る．従って, $\varphi(\mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)v)) = \varphi(\mathrm{p}_{N_0}(\pi(a)v)) = \varphi(\pi(a)v)$. □

補題 2.22　$V_a^{K_0} = \mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)V^{K_0}) = \pi(K_0 a K_0)V$ とおく．$a \in A_\Theta^-$ が $aN_1a^{-1} \subset N_0$ を満たすとすると, $\varphi|_{V_a^{K_0}} : V_a^{K_0} \to V_N^{M_0}$ は全単射である．

証明：　$u \in V_N^{M_0}$ とする．$m \in M_0$ に対して $ama^{-1} \in M_0$ より

$$\begin{aligned}\pi_N(m)\pi_N(a^{-1})u &= \pi_N(a^{-1})\pi_N(ama^{-1}) \\ &= \pi_N(a^{-1})u.\end{aligned}$$

よって $\pi_N(a^{-1}u) \in V_N^{M_0}$．定理 2.12 より $v \in V^{K_0}$ で $\varphi(v) = \delta_P^{1/2}(a)\pi_N(a^{-1})u$ となるものがある．補題 2.21 より

$$\varphi(\mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)v)) = \delta_P^{1/2}(a)\pi_N(a)\varphi(v) = u.$$

よって $\varphi|_{V_a^{K_0}}$ は全射である．

単射を示すには, $v \in V_a^{K_0} \cap V(N)$ ならば $v = 0$ を示せばよい．$v = \mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)v_0)$ for $v_0 \in V^{K_0}$ とする．補題 2.13 より $v = \mathrm{p}_{N_0}(\pi(a)v_0)$ である．$v \in V^{K_0} \cap V(N) \subset V(N_1)$ とあわせると,

$$\int_{N_1} \pi(n_1) \int_{N_0} \pi(n_0)\pi(a)v_0\, dn_0\, dn_1 = 0$$

を得る．$N_2 = a^{-1}N_0 a$ とおくと $aN_1a^{-1} \subset N_0$ より $N_1 \subset N_2$. よって

$$\int_{N_2} \pi(n_1) \int_{N_0} \pi(n_0)\pi(a)v_0\, dn_0\, dn_1 = 0$$

積分の順序交換と $N_0 \subset N_2$ より

$$\begin{aligned}\int_{N_2} \pi(n_2) \int_{N_0} \pi(n_0)\pi(a)v_0\, dn_0\, dn_2 &= \int_{N_0}\int_{N_2} \pi(n_2 n_0)\pi(a)v_0\, dn_2\, dn_0 \\ &= \mathrm{vol}(N_0) \int_{N_2} \pi(n')\pi(a)v_0\, dn' \\ &= \mathrm{vol}(N_0)\pi(a) \int_{N_2} \pi(a^{-1}n'a)v_0\, dn'.\end{aligned}$$

よって $\int_{a^{-1}N_2 a} \pi(n')v_0\, dn = 0$ となり, $v_0 \in V(N)$ が示された．ゆえに, $v_0 \in V(N) \cap V^{K_0} \subset V(N_1)$. 補題 2.13, 2.18 より

$$v = \mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)v_0) = \mathrm{p}_{N_0}(\pi(a)v_0) = 0.$$

□

定理 2.20 の証明を続ける．任意の $v \in V^{K_0}$, $a \in A_\Theta^-(\varepsilon)$ に対して $aN_1a^{-1} \subset N_0$ かつ $\mathrm{p}_{K_0}(\pi(a)v) = 0$ だから補題 2.22 より $V_N^{M_0} = 0$. P に関する岩堀分解をもつ任意のコンパクト開部分群 K_0 に対して成り立つから $V_N = 0$. P も任意の proper parabolic だったから (π, V) は absolutely cuspidal である． □

supercuspidal 表現に関して Schur の直交関係式が成り立つ．

命題 2.23 (π, V) を G の既約 supercuspidal 表現とする．ある 正の実数 d_π が存在して任意の $u, v \in V$ と $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$ に対して

$$\int_{G/Z} \langle \pi(g)u, \tilde{u}\rangle \langle \pi(g^{-1})v, \tilde{v}\rangle \, dg = d_\pi^{-1} \langle u, \tilde{v}\rangle \langle v, \tilde{u}\rangle$$

が成り立つ．

証明： π の matrix coefficient は support compact mod Z だから 左辺の積分は収束する．$v \in V$, $\tilde{u} \in \tilde{V}$ を固定する．$u \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$ に対して

$$(u, \tilde{v}) \mapsto \int_{G/Z} \langle \pi(g)u, \tilde{u}\rangle \langle \pi(g^{-1})v, \tilde{v}\rangle \, dg$$

とおくと $V \times \tilde{V}$ 上の G-不変な双線形形式になるので $\langle u, \tilde{v}\rangle$ の定数倍である．また $v \in V$, $\tilde{u} \in \tilde{V}$ に対しても

$$(v, \tilde{u}) \mapsto \int_{G/Z} \langle \pi(g)u, \tilde{u}\rangle \langle \pi(g^{-1})v, \tilde{v}\rangle \, dg$$

は $V \times \tilde{V}$ 上の G-不変な双線形形式なので $\langle v, \tilde{u}\rangle$ の定数倍である．よって

$$\int_{G/Z} \langle \pi(g)u, \tilde{u}\rangle \langle \pi(g^{-1})v, \tilde{v}\rangle \, dg = c_\pi \langle u, \tilde{v}\rangle \langle v, \tilde{u}\rangle$$

となる定数 c_π が存在する．次の補題より (π, V) はユニタリーと仮定してよい．

補題 2.24 任意の G の smooth ω-表現 (π, V) に対して G の $\mathbb{R}_{>0}$-valued character χ で $\pi \otimes \chi$ の Z への制限がユニタリーになるものが存在する．

(これは, 代数群の構造に関することなのでここでは証明しない．[1] 5.2.5 を見て下さい．)

(π, V) をユニタリーとし (,) を V 上の G-不変正値エルミート形式とする．$(x, u_0) = \langle x, \tilde{u}\rangle$, $(x, v_0) = \langle x, \tilde{v}\rangle$ $(\forall x \in V)$ となるように u_0, v_0 をとると

$$\int_{G/Z} (\pi(g)u, u_0)(\pi(g^{-1})v, v_0) \, dg = c_\pi (u, v_0)(v, u_0)$$

となる．$u = v_0$, $v = u_0$ とおくと $c_\pi > 0$ が得られる． □

d_π は π の formal degree と呼ばれる．Schur の直交関係式を用いて次の重要な結果を証明できる．

定理 2.25 任意の supercuspidal ω-表現 (π, V) は既約 supercuspidal 表現の可算個の直和として表される．

証明： まず (π, V) が既約とし，(σ, U) を smooth ω-表現, $\Phi : U \to V$ を全射 G-hom とする．G-hom $\Psi : V \to U$ で $\Phi \circ \Psi = 1_V$ となるものが存在することを示す．$v_0 \in V$, $\tilde{v}_0 \in \tilde{V}$ を $\langle v_0, \tilde{v}_0 \rangle = d_\pi$ と満たすようにとる．$v \in V$ に対して $\Gamma(v) = \Gamma_v = f_{v,\tilde{v}_0}$ と定義する．(π, V) は ω-表現だから Γ は (π, V) から $\mathcal{H}(G)_{\omega^{-1}}$ への G-hom である．($\mathcal{H}(G)_{\omega^{-1}}$ へは G は右移動 R で作用する．) V は既約だから Γ は G-injection なので V をその $\mathcal{H}(G)_{\omega^{-1}}$ での像と同一視する．$P : \mathcal{H}(G)_{\omega^{-1}} \to V$ を $(P(f))(y) = (\Gamma_{v_0} * f)(y)$ と定義すると，

$$
\begin{aligned}
(P(f))(y) &= \int_{G/Z} \Gamma_{v_0}(x) f(x^{-1}y)\, dx \\
&= \int_{G/Z} \Gamma_{v_0}(yx) f(x^{-1})\, dx \\
&= \int_{G/Z} f(x^{-1})(R(x)\Gamma_{v_0})(y)\, dx.
\end{aligned}
$$

最後の式より $\operatorname{Im} P \subset V$, 最初の式より $P(R(g)f) = R(g)(P(f))$ がわかる．また，$f = \Gamma_v$ とすると Schur の直交関係式と $\langle v_0, \tilde{v}_0 \rangle = d_\pi$ より

$$
\begin{aligned}
(P(f))(y) &= \int_{G/Z} \langle \pi(x)v_0, \tilde{v}_0 \rangle \langle \pi(x^{-1}y)v, \tilde{v}_0 \rangle\, dx \\
&= d_\pi^{-1} \langle v_0, \tilde{v}_0 \rangle \langle \pi(y)v, \tilde{v}_0 \rangle \\
&= \Gamma_v(y).
\end{aligned}
$$

よって $P(f) = f$ for $f \in V$ が成り立つ．以上より P は $\mathcal{H}(G)_{\omega^{-1}}$ から V への G-projection である．

Φ は全射だから $\Phi(u_0) = v_0$ となる $u_0 \in U$ がとれる．$\Lambda : \mathcal{H}(G)_{\omega^{-1}} \to U$ を $\Lambda(f) = \sigma(\check{f})u_0$ によって定義する．但し, $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ である．

$$
\begin{aligned}
\Lambda(R(g)f) &= \int_{G/Z} f(x^{-1}g)\sigma(x)u_0\, dx \\
&= \int_{G/Z} f(x^{-1})\sigma(gx)u_0\, dx \\
&= \sigma(g)\Lambda(f)
\end{aligned}
$$

より Λ は G-hom である．また, $\Phi(\sigma(g)u_0) = \pi(g)v_0$ より

$$\begin{aligned}((\Gamma \circ \Phi \circ \Lambda)(f))(y) &= \left(\Gamma\left(\int_{G/Z} f(x^{-1})\pi(x)v_0\,dx\right)\right)(y)\\ &= \int_{G/Z} f(x^{-1})R(x)\Gamma_{v_0}(y)\,dx\\ &= (P(f))(y)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\Psi = \Lambda \circ \Gamma$ が Φ の splitting を与える．

(π, V) を 任意の supercuspidal ω-表現とする．K を G のコンパクト開部分群, V_0 を V^K によって生成される V の G-部分空間とする．V_0 は有限生成だから, 既約 supercuspidal quotient をもつ．これは上で示したように V_0 の直和因子である．ここで V^K の次元に関する帰納法を用いれば V_0 が既約 supercuspidal 表現の有限個の直和であることが示せる．$\{K_n\}$ を単位元の基本近傍形となるコンパクト開部分群の集合とする．V^{K_i} で生成される V の部分空間を V_i とする．上で示したように V_i は既約 supercuspidal 表現の有限個の直和であり $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V^{K_i}$ だから V は既約 supercuspidal 表現の加算個の直和である． □

参考文献

[1] W. Casselman, Introduction to the Theory of Admissible Representations of p-adic Reductive Groups, unpublished manuscript.

このプレプリントの前半（第２章から第５章）の内容を解説したものがこの講義録です。後半も大切なのでいつか解説を書きたいと思います．以下 本文の内容とは無関係に p 進代数群の表現論に関係する文献を挙げて、簡単なコメントを付けました．私見であり, 作者の専門に偏っている上, 各コメントに適当でない箇所もあるかと思いますが, この分野を勉強する人に少しでも参考になれば幸いです.

・基本的な文献

[2] P. Cartier, Representations of p-adic groups: a survey, in Proc. Symp. Pure Math., **33-1**, (1979), AMS, 111–155.

[3] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinsky, *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-Archimedean local field*, Russian Math. Surveys **31** (1976), 1–68.

[4] A.V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups II: On irreducible representations of GL(n)*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **13** (1980), 165–210.

[5] A.J. Silberger, Introduction to Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups, Math. Notes, Princeton Univ. Press, 1979.

[6] R. Godement and H. Jacquet, Zeta functions of simple algebras, Lecture Notes in Math., **260**, Springer-Verlag

[7] A. Borel and W. Casselman eds, Automorphic forms, representations and L-functions. Proc. Symp. Pure Math. **33 -1,2**, (1979), AMS

[2] は非常によくまとまった概説．手っ取り早くこの分野の基本的なことを知りたいときには最適であろう．但し, 証明は殆どない．[3] は [1] とは切り口が違うが p 進代数群の一般論を証明付きで書いてある．ただ, 途中からは GL_n について述べてあり, 一般性を失っている．[4] は GL_n の表現論を modulo supercuspidal で完全に分類したものである．GL_n のみで成り立つものが非常に美しい結果である．[5] は Harish-Chandra の Princeton での講義の講義録である．証明はきちんとついているが, 読みやすいとは言えない．[6] は GL_n 上の保型形式について local, global も含めて書いたもの．L-, ε-factor が Zeta function の関数等式を通して定義されている．保型表現を勉強する学生には非常に良い本．最後に挙げた AMS の Proceeding は保型関数に関係する人には必読書．p 進代数群の表現論に関係するのは主に Part 1 の方である．

・代数群関係

[8] A. Borel, Linear Algebraic Groups (Second Enlarged Edition), Graduate Texts in Math. **126**, Springer-Verlag

[9] J. Humphreys, Linear Algebraic Groups, Springer-Verlag, 1975.

[10] T.A. Springer, Linear Algebraic Groups, Springer-Verlag, 1981.

以上は代数群の教科書としてよくあげられるものであるが, どれで勉強しても問題ないと思うが個人的には [8] が第 2 版で TeX で typeset されて薄くなったし, 内容も充実したので良いと思う．

[11] V. Platonov and A. Rapinchuk, Algebraic Groups and Number Theory, (1993), Academic Press

Galois cohomolgy, Hasse principle, (strong) approximation 等の代数群の arithmetic theory について書かれた数論をやっている人には便利な本．

[12] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes Reductifs sur un Corps Local, I: Donnees radicielles valuees*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5–252.

[13] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes Reductifs sur un Corps Local, II: Schemas en groups, existence d'une donnee radicielle valuee*, Math. I.H.E.S. **60** (1984), 5–184.

[14] F. Bruhat and J. Tits, *Schemas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. Fr. **112** (1984), 259–301.

[15] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes Reductifs sur un Corps Local, III: Complements et applications a la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 671–688.

[12]-[15] は所謂 Bruhat-Tits theory と呼ばれるものが書かれている膨大な文献である．恥ずかしながら所々しか読んだことがない．初学者にこれを読めと言うのはあまりにも大変である．というわけで

[16] P. Garret, Buildings and Classical groups, Chapman and Hall, 1997

という本が最近出版されました．まだきちんと読んでませんがこれなら読めるという感じです．なお この本の p 進体上の簡約代数群の表現論に関する詳しい文献表は多いに活用させていただきました．

[17] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, in Proc. Symp. Pure Math. **33-1**, AMS, Providence, 1979, 29–69.

は, 証明はないが簡約代数群に関してよくまとまっています．Building の話もこれを見ればある程度わかります.（証明は別です）また, p 進体上の簡約代数群の分類表が載っています.

・p 進体上の簡約代数群上の調和解析の基礎

[18] Harish-Chandra and G. van Dijk, Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups, Lecture Notes in Math. **162**, Springer-Verlag, 1970.

[19] Harish-Chandra, *Admissible distributions on reductive p-adic groups*, Lie Theories and Their Applications, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, Queen's University, Kingston, Ontario (1978), 281–347.

[20] D. Kazhdan, *Cuspidal geometry of p-adic groups*, J. D'analyse Math. **47** (1986), 1–36.

[21] L. Clozel, *Sur une conjecture de Howe. I*, Compositio Math. **56** (1985), 87–110.

[22] L. Clozel, Orbital integrals on p-adic groups: a proof of the Howe conjecture. Ann. of Math. **129** (1989), 237–251.

[23] L. Clozel, *Invariant harmonic analysis on Schwartz space of a reductive p-adic group*, Harmonic Analysis on Reductive Groups, Progr. in Math. **101**, Birkhauser, Boston, 1991,101–121.

[19], [20], [22] がこの分野の基本的文献．(いずれも 標数 0 を仮定している) 但し, 非常に難しい．[19] は, character の locally L^1 を Howe conjecture の Lie 環版を用いて証明しています．(supercuspidal 表現の character については [18] で証明されていてこの結果も使われている．) 実際には, もっと強く原点の近傍での漸近挙動を nilpotent orbital integral の Fourier 変換 の 1 次結合として表している．証明は sketch が多く解読が難しい．[20] もとても難しいが基本的な定理がたくさん書いてあります．[23] が Howe conjecture の証明で, [20] の結果を用いています．ここでいう, Howe conjecture とは

"modulo conjugation でコンパクトな G の subset Ω を固定したとき Ω に support をもつ G 上の invariant distribution に $\mathcal{H}(G,K)$ を制限してできる空間は有限次元である．(K は任意のコンパクト開部分群)"

というものです．[23] では Howe conjecture から何がわかるかが書かれています．

・supercuspidal 関係

[24] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, The Admissible Dual of GL(N) via Compact-Open Subgroups, Ann. of Math. Studies **129**, Princeton Univ. Press, 1993.

local Langlands conjecture との関係で $\mathrm{GL}_n(F)$ の 既約 supercuspidal 表現は長い間調べられてきたが, この本 ([24]) で一応の決着をみました．ここにこの分野のこれが書かれる前の 10 年の成果が集まっており、Introduction を読むとこの分野の歴史がわかります．最近は, 他の代数群の supercuspidal 表現に関心が移ってきているのでそれに関係する文献を挙げておきます．

[25] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *The admissible dual of SL(n), I*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **26** (1993), 261–280.

[26] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *The admissible dual of SL(n), II*, Proc. London. Math. Soc. **68** (1994), 317–379.

この 2 つの論文は [24] の延長線上にあります．

[27] A. Moy, *Representations of U(2,1) over a p-adic field*, J. reine und angew. Math. **372** (1986), 178–208.

[28] A. Moy, *Representations of GSP(4) over a p-adic field, I*, Comp. Math. **66** (1988), 237–284.

[29] A. Moy, *Representations of GSP(4) over a p-adic field, II*, Comp. Math. **66** (1988), 285–328.

[27]-[29] は ad hoc な計算をたくさんしてあり読みづらい．この方針ではこれから先へは進めないなと思わせてくれます.

[30] A. Moy and G. Prasad, *Unrefied minimal K-types for p-adic groups*, Inv. Math. **116** (1994), 393–408.

Bruhat-Tits theory を用いて paraholic subgroup の filtration を新しく導入し K-type を分類しようというもの．unrefined と言っているようにまだ先は長いようです.

[31] L.E. Morris, *Tamely ramified supercuspidal representations of classical groups I: Filtrations*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **24** (1991), 705–738.

[32] L.E. Morris, *Tamely ramified supercuspidal representations of classical groups II: Representations*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 233–274.

[33] L.E. Morris, *Fundamental G-strata for p-adic classical groups*, Duke Math. J. **64** (1991), 501–553.

[34] L.E. Morris, *The admissible dual via restriction to open compact subgroups*, Contemp. Math. **145**, 145–154, A.M.S., Providence, 1993.

[35] L.E. Morris, *Tamely ramified intertwining algebras*, Inv. Math. **114** (1993), 233–274.

Morris 氏の一連の論文は lattice chain の構造を involution 付きで詳しく見てやって supercuspidal 表現の構成に用いようというもの．これも背後には当然 Bruhat-Tits theory があります.

・local Langlands conj の関係

もうすぐ証明されそうなところまで来ました．すごくおおざっぱにいうと non-Archimedean local field F に対して $GL_n(F)$ の既約 admissible 表現と F の絶対 Weil-Deligne 群の n 次元表現が 1:1 に対応ししかもその対応が local factor を保存する, という予想です.

[36] J. Ritter (editor), Representation theory and number theory in connection with the local Langlands conjecture, Contemporary Mathematics, **86**. AMS,1989.

Conference の報告集ですが, Local Langlands 関係の話がたくさん載っています．もう少し古くなりましたが．

[37] P.C. Kutzko and A. Moy, *On the local Langlands conjecture in prime dimension*, Ann. of Math. **121** (1985), 495–517.

[38] A. Moy, *Local constants and the tame Langlands correspondence*, Amer. J. Math. **108** (1986), 863–930.

[37] は $\mathrm{GL}_n(F)$ で n が素数のとき, [38] は $chF = p$ が n と互いに素なときを扱っています．どちらも local factor を保つ対応の存在は言えるが uniqueness (ε-factor の pair を保つ) は言えていません．

[39] G. Henniart, *Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ϵ de paires*, Invent. Math. **113** (1993), 339–350.

この論文で Langlands 対応が $\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(m)$ の ε-factor を用いて特徴付けられました．

[40] G. Henniart, La conjecture de Langlands locale numérique pour $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. **21** (1988), 497–544.

この論文では対応の存在が一般の n に対して証明された．但し, local factor の保存等については言えていません．

[41] G. Henniart, On the local Langlands conjecture for $\mathrm{GL}(n)$: the cyclic case. Ann. of Math. **123** (1986), 145–203.

これは, 対応する Weil 群の表現が cyclic extension の 1 次表現に対応するときに local Langlands conjecture を示しています． global な trace formula が使われています．

[42] G. Laumon, M. Rapoport and U. Stuhler,*$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math. **113** (1993), 217–338.

F の剰余標数が $p > 0$ 時はこの論文で解けてしまいました．

[43] M. Harris, *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld upper half spaces; elaboration of Carayol's program*, Invent. Math. **129** (1997), 75–119.

[44] M. Harris *The local Langlands conjecture for GL(n) over a p-adic field, $n < p$*, preprint.

標数 0 の場合にも the etale cohomology of the rigid-analytic coverings of the p-adic upper half space (Drinfeld 氏が構成した) を用いて ε-factor の pair が tame の場合にまで証明されました．(tame とは $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ で m, n とも p と互いに素ということ)

[45] J. Arthur and L. Clozel, Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula, Annals of Math. Studies **120**, Princeton Univ. Press, 1989.

[46] G. Henniart and R. Herb, *Automorphic induction for* $\mathrm{GL}(n)$ *(over local non-Archimedean fields)*, Duke Math. J. **78** (1995), 131–192.

local Langlands conjecture に関係して base change lift と automorphic induction に関するものをここで挙げておきました．Langlands functoriality から見れば, base change lift([45]) は, Weil 群の表現の制限 (restriction) の, automorphic induction ([46]) は Weil 群の表現の誘導 (induction) の adjoint functor になっている（はずである）．証明は共に trace formula が使われている．

[47] P. Deligne, D. Kazhdan and M.-F. Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, in *Representations of reductive groups over a local field*, 33–117, Hermann, Paris, 1984

F 上の n 次の division algebra の乗法群と $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現の間の指標の値による対応 (Jacquet-Langlands correspondence) が書かれています．証明は trace formula の simple version を使います．(実際には, simple algebra の乗法群に対して示されている．）　この対応も Langlands functoriality から当然あるべきものですが, $(-1)^{n-1}$ だけずれています.

[48] H. Reimann, *Representations of tamely ramified p-adic division and matrix algebras*, J. No. Th. 38 (1991), 58–105.

[38] で使われている tamely ramified のときの F 上の n 次の division algebra の乗法群と $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現の間の具体的な構成による対応 (Howe's bijection) を Langlands functoriality に合う形に修正しています．tame のときの構成はこれが一番すっきりとしています.

・ 岩堀 Hecke 環

[49] D. Barbasch and A. Moy, *Whittaker models with an Iwahori-fixed vector*, Representation Theory and Analysis on Homogeneous Spaces (New

Brunswick NJ 1993), Contemporary Math. **177**, AMS, Providence, 1994, 101–105.

[50] A. Borel, *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*, Inv. Math. **35** (1976), 233–259.

[51] W. Casselman, *The unramified principal series of p-adic groups, I: the spherical function*, Comp. Math. vol. **40** (1980), 387–406.

[52] W. Casselman and J. Shalika, *The unramified principal series of p-adic groups, II: the Whittaker function*, Comp. Math. vol **41** (1980), 207–231.

[53] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Inv. Math. **87** (1987), 153–215.

[54] N. Iwahori and H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25** (1965), 5–48.

[54] が岩堀 Hecke 環の構造を決定した論文．また, [50] では G の岩堀 Hecke 環 の有限次元表現から G の表現を構成している．例えば, special 表現や Steinberg 表現が Tits building のコホモロジー上の G-module structure として実現されている．[51] では, G の表現が Iwahori fixed を持つのは, M の unramified character からの parabolic induction の 部分表現になるときであり, そのときに限ることを示している．[53] は, 一般の代数群で Iwahori fixed をもつ表現に対して Langlands philosophy (Deligne-Langlands conjecture とこの場合呼ばれる) を示したもの．

・主系列表現 (principal series)

これは, 詳しくないので列挙するだけします．

[55] D. Keys, *On the decomposition of reducible principal series representations of p-adic Chevalley groups*, Pac. J. Math. **101**(1982), 351–388.

[56] D. Keys, *Principal series representations of special unitary groups over local fields*, Comp. Math. **51** (1984), 115–130.

[57] S.S. Kudla and S. Rallis, *Degenerate principal series and invariant distributions*, Israel J. Math. **69** (1990), 25–45.

[58] S.S. Kudla and S. Rallis, *Ramified degenerate principal series representations for Sp(n)*, Israel J. Math. **78** (1992), 209–256.

・ character の計算

[59] F. Murnaghan, *Characters of supercuspidal representations of SL(n)*, Pac. J. Math. **170**, (1995), 217–235.

[60] F. Murnaghan, *Local character expansions and Shalika germs for GL(n)*, Math. Ann. **304**(1996), 423–455.

[61] F. Murnaghan, *Characters of supercuspidal representations of classical groups*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **29**(1996), 49–105.

supercuspidal 表現の character を 単位元の近傍で Harish-Chandra の local expansion formula の係数を決定することにより計算している．但し, この公式は原点の近傍でしか成り立ちません.

[62] H. Hijikata, H. Saito, and M. Yamauchi, *Representations of quaternion algebras over local fields and trace formula of Hecke operators*, J. Number Theory **43** (1993), 123–167.

[63] T. Takahashi, *Characters of cuspidal unramified series for central simple algebras of prime degree*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 873–888.

[64] T. Takahashi, *Character formula for representations of local quaternion algebras (Wildly ramified case)*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 151–197.

こちらは, elliptic regular element 上で character を計算しています.

[65] P. Kutzko, *Character formulas for supercuspidal representations of* GL_l*, l a prime*, Amer. J. Math. **109** (1987), 201–222.

GL_l の supercuspidal は compact mod center subgroup の有限次元表現から誘導されるのですが, これは character の計算が 誘導されるもとの表現の character の計算に帰着されることを示しています.

・その他

[66] J. N. Bernstein, *P-invariant distributions on GL(n) and the classification of unitary representations of GL(n)*, Lecture Notes in Math. **1041** (1983), 50–102.

GL(n) の一番下の行が $(0\ 0\ \ldots\ 0\ 1)$ である部分群 P に対して G の 既約ユニタリー表現を P に制限しても既約であることを示している.

[67] J. N. Bernstein, Le “centre” de Bernstein, in *Representations of reductive groups over a local field*, 1–32, Hermann, Paris, 1984.

Bernstein center について定義した論文. Bernstein center は, real のときの universal enveloping algebra の center にあたるもので p 進体上の代数群の表現論の記述はこれを使うことによってすっきりしました. しかし, Bernstein center 自体があまりよくわかりません.

[68] I. N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, *Trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups*, J. Analyse Math. **47** (1986), 180–192.

$f \in \mathcal{H}(G)$ に対して $R(G)$ 上の linear form $\pi \mapsto \mathrm{tr}\,\pi(f)$ ($R(G)$ は長さ有限の smooth G-module のなす Grothendieck 群) を考えて, $R(G)$ 上の linear form が この形に書けるための必要十分条件を与えています. [20] でも使われています.

[69] R. Howe, *Two conjectures about reductive p-adic groups*, Proc. Sympos. Pure Math., **26**, 373–380, AMS.

この中で Howe conjecture は述べられています. Howe conjecture の Lie 環版は定理として述べられていますが証明は（ここには）ありません.

[70] R. Howe and A. Moy, *Hecke algebra isomorphisms for GL(n) over a p-adic field*, J. Alg. **131**, (1990), 388–424.

これは, [24] の基礎にもなっていますし, 他の代数群で supercuspidal を構成するさいの基本的な考え方となっています.

[71] N. Jacobson, Structure of Rings, AMS Colloqium Publ. **37**, (Revised edition) 1964.

[72] C. Mœglin, M.-F. Vignéras, and J.-L. Waldspurger, Correspondence de Howe sur un corp p-adique, Lecture Notes in Math. **1291**, Springer-Verlag, 1987.

Howe の duality conjecture について書かれた本. 本なので丁寧に基本的なところから書いてあります. Howe duality conjecture の証明は

[73] J.-L. Waldspurger,*Demonstration d'une conjecture de dualite de Howe dans le cas p-adique,* $p \neq 2$, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on

the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989), 267–324, Weizmann, Jerusalem, 1990.

に載っています.

[74] H. Saito, *On Tunnell's formula for characters of* GL(2), Composite. Math. **85** (1993), 99–108.

[75] J.B. Tunnell, *Local epsilon-factors and characters of GL(2)*, Amer. J. Math. **105** (1983), 1277–1307.

$\mathrm{GL}_2(F)$ の表現を anisotropic torus $K^\times$ (K は F の 2 次拡大) に制限して, その torus の 各 character の重複度を K への base change lift の ε-factor を用いて表すという面白い公式. [75] で予想と $p \neq 2$ 以外の証明. [74] で簡明な証明 ($p = 2$ を含む) が与えられている.

[76] M. Tadic, *Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-archimedean case)*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **19** (1986), 335–382.

$\mathrm{GL}_n(F)$ のユニタリー表現を分類したもの.

[77] M. Tadic, *Representations of p-adic symplectic groups*, Comp. Math. **90** (1994), 123–181.

[78] M. Tadic, *Structure arising from induction and Jacquet modules of representations of classical p-adic groups*, J. of Algebra **177** (1995), 1–33.

この 2 つは, Bernstein-Zelevinsky theory を他の代数群へ拡張しようというもの.

索 引