ま　え　が　き

この講義録は 1999 年 1 月に神戸大学理学部で講義したものに加筆訂正したものである．

L. Gross [G 1965] が Abstract Wiener space という論文を書いてからいつの間にか 30 年余の歳月が経った． その間に Malliavin Calculus, White Noise Analysis と呼ばれるような無限次元ガウス測度の研究は大きく発展し，現在も多くの研究者によって精力的に研究されている． 無限次元ガウス測度の構造の中で，これらの研究を通して鍵になる性質は Cameron-Martin 空間の準不変性とエルゴード性である．

古典ウィーナー空間における Cameron-Martin 空間の準不変性は文字どおり R. Cameron and W.T. Martin [CM 1944] によって初めて証明された． また無限次元ガウス測度の Cameron-Martin 空間によるエルゴード性は Y. Umemura (山崎泰郎) [U 1965] によって初めて証明された．

この講義録の目的は古典ウィーナー空間における上記 Cameron-Martin 空間の準不変性とエルゴード性を確率フーリエ級数の観点から，準不変性はよく知られている角谷の二分定理，エルゴード性はコルモゴロフの 0-1 法則の反映として簡明に証明することである．

この講義録で取り扱っているのは古典ウィーナー空間である． しかしガウス測度が確率フーリエ級数の分布として与えられることに注意すれば，ここでの証明はそのまま抽象ウィーナー空間に適用出来る． ちなみに可分バナッハ空間上の任意のガウス測度は抽象ウィーナー測度と考えられる [S 1969]． さらに一般の局所凸位相線型空間上の（ラドン）ガウス測度についても Cameron-Martin 空間が定義され，その台が確率フーリエ級数に展開される [S 1980] ことから準不変性とエルゴード性が全く同様に証明される [S 1993].

この講義録は二章からなる． 第一章は無限直積確率測度の存在（これは独立確率変数列の存在をも意味する）を証明し，次に角谷の二分定理，さらにはコルモゴロフの 0-1 法則が無限直積確率測度の $\mathbf{R}_0^\infty$ に関するエルゴード性を意味することを示す． この中で，エル

ゴード性の定義に出てくる可測集合の不変性の定義が対称差零にまで緩められること，また可測性を完備可測性にまで拡張することを検討する.

第二章ではまず連続関数の空間でガウス確率フーリエ級数が一様概収束することを伊藤清 [I 1960] にしたがって証明し，ウィーナー測度をガウス無限直積確率測度の線形像測度として捕らえることによってブラウン運動の性質を簡明に証明する．さらに Cameron-Martin 空間を準不変部分空間として特徴づけ，最後にエルゴード性を証明する.

ウィーナー空間における Cameron-Martin 空間の準不変性とエルゴード性の証明を手っ取り早く知りたいと思う人は，ガウス無限直積確率測度の ℓ_2-準不変性（例 4.7）と $\mathbf{R}_0^\infty$-エルゴード性（定理 5.5）を，取りあえず証明なしで認めた上で第二章から読み始めることをお勧めする.

最後にこの講義録の出版をお勧め下され，原稿を精読して多くの有意義な注意を下さった神戸大学理学部福山克司助教授に心からの感謝の念をささげたい.

1999 年 1 月　福岡にて　佐藤 坦

目　　　　次

第１章 無限直積確率測度

第２章 ウィーナー空間

第１章 無限直積確率測度

この章では「測度」を「外測度」として定義し，つぎに集合体上の「有限加法的測度」の「可算加法的測度」への拡張について論じる．その応用として「無限直積確率測度」の存在を証明し，その絶対連続性に関する角谷の定理を紹介する．さらに数列空間上の無限直積確率測度のエルゴード性について述べる．

§1.　抽象空間上の測度

この節を通して Ω は空でない集合とする．

(1.1)　**定義**　μ が Ω 上の **測度** であるとは，任意の $A \subset \Omega$ に対して $0 \leq \mu(A) \leq +\infty$ を対応させる関数で，次の条件をみたすものとする．

(1.1.1)　$\mu(\emptyset) = 0.$

(1.1.2) **単調性**　$A \subset B \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$

(1.1.3) **劣加法性**　$A_n \subset \Omega,\ n \in \mathbf{N} \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(1.2)　上に定義した「測度」は一般には「外測度」と呼ばれるものである．これに対して「測度空間」と言うときには，これまで使ってきた可算加法的測度を意味するものとする．

(1.3)　**定義**　$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ が **測度空間** であるとは，$\mathcal{B}$ は Ω 上の σ-集合体，μ は $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の可算加法的測度，すなわち μ は $[0, +\infty]$ の値をとる $\mathcal{B}$ 上の関数で，$\mu(\emptyset) = 0$ かつ

(1.3.1) **可算加法性**　$A_n \in \mathcal{B},\ A_m \cap A_n = \emptyset\ (m \neq n)\ m,\ n \in \mathbf{N} \ \Longrightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

の成り立つものとする．

(1.4) **例** $(\Omega, \mathcal{B}, \mu_0)$ を測度空間とする．このとき

$$\mu(A) \equiv \inf\{\, \mu_0(B) \ : \ A \subset B,\ B \in \mathcal{B}\,\}, \quad A \subset \Omega$$

と定義すると μ は (定義 1.1 の意味での) 測度である．

それではこの逆はどうであろうか？ 任意の測度は測度空間から導かれるのであろうか？

(1.5) **定義** μ を Ω 上の測度とするとき $E \subset \Omega$ が **μ-可測** であるとは，任意の $A \subset \Omega$ について

(1.5.1) $$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C)$$

の成り立つこと．Ω の μ-可測部分集合全体を $\mathcal{B}_\mu$ と書くことにする．

(1.6) **注意** (1.5.1) 式で $\mu(A) \le \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C)$ は劣加法性より明らかであるから，$E \subset \Omega$ が μ-可測であるための必要十分条件は，任意の $A \subset \Omega$ について

(1.6.1) $$\mu(A) \ge \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C)$$

となること．

(1.7) **補題** μ を Ω 上の測度とする．

(1.7.1) $\mu(N) = 0,\ N \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad N \in \mathcal{B}_\mu$

(1.7.2) $E \in \mathcal{B}_\mu \quad \Longrightarrow \quad E^C \in \mathcal{B}_\mu$

(1.7.3) $E_k \in \mathcal{B}_\mu,\ 1 \le k \le n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{B}_\mu$

証明 (1.7.1) と (1.7.2) は定義より明らか．(1.7.3) を証明する．$n = 2$ の場合を示せばよい．

$E_1,\ E_2 \in \mathcal{B}_\mu$ とせよ．任意の $A \subset \Omega$ について

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^C)$$

$$= \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^C \cap E_2) + \mu(A \cap E_1^C \cap E_2^C)$$

$$\geq \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)^C)$$

となり $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{B}_\mu$. □

(1.8) **補題** μ を Ω 上の測度とする. いま $E_n \in \mathcal{B}_\mu,\ E_m \cap E_n = \emptyset\ (m \neq n)\ m,\ n \in \mathbf{N}$ とすると

(1.8.1) 任意の $A \subset \Omega$ に対して $\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n)$

(1.8.2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}_\mu$

証明 $F_\infty \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ F_n \equiv \bigcup_{k=1}^{n} E_k,\ n \in \mathbf{N}$ と定義する. $A \subset \Omega$ を任意に選ぶ.

まず $F_2 \cap E_1 = E_1,\ F_2 \cap E_1^C = E_2$ に注意すると

$$\mu(A \cap F_2) = \mu(A \cap F_2 \cap E_1) + \mu(A \cap F_2 \cap E_1^C) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2).$$

これより任意の $n \in \mathbf{N}$ について $\mu(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A \cap E_k)$ となり, また補題 1.7 より $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{B}_\mu$ となることに注意すると

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap F_n) + \mu(A \cap F_n^C) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A \cap E_k) + \mu(A \cap F_n^C)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \mu(A \cap E_k) + \mu(A \cap F_\infty^C).$$

ここで $n \to \infty$ として

$$\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap E_k) + \mu(A \cap F_\infty^C),$$

劣加法性より

$$\geq \mu\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) + \mu(A \cap F_\infty^C) = \mu(A \cap F_\infty) + \mu(A \cap F_\infty^C).$$

ゆえに $F_\infty \in \mathcal{B}_\mu$. 他方上式で A を $A \cap F_\infty$ でおきかえると

$$\mu(A \cap F_\infty) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap E_k) \geq \mu(A \cap F_\infty)$$

となり (1.8.1) も証明された. □

次の命題は上の二つの補題の系である.

(1.9) **命題** μ を Ω 上の測度とする. いま $E_n \in \mathcal{B}_\mu$ かつ $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$ とすると, 任意の $A \subset \Omega$ について

$$\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \mu(A \cap E_n).$$

(1.10) **定理** μ を Ω 上の測度とすると $(\Omega, \mathcal{B}_\mu, \mu)$ は完備測度空間である.

証明 まず $\mathcal{B}_\mu$ が Ω 上の σ-集合体であることを示そう. (1.7.1) と (1.7.2) から $\Omega \in \mathcal{B}_\mu$ は示される. また $E \in \mathcal{B}_\mu \Rightarrow E^C \in \mathcal{B}_\mu$ は (1.7.2) そのものである.

$E_n \in \mathcal{B}_\mu,\ n \in \mathbf{N}$ とせよ. $F_1 \equiv E_1,\ F_n \equiv E_n \Big\backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k,\ n \geq 2$ と定義すると (1.7.2) と (1.7.3) から, 任意の $n \in \mathbf{N}$ について $F_n \in \mathcal{B}_\mu$. 他方定義より $F_m \cap F_n = \emptyset\ (m \neq n),\ m,\ n \in \mathbf{N}$ であるから補題 1.8 より $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{B}_\mu$.

次に (1.8.1) で $A \equiv \Omega$ とすると, μ の $\mathcal{B}_\mu$ への制限が可算加法性を持つことが示される. 完備性は (1.7.1) より明らか. □

§2.　有限加法的測度の可算加法的測度への拡張

(2.1)　**定義**　$\mathcal{A}$ を Ω 上の集合体, μ を $(\Omega, \mathcal{A})$ 上の有限加法的測度, すなわち $\mathcal{A}$ 上の $[0, +\infty]$-値関数で $\mu(\emptyset) = 0$ かつ

(2.1.1) **有限加法性** $E_k \in \mathcal{A},\ E_k \cap E_\ell = \emptyset\ (k \neq \ell)\ 1 \leq k, \ell \leq n \implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$

の成り立つものとする. このとき

(2.1.2)
$$\mu^*(A) \equiv \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \ :\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\ A_j \in \mathcal{A} \right\}$$

と定義する.

(2.2)　**補題**　μ^* は (定義 1.1 の意味で) Ω 上の測度である.

証明　(1.1.1) と (1.1.2) は明らか.

$A_n \subset \Omega,\ n \in \mathbf{N}$ とせよ. $\sum_n \mu^*(A_n) = +\infty$ であれば (2.1.3) は成り立つ. $\sum_n \mu^*(A_n) < +\infty$ とせよ. 任意の $\varepsilon > 0$ を固定すると, 各 $n \in \mathbf{N}$ について $A_{n,j} \in \mathcal{A},\ j \in \mathbf{N}$ で $A_n \subset \bigcup_j A_{n,j}$ かつ $\sum_j \mu(A_{n,j}) < \mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$ となるものが存在する. このとき $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n \bigcup_j A_{n,j}$ であるから

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \sum_j \mu(A_{n,j}) \leq \sum_n (\mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

ε は任意であったから (1.1.3) が示された. □

(2.3)　**補題**　$\sigma[\mathcal{A}]$ を $\mathcal{A}$ から生成された Ω 上の σ-集合体とすると $\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{B}_{\mu^*}$.

証明　$\mathcal{B}_{\mu^*}$ は σ-集合体であるから $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mu^*}$ を示せばよい. それには任意の $A \subset \Omega$ と任意の $E \in \mathcal{A}$ について (1.6.1) を示せばよい.

$\mu^*(A) = +\infty$ であれば (1.6.1) は明らか. $\mu^*(A) < +\infty$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ について $A_j \in \mathcal{A},\ j \in \mathbf{N}$ で $A \subset \bigcup_j A_j$ かつ $\sum_j \mu(A_j) < \mu^*(A) + \varepsilon$ となるものが存在する. 他方 $A \cap E \subset \bigcup_j (A_j \cap E),\ A \cap E^C \subset \bigcup_j (A_j \cap E^C)$ であり, また $\mathcal{A}$ が集合体であることから

$A_j \cap E,\ A_j \cap E^C \in \mathcal{A},\ j \in \mathbf{N}$ である．従って

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C) \leq \sum_j \mu(A_j \cap E) + \sum_j \mu(A_j \cap E^C) = \sum_j \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意であったから (1.6.1) が示された． $\square$

(2.4)　**命題**　任意の $E \in \mathcal{A}$ について $\mu^*(E) = \mu(E)$ であるための必要十分条件は μ が $\mathcal{A}$ 上可算加法的であること，すなわち

(2.4.1)　$E_n \in \mathcal{A},\ E_m \cap E_n = \emptyset\ (m \neq n)\ m,\ n \in \mathbf{N}$ かつ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ であれば $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

の成り立つこと．

証明　定理 1.10 より $(\Omega, \mathcal{B}_{\mu^*}, \mu^*)$ が完備測度空間となることと補題 2.3 より必要性は明らか．

十分性を示す． $E \in \mathcal{A}$ とすると定義 (2.1.2) より $\mu^*(E) \leq \mu(E)$． 他方 $\mu^*(E) = +\infty$ であれば $\mu(E) \leq \mu^*(E)$ は明らか． $\mu^*(E) < +\infty$ とせよ． 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A_j \in \mathcal{A},\ j \in \mathbf{N}$ で $E \subset \bigcup\limits_j A_j$ かつ $\sum\limits_j \mu(A_j) < \mu^*(E) + \varepsilon$ となるものが存在する．$E_1 \equiv E \cap A_1$, $E_n \equiv E \cap \left(A_n \Big\backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right),\ n \geq 2$ と定義すると $E_n \in \mathcal{A},\ E_n \subset A,\ E_m \cap E_n = \emptyset\ (m \neq n)\ m,$ $n \in \mathbf{N}$ かつ $\bigcup\limits_n E_n = E \in \mathcal{A}$ となる．(2.4.1) より

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意であったから $\mu(E) \leq \mu^*(E)$． $\square$

(2.5)　**定理**　μ を Ω 上の集合体 $\mathcal{A}$ 上に定義された有限加法的測度で，$\mathcal{A}$ 上可算加法的 (すなわち (2.4.1) をみたす) とする．このとき μ^* を (2.1.2) で定義すると

(2.5.1)　任意の $A \subset \Omega$ に対して $B \in \sigma[\mathcal{A}]$ で $A \subset B$ かつ $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ となるものが存在する．

(2.5.2)　完備測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}_{\mu^*}, \mu^*)$ は有限加法的測度空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ の拡張になっている．

(2.5.3)　μ が σ-有限, すなわち $\Omega_n \in \mathcal{A}$, $\mu(\Omega_n) < +\infty$ で $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ となるものが存在すれば, 測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}_{\mu^*}, \mu^*)$ は測度空間 $(\Omega, \sigma[\mathcal{A}], \mu^*)$ の完備化になっている.

(2.5.4)　μ が σ-有限であれば $(\Omega, \sigma[\mathcal{A}], \mu^*)$ は $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ の一意的拡張になっている.

証明　(2.5.1) の証明　$A \subset \Omega$ とする. $\mu^*(A) = +\infty$ であれば $B \equiv \Omega$ とすればよい. $\mu^*(A) < +\infty$ とせよ. 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_{n,j} \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbf{N}$ で $A \subset \bigcup_j A_{n,j}$ かつ $\sum_j \mu(A_{n,j}) \le \mu^*(A) + n^{-1}$ となるものが存在する. ここで $B \equiv \bigcap_n \bigcup_j A_{n,j} \in \sigma[\mathcal{A}]$ とすればよい.

(2.5.2) の証明　命題 2.4 による.

(2.5.3) の証明　$\Omega_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N}$ を $\mu(\Omega_n) < +\infty$ で $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ とする. $\Omega_m \cap \Omega_n = \emptyset$ $(m \neq n)$ としてよい.

任意の $A \in \mathcal{B}_{\mu^*}$ と任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して (2.5.1) より $B_n^0 \in \sigma[\mathcal{A}]$ で $A \cap \Omega_n \subset B_n^0$ かつ $\mu^*(B_n^0) = \mu^*(A \cap \Omega_n)$ $(\le \mu(\Omega_n) < +\infty)$ となるものが存在する. $B_n \equiv B_n^0 \cap \Omega_n$ と定義すると $A \cap \Omega_n \subset B_n$ かつ $\mu^*(B_n) < +\infty$ であるから $\mu^*(B_n \setminus (A \cap \Omega_n)) = \mu^*(B_n) - \mu^*(A \cap \Omega_n) = 0$ ここで $B \equiv \bigcup_n B_n \in \sigma[\mathcal{A}]$ と定義すると $A \subset B$ かつ $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

同様に A^C に対しても $D \in \sigma[\mathcal{A}]$ で $A^C \subset D$ かつ $\mu^*(D \setminus A^C) = 0$ となるものが存在する. このとき D^C, $B \in \sigma[\mathcal{A}]$, $D^C \subset A \subset B$ であり, かつ $\mu^*(B \setminus D^C) = \mu^*(B \setminus A) + \mu^*(A \setminus D^C) = 0$ となるから A は $\sigma[\mathcal{A}]$ の μ^*-完備化に含まれる.

(2.5.4) の証明　μ が有限測度であれば $\sigma[\mathcal{A}]$ での値は $\mathcal{A}$ での値によって一意的に定まる. σ-有限の場合には (2.5.3) の証明のように $\mu^*(\Omega_n) < +\infty$ となる各 Ω_n に制限して一意性を証明すればよい.　□

(2.6)　**例 (Lebesgue measure)**　ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ の中の半開区間 $J = \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k]$ の finite disjoint union 全体を $\mathbf{A}_d$ とおくと $\mathbf{A}_d$ は $\mathbf{R}^d$ 上の集合体である. いま

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k]\right) \equiv \prod_{k=1}^{d} |b_k - a_k|$$

と定義すると $\mathbf{A}_d$ 上の有限加法的測度 μ が定まる. これを出発点にして (2.1.2) によって

$\mathbf{R}^d$ 上の測度 μ^* を定義して得られる σ-有限測度空間 $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}_{\mu^*}, \mu^*)$ が Lebesgue 測度空間である.

§3.　無限直積確率測度の存在

まず無限直積確率測度の存在を証明しよう．ここではさしあたって必要な可算直積の場合について証明するが，一般には任意濃度の直積確率測度の存在が証明されている．

(3.1)　Ω を空でない集合，$\mathcal{A}$ を Ω 上の集合体，μ を $\mathcal{A}$ 上の有限加法的確率測度，すなわち $\mu(\Omega)=1$ なるものとする．命題 2.4 (定理 2.5 も参照) によると，μ が $\mathcal{A}$ から生成される Ω 上の σ-集合体 $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の (可算加法的) 確率測度に一意的に拡張されるための必要十分条件は，μ が $\mathcal{A}$ 上で可算加法的，すなわち (2.4.1) が成り立つことであった．この条件をもう少し詳しく検討しておこう．

(3.2) **補題**　Ω を空でない集合，$\mathcal{A}$ を Ω 上の集合体，μ を $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度で $\mu(\Omega)=1$ なるものとする．このとき次の三つの命題は同値である．

(3.2.1)　$F_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbf{N}$ で $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ かつ $\bigcap_n F_n = \emptyset$ であれば $\inf_n \mu(F_n)=0.$

(3.2.2)　$F_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbf{N}$ で $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ かつ $\inf_n \mu(F_n)>0$ であれば $\bigcap_n F_n \neq \emptyset.$

(2.4.1)　$E_n \in \mathcal{A},\ E_m \cap E_n = \emptyset\ (m \neq n),\ m,\ n \in \mathbf{N}$ で $\bigcup_n E_n \in \mathcal{A}$ であれば $\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n).$

証明　(3.2.2) は (3.2.1) の対偶であるから，(3.2.1) と (2.4.1) の同値性を証明すればよい．

(2.4.1) $\Rightarrow$ (3.2.1) の証明　$F_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbf{N}$ で $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ かつ $\bigcap_n F_n = \emptyset$ とせよ．このとき $E_n \equiv F_n \setminus F_{n+1},\ n \in \mathbf{N}$ と定義すると $E_n \in \mathcal{A},\ E_m \cap E_n = \emptyset\ (m \neq n),\ m,$ $n \in \mathbf{N}$ で $\bigcup_n E_n \in \mathcal{A}$ となる．また $\sum_n \mu(E_n) = \mu(F_1) \leq \mu(\Omega) = 1.$ 故に

$$\lim_n \mu(F_n) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) = 0.$$

(3.2.1) $\Rightarrow$ (2.4.1) の証明　$E_n \in \mathcal{A},\ E_m \cap E_n = \emptyset\ (m \neq n),\ m,\ n \in \mathbf{N}$ で $\bigcup_n E_n \in \mathcal{A}$ と

せよ. $F_n \equiv \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ と定義すると $F_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbf{N}$ で $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ かつ $\bigcap_n F_n = \emptyset$ となる. ここで $n \to \infty$ とすると (3.2.1) より

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \mu(E_k) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right) = \mu(F_n) \to 0$$

となるから $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. □

(3.3) **定理**　(無限直積確率測度の存在)

$(\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathbf{P}_n), \quad n \in \mathbf{N}$: 確率空間列

$\Omega \equiv \prod_n \Omega_n$

$X_n : \omega = (\omega_n) \in \Omega \to \omega_n \in \Omega_n, \quad n \in \mathbf{N}$: (座標写像)

$\mathcal{B} \equiv \sigma[\, X_n : n \in \mathbf{N}\,]$

このとき $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度 $\mathbf{P}$ で, 任意の $A_k \in \mathcal{B}_k,\ 1 \le k \le n$ について

$$\mathbf{P}(X_k \in A_k,\ 1 \le k \le n) = \mathbf{P}_1(A_1)\mathbf{P}_2(A_2)\ldots\mathbf{P}_n(A_n)$$

となるものが一意に存在する.

このとき $\mathbf{P}$ を $\prod_n \mathbf{P}_n$ と書くことにする.

証明　(第一段階) $n \in \mathbf{N}$ について $\mathcal{B}^n \equiv \sigma[\, X_k : 1 \le k \le n],\ \mathbf{B}_n \equiv \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$ と定義する. このとき $(\Omega, \mathcal{B}^n)$ 上の確率測度 $\mathbf{P}^n$ で任意の $A_k \in \mathcal{B}_k,\ 1 \le k \le n$ に対して

$$\mathbf{P}^n(X_k \in A_k,\ 1 \le k \le n) = \mathbf{P}_1(A_1)\mathbf{P}_2(A_2)\ldots\mathbf{P}_n(A_n)$$

となるものが一意に存在する (有限直積測度の存在) . このとき

$$\mathcal{B}^n = \Big\{\{\omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in B\} : B \in \mathbf{B}_n\Big\}$$

$$\mathbf{P}^n((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in B) = (\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \cdots \times \mathbf{P}_n)(B), \quad B \in \mathbf{B}_n$$

となっていることに注意しておこう.

(第二段階)　$\Gamma \in \mathcal{B}^n,\ \Gamma \in \mathcal{B}^m\ (n < m)$ とせよ. このとき $B^n \in \mathbf{B}_n,\ B^m \in \mathbf{B}_m$ が存在

して

$$\Gamma = \{\, \omega \in \Omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B^n \,\}$$
$$= \{\, \omega \in \Omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots, X_m(\omega)) \in B^m \,\}$$

これより $B^m = B^n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots \times \Omega_m$ が示される. ゆえに

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^n(\Gamma) &= (\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \cdots \times \mathbf{P}_n)(B^n) \\ &= (\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \cdots \times \mathbf{P}_n \times \cdots \times \mathbf{P}_m)(B^n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots \times \Omega_m) \\ &= (\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \cdots \times \mathbf{P}_n \times \cdots \times \mathbf{P}_m)(B^m) \\ &= \mathbf{P}^m(\Gamma).\end{aligned}$$

したがって $\mathcal{A} \equiv \bigcup_n \mathcal{B}^n$ とすると

$$\mathbf{P}(\Gamma) = \mathbf{P}^n(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}^n$$

により $(\Omega, \mathcal{A})$ 上の有限加法的確率測度が定義される.

(第三段階)　$(\Omega, \mathcal{A})$ 上の有限加法的確率測度 $\mathbf{P}$ が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上に一意に拡張されることを示す. $\mathcal{B} = \sigma[\,\mathcal{A}\,]$ であることに注意すると $\Gamma_0 = \Omega$ として補題 3.2 を適用して

$$\Gamma_k \in \mathcal{A}, \quad k \in \mathbf{N}$$
$$\Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \Gamma_3 \supset \cdots$$
$$\alpha \equiv \inf_k \mathbf{P}(\Gamma_k) > 0$$

であるときに $\bigcap_k \Gamma_k \neq \emptyset$ を示せばよい.

(第四段階)　$\Gamma_k \in \mathcal{B}^{n(k)},\ k \in \mathbf{N},\ 0 = n(0) < n(1) < n(2) < n(3) < \cdots$ としてよい. さらに

$$\Gamma_k = \{\, \omega \in \Omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{n(k)}(\omega)) \in B^{n(k)} \,\}, \quad B^{n(k)} \in \mathbf{B}_{n(k)},\ k \in \mathbf{N}$$

とするとき $n(k-1) \leq j < n(k)$ なる j について

$$B^j = B^{n(k-1)} \times \Omega_{n(k-1)+1} \times \Omega_{n(k-1)+2} \times \cdots \times \Omega_j \in \mathbf{B}_j$$
$$\Gamma'_j = \{\, \omega \in \Omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_j(\omega)) \in B^j \,\}$$

と取り直すことによって, 任意の $k \in \mathbf{N}$ について, ある $B^k \in \mathbf{B}_k$ が存在して

$$\Gamma_k = \{\, \omega \in \Omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_k(\omega)) \in B^k \,\} \in \mathcal{B}^k$$

と仮定して一般性を失わない. このとき $k,\ \ell \in \mathbf{N}$ $(k < \ell)$ とすると $\Gamma_k \supset \Gamma_\ell$ より $B^k \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \cdots \times \Omega_\ell \supset B^\ell$ となることに注意しておこう.

(第五段階)　さて任意の $k \geq 2$ について

$$\begin{aligned}
\varphi_k^1(\omega_1) &\equiv \int_{\Omega_2 \times \Omega_3 \times \cdots \times \Omega_k} \mathbf{I}_{B^k}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k)\, d(\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_3 \times \cdots \times \mathbf{P}_k)(\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k) \\
&= \int_{\Omega_2} d\mathbf{P}_2(\omega_2) \int_{\Omega_3} d\mathbf{P}_3(\omega_3) \ldots \int_{\Omega_k} \mathbf{I}_{B^k}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k)\, d\mathbf{P}_k(\omega_k)
\end{aligned}$$

と定義するとフビニの定理により

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\Gamma_k) &= \mathbf{P}^k(\Gamma_k) \\
&= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_k} \mathbf{I}_{B^k}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)\, d(\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \cdots \times \mathbf{P}_k)(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \\
&= \int_{\Omega_1} \varphi_k^1(\omega_1)\, d\mathbf{P}_1(\omega_1)
\end{aligned}$$

となる. このとき $\{\varphi_k^1\}$ は $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, \mathbf{P}_1)$ 上の確率変数列であり,

$$0 \leq \varphi_k^1(\omega_1) \leq 1, \quad \omega_1 \in \Omega_1,\ k \geq 2$$

であるから有界収束定理により

$$\begin{aligned}
\alpha \leq \limsup_k \mathbf{P}(\Gamma_k) &= \limsup_k \int_{\Omega_1} \varphi_k^1(\omega_1)\, d\mathbf{P}_1(\omega_1) \\
&\leq \int_{\Omega_1} \limsup_k \varphi_k^1(\omega_1)\, d\mathbf{P}_1(\omega_1).
\end{aligned}$$

したがって $\limsup_k \varphi_k^1(\bar{\omega}_1) > 0$ となるような $\bar{\omega}_1 \in \Omega_1$ が存在する. いま $\bar{\omega}_1 \notin B^1$ とすると任意の $(\omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots) \in \Omega_2 \times \Omega_3 \times \Omega_4 \times \cdots$ について $(\bar{\omega}_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots) \notin \Gamma_1$, したがって任意の $k \geq 2$ について $(\bar{\omega}_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots) \notin \Gamma_k$ となるから $\varphi_k^1(\bar{\omega}_1) = 0$ となり矛盾. ゆえに $\bar{\omega}_1 \in B^1$.

同様に $k \geq 3$ について

$$\begin{aligned}\varphi_k^2(\bar{\omega}_1, \omega_2) &\equiv \int_{\Omega_3 \times \Omega_4 \times \cdots \times \Omega_k} \mathbf{I}_{B^k}(\bar{\omega}_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k)\, d(\mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_4 \times \cdots \times \mathbf{P}_k)(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_k) \\ &= \int_{\Omega_3} d\mathbf{P}_3(\omega_3) \int_{\Omega_4} d\mathbf{P}_4(\omega_4) \ldots \int_{\Omega_k} \mathbf{I}_{B^k}(\bar{\omega}_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k)\, d\mathbf{P}_k(\omega_k)\end{aligned}$$

と定義すると

$$\begin{aligned}0 &< \limsup_k \varphi_k^1(\bar{\omega}_1) \\ &= \limsup_k \int_{\Omega_2} \varphi_k^2(\bar{\omega}_1, \omega_2)\ d\mathbf{P}_2(\omega_2) \\ &\leq \int_{\Omega_2} \limsup_k \varphi_k^2(\bar{\omega}_1, \omega_2)\ d\mathbf{P}_2(\omega_2)\end{aligned}$$

であるから $\limsup\limits_k \varphi_k^2(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) > 0$ となる $\bar{\omega}_2 \in \Omega_2$ が存在する. $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \in B^2$ である.

このようにして順次

$$\varphi_k^\ell(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_{\ell-1}, \omega_\ell), \quad k > \ell$$

を定義し, $\limsup\limits_k \varphi_k^\ell(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_{\ell-1}, \bar{\omega}_\ell) > 0$ によって $\bar{\omega}_\ell \in \Omega_\ell$ を定めると $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_\ell) \in \Omega$ が得られる. このとき任意の $\ell \in \mathbf{N}$ について

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_{\ell-1}, \bar{\omega}_\ell) \in B^\ell$$

したがって $\bar{\omega} \in \Gamma_\ell$ である. ゆえに $\bar{\omega} \in \bigcap\limits_\ell \Gamma_\ell$, すなわち $\bigcap\limits_\ell \Gamma_\ell \neq \emptyset$ が示された. □

上の定理では各 n について $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathbf{P}_n)$ が確率空間であること以外には何も仮定していないことに注意しておこう.

定理 3.1 から直ちに導かれる系として独立確率変数列の存在証明が得られる.

(3.4) **定理** $\{\mu_n : n \in \mathbf{N}\}$ を $\mathbf{R}$ 上の任意の確率測度列とするとき, それぞれ μ_n を分布とする独立確率変数列 $\{X_n\}$ が存在する.

証明 定理 3.3 で $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathbf{P}_n) = (\mathbf{R}, \mathscr{B}_1, \mu_n)$, $n \in \mathbf{N}$, $\{X_n\}$ を座標関数列とすると $\{X_n\}$ は確率空間 $(\mathbf{R}^\infty, \mathbf{B}^\infty, \prod\limits_n \mu_n)$ 上の独立確率変数列で X_n の分布は μ_n となる. □

§4.　角谷の二分定理

局所同値な二つの無限直積確率測度は

同値 (互いに絶対連続) か特異かのいずれかが成り立つ

という角谷によって証明された二分定理と，同値であるための必要十分条件は大変重要な結果である．つぎにこれを紹介しょう．

(4.1) **定理** [Kak 1948]

$(\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathbf{P}_n),\ (\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathbf{Q}_n), \quad n \in \mathbf{N}$：確率空間列

$\Omega \equiv \prod_n \Omega_n$

$X_n : \omega = (\omega_n) \in \Omega \to \omega_n \in \Omega_n, \quad n \in \mathbf{N}$：座標関数

$\mathcal{B} \equiv \sigma[\, X_n : n \in \mathbf{N} \,]$

$\mathbf{P} \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_n, \quad \mathbf{Q} \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q}_n$ ：　$(\Omega, \mathcal{B})$ 上の無限直積確率測度

このとき任意の $n \in \mathbf{N}$ について　$\mathbf{P}_n \sim \mathbf{Q}_n$ (互いに絶対連続) と仮定すると，つぎの命題が成立する．

(4.1.1)　$\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ または $\mathbf{Q} \perp \mathbf{P}$ のいずれかが成り立つ．

(4.1.2)　$\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ となるための必要十分条件は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}_n}{d\mathbf{P}_n}(X_n)} \right] \right\} < +\infty$$

となること．ただし $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\,\cdot\,]$ は $\mathbf{P}$ に関する平均をあらわす．

定理 4.1 の証明の前にいくつかの概念と記号を定義しておこう．

$$\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \quad \rightleftharpoons \quad \mathbf{P}(N) = 0 \Rightarrow \mathbf{Q}(N) = 0.$$

$$\mathbf{Q} \sim \mathbf{P} \quad \rightleftharpoons \quad \mathbf{P}(N) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}(N) = 0.$$

$\mathbf{Q} \perp \mathbf{P} \quad \rightleftharpoons \quad \mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N^C) = 0$ となるような $N \in \mathcal{B}$ が存在する．

(4.2) **命題**　$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ を $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の確率測度, Θ を $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の確率測度で $\mathbf{P}\ll\Theta$, $\mathbf{Q}\ll\Theta$ となるものとする (例えば $\Theta=\frac{1}{2}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})$ とすればよい)．このとき

$$\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})\equiv\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta}(\omega)}\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta}(\omega)}\,d\Theta(\omega)$$

と定義する. このとき次の命題が成立する.

(4.2.1)　$\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ の値は Θ の選び方によらない.

(4.2.2)　$0\le\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})\le 1$.

(4.2.3)　$\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})=1\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{P}=\mathbf{Q}$.

(4.2.4)　$\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})=0\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{P}\perp\mathbf{Q}$.

(4.2.5)　$\mathbf{P}\sim\mathbf{Q}\quad\Rightarrow\quad\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})=\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega)}\,d\mathbf{P}(\omega)$.

証明　(4.2.1)　Θ_1, Θ_2 を $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の確率測度で $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}\ll\Theta_1$, Θ_2 とせよ. このとき $\Theta_3=\frac{1}{2}(\Theta_1+\Theta_2)$ と定義すると Θ_1, $\Theta_2\ll\Theta_3$ となる. これより

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})&=\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta_1}(\omega)}\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta_1}(\omega)}\,d\Theta_1(\omega)\\&=\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta_1}(\omega)}\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta_1}(\omega)}\,\frac{d\Theta_1}{d\Theta_3}(\omega)\,d\Theta_3(\omega)\\&=\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta_1}(\omega)\,\frac{d\Theta_1}{d\Theta_3}(\omega)}\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta_1}(\omega)\frac{d\Theta_1}{d\Theta_3}(\omega)}\,d\Theta_3(\omega)\\&=\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta_3}(\omega)}\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta_3}(\omega)}\,d\Theta_3(\omega)\\&=\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta_2}(\omega)}\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta_2}(\omega)}\,d\Theta_2(\omega).\end{aligned}$$

(4.2.2)　シュバルツ の不等式より明らか.

(4.2.3)　(2) で $\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})=1$ となるのはある実数 α, β ($\alpha\neq 0$ または $\beta\neq 0$) が存在して

$$\alpha\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta}(\omega)}=\beta\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta}(\omega)}$$

となる場合に限る. ところが $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ ともに確率測度であるから $\alpha=\beta$ でなくてはならない. これより $\mathbf{P}=\mathbf{Q}$.

逆に $\mathbf{P}=\mathbf{Q}$ であれば $\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})=1$ は明らか.

(4.2.4)　$\mathbf{P}\perp\mathbf{Q}$ であれば $\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})=0$ となることは明らか.

逆に $\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q})=0$ と仮定する. これより

$$\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta}(\omega)}\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta}(\omega)}=0,\quad \text{a.e. } (\Theta)$$

したがって $A=\left\{\omega\in\Omega:\sqrt{\dfrac{d\mathbf{P}}{d\Theta}(\omega)}>0\right\}$ と定義すると

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A)&=\int_A d\mathbf{P}(\omega)=\int_A\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta}(\omega)\,d\Theta(\omega)\\
&=\int_A\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta}(\omega)\,d\Theta(\omega)+\int_{A^C}\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta}(\omega)\,d\Theta(\omega)\\
&=\int_\Omega\frac{d\mathbf{P}}{d\Theta}(\omega)\,d\Theta(\omega)=\mathbf{P}(\Omega)=1.\\
\mathbf{Q}(A)&=\int_A\frac{d\mathbf{Q}}{d\Theta}(\omega)\,d\Theta(\omega)=0.
\end{aligned}$$

(4.2.5) は $\mathbf{P}=\Theta$ とすればよい. □

角谷の二分定理の証明.　定理 4.1 の仮定がみたされているとせよ. このとき

$$\prod_{n=1}^{\infty}\rho(\mathbf{P}_n,\mathbf{Q}_n)>0\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{P}\sim\mathbf{Q}$$
$$\prod_{n=1}^{\infty}\rho(\mathbf{P}_n,\mathbf{Q}_n)=0\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{P}\perp\mathbf{Q}$$

を示す.

まず $(\Omega,\mathcal{B}^n)$ 上の確率測度 $\mathbf{P}^n$ を定理 3.3 の証明に用いたものとする。即ち、

$$\mathbf{P}^n((X_1,\dots,X_n)\in A)=(\mathbf{P}_1\times\cdots\times\mathbf{P}_n)(A)\qquad(A\in\mathcal{B}_1\times\cdots\times\mathcal{B}_n)$$

が成り立つものと定める。

(第一段階)　$\prod_{n=1}^{\infty}\rho(\mathbf{P}_n,\mathbf{Q}_n)>0$ と仮定せよ. $\varphi_n(\omega)\equiv\dfrac{d\mathbf{Q}_n}{d\mathbf{P}_n}(X_n(\omega))$, $n\in\mathbf{N}$ と定義すると $\{\varphi_n\}$ は確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},\mathbf{P})$ 上の独立確率変数列.

他方, 任意の $n\in\mathbf{N}$ について $\mathbf{P}^n\sim\mathbf{Q}^n$ となるので $\Phi_n(\omega)\equiv\dfrac{d\mathbf{Q}^n}{d\mathbf{P}^n}(\omega)$, $n\in\mathbf{N}$ とする. このとき

$$\Phi_n=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k,\quad\rho(\mathbf{P}^n,\mathbf{Q}^n)=\prod_{k=1}^{n}\rho(\mathbf{P}_k,\mathbf{Q}_k),\quad n\in\mathbf{N}$$

が得られる.

(第二段階)　$\psi_n \equiv \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi_k}$　$n \in \mathbf{N}$ と定義する. $\{\psi_n\}$ は $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$ の点列であり, そのノルムを $\|\cdot\|$ とすると任意の $m,\, n \in \mathbf{N}$ $(n \neq m)$ について

$$
\begin{aligned}
\|\psi_n\| &= 1, \quad n \in \mathbf{N} \\
\|\psi_n - \psi_m\|^2 &= \int_\Omega \{\psi_n(\omega)^2 - 2\psi_n(\omega)\psi_m(\omega) + \psi_m(\omega)^2\}\, d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \left\{ \prod_{k=1}^{n} \varphi_k - 2\sqrt{\prod_{k=1}^{n} \varphi_k \prod_{j=1}^{m} \varphi_j} + \prod_{j=1}^{m} \varphi_j \right\} d\mathbf{P} \\
&= 2\left\{ 1 - \int_\Omega \prod_{k=n+1}^{m} \sqrt{\varphi_k}\, d\mathbf{P} \right\} \\
&= 2\left\{ 1 - \prod_{k=n+1}^{m} \rho(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) \right\}.
\end{aligned}
$$

さて仮定より $\prod_{n=1}^{\infty} \rho(\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_n) > 0$ であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $N \leq n < m$ であれば

$$
1 \geq \prod_{k=n+1}^{m} \rho(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) \geq 1 - \varepsilon
$$

とできる. したがって $\{\psi_n\}$ は $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$ の Cauchy 列であることが分かる. その極限を $\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbf{P})$ とすると

$$
\|\psi\|^2 = \int_\Omega \psi(\omega)^2\, d\mathbf{P}(\omega) = 1.
$$

(第三段階)　$\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ であり $\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) = \psi(\omega)^2$ であることを示す.

任意の $A \in \sigma[\, X_k : 1 \leq k \leq n\,]$, $n \in \mathbf{N}$ について $m\ (> n) \in \mathbf{N}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}(A) &= \int_A d\mathbf{Q}^n(\omega) = \int_A \Phi_n(\omega)\, d\mathbf{P}^n(\omega) \\
&= \int_A \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(\omega)\, d\mathbf{P}^n(\omega) = \int_A \prod_{k=1}^{m} \varphi_k(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_A \psi_m(\omega)^2\, d\mathbf{P}(\omega) \to \int_A \psi(\omega)^2\, d\mathbf{P}(\omega), \quad (m \to \infty).
\end{aligned}
$$

$\mathcal{B} = \sigma[\, X_k : k \in \mathbf{N}\,]$ に注意すると任意の $A \in \mathcal{B}$ について

$$
\mathbf{Q}(A) = \int_A \psi(\omega)^2\, d\mathbf{P}(\omega)
$$

となることは容易に示され, $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ が証明された.

同様に $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$ も示されるから $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$.

またこのとき

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \int_\Omega \psi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) \\ &= \lim_n \int_\Omega \psi_n(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = \lim_n \rho(\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n) \\ &= \lim_n \prod_{k=1}^n \rho(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k)\end{aligned}$$

より

$$\rho(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \prod_{k=1}^\infty \rho(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k)$$

が成立する.

(第四段階) $\prod_{k=1}^\infty \rho(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) = 0$ と仮定せよ.

このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\rho(\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n) = \prod_{k=1}^n \rho(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) < \varepsilon$$

となる.

$$A = \{\, \omega \in \Omega \ :\ \Phi_n(\omega) \geq 1 \,\}$$

と定義する. このとき $A \in \sigma[\, X_k \ :\ 1 \leq k \leq n \,]$ であり, また

$$\mathbf{P}(A) = \int_A d\mathbf{P}(\omega) \leq \int_A \sqrt{\Phi_n(\omega)}\, d\mathbf{P}^n(\omega) \leq \rho(\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n) < \varepsilon.$$

他方

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(A^C) &= \int_{A^C} d\mathbf{Q}(\omega) = \int_{A^C} \Phi_n(\omega)\, d\mathbf{P}^n(\omega) \\ &\leq \int_{A^C} \sqrt{\Phi_n(\omega)}\, d\mathbf{P}^n(\omega) \leq \rho(\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n) < \varepsilon.\end{aligned}$$

ゆえに $\mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$ である. □

(4.7) **例**　すべての $n \in \mathbf{N}$ について $\Omega_n = \mathbf{R}$, $\mathcal{B}_n = \mathscr{B}_1$, $\mathbf{P}_n = N(0,1)$, すなわち

$$g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big), \quad x \in \mathbf{R}$$

とするとき

$$\mathbf{P}_n(A) = \int_A g(x)\,dx, \quad A \in \mathscr{B}_1$$

とする. つぎに任意の $\{a_n\} \in \mathbf{R}^\infty$ として

$$\mathbf{Q}_n(A) \equiv \mathbf{P}_n(A - a_n) = \int_A g(x + a_n)\ dx, \quad A \in \mathscr{B}_1$$

と定義する. さて $\mathbf{P} \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_n$, $\mathbf{Q} \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q}_n$ とするとき

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n\} \in \ell_2$$

$$\mathbf{P} \perp \mathbf{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n\} \notin \ell_2$$

である.

証明　仮定より任意の $n \in \mathbf{N}$ について $\mathbf{P}_n \sim \mathbf{Q}_n$ かつ

$$\frac{d\mathbf{Q}_n}{d\mathbf{P}_n}(x) = \frac{g(x + a_n)}{g(x)} = \exp\Big(-a_n x - \frac{(a_n)^2}{2}\Big), \quad x \in \mathbf{R}$$

となる. したがって (4.2.5) より

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{d\mathbf{Q}_n}{d\mathbf{P}_n}(x)}\ d\mathbf{P}_n(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{g(x + a_n)}{g(x)}}\, g(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{a_n x}{2} - \frac{(a_n)^2}{4}\Big) g(x)\,dx = \exp\Big(-\frac{(a_n)^2}{8}\Big)
\end{aligned}$$

したがって

$$\rho(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \prod_{n=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{1}{8}(a_n)^2\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2\Big)$$

ゆえに角谷の二分定理 (定理 4.1) により

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 < +\infty$$

$$\mathbf{P} \perp \mathbf{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 = +\infty$$

証明終り. $\square$

§5　独立確率変数列のエルゴード性

この節を通して

$\mathbf{R}^\infty$: 実数列全体の空間

$\mathscr{B}_\infty \equiv \sigma[\, A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbf{R}^{(n,\infty)} : A_k \in \mathscr{B}_1,\ 0 \le k \le n,\ n \in \mathbf{N}_0\,]$

また $\mathbf{X} = \{X_k\}_{k=0}^\infty$ は可測空間 $(\Omega, \mathcal{B})$ 上に定義された実可測関数列で,

$$\sigma[\,\mathbf{X}\,] \equiv \sigma[\,X_k : k \ge 0\,], \quad と \quad \tau_\infty[\,\mathbf{X}\,] \equiv \bigcap_n \sigma[\,X_k : k > n\,]$$

とする. $\tau_\infty[\,\mathbf{X}\,]$ を $\mathbf{X}$ の **末尾集合体**, $\tau_\infty[\,\mathbf{X}\,]$-可測関数を **末尾関数**, $\tau_\infty[\,\mathbf{X}\,]$-可測集合を **末尾集合** と呼ぶ. たとえば $Y = \limsup_n X_n$ は末尾関数である.

(5.1) 補題　任意の $\sigma[\,\mathbf{X}\,]$-可測関数 $Y = Y(\omega)$ に対して, ある $(\mathbf{R}^\infty, \mathscr{B}_\infty)$ 上の可測関数

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \boldsymbol{x} = \{x_k\} \in \mathbf{R}^\infty$$

が存在して

$$Y = Y(\omega) = f(X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega), \ldots), \quad \omega \in \Omega$$

と表される.

証明　任意の $\sigma[\,\mathbf{X}\,]$-可測関数はある $\sigma[\,\mathbf{X}\,]$-可測単関数列の各点収束極限としてあらわされるから, 任意の $A \in \sigma[\,\mathbf{X}\,]$ についてその定義関数 I_A について補題が証明されればよい. 実際

$$\mathcal{B}_0 \equiv \{\, A \in \sigma[\,\mathbf{X}\,] : I_A について補題が成立\,\}$$

と定義すると $\mathcal{B}_0$ は Ω 上の σ-集合体となり, また任意の $n \in \mathbf{N}$ について

$$\sigma[\,X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n\,] \subset \mathcal{B}_0$$

が分かる. ゆえに $\mathcal{B}_0=\sigma[\,\mathbf{X}\,]$. □

(5.2) 補題　可測関数 Y が $(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}_\infty)$ 上の可測関数

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$$

によって

$$Y=f(X_0,X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots)$$

と表されるとき次の命題は同値.

(5.2.1)　Y は 末尾関数.

(5.2.2)　任意の $n\geq 0$ について $(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}_\infty)$ 上の可測関数 $f_n(\boldsymbol{x})=f_n(x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$ で $Y=f_n(X_{n+1},X_{n+2},\ldots)$ となるものが存在する.

(5.2.3)　任意の $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\in\mathbf{R}$ について

$$\begin{aligned}&f(X_0,X_1,X_2,\ldots,X_n,X_{n+1},X_{n+2},\ldots)\\&\qquad=f(X_0+a_0,X_1+a_1,X_2+a_2,\ldots,X_n+a_n,X_{n+1},X_{n+2},\ldots).\end{aligned}$$

証明　(5.2.1)⇒(5.2.2)　定義より明らか.

(5.2.2)⇒(5.2.3)　任意の $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\in\mathbf{R}$ について

$$\begin{aligned}&f(X_0,X_1,X_2,\ldots,X_n,X_{n+1},X_{n+2},\ldots)\\&\qquad=f_n(X_{n+1},X_{n+2},\ldots)\\&\qquad=f(X_0+a_0,X_1+a_1,X_2+a_2,\ldots,X_n+a_n,X_{n+1},X_{n+2},\ldots).\end{aligned}$$

(5.2.3)⇒(5.2.2)　任意の $n\geq 0$ と $\omega\in\Omega$ について $a_k=-X_k(\omega),\ 0\leq k\leq n$ と選ぶことによって

$$\begin{aligned}&f(X_0,X_1,X_2,\ldots,X_n,X_{n+1},X_{n+2},\ldots)\\&\qquad=f(X_0+a_0,X_1+a_1,X_2+a_2,\ldots,X_n+a_n,X_{n+1},X_{n+2},\ldots)\end{aligned}$$

$$= f(0,0,0,\ldots,0,X_{n+1},X_{n+2},\ldots)$$

$$= f_n(X_{n+1},X_{n+2},\ldots)$$

が $f_n(x_{n+1},x_{n+2},\ldots) \equiv f_n(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n+1\text{ 個}},x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$ と定義すれば成り立つ.

(5.2.2)⇒(5.2.1)　定義より明らか. □

さて可測空間 $(E,\mathcal{E})$ が **可測線形空間** であるとは E が 線形空間 であって, 線形演算

$$(x,y) \in (E\times E, \mathcal{E}\times\mathcal{E}) \to x+y \in (E,\mathcal{E}),$$

$$(a,x) \in (\mathbf{R}\times E, \mathscr{B}_1\times\mathcal{E}) \to ax \in (E,\mathcal{E})$$

が可測であることとする. $(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}_\infty)$ は可測線形空間である.

さて $(E,\mathcal{E})$ を可測線形空間, $E_0 \subset E$ を E の線形部分空間とする. このとき $\Gamma\in\mathcal{E}$ が **E_0-不変** であるとは, 任意の $a\in E_0$ について $\Gamma + a = \Gamma$ が成り立つこととする. また, $f\colon E\to\mathbf{R}$ が E_0-不変であるとは任意の $a\in E_0$ と任意の $x\in E$ に対して $f(x+a)=f(x)$ が成り立つこととする。

$$\mathbf{R}_0^\infty \equiv \Big\{ \{x_k\}\in\mathbf{R}^\infty \ : \ \#\{k\geq 0 : x_k\neq 0\}<\infty \Big\}$$

と定義する.

(5.3) 命題　$\mathbf{X}=\{X_k\}$ を $\mathbf{R}^\infty$ 上の座標関数列とする. このとき $(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}_\infty)$ 上の可測関数 $f=f(\boldsymbol{x})$ についてつぎの命題は同値.

(5.3.1)　f は末尾関数.

(5.3.2)　f は $\mathbf{R}_0^\infty$-不変.

証明　補題 5.2 による. □

μ を可測線形空間 $(E,\mathcal{E})$ 上の確率測度, $E_0\subset E$ とするとき μ が **E_0-エルゴード的** であるとは $\Gamma\in\mathcal{E}$ について

$$\mu(\Gamma \triangle (\Gamma+a)) = 0 \ \text{ for } \ \forall a\in E_0 \quad\Longrightarrow\quad \mu(\Gamma)=0 \ \text{ or } \ \mu(\Gamma)=1$$

となることを言う. 他方 $a \in E$ に対して

$$\mu_a(A) \risingdotseq \mu(A-a), \quad A \in \mathcal{E}$$

と定義するとき $\mu_a \sim \mu$ (互いに絶対連続) であれば a を μ **の準不変平行移動** と言い, すべての $a \in E_0$ が μ の準不変平行移動であるとき μ **は** E_0**-準不変** と言う.

(5.4) 定理　P を $(\mathbf{R}^\infty, \mathscr{B}_\infty)$ 上の確率測度, $(\mathscr{B}_\infty)_P$ を $\mathscr{B}_\infty$ の P による完備化とするとき, つぎの命題は同値.

(5.4.1)　P は $\mathbf{R}_0^\infty$-エルゴード的.

(5.4.2)　$\Gamma \in \mathscr{B}_\infty$ が $\mathbf{R}_0^\infty$-不変であれば $P(\Gamma) = 0$ または 1.

(5.4.3)　$\Gamma \in (\mathscr{B}_\infty)_P$ が $\mathbf{R}_0^\infty$-不変であれば $P(\Gamma) = 0$ または 1.

さらに P が $\mathbf{R}_0^\infty$-準不変であるときには次の命題も同値になる。

(5.4.4)　$\Gamma \in (\mathscr{B}_\infty)_P$ について, すべての $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_0^\infty$ に関して $P(\Gamma \triangle (\Gamma + \boldsymbol{a})) = 0$ であれば $P(\Gamma) = 0$ または 1. すなわち P は $(\mathbf{R}^\infty, (\mathscr{B}_\infty)_P)$ 上の確率測度として $\mathbf{R}_0^\infty$-エルゴード的である.

証明　(5.4.1)⇒(5.4.2) は定義より明らか.

(5.4.2)⇒(5.4.3)　の証明. 岡崎悦明のアイデアに沿って証明する. いま $\Gamma \in (\mathscr{B}_\infty)_P$ について $\Gamma = \Gamma + \boldsymbol{a}$ がすべての $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_0^\infty$ について成り立ち, かつ $P(\Gamma) > 0$ とせよ. このとき $P(\Gamma) = 1$ が示されればよい.

$\mathbf{R}^\infty$ はポーランド空間, したがって P はラドン測度であるから, コンパクト部分集合 $K \subset \Gamma$ で $P(K) > 0$ となるものが存在する.

そこで任意の $n \geq 0$ について

$$K_n \risingdotseq \Big\{ \boldsymbol{x} = \{x_k\} \in \mathbf{R}^\infty \ : \ |x_k| \leq n \ (0 \leq k \leq n), \ x_\ell = 0 \ (\ell > n) \Big\}$$

と定義すると K_n は $\mathbf{R}^\infty$ のコンパクト部分集合であり, かつ $\mathbf{R}_0^\infty = \bigcup_n K_n$ となる. $\mathbf{R}^\infty$ は

位相線形空間 であるから $K+K_n$ はコンパクト, したがって

$$\Gamma_1 \equiv \bigcup_n (K+K_n) = K+\mathbf{R}_0^\infty \in \mathscr{B}_\infty.$$

他方

$$\Gamma_1+\mathbf{R}_0^\infty \subset K+\mathbf{R}_0^\infty+\mathbf{R}_0^\infty = K+\mathbf{R}_0^\infty = \Gamma_1$$

であるから Γ_1 は $\mathbf{R}_0^\infty$-不変.

$P(\Gamma_1) \geq P(K) > 0$ であるから (2) より $P(\Gamma_1)=1$. また

$$\Gamma_1 = K+\mathbf{R}_0^\infty \subset \Gamma+\mathbf{R}_0^\infty = \Gamma$$

であるから $P(\Gamma)=1$.

(5.4.3)⇒(5.4.1) の証明.

$$\mathbf{R}_n \equiv \Big\{ \boldsymbol{x}=\{x_k\} \in \mathbf{R}^\infty \ : \ x_k = 0 \ (k>n) \Big\}, \quad n \geq 0$$

と定義すると $\mathbf{R}_0^\infty = \bigcup_n \mathbf{R}_n$. また $\mathbf{R}_n$ は自然な対応でユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ と同一視出来るから $n+1$ 次元ルベーグ測度 $\boldsymbol{m}_n$ が定義されているとしてよい.

さて $\Gamma \in \mathscr{B}_\infty$ について $P(\Gamma \triangle (\Gamma+\boldsymbol{a}))=0$ がすべての $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_0^\infty$ に関して成り立つとせよ. このとき $\Gamma^* \in (\mathscr{B}_\infty)_P$ で $\mathbf{R}_0^\infty$-不変, かつ $P(\Gamma \triangle \Gamma^*)=0$ となるものが選べれば証明は終了する.

任意の $n \geq 0$ を固定する. このとき任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_n$ について $\mathbf{I}_{\Gamma+\boldsymbol{a}}(x) = \mathbf{I}_\Gamma(x-\boldsymbol{a})$ であり, また $\mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ は $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})$-可測かつ $\Gamma \in \mathscr{B}_\infty$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^\infty} dP(\boldsymbol{x}) \int_{\mathbf{R}_n} |\mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) - \mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x})| \, d\boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{a}) \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}_n} d\boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{a}) \int_{\mathbf{R}^\infty} |\mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) - \mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x})| \, dP(\boldsymbol{x}) \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}_n} P(\Gamma \triangle (\Gamma+\boldsymbol{a})) \, d\boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{a}) = 0
\end{aligned}$$

が得られる. ここで

$$\Omega_n = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^\infty : \int_{\mathbf{R}_n} |\mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) - \mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x})| \, d\boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{a}) = 0 \right\}$$

と定義するとフビニの定理により $\Omega_n \in \mathscr{B}_\infty$ かつ $P(\Omega_n) = 1$. $\Omega_\infty = \bigcap_n \Omega_n$ と定義する. $\Omega_\infty \in \mathscr{B}_\infty$ かつ $P(\Omega_\infty) = 1$ である.

このとき任意の $\boldsymbol{x} \in \Omega_\infty$ と任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\Lambda_n(\boldsymbol{x}) = \{\, \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_n : \mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x}) \,\}$$

と定義すると $\boldsymbol{m}_n(\mathbf{R}_n \setminus \Lambda_n(\boldsymbol{x})) = 0$. また任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_n$ について $\boldsymbol{m}_n$ の平行移動不変性から

$$\boldsymbol{m}_n(\mathbf{R}_n \setminus (\Lambda_n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a})) = \boldsymbol{m}_n(\mathbf{R}_n \setminus \Lambda_n(\boldsymbol{x})) = 0$$

となるので任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}' \in \Omega_\infty,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}' \in \mathbf{R}_n$ について

$$(\Lambda_n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a})) \cap (\Lambda(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{a}') \neq \emptyset$$

となる.

さて $\Gamma^* \Leftarrow\!\!\!= (\Omega_\infty \cap \Gamma) + \mathbf{R}_0^\infty$ と定義する. 明らかに Γ^* は $\mathbf{R}_0^\infty$-不変集合 であり, また $\Gamma \cap \Omega_\infty \subset \Gamma^*$ であるから, $\Gamma^* \setminus (\Gamma \cap \Omega_\infty) \subset \Omega_\infty^C$ を示せば $\Gamma^* \in (\mathscr{B}_\infty)_P$ と

$$\begin{aligned} P(\Gamma \bigtriangleup \Gamma^*) &\leq P(\Gamma \bigtriangleup (\Gamma \cap \Omega_\infty)) + P((\Gamma \cap \Omega_\infty) \bigtriangleup \Gamma^*) \\ &= P(\Gamma \setminus (\Gamma \cap \Omega_\infty)) + P(\Gamma^* \setminus (\Gamma \cap \Omega_\infty)) \\ &\leq P(\Omega_\infty^C) + P(\Omega_\infty^C) = 0 \end{aligned}$$

が示される.

それには $\Gamma^* \setminus \Gamma \subset \Omega_\infty^C$ を示せばよい. いま $\boldsymbol{x} \in (\Gamma^* \setminus \Gamma) \cap \Omega_\infty$ が存在したとせよ. $\boldsymbol{x} \in \Gamma^* = (\Gamma \cap \Omega_\infty) + \mathbf{R}_0^\infty$ であるから, ある $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_n$ について $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \in (\Gamma \cap \Omega_\infty)$. そこで $\boldsymbol{b} \in \Lambda_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cap (\Lambda_n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a})$ を選ぶと, 定義より

$$\mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \mathbf{I}_\Gamma(\boldsymbol{x}) = 0$$

となり $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \in \Gamma$ に矛盾.

(5.4.1)⇒(5.4.4) の証明. $\Gamma \in (\mathscr{B}_\infty)_P$ について $P(\Gamma \bigtriangleup (\Gamma + \boldsymbol{a})) = 0$ がすべての $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_0^\infty$

に関して成り立つとする．このとき $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \in \mathscr{B}_\infty$ で $\Gamma_1 \subset \Gamma \subset \Gamma_2$ かつ $P(\Gamma_2 \setminus \Gamma_1) = 0$ となるものが存在する．P の $\mathbf{R}_0^\infty$-準不変性より任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_0^\infty$ について

$$P((\Gamma_2 + \boldsymbol{a}) \setminus (\Gamma_1 + \boldsymbol{a})) = P((\Gamma_2 \setminus \Gamma_1) + \boldsymbol{a}) = 0$$

であるから

$$P(\Gamma_1 \triangle (\Gamma_1 + \boldsymbol{a})) \leq P(\Gamma \setminus \Gamma_1) + P(\Gamma \triangle (\Gamma + \boldsymbol{a})) + P((\Gamma \setminus \Gamma_1) + \boldsymbol{a}) = 0$$

ゆえに仮定 (5.4.1) より $P(\Gamma) = P(\Gamma_1) = 0$ または 1

(5.4.4)⇒(5.4.1) は定義より明らか． □

(5.5) 定理　$(\mathbf{R}^\infty, \mathscr{B}_\infty)$ 上の任意の無限直積測度 P は $\mathbf{R}_0^\infty$-エルゴード的である．

証明　定理 5.4 より任意の $\mathbf{R}_0^\infty$-不変集合 Γ について $P(\Gamma) = 0$ または 1 を示せばよい．

実際 $\Gamma + \mathbf{R}_0^\infty = \Gamma$ であるから命題 5.3 より Γ は座標関数列 $\{X_k\}$ に関して末尾集合である．他方 P は無限直積測度であるから $\{X_k\}$ は独立確率変数列，したがってコルモゴロフの 0-1 法則により $P(\Gamma) = 0$ または 1． □

第2章　ウィーナー空間

§6.　ウィーナー測度

区間 $[\,0,1\,]$ 上の実連続関数の空間

$$W \fallingdotseq \{\, w : [\,0,1\,] \to \mathbf{R}, 連続, w(0) = 0\,\}$$

上にノルム $\|w\| \fallingdotseq \sup_{t\in[\,0,1\,]} |w(t)|$ を定義すると $(W, \|w\|)$ は可分バナッハ空間, 従って距離 $d(v,w) \fallingdotseq \|v-w\|$ によってポーランド空間となる. W 上の連続線形汎関数全体, すなわち共役空間 W^* は $(0,1\,]$ 上の実測度全体 $\mathcal{M}(0,1\,]$ であり, その基本双線形汎関数は

$$\langle w, \xi \rangle = \int_{(0,1\,]} w(t)\, d\xi(t), \quad w \in W,\ \xi \in W^*$$

であたえられ, また W 上のボレル集合体 $\mathcal{B}(W)$ は $\sigma[\,\langle w,\xi\rangle : \xi \in W^*\,]$ と一致することが知られている.

さて標準正規分布 N(0,1) に従う独立同分布確率変数列 $\{G_k\}$ を**標準ガウス列**という. このとき R. E. A. C. Paley and N. Wiener [PalW 1934] によって次の命題が証明された.

(6.1) 定理　G=$\{G_k\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ 上の標準ガウス列とするとき

$$B_n(t) \fallingdotseq G_0 t + \sum_{k=1}^{2^n} G_k \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin \pi k t, \quad 0 \le t \le 1,$$

は $[\,0,1\,]$ で一様概収束する.

証明　伊藤清 [I 1960] にしたがって説明する. $1 \le m < n$ に対して

$$S_m^n(t) \fallingdotseq \sum_{k=m+1}^{n} G_k \frac{\sin \pi k t}{k} = \Im\left[\sum_{k=m+1}^{n} \frac{G_k}{k} e^{i\pi k t}\right]$$

と定義する (ただし $\Im[\,\cdot\,]$ は虚数部分, すなわち複素数 $z = x + iy$, $x,\ y \in \mathbf{R}$ に対して

$\Im[\,z\,] = y$ をあらわすものとする)．このとき任意の $t \in [\,0, 1\,]$ について

$$
\begin{aligned}
|S_m^n(t)|^2 &\leq \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{G_k}{k} e^{i\pi k t} \right|^2 \\
&= \sum_{m<k\leq n} (G_k)^2 \frac{1}{k^2} + \sum_{m<k\neq \ell \leq n} G_k G_\ell \frac{1}{\ell}\frac{1}{k} e^{i\pi(\ell-k)t} \\
&= \sum_{m<k\leq n} (G_k)^2 \frac{1}{k^2} + \sum_{p=1}^{n-m-1} \sum_{j=m+1}^{n-p} \frac{G_j G_{j+p}}{j(j+p)} (e^{i\pi p t} + e^{-i\pi p t}) \\
&\leq \sum_{m<k\leq n} (G_k)^2 \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{p=1}^{n-m-1} \left| \sum_{j=m+1}^{n-p} \frac{G_j G_{j+p}}{j(j+p)} \right|
\end{aligned}
$$

となる．最後の式は t に無関係なことに注意をしておく．したがってシュバルツの不等式と $\mathbf{E}[\,|G_k|^2\,] = 1,\, k \in \mathbf{N}$ から

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\sup_{t\in[\,0,1\,]} |S_m^n(t)| \Big]^2 &\leq \mathbf{E}\Big[\sup_{t\in[\,0,1\,]} |S_m^n(t)|^2 \Big] \\
&\leq \sum_{m<k\leq n} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{p=1}^{n-m-1} \mathbf{E}\left[\left| \sum_{j=m+1}^{n-p} \frac{G_j G_{j+p}}{j(j+p)} \right|^2 \right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

となる．

他方任意の $1 \leq p \leq n-m-1$ に対して

$$
\mathbf{E}\left[\left| \sum_{j=m+1}^{n-p} \frac{G_j G_{j+p}}{j(j+p)} \right|^2 \right] \leq \sum_{j=m+1}^{n-p} \frac{\mathbf{E}[(G_j G_{j+p})^2]}{(j(j+p))^2} + 2 \sum_{m<j<\ell\leq n-p} \frac{\mathbf{E}[\,G_j G_{j+p} G_\ell G_{\ell+p}\,]}{j(j+p)\ell(\ell+p)}
$$

となる．ところが $\{G_k\}$ の独立性から

$$
\mathbf{E}[(G_j G_{j+p})^2] = \mathbf{E}[(G_j)^2]\mathbf{E}[(G_{j+p})^2] = 1
$$

であり，また $p > 0$ であるから $j = \ell$ の場合を除いて

$$
\mathbf{E}[\,G_j G_{j+p} G_\ell G_{\ell+p}\,] = 0
$$

である．

以上のことから

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\sup_{t\in[\,0,1\,]} |S_m^n(t)| \Big]^2 &\leq \sum_{m<k\leq n} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{p=1}^{n-m-1} \left\{ \sum_{j=m+1}^{n-p} \frac{1}{(j(j+p))^2} \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right\} + 2(n-m) \left\{ (n-m) \frac{1}{m^4} \right\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

特に $m=2^k,\ n=2^{k+1}$ とすると

$$\mathbf{E}\Big[\sup_{t\in[\,0,1\,]}|S_{2^k}^{2^{k+1}}(t)|\Big]^2 \le \frac{1}{2^{k+1}}+2^{k+1}\Big\{2^k\frac{1}{2^{4k}}\Big\}^{1/2} \le \frac{3}{\sqrt{2}^k}$$

となり，これより

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{t\in[\,0,1\,]}|S_{2^k}^{2^{k+1}}(t)|\Big] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}\Big[\sup_{t\in[\,0,1\,]}|S_{2^k}^{2^{k+1}}(t)|\Big] \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{k/4}}<\infty$$

が示される．したがって

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|S_{2^k}^{2^{k+1}}\| = \sum_{k=0}^{\infty}\sup_{t\in[\,0,1\,]}|S_{2^k}^{2^{k+1}}(t)|<+\infty, \quad \text{a.e.}$$

となり，これは $B_n(t)=G_0t+(\sqrt{2}/\pi)\Big(G_1\sin\pi t+\sum_{k=0}^{n-1}S_{2^k}^{2^{k+1}}(t)\Big)$ が一様概収束することを意味する． □

その後 K. Ito and M. Nisio [IN 1968] によって次の定理の成り立つことが示された．

(6.2) 定理　ヒルベルト空間 $\mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ の任意の完全正規直交系 $\{\varphi_k\}$ に対して

$$\Phi_k(t)=\int_0^t\varphi_k(s)\,ds, \quad 0\le t\le 1,\ k\in\mathbf{N}_0$$

と定義すると

$$B(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}G_k\Phi_k(t), \quad 0\le t\le 1$$

は一様概収束する．

さて B_n は W-値確率変数列と考えられ，したがって定理 6.1 は，W-値確率変数 B が存在して

$$\mathbf{P}\Big(\lim_{n\to\infty}\|B_n-B\|=0\Big)=1$$

となることを意味している．

$\Omega_0\equiv\Big\{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}\|B_n-B\|=0\Big\}$ と定義すると，$\Omega_0\in\mathcal{B}$ で $\mathbf{P}(\Omega_0)=1$ かつ

$$B:\omega\in\Omega_0\to B(\,\cdot\,,\omega)\in W$$

は $(\Omega_0, \mathcal{B} \cap \mathbf{B})$ から $(W, \mathcal{B}(W))$ への可測写像となる。従って $\mathbf{P} \circ B^{-1}$ は $(W, \mathcal{B}(W))$ 上の確率測度となる。このとき

$$\mu \risingdotseq \mathbf{P} \circ B^{-1}$$

を **ウィーナー測度**, 確率空間 $(W, \mathcal{B}(W), \mu)$ を **ウィーナー 空間**という. また確率過程 ($t \in [0,1]$ を径数とする確率変数の系)

$$B(t) \risingdotseq \langle B, \delta_t \rangle, \quad 0 \leq t \leq 1$$

を **(標準) ブラウン運動**という. ただし δ_t は点 $t \in [0,1]$ 上に集積したディラック測度とする. 定義から明らかなように $B(t) = B(t, \omega)$ はほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について t の連続関数である.

§7. ブラウン運動

(7.1) 注意　この節を通して

$$\varphi_0(t) \equiv 1, \quad \varphi_k(t) \equiv \sqrt{2}\cos \pi k t,\ k \geq 1$$

と定義する．このとき $\{\, \varphi_k : k \in \mathbf{N}_0 \,\}$ は $\mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ の完全正規直交系であり，$\{G_k\}$ を標準ガウス列とすると

$$B(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n} G_k \int_0^t \varphi_k(u)\, du \quad ([\,0,1\,]\text{で一様概収束})$$

となること，また任意の $f_1,\ f_2 \in \mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_1(s)\varphi_k(s)\, ds \int_0^1 f_2(t)\varphi_k(t)\, dt = \int_0^1 f_1(t) f_2(t)\, dt$$

となることに注意しておく．さらに $f_1 = f_2 = f \in \mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ とおけば

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_0^1 f(s)\varphi_k(s)\, ds \Big)^2 = \int_0^1 (f_1(t))^2\ dt$$

が得られる．(Parseval の等式)

(7.2) 命題　任意の $s,\ t \in [\,0,1\,]$ について

$$\mathbf{E}[\, B(s)B(t)\,] = s \wedge t.$$

ただし $s \wedge t \equiv \min(s,t)$.

証明　任意の $s,\ t \in [\,0,1\,]$ を固定する．$\mathbf{E}[\, G_k G_\ell\,] = \delta_{k,\ell},\ k,\ \ell \in \mathbf{N}_0$ に注意すると，任意の $m,\ n \in \mathbf{N}_0$ $(m > n)$ について

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\, |B_m(t) - B_n(t)|^2\,] &= \mathbf{E}\Bigg[\Bigg| \sum_{2^n < k \leq 2^m} G_k \int_0^t \varphi_k(u)\, du \Bigg|^2 \Bigg] \\
&= \sum_{2^n < k \leq 2^m} \Big(\int_0^t \varphi_k(u)\, du \Big)^2 \\
&= \sum_{2^n < k \leq 2^m} \Big(\int_0^1 \mathbf{I}_{[0,t]}(u) \varphi_k(u)\, du \Big)^2 \\
&\to 0 \quad (m, n \to \infty).
\end{aligned}$$

(最後に Parseval の等式を用いた.) したがって $\{B_n(t)\}$ は $\mathbf{L}^2(\mathbf{P})$ で $B(t)$ に収束する. ゆえに $s,\ t \in [\,0,1\,]$ を固定すると

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[\,B(s)B(t)\,] &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\,B_n(s)B_n(t)\,] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^s \varphi_k(u)\,du \int_0^t \varphi_k(v)\,dv \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s \varphi_k(u)\,du \int_0^t \varphi_k(v)\,dv \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \mathbf{I}_{[\,0,s\,]}(u)\varphi_k(u)\,du \int_0^1 \mathbf{I}_{[\,0,t\,]}(v)\varphi_k(v)\,dv \\
&= \int_0^1 \mathbf{I}_{[\,0,s\,]}(u)\mathbf{I}_{[\,0,t\,]}(u)\,du \\
&= s \wedge t.
\end{aligned}
$$

証明終り. □

(7.3) 補題　任意の $0 \leq s < t \leq 1$ について, $B(t) - B(s)$ の分布は $N(0, t-s)$ である.

証明　命題 7.2 を使って特性関数を計算する. $s < t$ とすると任意の $u \in \mathbf{R}$ について

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\exp\{iu(B(t) - B(s))\Big] &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big[\exp\{iu(B_n(t) - B_n(s))\}\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\bigg[\exp\bigg(iu \sum_{k=0}^{2^n} G_k \int_s^t \varphi_k(u)\,du\bigg)\bigg] \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{2^n} \mathbf{E}\bigg[\exp\bigg(iuG_k \int_s^t \varphi_k(u)\,du\bigg)\bigg] \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{2^n} \exp\bigg(-\frac{u^2}{2}\bigg|\int_s^t \varphi_k(u)\,du\bigg|^2\bigg) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\bigg(-\frac{u^2}{2}\sum_{k=0}^{2^n}\bigg|\int_0^1 \mathbf{I}_{(s,t\,]}(u)\varphi_k(u)\,du\bigg|^2\bigg) \\
&= \exp\bigg(-\frac{u^2}{2}\int_0^1 \mathbf{I}_{(s,t\,]}(u)^2 du\bigg) \\
&= \exp\bigg(-\frac{u^2}{2}(t-s)\bigg)
\end{aligned}
$$

証明終り. □

(7.4) 命題　任意の $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_m < t_m \leq 1$ について

$$
B(t_1) - B(s_1), B(t_2) - B(s_2), \ldots, B(t_m) - B(s_m)
$$

は独立である.

証明　特性関数を計算して佐藤 [S 1994: 定理 12.4] を適用する． 任意の u_1, u_2, $\ldots$, $u_m \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(v) \equiv \sum_{j=1}^{m} u_j \mathbf{I}_{(s_j,t_j\,]}(v), \quad v \in [\,0,1\,]$$

と定義すると $\{G_k\}$ の独立性, $\{\,\varphi_k : k \in \mathbf{N}_0\,\}$ が $\mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ の完全正規直交系であること, それに補題 7.3 から

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Bigg[\exp\Bigg(i\sum_{j=1}^{m} u_j(B(t_j)-B(s_j))\Bigg)\Bigg] &= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\Bigg[\exp\Bigg(i\sum_{k=0}^{2^n} G_k \sum_{j=1}^{m} u_j \int_{s_j}^{t_j} \varphi_k(v)\,dv\Bigg)\Bigg] \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\Bigg[\exp\Bigg(i\sum_{k=0}^{2^n} G_k \int_0^1 f(v)\varphi_k(v)\,dv\Bigg)\Bigg] \\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{2^n}\mathbf{E}\Bigg[\exp\Bigg(iG_k\int_0^1 f(v)\varphi_k(v)\,dv\Bigg)\Bigg] \\
&= \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg|\int_0^1 f(v)\varphi_k(v)dv\Bigg|^2\Bigg) \\
&= \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\int_0^1 f(v)^2\,dv\Bigg) \\
&= \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(u_j)^2(t_j-s_j)\Bigg) \\
&= \prod_{j=1}^{m}\exp\Bigg(-\frac{1}{2}(u_j)^2(t_j-s_j)\Bigg) \\
&= \prod_{j=1}^{m}\mathbf{E}\Big[\exp\{iu_j(B(t_j)-B(s_j))\}\Big]
\end{aligned}$$

が得られ, 佐藤 [S 1994: 定理 12.4] より証明終り. □

(7.5) 命題　任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq 1$ と任意の m 次ボレル関数 $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big[f\Big(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_m)\Big)\Big] \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Bigg(-\frac{(x_1)^2}{2t_1}\Bigg)dx_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Bigg(-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\Bigg)dx_2\cdots \\
&\qquad\qquad \cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_m-t_{m-1})}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Bigg(-\frac{(x_m-x_{m-1})^2}{2(t_m-t_{m-1})}\Bigg)f(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_m.
\end{aligned}$$

ただし等号の意味は, 両辺の平均値のうちどちらかが意味を持てば他辺も意味を持って値

が等しいものとする.

証明　命題 7.4 によって平均値を計算し, 佐藤 [S 1994: 定理 8.3] に帰着させる. いま $t_0 \equiv 0$ として

$$Y_k \equiv B(t_k) - B(t_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

と定義すると, 補題 7.3, 命題 7.4 より各 Y_k の分布は $N(0, t_k - t_{k-1})$ であり, Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_m は独立. また

$$B(t_k) = \sum_{j=1}^{k} Y_j, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

である. ゆえに

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\, f(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_m))\,] \\
&\quad = \mathbf{E}[\, f(Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m)\,] \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^m} f(y_1, y_1 + y_2, \ldots, y_1 + y_2 + \cdots + y_m) \\
&\qquad\qquad \times \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \exp\left(-\frac{(y_k)^2}{2(t_k - t_{k-1})}\right) dy_1\, dy_2 \ldots dy_m
\end{aligned}$$

となり, 変数変換 $x_k = \sum_{j=1}^{k} y_j$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, とフビニの定理から求める結果が得られる. □

(7.6) 命題　任意の $\xi \in W^*$ についてウィーナー空間上の確率変数 $\langle w, \xi \rangle$ の分布は $N\left(0, \int_0^1 \xi(u,1]^2\, du\right)$ である.

証明　任意の $\xi \in W^* = \mathcal{M}(0,1\,]$ について

$$\begin{aligned}
\langle w, \xi \rangle &= \int_{(0,1\,]} w(t)\, d\xi(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} w\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \xi\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\,\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} w\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \left\{ \xi\left(\frac{k-1}{2^n}, 1\right] - \xi\left(\frac{k}{2^n}, 1\right] \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{2^n} w\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \xi\left(\frac{k-1}{2^n}, 1\right] - \sum_{k=1}^{2^n} w\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \xi\left(\frac{k}{2^n}, 1\right] \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} w\left(\frac{k}{2^n}\right) \xi\left(\frac{k}{2^n}, 1\right] - \sum_{k=1}^{2^n} w\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \xi\left(\frac{k}{2^n}, 1\right] \right\}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{2^n-1} \left[w\Big(\frac{k}{2^n}\Big) - w\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big) \right] \xi\Big(\frac{k}{2^n}, 1\Big] - w\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)\xi(1, 1] \right\} + w(0)\xi(0, 1]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \left[w\Big(\frac{k}{2^n}\Big) - w\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big) \right] \xi\Big(\frac{k}{2^n}, 1\Big]$$

が概収束する. したがって $\langle w, \xi\rangle$ の特性関数は任意の $u \in \mathbf{R}$ について

$$\begin{aligned}\int_W e^{iu\langle w,\xi\rangle}\, d\mu(w) &= \lim_{n\to\infty} \int_W \exp\left(iu \sum_{k=1}^{2^n-1} \left\{ w\Big(\frac{k}{2^n}\Big) - w\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big) \right\} \xi\Big(\frac{k}{2^n}, 1\Big] \right) d\mu(w) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left(iu \sum_{k=1}^{2^n-1} \left\{ B\Big(\frac{k}{2^n}\Big) - B\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big) \right\} \xi\Big(\frac{k}{2^n}, 1\Big] \right) \right]\end{aligned}$$

独立性より

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{2^n-1} \mathbf{E}\left[\exp\left(iu \left\{ B\Big(\frac{k}{2^n}\Big) - B\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big) \right\} \xi\Big(\frac{k}{2^n}, 1\Big] \right) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n-1} \xi\Big(\frac{k}{2^n}, 1\Big]^2 \right) \\ &= \exp\left(-\frac{u^2}{2} \int_0^1 \xi(s, 1]^2\, ds \right)\end{aligned}$$

となり $\langle w, \xi\rangle$ が $N\Big(0, \int_0^1 \xi(s, 1]^2\, ds\Big)$ にしたがうことが示された. ここで s の関数 $\xi(s, 1]$ は有界変動関数であることから $\xi(s, 1]^2$ はリーマン積分可能となる (例えば河田敬義 [Kaw 1959]) ことを使った. □

以上の特性関数の計算によらずとも $\langle w, \xi\rangle$ の平均が 0 であることは容易に知れるが、分散についても

$$\begin{aligned}\int_W \langle w, \xi\rangle^2\, d\mu(w) &= \mathbf{E}[\, \langle B, \xi\rangle^2\,] \\ &= \mathbf{E}\left[\left(\int_{(0,1]} B(t)\, d\xi(t) \right)^2 \right] \\ &= \int_{(0,1]} d\xi(t) \int_{(0,1]} \mathbf{E}[\, B(s)B(t)\,]\, d\xi(s) \\ &= \int_{(0,1]} d\xi(t) \int_{(0,1]} (s \wedge t)\, d\xi(s) \\ &= \int_{(0,1]} d\xi(t) \left\{ \int_{(0,t]} s\, d\xi(s) + t \int_{(t,1]} d\xi(t) \right\} \\ &= \int_{(0,1]} d\xi(t) \left\{ -s\xi(s, 1] \Big|_{s=0}^{t} + \int_{(0,t]} \xi(s, 1]\, ds + t\xi(t, 1] \right\} \\ &= \int_{(0,1]} d\xi(t) \int_{(0,t]} \xi(s, 1]\, ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\xi(t,1\,]\int_0^t \xi(s,1\,]\,ds\Big|_{t=0}^{1} + \int_0^1 \xi(s,1\,]^2\,ds \\
&= \int_0^1 \xi(s,1\,]^2\,ds.
\end{aligned}
$$

のように直接求めることもできる。

ここで写像 $R_\mu,\ R_\mu^*$ を

$$
\begin{aligned}
&R_\mu : \xi \in W^*\Big(= \mathcal{M}(0,1\,]\Big) \longrightarrow \xi(s,1\,] \in \mathbf{L}^2[\,0,1\,] \\
&R_\mu^* : \varphi \in \mathbf{L}^2[\,0,1\,] \longrightarrow \int_0^t \varphi(s)\,ds \in W
\end{aligned}
$$

と定義すると, いずれも単射であり,

$$
\int_0^1 f(s)(R_\mu \xi)(s)\,ds = \int_{(0,1\,]} (R_\mu^* f)(s)\,d\xi(s), \quad f \in \mathbf{L}^2[\,0,1\,],\ \xi \in \mathcal{M}(0,1\,]
$$

が成り立つ. これらの写像によって W^* と $R_\mu(W^*)$, また $\mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ と $R_\mu^*(\mathbf{L}^2[\,0,1\,])$ を同一視することによって

$$
W^* \subset \mathbf{L}^2[\,0,1\,] \subset W
$$

と考えることが出来る. これを **ウィーナー空間の基本三つ組** ということにする. これが抽象ウィーナー空間論の出発点となる構造である. 注意しなければいけないのは上の包含関係はあくまで写像 $R_\mu,\ R_\mu^*$ を通した「埋め込み」であって, 例えば実測度の空間 W^* が関数の空間 $\mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ の部分集合であることを主張しているわけではない.

例えば点 $t \in (0,1\,]$ に集積したディラック測度 $\delta_t \in W^*$ について考えると

$$
\begin{aligned}
&(R_\mu \delta_t)(s) = \delta_t(s,1\,] = \mathbf{I}_{[\,0,t)}(s) \in \mathbf{L}^2[\,0,1\,] \\
&(R_\mu^* R_\mu \delta_t)(s) = (R_\mu^* \mathbf{I}_{[\,0,t)})(s) = \int_0^s \mathbf{I}_{[\,0,t)}(u)\,du = s \wedge t \in W
\end{aligned}
$$

となる.

ここでブラウン運動の道の一性質を証明しておこう.

(7.7) 定理　ブラウン運動 $\{B(t)\}$ について次の性質が成り立つ.

(7.7.1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left\{B\left(\frac{k}{2^n}\right)-B\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right\}^2=1,\quad \text{a.e.}$

(7.7.2)　$\{B(t)\}$ はどんな区間上でも a.e. に有界変動でない.

証明　$\displaystyle S_n\equiv\sum_{k=1}^{2^n}\left\{B\left(\frac{k}{2^n}\right)-B\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right\}^2,\ n\in\mathbf{N}$ と定義する.　このとき補題 7.3 より $\displaystyle B\left(\frac{k}{2^n}\right)-B\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$ の分布は $\displaystyle N\left(0,\frac{1}{2^n}\right)$ であるから

$$\mathbf{E}\left[\left|B\left(\frac{k}{2^n}\right)-B\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|^2\right]=\frac{1}{2^n}.$$

ここで $\displaystyle Z_{k,n}=B\left(\frac{k}{2^n}\right)-B\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$ と定義すると命題 7.4 より $k\neq\ell$ であれば $Z_{n,k}$ と $Z_{n,\ell}$ は独立. したがって

$$\begin{aligned}V[\,S_n\,]&=V\left[\sum_{k=1}^{2^n}(Z_{n,k})^2\right]=\sum_{k=1}^{2^n}V[\,(Z_{n,k})^2\,]\\&=\sum_{k=1}^{2^n}\left\{\mathbf{E}[\,(Z_{n,k})^4\,]-\mathbf{E}[\,(Z_{n,k})^2\,]^2\right\}\leq\sum_{k=1}^{2^n}\mathbf{E}[\,(Z_{n,k})^4\,]=\frac{3}{2^n}.\end{aligned}$$

これより

$$\sum_n\mathbf{P}\left(|S_n-1|>\frac{1}{2^{n/3}}\right)\leq\sum_n 2^{2n/3}\frac{3}{2^n}=\sum_n\frac{3}{2^{n/3}}<\infty$$

となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1,$ a.e. が示された.

(7.7.2)　もし

$$\sup_n\sum_{k=1}^{2^n}\left|B\left(\frac{k}{2^n}\right)-B\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|<\infty,\quad\text{a.e.}$$

であれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=0,$ a.e. となり矛盾. □

じつは $\{B(t)\}$ は a.e. にいたるところ微分不能であることが知られている。

§8. カメロン・マルティン空間

本題に入る前に例 4.7 を復習しておこう. $\boldsymbol{G} = \{G_k\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ 上の標準ガウス列, P を $\boldsymbol{G}$ が数列空間 $\mathbf{R}^\infty$ 上に導く確率測度, すなわち

$$P(\Gamma) \equiv \mathbf{P}(\boldsymbol{G} \in \Gamma), \quad \Gamma \in \mathrm{B}_\infty$$

によって定まる確率測度を $\mathbf{R}^\infty$ 上の **標準ガウス測度** という. また任意の $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \mathbf{R}^\infty$ に対して $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{a} \equiv \{G_k + a_k\}$ が $\mathbf{R}^\infty$ 上に導く確率測度を $P_{\boldsymbol{a}}$ とする. $\boldsymbol{G} = \{G_k\}$ も $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{a} = \{G_k + a_k\}$ も独立確率変数列であるから P も $P_{\boldsymbol{a}}$ も無限直積測度である. このとき例 4.7 より $\boldsymbol{a} \in \ell_2$ であれば $P \sim P_{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{a} \notin \ell_2$ であれば $P \perp P_{\boldsymbol{a}}$ となることに注意しておく.

さてウィーナー空間 (W, μ) において $a \in W$ に対し, W 上の確率測度 μ_a を

$$\mu_a(A) \equiv \mu(A - a), \quad A \in \mathcal{B}(W)$$

で定義する. このとき

$$\mathcal{H}_\mu = \{\, a \in W \ : \ \mu_a \sim \mu \,\}$$

を **カメロン・マルティン空間** と呼ぶ. この節の目的は, ウィーナー測度を数列空間 $\mathbf{R}^\infty$ 上の標準ガウス測度の像測度と考える立場から, カメロン・マルティン空間の構造をを決定することである.

(8.1) 補題　可測空間 $(E, \mathcal{E})$ から可測空間 $(\Omega, \mathcal{B})$ の中へ写像 T が両可測単射, μ, ν を $(E, \mathcal{E})$ 上の確率測度とする. このとき

$$\nu \ll \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu \circ T^{-1} \ll \mu \circ T^{-1}.$$

$$\nu \perp \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu \circ T^{-1} \perp \mu \circ T^{-1}.$$

また $\nu \ll \mu$ の場合, そのラドン・ニコディム微分の間には

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \frac{d\nu \circ T^{-1}}{d\mu \circ T^{-1}}(Tx), \quad \text{a.s.}(\mu)$$

という関係がある.

証明　絶対連続性と特異性の定義から明らか. □

ここでウィーナー測度の定義をふり返ってみよう. $\boldsymbol{G} = \{G_k\}$ を標準ガウス列とするとき, 定理 6.1 より

$$B(t) = G_0 t + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} G_k \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin \pi k t, \quad 0 \le t \le 1$$

は一様概収束し, ほとんどいたるところ定義された可測写像 B が $(W, \mathcal{B}(W))$ 上に導く確率測度がウィーナー測度であった. このとき G は標準ガウス列でさえあれば定義されている確率空間は何でもよかった. ここで逆にブラウン運動 $B(t)$ に対し, ある標準ガウス列を対応させる写像を考えてみよう. $\{\xi_k\} \subset W^*\Big(= \mathcal{M}(0,1]\Big)$ を

$$d\xi_0 \equiv \delta_1, \quad (\{1\} \text{ に集積したディラック測度})$$

$$d\xi_k \equiv \sqrt{2}\,\pi k \sin \pi k t \, dt + \sqrt{2}\,(-1)^k \delta_1, \quad k \ge 1$$

として W から $\mathbf{R}^\infty$ の中への写像 T を

$$T \;:\; w \in W \quad \to \quad \{\langle w, \xi_k \rangle\} \in \mathbf{R}^\infty$$

によって定義する. $\{\xi_k\}$ は

$$\psi_0(t) \equiv t, \quad \psi_k(t) \equiv \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin \pi k t, \quad k \ge 1$$

と定義したとき

$$\langle \psi_k, \xi_\ell \rangle = \int_{(0,1]} \psi_k(t)\ d\xi_\ell(t) = \begin{cases} 1, & k = \ell \\ 0, & k \ne \ell \end{cases}$$

の成り立つように定めたものである. したがって

$$T(B(t)) = T\left(G_0 t + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} G_k \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin \pi k t \right) = \{G_k\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \text{a.e.}$$

となることに注意しておこう.

(8.2) 補題　T は線形両可測単射であり, $\{\langle w,\xi_k\rangle\}$ はウィーナー 空間 (W,μ) 上に定義された標準ガウス列, また $P=\mu\circ T^{-1}$ は標準ガウス測度である.

証明　線形可測であることは明らか. 逆の可測性は W がポーランド空間であることと T の連続性から示される. (たとえば K. R. Parthasarathy[Par 1967])

単射であることを示そう. $T(w)=0$ とせよ. まず $k=0$ について $0=\langle w,\xi_0\rangle=w(1)$. つぎに $f(t)\equiv\int_0^t w(s)\,ds$ と定義すると, 任意の $k\geq 1$ について部分積分により

$$\begin{aligned}
0=\langle w,\xi_k\rangle &= \sqrt{2}\,\pi k\int_0^1 w(t)\sin\pi kt\,dt+\sqrt{2}\,(-1)^k w(1)\\
&= \sqrt{2}\,\pi k\int_0^1 w(t)\sin\pi kt\,dt\\
&= -\sqrt{2}\,(\pi k)^2\int_0^1 f(t)\cos\pi kt\,dt.
\end{aligned}$$

$\{1,\,\sqrt{2}\,\cos\pi kt : k\geq 1\}$ が $\mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ の完全正規直交系であることと $f(t)$ の連続性にに注意すると $f(t)\equiv$ 定数 であることが分かる. $f(0)=0$ であるから $f(t)\equiv 0$, したがって $w(t)\equiv 0$.

$P=\mu\circ T^{-1}$ の分布を示すには確率空間 (W,μ) 上の確率変数列 $\{\langle w,\xi_k\rangle\}$ が標準ガウス列であることを示せばよい. 実際任意の $k,\ell\geq 0$ について命題 7.6 より

$$\int_W \langle w,\xi_k\rangle\langle w,\xi_\ell\rangle\,d\mu(w)=\int_0^1 \xi_k(t,1\,]\,\xi_\ell(t,1\,]\,dt=\delta_{k,\ell}$$

は容易に示される. □

(8.3) 補題　ウィーナー空間 (W,μ) において

$$\mu_a\sim\mu \quad\Leftrightarrow\quad T(a)\in\ell_2$$

$$\mu_a\perp\mu \quad\Leftrightarrow\quad T(a)\notin\ell_2$$

証明　T は線形単射であるから $P=\mu\circ T^{-1}$ とすると

$$\mu_a\circ T^{-1}(\Gamma)=\mu(T^{-1}(\Gamma)-a)=\mu(T^{-1}(\Gamma-T(a))=P(\Gamma-T(a))=P_{T(a)}(\Gamma),\quad \Gamma\in\mathscr{B}_\infty$$

ゆえに補題 8.1, 命題 8.2 と例 4.7 から

$$\mu_a\sim\mu\Leftrightarrow P_{T(a)}\sim P\Leftrightarrow T(a)\in\ell_2$$

$$\mu_a\perp\mu\Leftrightarrow P_{T(a)}\perp P\Leftrightarrow T(a)\notin\ell_2$$

証明終り. □

(8.4) 補題　$\ell_2\subset T(W)$.

証明　$\boldsymbol{a}\in\ell_2\setminus T(W)$ が存在したとせよ. $\boldsymbol{a}\neq 0$ である. $T(W)$ が可測線形部分空間であることから $(T(W)-\boldsymbol{a})\cap T(W)=\emptyset$ が示される.

他方例 4.7 より $P_{\boldsymbol{a}}\sim P$ であるから

$$P(T(W)-\boldsymbol{a})=P_{\boldsymbol{a}}(T(W))=P(T(W))=1.$$

故に

$$1\geq P((T(W)-\boldsymbol{a})\cup T(W))=P(T(W)-\boldsymbol{a})+P(T(W))=2$$

となり矛盾 □

(8.5) 定理　ウィーナー空間 (W,μ) において

$$\mathcal{H}_\mu=T^{-1}(\ell_2)=\left\{w\in W:\exists\dot{w}\in\mathbf{L}^2[0,1]\text{ such that }w(t)=\int_0^t\dot{w}(s)\,ds\right\}.$$

また $v,w\in\mathcal{H}_\mu$ に対して内積 (v,w) を

$$(v,w)=\int_0^1\dot{v}(s)\dot{w}(s)\,ds$$

で定義すると $\mathcal{H}_\mu$ は可分ヒルベルト空間となる.

証明　$\mathcal{H}_\mu=T^{-1}(\ell_2)$ は補題 8.3 と補題 8.4 より明らか.

つぎに任意の $w(t) = \int_0^t \dot{w}(s)\,ds,\ \dot{w} \in \mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ に対して $\dot{w}$ の $\mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ の完全正規直交系 $\{1, \sqrt{2}\cos \pi kt : k \geq 1\}$ によるフーリエ展開を

$$\dot{w}(s) = a_0(\dot{w}) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\dot{w}) \cos \pi ks$$

とすると $T(w) = \{a_k(\dot{w})\} \in \ell_2$ となる.

逆に任意の $\{a_k\} \in \ell_2$ に対して

$$\begin{aligned} w(t) &\equiv \int_0^t (a_0 s + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi ks) ds \\ &= a_0 t + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin \pi kt \end{aligned}$$

と定義すると $w = T^{-1}(\{a_k\})$ は容易に示される.

$\mathcal{H}_\mu$ が可分ヒルベルト空間になることは, 内積の定義から $\mathcal{H}_\mu$ と $\mathbf{L}^2[\,0,1\,]$ と同一視出来ることから明らか. □

次にカメロン・マルティン空間のエルゴード性を示そう. そのためにまず定理 5.5 の系として次の命題の成り立つ事を注意しておく.

(8.6) 命題 P を $(\mathbf{R}^\infty, \mathscr{B}_\infty)$ 上の標準ガウス測度とする. $\Gamma \in (\mathscr{B}_\infty)_P$ について $P(\Gamma \triangle (\Gamma + \boldsymbol{a})) = 0$ がすべての $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_0^\infty$ に関して成り立てば $P(\Gamma) = 0$ または 1.

証明 $\mathbf{R}_0^\infty \subset \ell_2$ に注意すると, 例 4.7 より標準ガウス測度は $\mathbf{R}_0^\infty$-準不変. 他方標準ガウス測度は無限直積測度であるから定理 5.5 より $\mathbf{R}_0^\infty$-エルゴード的. したがって定理 5.4 と定理 5.5 が適用出来る. □

(8.7) 定理 ウィーナー空間 (W, μ) において $\mathcal{B}(W)_\mu$ を $\mathcal{B}(W)$ の μ による完備化, $\mathcal{H}_\mu$ をカメロン・マルティン空間とする. このとき $A \in \mathcal{B}(W)_\mu$ について $\mu(A \triangle (A + a)) = 0$ がすべての $a \in \mathcal{H}_\mu$ に関して成り立つとすると $\mu(A) = 0$ または 1.

証明　$A \in \mathcal{B}(W)_\mu$ について $\mu(A \bigtriangleup (A+h)) = 0$ がすべての $h \in \mathcal{H}_\mu$ に関して成り立ったとせよ.

T を補題 8.2 の前に定義した W から $\mathbf{R}^\infty$ への写像とする. このとき標準ガウス測度 $P \equiv \mu \circ T^{-1}$ について $T(A) \in (\mathscr{B}_\infty)_P$ が示される. また T が線形であることに注意すると,

$$P((T(A)+T(h)) \bigtriangleup T(A)) = \mu(A \bigtriangleup (A+h)) = 0 \qquad h \in \mathcal{H}_\mu$$

となる. 補題 8.3, 8.4 より $T(\mathcal{H}_\mu) = \ell_2$ となることと $\mathbf{R}_0^\infty \subset \ell_2$ に注意すると

$$P((T(A)+\boldsymbol{a}) \bigtriangleup T(A)) = 0 \qquad \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}_0^\infty$$

が示される. 定理 5.5 より $P(T(A)) = 0$ または 1, したがって

$$\mu(A) = \mu \circ T^{-1}(T(A)) = P(T(A)) = 0 \quad \text{または} \quad 1.$$

証明終り. □

(8.8) 注意　定理 8.7 で示されたウィーナー測度 μ の $\mathcal{H}_\mu$-エルゴード性は Y. Umemura [U 1965] によって初めて証明された.

§9　準不変測度の連続性と０-１法則

まず補題を一つ準備する.

(9.1) 補題　f を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分関数, ℓ を $\mathbf{R}$ 上の有界可測関数とする. このときつぎの命題が成り立つ.

(1)
$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(s+t)-f(s))\,ds=0$$

(2)
$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\ell(s+t)-\ell(s))f(s)\,ds=0$$

証明　(1)　f がルベーグ可積分であることから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある連続関数 $f_\varepsilon=f_\varepsilon(s)$ で, ある $N\in\mathbf{N}$ に対して

$$|s|\geq N-1\quad\Rightarrow\quad f_\varepsilon(s)=0$$

であり, かつ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)-f_\varepsilon(s)|\,ds<\frac{\varepsilon}{3}$$

となるものが存在する. f_ε は $[\,-N,N\,]$ で一様連続であるから, ある $\delta>0$ で

$$|s-s'|<\delta,\ s,s'\in[\,-N,N\,]\quad\Rightarrow\quad|f_\varepsilon(s)-f_\varepsilon(s')|<\frac{\varepsilon}{6N}$$

となるものが存在する. このとき $|t|<(\delta\wedge 1)$ であれば

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(s+t)-f(s))\,ds\right|\\
&\quad\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s+t)-f_\varepsilon(s+t)|\,ds+\int_{-\infty}^{+\infty}|f_\varepsilon(s+t)-f_\varepsilon(s)|\,ds+\int_{-\infty}^{+\infty}|f_\varepsilon(s)-f(s)|\,ds\\
&\quad\leq\frac{\varepsilon}{3}+2N\cdot\frac{\varepsilon}{6N}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

(2)　$n\in\mathbf{N}$ に対して

$$A_n\equiv\{\,s\in[\,-n,n\,]:|f(s)|\leq n\,\},$$

また $M \equiv \sup_{s\in\mathbf{R}} |\ell(s)|$ と定義する．f はルベーグ可積分であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n \in \mathbf{N}$ で

$$\int_{A_n^C} |f(s)|\, ds < \frac{\varepsilon}{2M}$$

となるものが存在する．(1) より

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} (\ell(s+t) - \ell(s)) f(s)\, ds\right| \\
&\quad \leq \int_{A_n} |\ell(s+t) - \ell(s)||f(s)|\, ds + \int_{A_n^C} |\ell(s+t) - \ell(s)||f(s)|\, ds \\
&\quad \leq n \int_{-n}^{n} |\ell(s+t) - \ell(s)|\, ds + 2M \int_{A_n^C} |f(s)|\, ds \\
&\quad \leq \varepsilon \qquad (t \to 0)
\end{aligned}$$

証明終り．□

ここでつぎの命題を証明する．

(9.2) 命題　$(E, \mathcal{E})$ を可測線形空間，μ を $(E, \mathcal{E})$ 上の確率測度とする．いま，ある $a \in E$ について ta がすべての $t \in \mathbf{R}$ に関して準不変平行移動とする．このとき任意の $A \in \mathcal{E}$ について

$$\lim_{t \searrow 0} \mu(A \triangle (A - ta)) = 0.$$

(証明)

$$\nu(A) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(A - sa) e^{-2|s|}\, ds, \quad A \in \mathcal{E}$$

と定義すると $\mu \ll \nu$ となる．実際ある $N \in \mathcal{E}$ について $\nu(N) = 0$ とすると，少なくとも一つ $s_0 \in \mathbf{R}$ で $\mu(N - s_0 a) = 0$ となるものが存在する．$\mu \sim \mu_{s_0 a}$ であるから $\mu(N) = 0$.

ここで $p \equiv \dfrac{d\mu}{d\nu}$ と定義する．任意の $A \in \mathcal{E}$ を固定し，

$$f(s) \equiv \mathbf{I}_A(w + sa), \quad \ell(s) \equiv e^{-2|s|}, \quad s \in \mathbf{R},\, w \in E$$

に補題 9.1 と有界収束定理を適用すると

$$
\begin{aligned}
&\int_E |\mathbf{I}_A(w+ta) - \mathbf{I}_A(w)|\, d\nu(w) \\
&\leq \int_E d\mu(w) \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{I}_A(w+(s+t)a) - \mathbf{I}_A(w+sa)|\; e^{-2|s|}\, ds \\
&\to 0 \quad (t \to 0)
\end{aligned}
$$

他方 $n \in \mathbf{N}$ に対して $p_n(w) \fallingdotseq \min\{p(w), n\}$ と定義すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$
\int_E |p(w) - p_n(w)|\, d\nu(w) < \varepsilon
$$

となるように $n \in \mathbf{N}$ を選ぶことができる. このとき

$$
\begin{aligned}
\mu(A \triangle (A - ta)) &= \int_E |\mathbf{I}_A(w+ta) - \mathbf{I}_A(w)|\, d\mu(w) \\
&= \int_E |\mathbf{I}_A(w+ta) - \mathbf{I}_A(w)||p(w) - p_n(w)|\, d\nu(w) \\
&\qquad + \int_E |\mathbf{I}_A(w+ta) - \mathbf{I}_A(w)| p_n(w)\, d\nu(w) \\
&\leq 2\int_E |p(w) - p_n(w)|\, d\nu(w) + n\int_E |\mathbf{I}_A(w+ta) - \mathbf{I}_A(w)|\, d\nu(w) \\
&\leq 2\varepsilon \quad (t \to 0)
\end{aligned}
$$

証明終り. □

さて可測線形空間 E は加法に関して群になっている. このときつぎの定理が成り立つ.

(9.3) 定理　$(E, \mathcal{E})$ を可測線形空間とする. いま $(E, \mathcal{E})$ 上の確率測度 μ が E のある線形部分空間 H に関して H-準不変, かつ H-エルゴード的とする.
このとき E の任意の (加法に関する) 部分群 $G \in \mathcal{E}$ について $\mu(G) = 0$ または $\mu(G) = 1$ である.

証明　$G \in \mathcal{E}$ を E の部分群であり, かつ $\mu(G) > 0$ とする. このとき $\mu(G) = 1$ を示せばよい.

まず $H \subset G$ を示す．G は部分群であるから，任意の $h \in H$ に対して，ある $\delta > 0$ で $\{\, th : |t| \le \delta\} \subset G$ となるものが存在することを示せば十分である．そうでないとせよ．このときある $h_0 \in H$ に対してどんな $n \in \mathbf{N}$ についても $|t_n| < \dfrac{1}{n}$ かつ $t_n h_0 \notin G$ となるものが存在する．

このときすべての $n \in \mathbf{N}$ について $G \cap (G - t_n h_0) = \emptyset$．もしそうでないとすると，ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して $G \cap (G - t_{n_0} h_0) \neq \emptyset$ となる．したがって，ある g_0，$g_1 \in G$ について $g_0 = g_1 - t_{n_0} h_0$ とあらわされ，G が群であることから $t_{n_0} h_0 = g_1 - g_0 \in G$ となり，矛盾．

ゆえに補題 9.1 より

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \mu(G \bigtriangleup (G - t_n h_0)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \{\mu(G) + \mu(G - t_n h_0)\} \\
&\ge \mu(G) > 0
\end{aligned}
$$

となり，矛盾．これで $H \subset G$ が示された．

G が群であることから $G + H = G$ となり，μ の H-エルゴード性から $\mu(G) = 1$ □

つぎの定理は定理 9.3 の系である．

(9.4) 定理　$(W, \mathcal{B}(W), \mu)$ をウィーナー空間とする．このとき $G \in \mathcal{B}(W)$ が W の部分群であれば $\mu(G) = 0$ または $\mu(G) = 1$.

証明　定理 9.3 で $E = W$，$\mathcal{E} = \mathcal{B}(W)$ とすればよい． □

(9.5) 例　$B = B(t)$ をブラウン運動，$\alpha > 0$,

$$
G_\alpha \equiv \left\{ \sup_{0 \le s < t \le 1} \frac{|B(t) - B(s)|}{|t - s|^\alpha} < +\infty \right\}
$$

と定義すると $\mu(G_\alpha) = 0$ または $\mu(G_\alpha) = 1$.

参考文献

[CM 1944] R. Cameron and W.T. Martin : Transformations of Wiener integrals under translations. *Ann. Math.*, **45** (1944) 386-396.

[F 1969] H. Federer : *Geometric Measure Theory* (1969) Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg, New York)

[G 1965] L. Gross: Abstrct Wiener space. *Proc. Fifth Berkley Sympo. on Math. Stat. and Probab.* **II, Part 1.** (1965) 31-42

[HS 1965] E. Hewitt and K. Stromberg: *Real and Abstract Analysis* (1965) Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg, New York)

[IN 1968] K. Ito and M. Nisio: On the convergence of the sums of independent Banach space valued random variables. *Osaka J. Math.* **5** (1968) 35-48.

[I 1960] 伊藤 清：確率論（第四版）(1960) 岩波書店（東京）

[Kak 1948] S. Kakutani: On equivalence of infinite product measures. *Ann. of Math.* **49** (1948) 214-224

[Kaw 1959] 河田敬義：積分論. (1959) 共立出版 (東京)

[Ko 1933] A.N. Kolmogoroff : *Grundbegriffe der Wahrsceinlichkeitsrechnung.* (1933) Verlag von Julius Springer (Berlin)
（日本語訳）コルモゴロフ：確率論の基礎概念　（根本 伸司，一条 洋 訳）(1969) 東京図書

[MS 1994] H. Mizumachi and H. Sato : Continuity of quasi-invariant measures and zero-one laws on groups. *J. Func. Anal.*, **120** (1994) 188-200.

[PalW 1934] R.E.A.C. Paley and N. Wiener: *Fourier transforms in the complex domain.* (1934) A.M.S. Colloq. Publ. **19**

[Par 1967] K.R. Parthasarathy : *Probability measures on metric spaces.* (1967) Academic Press (New York, San Fransisco and London)

[Ra 1987] M.M. Rao : *Measure Theory and Integration.* (1987) John Wiley & Sons (New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore)

[Ro 1970] C.A. Rogers : *Hausdorff Measures.* (1970) Cambridge University Press.

[S 1969] H. Sato : Gaussian measure on a Banach space and abstract Wiener measure. *Nagoya Math. J.* **36** (1969) 65-81.

[S 1980] H. Sato : Souslin support and Fourier expansion of a Gaussian Radon measure. *Third International Conference on Probability in Banach spaces.* LNM**860** (1980) 299-313.

[S 1992] H. Sato : Gaussian measures on locally convex spaces and related topics. *Soochow J. Math.*, **18** (1992) 461-496.

[S 1994] 佐藤 坦：測度から確率へ. (1994) 共立出版 (東京)

[U 1965] Y. Umemura : Measures on infinite dimensional vector spaces. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.,* **1** (1965) 1-47.