楕円モジュラー関数$j(\tau)$の
フーリエ係数

九州大学数理学研究院
金子　昌信

まえがき

この講義録は 1998 年 9 月 14 日から 18 日まで, 神戸大学において「楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ の Fourier 係数」と題して行った集中講義に基いて作られたものである.

$j(\tau)$ は愛惜措く能わざる対象であるし, 講義録も講義の余勢を駆って一気に書き上げるつもりが, 何の彼のと先伸ばしにしているうちについに 3 年も経ってしまったのは, 全く申し開きが出来ない. ずっと待ち続けてくださった山崎正さんに深くお詫び申し上げます.

講義の主たる目的は, $j(\tau)$ のフーリエ係数の二つの公式, 数論的公式と解析的公式 (Petersson-Rademacher による) の, 証明を与えることであった. そのうち解析的公式の証明の方は Rademacher によるもの (circle method) を紹介したが, ここに書くのは, 原論文の引写しから一歩も出ないことにならざるを得ないことでもあり, 省くことにした. そのかわり, Zagier の定理と Borcherds の定理の関係を講義で述べたよりは少し詳しく書き, $j(\tau)$ 全般に関する歴史的なことも, 遺漏はあろうけれども, 書き加えた.

もっと早くに書き上げていなければ, と思いながら, 古典的でなおいつまでも古びない対象のこと, この講義録が少しでも役に立つ若い数学徒のおられんことを, と希望もする次第である. 始めから終りまで, お世話になりました山崎正さんに心より感謝申し上げます.

2001 年 9 月 3 日　金子昌信

目 次

まえがき **3**

第 1 章　$j(\tau)$ とその２つの係数公式 **7**

第 2 章　$j(\tau)$ 小史 **13**

第 3 章　定理 A (数論的公式) の証明 **21**
3.1　特異モジュラスのトレース 21
3.2　Zagier の定理と定理 A の証明 25

第 4 章　Zagier の定理の証明 **29**

第 5 章　Borcherds の定理と Zagier の定理 **39**
5.1　Borcherds の定理 39
5.2　Zagier の定理との関係 47
5.3　定理 A の別証明 57

第 6 章　問題と文献 **61**

第1章　$j(\tau)$ とその2つの係数公式

普通 $j(\tau)$ (または $J(\tau)$) と書かれる「楕円モジュラー関数」は, モジュラー関数のなかで最も基本的な関数であるといえるだろう．それは上半平面 $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbf{C} | \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上の正則関数であって, $\mathfrak{H}$ への $SL_2(\mathbf{Z})$ の作用に関して不変, すなわち

$$j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j(\tau), \qquad (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}))$$

かつ無限遠点 $i\infty$ で留数 1 の一位の極を持つ, つまり $q = e^{2\pi i\tau}$ に関するフーリエ[1]展開 (q-展開) が

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$$

の形を持つ．これらの性質をもつ関数は定数の差を除いて特定できるが, $j(\tau)$ は定数項を 744 として一意に定まる．

$\mathfrak{H}$ 上の $SL_2(\mathbf{Z})$ 不変な有理型関数で $i\infty$ でも有理型 (q-展開の負巾項が有限) なもの全体は $j(\tau)$ の有理式全体と同じである．また, $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する, 重さ整数の正則ないし有理型モジュラー形式は $j(\tau)$ とその微分 $j'(\tau)$ の有理式ですべて書き表される[2]．このような事実, そしてモジュラー関数というものを考えるときまず最初に見るべき群は $SL_2(\mathbf{Z})$ であろうこと[3]が, $j(\tau)$ を最も基本的と見做す理由である．そしてその根本たる関数が虚数乗法論における類体構成やムーンシャイン現象を筆頭として見事な性質を持っている．モジュラー関数としての $j(\tau)$ は Dedekind[4] の論文[5]とともに誕生したとすると, ムー

---

[1]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768.3.21—1830.5.16)

[2]すぐあとで定義する記号で $j = E_4^3/\Delta, j-1728 = E_6^2/\Delta, j'(:= \frac{1}{2\pi i}\frac{dj}{d\tau} = q\frac{dj}{dq}) = -E_4^2E_6/\Delta$ で, $E_4 = (j')^2/j(j-1728), E_6 = -(j')^3/j^2(j-1728)$.

[3]歴史的には, 楕円関数論との関係で, 所謂レベル 2 の合同部分群に関するモジュラー関数の方が先に現れている．

[4]Julius Wihelm Richard Dedekind (1831.10.6—1916.2.12)

[5]*Schreiben an Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 83, S.265–292 (1877), 全集 I 巻 174–201 ページ.

ンシャイン現象の発見はその100年後, 以下で述べようとしている係数公式は約120年後の発見であって, 根源的な対象というのはいつまでも古びないということであろうか.

この講義録では $j(\tau)$ のフーリエ係数 c_n に焦点をあてて, いくつかの結果を紹介する. 特に, c_n を所謂特異モジュラスと呼ばれる $j(\tau)$ の特殊値 (虚数乗法点での値) により閉じた形 (有限和) に表す数論的公式と, その背後にある理論について, ある程度詳しく述べることが主たる目標である.

ここでその数論的公式と, 以前から知られている解析的公式を掲げておくことにしよう.

4以上の偶数 k に対し, $E_k(\tau)$ を, q-展開の定数項が1となるよう正規化されたアイゼンシュタイン[6] 級数

$$
\begin{aligned}
E_k(\tau) &:= \frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbf{Z}\\(c,d)=1}}\frac{1}{(c\tau+d)^k}\\
&= 1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n}d^{k-1}\Big)q^n
\end{aligned}
$$

とし (B_k はベルヌーイ[7] 数), $\Delta(\tau)$ を判別式関数, すなわち

$$
\Delta(\tau) := \frac{1}{1728}\left(E_4(\tau)^3-E_6(\tau)^2\right)
$$

とする. $E_k(\tau)$, $\Delta(\tau)$ は, $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する, それぞれ重さ k, 12の正則モジュラー形式である. $\Delta(\tau)$ は $i\infty$ での値が0である尖点形式であり, その q-展開に関する無限積表示

$$
\begin{aligned}
\Delta(\tau) &= q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\\
&= q-24q^2+252q^3-1452q^4+4830q^5-\cdots
\end{aligned}
$$

はよく知られている. このとき楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ は

$$
j(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} \tag{1.1}
$$

[6]Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823.4.16—1852.10.11)

[7]Jakob Bernoulli (1654.12.27—1705.8.16)

で定義される. このフーリエ展開係数を以後 c_n で表すことにする:

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n, \quad (c_{-1} = 1,\, c_0 = 744).$$

$E_4(\tau) = 1+240\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{d|n} d^3)q^n$ の係数がすべて正であること, および $\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ より $\Delta(\tau)^{-1}$ の展開係数も正であることから, c_n は正整数である. はじめのいくつかの値を表にしておく[8].

n	c_n	n	c_n
-1	1	15	1261429164657818430 75
0	744	16	5931217724214450585 60
1	196884	17	266284241315077524516 0
2	21493760	18	114599127884447865139 20
3	864299970	19	474387868012341688132 50
4	20245856256	20	1894499762488933900288 00
5	333202640600	21	7318113773181375192456 96
6	4252023300096	22	27406307125136246549299 20
7	44656994071935	23	99710416599371826935338 20
8	401490886656000	24	353074531865614270998773 76
9	3176440229784420	25	1218832843304225104333515 00
10	22567393309593600	26	4107899601903079091576381 44
11	146211911499519294	27	13535635415186468786750775 00
12	874313719685775360	28	43656892248588766346104012 80
13	4872010111798142520	29	137983758346429999255422883 76
14	25497827389410525184	30	427807822442132625670582272 00

さて, この $j(\tau)$ のフーリエ係数を与える数論的公式とは次のような形のものである.

定理 A

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left\{\mathbf{t}(n-r^2) - \frac{(-1)^{n+r}}{4}\mathbf{t}(4n-r^2) + \frac{(-1)^r}{4}\mathbf{t}(16n-r^2)\right\}.$$

[8]フリーソフトウエア Pari-GP (Ver.2) には $j(\tau)$ が組み込み関数として入っていて, `ellj` というコマンドで呼び出せる. ノートパソコンで q^{1000} の係数 (171 桁) を取り出すのに数秒しかかからなかった. なお, 島根大学の堤裕之君にソースコードを読んでもらったところ, Pari での $j(\tau)$ の q-展開の計算は, $\eta(\tau)$ の展開 (オイラーの 5 角数定理) から出発し, 公式 $j(\tau) = 2^{24}\eta(2\tau)^{48}/\eta(\tau)^{48} + 2^{16}3\eta(2\tau)^{24}/\eta(\tau)^{24} + \eta(\tau)^{24}/\eta(2\tau)^{24} + 2^8 3$ により計算されているようである.

ここに $\mathbf{t}(d)$ は有理整数で, $d > 0$ のときは大体, 判別式 $-d$ の CM 点 (虚 2 次無理数) での $j(\tau) - 744$ の値 (代数的整数になることが知られている) のトレースである．正確な定義は §3.1 で与える．$d < -1$ ならば $\mathbf{t}(d) = 0$ となっており, 上の和は実質有限和である．また実は, $\mathbf{t}(d)$ は簡単な一組の漸化式から全く初等的に計算することが出来る．つまり, 上の公式は, c_n を CM 点 (楕円的固定点) での値で表す一種の跡公式のようなものと見ることも出来る一方, c_n の初等的公式と見ることも出来る.

フーリエ係数 c_n の閉じた公式 (漸化式ではなく) としては, 他に Petersson[9] (1932) と Rademacher[10] (1938) によるもの (独立に発見, 証明の方法も異なる) が知られている．それは c_n をベッセル[11] 関数の入った無限和で表すもので, 解析的公式と言えるものである．まえがきにも書いたように, この講義録では公式だけを掲げるに止め, 証明は原論文[12]をご覧頂くことにする.

定理 1.0.1 (Petersson 1932, Rademacher 1938)

$$c_n = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(n,-1)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right) \quad (n \geq 1).$$

ここに

$$S_k(n,-1) = \sum_{\substack{h,h' \pmod{k} \\ hh' \equiv 1 \pmod{k}}} e^{\frac{2\pi i}{k}(nh-h')}$$

はクルースターマン[13] 和と呼ばれる 1 の巾根の有限和,

$$I_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m+1}}{m!(m+1)!}$$

は (第一種変形) ベッセル関数.

---

[9] Wilfried Hans Henning Petersson (1902.9.24—1984.11.9), 先生は Hecke, 弟子に Maass がいる.

[10] Hans Rademacher (1892.4.3—1969.2.7)

[11] Friedrich Wilhelm Bessel (1784.7.22—1846.3.17)

[12] H. Petersson, *Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen,* Acta Math. **58** (1932), 169–215.

H. Rademacher, *The Fourier coefficients of the modular invariant $J(\tau)$,* Amer. J. Math. **60** (1938), 501–512.

[13] Hendrik Douwe Kloosterman (1900.4.9—1968.5.6). オランダ生れ．職はずっと Leiden.

クルースターマン和はベッセル関数の有限体類似と言ってよいものなので, 何か玄妙な趣きが感じられる公式である. Rademacher は逆に, この公式で c_n を定義し, それをフーリエ係数とする級数が $SL_2(\mathbf{Z})$ 不変になる ($j(\tau)$ になる) ことを証明している[14]. また, この公式の右辺は $n \to 0$ のとき値 24 に収束する (その計算に $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ を使う). これは「正しい $j(\tau)$」が $j(\tau) - 720$ であるとの主張の一つの根拠として引き合いに出される[15].

以下の章で定理 A の証明とその背景の説明を与えていくが, その前に, c_n について他になされてきたことを, $j(\tau)$ 自身についてとともに歴史を遡って少し振り返ってみるとしよう.

---

[14] *The Fourier series and the functional equations of the absolute modular invariant* $J(\tau)$, Amer. J. Math. **61** (1939), 237–248.

[15] 他に, $j(\tau) - 720 = \Theta_{\mathrm{Leech}}(\tau)/\Delta(\tau)$, また $j(\tau) - 720 =$Atkin 直交多項式系の 1 次多項式.

第2章　$j(\tau)$ 小史

高木貞治[1]著の「近世数学史談」に次のような一節がある.

> 十九世紀数学の最初の飛躍は楕円函数の発見である. 然るにガウスはアーベル, ヤコービに先だつこと三十年にして既に楕円函数を発見している, 少なくとも発見の端緒を確実に把握している. 又デデキンドに先だつこと五十年にして既に modular 函数を発見してアーベル, ヤコービを凌駕しているのである. しかもそれは一例に過ぎない. (5. ガウス文書)

Gauss[2]が算術幾何平均と楕円積分との間の関係[3]に導かれて発見, 研究した(が, 生前は発表しなかった[4]) モジュラー関数は今の言葉で言うとレベル 2 のモジュラー関数であり, $j(\tau)$ は現れていない. ただ遺稿の中で少なくとも一カ所, $j(\tau)$ にあたる関数の研究を仄めかしているところがある (全集 III 巻 386 ページ). たった 5 行の走り書きのようなもので, 「負の判別式を持つ 2 次形式と "summatorische Function[5]" ($j(\tau)$ にあたるものであろう) との関係」とか, 「$SL_2(\mathbf{Z})$ で不変な関数 (とは書いてないが実質同等なこと) を考えうる」などと書いてあって, Gauss はこれをどこまで研究していたのだろうと空想を誘う.

---

[1] 1875.4.21—1960.2.29

[2] Carl Friedlich Gauss (1777.4.30—1855.2.23)

[3] 1 と $\sqrt{2}$ の算術幾何平均が円周率と "レムニスケート率" の比に等しいことを Gauss は数値的に見抜き (1.19814023473... を見てこれが π と $2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$ の比に等しいと見当のつく人はそうはいないだろう!), その背後に "解析の新しい分野" のあることを予感, 間もなく自らその予感の正しきを証した. Gauss の遺稿にあった $\Gamma(2)$ の基本領域の図は, 1866 年刊行の全集 III 巻 (477, 478 ページ) では, おそらくは編者がその意味を取れず, 誤って写されていたが, Fricke が編者に入った 1900 年刊行の VIII 巻 (105 ページ) においてようやく正しく書き直された.

[4] Gauss のこの発見の歴史については, 例えば David A. Cox の *Gauss and the Arithmetic-Geometric Mean*, Notices of the American Mathematical Society **32** (1985), 147–151 やそこのレファレンスを参照.

[5] つづりはこの通りである. 以下, いくつかの引用文献の独語タイトルに, 今なら k と綴るところが c となっているものがあるが, 全て原本通りである. 念のため.

また Hermite[6]も, 1859 年の論文[7]において $j(\tau)$ の定義式 (1.1) にあたるものを与えており, その q 展開の始めの 3 項を書いている．残念なことに, 一次の係数 196884 が誤って 196880 となっている．もし正しく書かれていれば, これが文献に現れた初めての 196884 になっていたであろう[8]．その後, いつ正しい値 196884 が初めて文献に現れたかはまだ調べる余地があって確言できないが, 少なくとも Weber[9]が 1900 年, Encyklop. d. math. Wissensch. I C 6 に書いた "Komplexe Multiplikation" の 721 ページには現れている[10]．Greenhill[11] の 1888 年の論文[12] には Hermite の 196880 が誤ったまま再生されているので, そのころはまだ c_1 の値が余りポピュラーでなかったことは確かそうである．

ついでながら述べておくと, Hermite は, 上記論文の当該個所で, $j(\frac{-1+\sqrt{-43}}{2}) = -2^{18}3^3 5^3$ に相当する値と

$$e^{\pi\sqrt{43}} = 884736743.9997775\ldots$$

を与え, このように整数に近い値が得られることは判別式 $-67, -163$ でも同様であること, そして $e^{\pi\sqrt{163}}$ は小数点以下 12 個の 9 が並ぶことを述べている．(実際

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999925007259 71\ldots$$

である.) これは「類数 1 の虚 2 次体の整数環のイデアルに対応する虚 2 次点での $j(\tau)$ の値は有理整数になる」という事実から説明される現象であり, 虚数乗法論が j 関数を使って定式化されたのはずっと後のこと (Pick[13], Weber) であることを思えば, 先駆的な考察であると思われる．なお, 虚数乗法論につ

[6] Charles Hermite (1822.12.24—1901.1.14)

[7] *Sur la Théorie des Équations Modulaires*, Comptes Rendus XLVIII, XLIX (1859), 全集 II 巻 38–82 ページ．これの第 VIII 節

[8] この 196884 は後で触れる Moonshine との関わりで重要な数なのである．

[9] Heinrich Martin Weber (1842.5.5—1913.5.17)

[10] John Mckay 氏からの私信で, H. Weber, Elliptische Functionen und Algebraische Zahlen (Vieweg, Braunschweig, 1891) にあるのではないかとのこと．九大にないので, 阪大の小川裕之さんに調べてもらったところ, §72 に確かに 196884 が出ているそうである．

[11] Alfred George Greenhill (1847.11.29—1927.2.10)

[12] *Complex multiplication moduli of elliptic functions*, Proc. London Math. Soc. **19** (1888), 301–364. その p. 307.

[13] Georg Alexander Pick (1859.8.10—1942.7.26). この人は, 単位正方格子点上に頂点を持つ多角形の面積の公式 (内部の格子点の数 + 周上の格子点の数 /2 − 1) で有名．Einstein のプラハ時代の同僚で, 矢野健太郎は「ゲオルグ・ピックくらいアインシュタインの仕事に対して大きな影響を与えた人物はないと思う」と書いている．色々な分野の仕事をした人．

いては述べられた本[14]も多いし, ここでは省略する.

さてそもそも $j(\tau)$ を, 楕円関数とは独立に, $\mathfrak{H}$ 上の $SL_2(\mathbf{Z})$ 不変な関数として研究し始めたのは Dedekind と Klein[15] が最初である. 彼らの論文[16]はその動機も行っていることも全くといっていいほど違う. 一言でいうと, Klein は関数論的, Dedekind は数論的, となるだろうか. 数論の立場から見ると, Dedekind の論文がとりわけ興味深く思われる. 彼は序文の中で, 自分の研究動機が, 3 次体の類数の決定と楕円関数の虚数乗法との間の深い関係に気づいたことにあると述べているが, 残念なことにこれらの関係について彼が書き残したものはないと思われる[17].

フーリエ係数 c_n の数値計算については, Berwick[18] が 1916 年に c_7 までの値を与え[19], その後 Herbert Zuckerman が 1939 年に c_{24} まで[20], 更に van Wijngaarden[21] が 1953 年に c_{100} までの表[22]を与えている.

---

[14] S. Lang: Elliptic Functions, Second Edition, Graduate Text in Mathematics **112**, Springer-Verlag, 1987.

D.A. Cox: Prime of the form x^2+ny^2, John Wiley & Sons, 1989.

S.G. Vladut: Kronecker's Jugendtraum and modular functions, Gordon and Breach, 1991.

J.H. Silverman: Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves, Graduate Text in Mathematics **151**, Springer-Verlag, 1994.

[15] Felix Christian Klein (1849.4.25—1925.6.22)

[16] R. Dedekind: *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen,* Jour. für die reine und angew. Math. **83** (1877) 265–292, 全集 1 巻 174–201.

F. Klein: *Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades,* Math. Annalen **14** (1878/79), 全集 3 巻 13–75.

[17] これは自分が調べた範囲で言っているので, もし何か存在するのであれば是非ご一報下されたし.

[18] William Edward Hodgson Berwick (1888.3.11—1944.5.13)

[19] *An invariant modular equation of the fifth order*, Quarterly Journal of Mathematics **47** (1916), 94–103.

[20] *The computation of the smaller coefficients of* $J(\tau)$, Bulletin of the American Mathematical Society **45** (1939), 917–919.

[21] Adriaan van Wijngaarden (1916.11.2—1987.2.7), オランダの人. 主としてコンピューターサイエンスの方で大きな業績を上げた人のようである.

[22] *On the coefficients of the modular invariant* $J(\tau)$, Indagationes Math. **15** (1953), 389–400.

c_n の合同式を論文に書いたのは Lehmer[23] がはじめと思われる. 彼は 1942 年の論文[24]において

> It is only in recent years, however, that some attention has been paid to the coefficients in the Fourier series for J.

と書いて, $j(\tau)$ に Hecke 作用素を施して得られる関数のフーリエ係数なども調べているが, その中で例えば

$$k \not\equiv \pm 1 \bmod 5 \text{ または } k \not\equiv 0 \bmod 25 \text{ ならば } \ c_k \equiv 0 \bmod 5$$

や,

$$k \text{ が } \mathrm{mod}\ 49 \text{ で平方でない ならば } \ 2c_{2k} + c_{k/2} \equiv c_k \bmod 7$$

などを示している.

その後 Joseph Lehner は 1949 年, American Journal に発表の二編の論文[25]において, 任意の $a, n \geq 1$ に対し,

$$\begin{aligned}
n \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 2^a \text{ ならば } \ c_n &\equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 2^{3a+8},\\
n \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 3^a \text{ ならば } \ c_n &\equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 3^{2a+3},\\
n \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 5^a \text{ ならば } \ c_n &\equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 5^{a+1},\\
n \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 7^a \text{ ならば } \ c_n &\equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 7^{a},
\end{aligned}$$

および $n \geq 1$ と $1 \leq b \leq 3$ について

$$n \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 11^b \text{ ならば } \ c_n \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ 11^b$$

が成り立つことを示した.

さらにその後の一般化として, O. Kolberg, M. Newman, A.O.L. Atkin, Atkin-J.N. O'Brien, 小池正夫, 秋山茂樹らの研究があるが, 最後に挙げたそれぞれの論文に譲る.

---

[23] Derrick Henry Lehmer (1905.2.23—1991.5.22). 1914 年に 10006721 までの素数表を出したのは彼の父 Derrick Norman Lehmer である.

[24] *Properties of the coefficients of the modular invariant* $J(\tau)$, Amer. J. Math. **64** (1942), 488–502.

[25] *Divisibility properties of the Fourier coefficients of the modular invariant* $j(\tau)$, Amer. J. Math. **71** (1949), 136–148. および *Further congruence properties of the Fourier coefficients of the modular invariant* $j(\tau)$, 同 373–386.

また, Mahler[26] は超越数論の方からモジュラー方程式の研究に導かれ, 特に, レベル 2 の関係式 ($j(\tau)$ と $j(2\tau)$ の関係式) から, c_n の次のような漸化式を導いている[27]. これは c_1, c_2, c_3, c_5 (c_4ではない) を初期値とし, n の mod 4での類に応じて

$$
\begin{aligned}
c_{4k} &= c_{2k+1} + \sum_{j=1}^{k-1} c_j c_{2k-j} + (c_k^2 - c_k)/2, \\
c_{4k+1} &= c_{2k+3} + \sum_{j=1}^{k} c_j c_{2k-j+2} + \sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^j c_j c_{4k-j} + \sum_{j=1}^{k-1} c_j c_{4k-4j} \\
&\quad - c_2 c_{2k} + (c_{k+1}^2 - c_{k+1})/2 + (c_{2k}^2 + c_{2k})/2, \\
c_{4k+2} &= c_{2k+2} + \sum_{j=1}^{k} c_j c_{2k-j+1}, \\
c_{4k+3} &= c_{2k+4} + \sum_{j=1}^{k+1} c_j c_{2k-j+3} + \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j c_j c_{4k-j+2} + \sum_{j=1}^{k} c_j c_{4k-4j+2} \\
&\quad - c_2 c_{2k+1} - (c_{2k+1}^2 - c_{2k+1})/2
\end{aligned}
$$

で c_n が決まっていくというものである. 例えば,

$$
\begin{aligned}
c_4 &= c_3 + (c_1^2 - c_1)/2 \\
&= 864299970 + (196884^2 - 196884)/2 \\
&= 20245856256, \\
c_6 &= c_4 + c_1 c_2 \\
&= 20245856256 + 196884 \cdot 21493760 \\
&= 4252023300096,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_7 &= c_6 + c_1 c_4 + c_2 c_3 - c_1 c_5 + c_2 c_4 + c_1 c_2 - c_2 c_3 - (c_3^2 - c_3)/2 \\
&= 4252023300096 + 196884 \cdot 20245856256 - 196884 \cdot 333202640600 \\
&\quad +21493760 \cdot 20245856256 + 196884 \cdot 21493760 \\
&\quad -(864299970^2 - 864299970)/2 \\
&= 44656994071935,
\end{aligned}
$$

[26]Kurt Mahler (1903.7.26 — 1988.2.25)

[27]*On a class of non-linear functional equations connected with modular functions*, J. Austral. Math. Soc. **22** (Ser. A) (1976), 65–120.

など.

c_n を求める漸化式としては, 例えば, $j(\tau)E_6(\tau) = -q\frac{d}{dq}j(\tau)E_4(\tau)$ のフーリエ展開係数を較べて得られる

$$c_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=-1}^{n-1} c_i(504\sigma_5(n-i) - 240i\sigma_3(n-i))$$

(ここに $\sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$) などがあるが, 上記 Mahler の漸化式は格段に早く c_n を計算できる.

最後に, $j(\tau)$ のフーリエ係数について述べるにあたって "Moonshine" に触れないわけにはいかない. これをごく手短に述べよう.

通常「モンスター」と呼ばれる, 位数が

$$\begin{aligned} & 2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^9\cdot 7^6\cdot 11^2\cdot 13^3\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71 \\ = \; & 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \end{aligned}$$

(約 8×10^{53}) の有限群がある. これは, 26 個ある散在型有限単純群の内, 位数が最大のものである. この群は, その存在が確定する前から, 次数 196883 の既約指標を持つ, という仮定の下に指標表が作成されていた. その 196883 が $j(\tau)$ の q-展開の 1 次の係数 196884 から 1 だけ減じた数に他ならないことを注意したのは John Mckay, 本人の言によると Dedekind の論文より 101 年目の 1978 年のことという[28]. その後 John Thompson が, c_5 までをモンスターの既約表現の次数の簡単な一次結合で書いた表と, このことの説明として各 n に対し c_n 次元のベクトル空間でモンスターの表現空間となっているものの存在を問う短い論文[29]を書く. 例えばモンスターの既約指標の次数は小さい順に 1, 196883, 21296876, 842609326, ... となっているが,

$$\begin{aligned} c_1 &= 196884 = 1 + 196883, \\ c_2 &= 21493760 = 1 + 196883 + 21296876, \\ c_3 &= 864299970 = 2\cdot 1 + 2\cdot 196883 + 21296876 + 842609326 \end{aligned}$$

[28]Dedekind の論文の日付は 1877 年 6 月 12 日になっている. Mckay さんはこの日の丁度 120 年後, Göttingen で講演されたとか. (さらに蛇足を書くと, 私もこの日, 都立大の談話会で $j(\tau)$ についての話をさせて頂き, 幸運な偶然を喜んだのであった.)

[29]*Some numerology between the Fischer-Griess Monster and the elliptic modular function*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 352–353.

といった具合である．それから間もなく，この Mckay-Thompson の観察は，John Conway (三たび John だ) と Simon Norton による “Monstrous Moonshine” という論文[30]において，はるかに一般的かつ精密な形の予想として提出され，それから十数年の後，Conway の弟子の Richard Borcherds により最終的に解決された[31]．これらについては最近の原田耕一郎による本[32]や論説[33]，その他文献に譲る[34].

---

[30] *Monstrous Moonshine,* Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 308–339.
[31] *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras,* Invent. Math. **109** (1992), 405–444.
[32] モンスター 群のひろがり, 岩波書店 (1999).
[33] モンスターの数学, 「数学」51 巻 1 号 (1999).
[34] 第 6 章参照

第3章　定理 A (数論的公式) の証明

この章では, まず §3.1 で $\mathbf{t}(d)$ の正確な定義を与え定理 A をもう一度述べたあと, §3.2 においてその証明を与える. 証明の中心をなすのは Zagier の定理 (§3.2 定理 Z) であって, 実のところこの定理を認めると定理 A は殆んど直ちに出る. しかしそれはあくまで定理 A の形を知ったうえでのことであって, それを見出すのは自明ではない. 定理 Z の証明は次章にまわす.

3.1　特異モジュラスのトレース

整係数正定値二次形式 $Q(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ (必ずしも原始的, すなわち $(a,b,c) = 1$ とは仮定しない) について, その判別式 $b^2 - 4ac$ (< 0) を $\mathrm{disc}(Q)$, また $Q(X,Y)$ の $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値類 ($\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$ の作用は $(X,Y) \mapsto (X,Y)^t\gamma$ とする) を $[Q]$ で表す. $Q = aX^2 + bXY + cY^2$ に対し,

$$\alpha_Q := \frac{-b + \sqrt{\mathrm{disc}(Q)}}{2a}$$

とおくとき, 値 $j(\alpha_Q)$ は $[Q]$ のみによる. また,

$$w_Q := \begin{cases} 3, & Q \text{ が } a(X^2 + XY + Y^2) \text{ の形の形式に } SL_2(\mathbf{Z}) \text{ 同値}, \\ 2, & Q \text{ が } a(X^2 + Y^2) \text{ の形の形式に } SL_2(\mathbf{Z}) \text{ 同値}, \\ 1, & \text{その他}, \end{cases}$$

とおく.

定義 3.1.1 $d > 0,\ d \equiv 0$ または $3 \pmod 4$ に対し,

$$\mathbf{t}(d) := \sum_{\substack{[Q] \\ \mathrm{disc}(Q) = -d}} \frac{1}{w_Q}(j(\alpha_Q) - 744),$$

ただし和は, 判別式が $-d$ の (原始的とは限らない) 正定値二次形式の $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値類の代表をわたる, とし, 更に,

$$\mathbf{t}(0) = 2,\ \mathbf{t}(-1) = -1,$$

その他の d ($d < -1$ または $d \equiv 1$ または $2 \mod 4$) については $\mathbf{t}(d) = 0$ とする.

ちなみに, クロネッカー[1]・フルヴィッツ[2] 類数 $H(d)$ は, やはり $d > 0, d \equiv 0$ または $3 \pmod 4$ に対し,

$$H(d) = \sum_{\substack{[Q] \\ \mathrm{disc}(Q)=-d}} \frac{1}{w_Q},$$

及び $H(0) = -\frac{1}{12}$ (他の $H(d) = 0$) で定義され, これも後で登場する. $\mathbf{t}(d)$ の定義は $H(d)$ の定義において関数 1 を $j(\tau) - 744$ に置き換えたものと見ることができ, これまで調べられてなかったのが不思議な気もする.

判別式 $-d$ の正定値 原始的2 次形式の類数を $h(-d)$ とかく. Q が判別式 $-d$ で原始的であるとき, 古典的虚数乗法論によれば, $j(\alpha_Q)$ は $h(-d)$ 次の代数的整数であって, 同じ判別式をもつ互いに非同値な形式 Q' に対する $j(\alpha_{Q'})$ の全体が丁度 $j(\alpha_Q)$ の $\mathbf{Q}$ 上の共役を与えている. 従って, $-d$ が所謂基本判別式で, $-3, -4$ と異なるとき, $\mathbf{t}(d)$ は $j(\alpha_Q) - 744$ ($\mathrm{disc}(Q) = -d$) のトレースである.

後で証明するように, $\mathbf{t}(d)$ は次の一組の漸化式を満たし, これから (定義を知らずとも, すなわち虚数乗法とは無関係に) 値が求まる:

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}(4n - r^2) = 0, \tag{3.1}$$

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} r^2\mathbf{t}(4n - r^2) = -480\sigma_3(n). \tag{3.2}$$

ここに $\sigma_3(n)$ は $n > 0$ のとき $\sum_{d|n} d^3$, $n = 0$ のとき $\frac{1}{240}(= \frac{1}{2}\zeta(-3))$ を表す. この漸化式は

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(4n-1) &= -240\sigma_3(n) - \sum_{2\le r\le\sqrt{4n+1}} r^2\mathbf{t}(4n - r^2), \\ \mathbf{t}(4n) &= -2\sum_{1\le r\le\sqrt{4n+1}} \mathbf{t}(4n - r^2),\end{aligned}$$

[1]Leopold Kronecker (1823.12.7—1891.12.29)
[2]Adolf Hurwitz (1859.3.26—1919.11.18)

とも書けて, 空な和を 0 として, $n=0,1,2,\ldots$ とすることにより $\mathbf{t}(d)$ が順に求まっていく. (初期値を与える必要もない.)

例えば, $n=0$ として第一式より $\mathbf{t}(-1)=-1$. すると第二式より $\mathbf{t}(0)=-2\cdot\mathbf{t}(-1)=2$. 以下順に, $n=1,\ 2,\ 3$ として

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(3) &= -240\sigma_3(1)-2^2\mathbf{t}(0)\\
&= -240-4\cdot 2\\
&= -248,\\
\mathbf{t}(4) &= -2\cdot(\mathbf{t}(3)+\mathbf{t}(0))\\
&= -2\cdot(-248+2)\\
&= 492,\\
\mathbf{t}(7) &= -240\sigma_3(2)-(2^2\mathbf{t}(4)+3^2\mathbf{t}(-1))\\
&= -240\cdot 9-(4\cdot 492-9)\\
&= -4119,\\
\mathbf{t}(8) &= -2\cdot(\mathbf{t}(7)+\mathbf{t}(4)+\mathbf{t}(-1))\\
&= -2\cdot(-4119+492-1)\\
&= 7256,\\
\mathbf{t}(11) &= -240\sigma_3(3)-(2^2\mathbf{t}(8)+3^2\mathbf{t}(3))\\
&= -240\cdot 28-(4\cdot 7256+9\cdot(-248))\\
&= -33512,\\
\mathbf{t}(12) &= -2\cdot(\mathbf{t}(11)+\mathbf{t}(8)+\mathbf{t}(3))\\
&= -2\cdot(-33512+7256-248)\\
&= 53008.
\end{aligned}$$

クロネッカー・フルヴィッツ類数 $H(d)$ も同様の漸化式

$$\begin{aligned}
\sum_{r\in\mathbf{Z}}H(4n-r^2) &= \sum_{d|n}\max(d,\frac{n}{d})\\
\sum_{r\in\mathbf{Z}}(n-r^2)H(4n-r^2) &= \sum_{d|n}\min(d,\frac{n}{d})^3
\end{aligned}$$

を満たし, $H(d)$ をやはり漸化的に計算できる. このような, 2 次形式の類数が満たす関係式は実に多くのものが知られており, Dickson[3] の本[4]の III 巻第 VI

[3] Leonard Eugene Dickson (1874.1.22 — 1954.1.17)

[4] History of Theory of Numbers, 1923, Chelsea 版 1992.

章[5]に沢山の公式が集められている．それらに対応するような $\mathbf{t}(d)$ の漸化式のバリアントも色々存在するのかもしれない．

ここで $\mathbf{t}(d)$ と $H(d)$ の表を $d \le 100$ まで与えておこう．

d	$H(d)$	$\mathbf{t}(d)$	d	$H(d)$	$\mathbf{t}(d)$
-1	—	-1	51	2	-5541103056
0	$-\frac{1}{12}$	2	52	2	6896878512
3	$\frac{1}{3}$	-248	55	4	-13136687601
4	$\frac{1}{2}$	492	56	4	16220381536
7	1	-4119	59	3	-30197680312
8	1	7256	60	4	37017882624
11	1	-33512	63	5	-67515206970
12	$\frac{4}{3}$	53008	64	$\frac{7}{2}$	82226601996
15	2	-192513	67	1	-147197952744
16	$\frac{3}{2}$	287244	68	4	178211037024
19	1	-885480	71	7	-313645814923
20	2	1262512	72	3	377674773768
23	3	-3493982	75	$\frac{7}{3}$	-654403831496
24	2	4833456	76	4	784073551152
27	$\frac{4}{3}$	-12288992	79	5	-1339190286960
28	2	16576512	80	6	1597178431536
31	3	-39493539	83	3	-2691907586232
32	3	52255768	84	4	3196800943968
35	2	-117966288	87	6	-5321761716339
36	$\frac{5}{2}$	153541020	88	2	6294842638512
39	4	-331534572	91	2	-10359073015248
40	2	425691312	92	6	12207820353536
43	1	-884736744	95	8	-19874477925452
44	4	1122626864	96	6	23340149127216
47	5	-2257837845	99	3	-37616060991672
48	$\frac{10}{3}$	2835861520	100	$\frac{5}{2}$	44031499225500

証明したい定理は次の公式であった．

[5] この章の執筆は G.H. Cresse.

定理 A すべての自然数 n に対し

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left\{\mathbf{t}(n-r^2) - \frac{(-1)^{n+r}}{4}\mathbf{t}(4n-r^2) + \frac{(-1)^r}{4}\mathbf{t}(16n-r^2)\right\}.$$

注意 3.1.2 上記漸化式を用いると, 右辺をより項数が少なく, 見掛けの分母 4 も出ない形に書き換えることができる :

$$c_n = \frac{1}{n}\left\{\sum_{r\in\mathbf{Z}}\mathbf{t}(n-r^2) + \sum_{r\geq 1,\mathrm{odd}}\Big((-1)^n\mathbf{t}(4n-r^2) - \mathbf{t}(16n-r^2)\Big)\right\}.$$

この公式と $\mathbf{t}(d)$ の表を用いて c_n のはじめのいくつかを計算してみると,

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2\mathbf{t}(0) - \mathbf{t}(3) - \mathbf{t}(15) - \mathbf{t}(7)\\
&= 2\times 2 - (-248) - (-192513) - (-4119)\\
&= 196884,\\
c_2 &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{t}(7) + \mathbf{t}(-1) - \mathbf{t}(31) - \mathbf{t}(23) - \mathbf{t}(7)\right)\\
&= \left(\mathbf{t}(-1) - \mathbf{t}(31) - \mathbf{t}(23)\right)/2\\
&= \left(-1 - (-39493539) - (-3493982)\right)/2\\
&= 21493760,\\
c_3 &= \frac{1}{3}\left(\mathbf{t}(3) + 2\mathbf{t}(-1) - \mathbf{t}(11) - \mathbf{t}(3) - \mathbf{t}(47) - \mathbf{t}(39) - \mathbf{t}(23) - \mathbf{t}(-1)\right)\\
&= \left(\mathbf{t}(-1) - \mathbf{t}(11) - \mathbf{t}(47) - \mathbf{t}(39) - \mathbf{t}(23)\right)/3\\
&= \left(-1 - (-33512) - (-2257837845) - (-331534572) - (-3493982)\right)/3\\
&= 864299970.
\end{aligned}$$

3.2 Zagier の定理と定理 A の証明

前節で導入した $\mathbf{t}(d)$ は重さ半整数のモジュラー形式のフーリエ係数となっている, というのが次の定理[6]の主張である. ただしここで考えるモジュラー形式は尖点での極は許す. このモジュラー形式と j 関数を結び付けることで定理 A が証明される.

[6]Don Zagier, *Traces of singular moduli*, Max-Planck-Institut für Mathematik Preprint Series 2000 (8), Theorem 1

定理 Z (Zagier) フーリエ級数

$$\begin{aligned} g(\tau) &:= \sum_{\substack{d\geq -1 \\ d\equiv 0,3(4)}} \mathbf{t}(d)q^d \quad (q=e^{2\pi i\tau}) \\ &= -\frac{1}{q}+2-248q^3+492q^4-4119q^7+7256q^8-\cdots \end{aligned}$$

で定義される関数 $g(\tau)$ は $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $\frac{3}{2}$ のモジュラー形式である．$g(\tau)$ は $\mathfrak{H}$ 上は正則であるが尖点に極をもつ．これは既知の関数により

$$g(\tau)=-\frac{E_4(4\tau)\theta_1(\tau)}{\eta(4\tau)^6}$$

と書ける．ここに $\theta_1(\tau)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n q^{n^2}$ は Jacobi[7] のテータ関数の一つ，$\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ は Dedekind のエータ関数である．

注意 3.2.1 クロネッカー・フルヴィッツ類数を係数とする $\sum H(d)q^d$ はモジュラー形式にならない[8]．従って，$\mathbf{t}(d)$ の定義で -744 を他の値に変えると上の定理は成り立たない．つまり $j(\tau)-744$ で $\mathbf{t}(d)$ を定義するのがこの定理には本質的である，ということになる．

この定理 Z の証明は次章に回し，先に定理 A を証明する．

定理 A の証明

モジュラー形式 $f(\tau)$ に対する作用素 U_4 を

$$(f|U_4)(\tau)=\frac{1}{4}\left(f\big(\frac{\tau}{4}\big)+f\big(\frac{\tau+1}{4}\big)+f\big(\frac{\tau+2}{4}\big)+f\big(\frac{\tau+3}{4}\big)\right)$$

で定義する．フーリエ展開で書くと $f=\sum a_n q^n$ のとき

$$f|U_4=\sum a_{4n}q^n$$

である．今，$f(\tau)$ がある合同部分群 Γ に関するモジュラー形式とすると，$\gamma\in M_2(\mathbf{Z}),\det(\gamma)>0$ に対し $f(\gamma\tau)$ は $\Gamma\cap\gamma^{-1}\Gamma\gamma$ に関する保型性をもつから，再

[7] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804.12.10—1851.2.18)

[8] しかしその $\Gamma_0(4)$ の作用の下での振る舞いはある意味分かっている．D. Zagier: *Nombres de classes et formes modulaires de poids* 3/2, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 281 (1975), no. 21, Ai, A883–A886 を参照．

びある合同部分群に関するモジュラー形式となる．特に $f|U_4$ や $f(\tau+\frac{1}{2})$ もそうである．また, f として, 尖点での極の位数がある限界を越えないものだけを考える場合, $f|U_4$ として出てくるものの尖点での極の位数もある限界を越えない．そこで, 天下り的に,

$$F(\tau) := g(\tau)\theta_0(\tau) - \frac{1}{4}(g\theta_1|U_4)(\tau+\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}(g\theta_1|U_4^2)(\tau)$$

と定義する．ここに $\theta_0(\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2}$ は Jacobi のテータ．(この $F(\tau)$ は, つまるところ定理の右辺の式がフーリエ係数として出てくるように定義されている．定理は, はじめ $g(\tau)$ と, $E_4(\tau)$ やテータ関数などとの関係がいろいろあるので, それらの係数の計算を飽きずにやっているうちに c_n が $\mathbf{t}(d)$ で表せそうだということになり, そこから試行錯誤の末にまず実験的に見つけたものなので, 証明を書くとどうしても天下りになる．もう少し, 自然に見える証明を §5.3 で与える.) さて, θ_0, θ_1 は重さ $\frac{1}{2}$ なので, 定理 Z より $F(\tau)$ は重さ 2 の, $\mathfrak{H}$ では正則, 尖点に極を持つ, ある合同部分群に関するモジュラー形式になる．フーリエ係数を計算すると,

$$\begin{aligned}
g(\tau)\theta_0(\tau) &= (\sum_{d\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}(d)q^d)(\sum_{r\in\mathbf{Z}} q^{r^2}) = \sum_{d,r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}(d)q^{d+r^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbf{Z}}(\sum_{r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}(n-r^2))q^n, \\
g(\tau)\theta_1(\tau) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}(\sum_{r\in\mathbf{Z}} (-1)^r\mathbf{t}(n-r^2))q^n, \\
(g\theta_1|U_4)(\tau) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}(\sum_{r\in\mathbf{Z}} (-1)^r\mathbf{t}(4n-r^2))q^n, \\
(g\theta_1|U_4)(\tau+\frac{1}{2}) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n(\sum_{r\in\mathbf{Z}} (-1)^r\mathbf{t}(4n-r^2))q^n, \\
(g\theta_1|U_4^2)(\tau) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}(\sum_{r\in\mathbf{Z}} (-1)^r\mathbf{t}(16n-r^2))q^n
\end{aligned}$$

となるので,

$$F(\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\left\{\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\mathbf{t}(n-r^2) - \frac{(-1)^{n+r}}{4}\mathbf{t}(4n-r^2) + \frac{(-1)^r}{4}\mathbf{t}(16n-r^2)\right)\right\}q^n$$

を得る．この係数値を実際計算してみるとどこまでも (自分は最初 q^{100} くらいまで確かめた．q^{1000} くらいまではパソコンで難なく出来る.) nc_n と一致して,

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}j(\tau)$$

と予想されるが, 実際始めの項が十分多く一致することを確かめれば, それで厳密に証明されたことになる. すなわち, 両辺はある群上の重さ 2 の形式で, 尖点での極の位数も押さえられているから, そのようなもの全体は有限次元, 従って両辺の差が $i\infty$ で十分高い位数[9]で零点をもてばそれは恒等的に 0 でなければならない.

また, 注意 3.1.2 の形への変形は次のようにする. $\sum_{r\in\mathbf{Z}}\mathbf{t}(4n-r^2)=0$ より,

$$\begin{aligned}\sum_{r\in\mathbf{Z}}(-1)^r\mathbf{t}(4n-r^2) &= \sum_{r:\text{even}}\mathbf{t}(4n-r^2)-\sum_{r:\text{odd}}\mathbf{t}(4n-r^2)\\ &= -2\sum_{r:\text{odd}}\mathbf{t}(4n-r^2)\\ &= -4\sum_{r\geq 1,\text{odd}}\mathbf{t}(4n-r^2).\end{aligned}$$

これと, n を $4n$ に変えた

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}}(-1)^r\mathbf{t}(16n-r^2)=-4\sum_{r\geq 1,\text{odd}}\mathbf{t}(16n-r^2)$$

を定理の公式に使えばよい.

[9]いくつなら十分かという具体的な数も, 群を特定すれば Riemann-Roch の定理を使って計算できる. 別証を与えるのでその計算はサボってしまったが, q^{1000} まで一致すればまず大丈夫である (Mathematica と Pari-GP で確認).

第4章　Zagier の定理の証明

この章では定理 Z の証明を行う．そのためには，係数 $\mathbf{t}(d)$ の満たす漸化式 (3.1), (3.2) を証明すればよいことをまず言っておく．この漸化式をもう一度定理として掲げておこう．

定理 Z′　すべての整数 $n \geq 0$ に対して次が成り立つ．

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}(4n-r^2) \;=\; 0, \tag{4.1}$$

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} r^2\mathbf{t}(4n-r^2) \;=\; -480\sigma_3(n). \tag{4.2}$$

ここに $\sigma_3(n)=\sum_{d|n} d^3 \quad (n>0),\ \sigma_3(0)=\frac{1}{240}$.

命題 4.0.2 定理 Z と定理 Z′ は同値である．

証明　一般論によれば[1]，f を $\Gamma_0(4)$ に関する重さ半整数 $k+\frac{1}{2}$ のモジュラー形式とすると，

$$(f\theta_0)|U_4 \text{ および } [f,\theta_0]|U_4$$

は $SL_2(\mathbf{Z})$ に関するそれぞれ重さ $k+1$, $k+3$ のモジュラー形式となる．ここに U_4 は前章の作用素であり，$[f,\theta_0]$ は “Rankin-Cohen bracket” とよばれるものの一番簡単な場合で，

$$[f,\theta_0](\tau)=(k+\frac{1}{2})f(\tau)\theta_0'(\tau)-\frac{1}{2}f'(\tau)\theta_0(\tau)$$

($'=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}=q\frac{d}{dq}$) で定義される．このことを今，重さ $\frac{3}{2}$ の $f=\sum_{d\geq -1} b(d)q^d$ に適用すると，

$$(f\theta_0)|U_4=0, \quad [f,\theta_0]|U_4=E_4(\tau) \text{ の定数倍}$$

[1] M. Eichler-D. Zagier: The Theory of Jacobi Forms, Birkhäuser, 1985, Theorem 5.5 参照．尖点に極を持つ場合に拡張する必要があるが，それは容易．

となることが結論できる．両辺のフーリエ係数を較べることで

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} b(4n-r^2)=0,\quad \sum_{r\in\mathbf{Z}} r^2 b(4n-r^2)=\sigma_3(n)\text{ の定数倍}$$

が得られる．勿論，第二式の「定数倍」の定数は，フーリエ係数の始めの方の値から一意に決まり，よって定理 Z から定理 Z$'$ が従うことがわかる．さて，いま f として $-E_4(4\tau)\theta_1(\tau)/\eta(4\tau)^6$ を考えると，これが $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $\frac{3}{2}$ のモジュラー形式であることは θ_1 や η の変換公式から確かめられる．従って，そのフーリエ係数を $\mathbf{t}'(d)$ とおくと，これは上の漸化式を満たす．とくに最初の値から第二式の右辺の定数も決まって，

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}'(4n-r^2)=0\quad \sum_{r\in\mathbf{Z}} r^2\mathbf{t}'(4n-r^2)=-480\sigma_3(n)$$

となる．この漸化式は $\mathbf{t}'(d)$ を完全に決めるので，もし $\mathbf{t}(d)$ が同じ漸化式を満たせば，両者は一致しなければならない．すなわち $g(\tau)=f(\tau)$ である．これで定理 Z$'$ から定理 Z が導かれることが言えた． □

定理 Z$'$ の証明

古典的な (非原始的) モジュラー多項式 $\Phi_n(X,Y)$ を

$$\begin{aligned}\Phi_n(X,j(\tau)) &= \prod_{M\in\Gamma\backslash\mathcal{M}_n}\bigl(X-j(M\circ\tau)\bigr)\\ &= \prod_{\substack{ad=n\\0\le b<d}}\left(X-j\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right)\end{aligned}$$

を満たす 2 変数多項式として定義する． ここに $\mathcal{M}_n$ は整数係数の 2 行 2 列の行列で行列式が n のもの全体を M と $-M$ を同一視して得られる集合で，$\Gamma=PSL_2(\mathbf{Z})$．$\Gamma\backslash\mathcal{M}_n$ の代表が $ad=n$, $0\le b<d$ なる $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ で与えられる．普通 M を原始的なもの (成分の最大公約数が 1 のもの) に限定して得られる

$$\Phi_n^0(X,j(\tau))=\prod_{\substack{ad=n\\0\le b<d\\(a,b,d)=1}}\left(X-j\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right)$$

で定まる $\Phi_n^0(X,Y)$ の方をモジュラー多項式と呼ぶことが多い．二つの関係は

$$\Phi_n(X,Y)=\prod_{f^2|n}\Phi^0_{n/f^2}(X,Y)$$

である.

また, 各判別式 $-d \quad (d > 0,\ d \equiv 0, 3 \bmod 4)$ に対し, 重みつきの類「多項式」$\mathcal{H}_d(X)$ を

$$\mathcal{H}_d(X) = \prod_{\substack{[Q] \\ \mathrm{disc}(Q)=-d}} \bigl(X - j(\alpha_Q)\bigr)^{1/w_Q}$$

で定義する. Q は判別式が $-d$ の原始的とは限らない正定値形式の代表をわたる. これは, $d/3$ が平方数のときは $X^{1/3}$ かける多項式, d が平方数のときは $(X-1728)^{1/2}$ かける多項式, その他の場合は多項式である. いくつか例を挙げる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_3 &= X^{1/3}, \\
\mathcal{H}_4 &= (X-1728)^{1/2}, \\
\mathcal{H}_7 &= X + 3375, \\
\mathcal{H}_8 &= X - 8000, \\
\mathcal{H}_{11} &= X + 32768, \\
\mathcal{H}_{12} &= X^{1/3}(X - 54000), \\
\mathcal{H}_{15} &= X^2 + 191025X - 121287375, \\
\mathcal{H}_{16} &= (X-1728)^{1/2}(X - 287496), \\
\mathcal{H}_{19} &= X + 884736, \\
\mathcal{H}_{20} &= X^2 - 1264000X - 681472000, \\
\mathcal{H}_{23} &= X^3 + 3491750X^2 - 5151296875X + 12771880859375, \\
\mathcal{H}_{24} &= X^2 - 4834944X + 14670139392, \\
\mathcal{H}_{27} &= X^{1/3}(X + 12288000), \\
\mathcal{H}_{28} &= X - 16581375, \\
\mathcal{H}_{31} &= X^3 + 39491307X^2 - 58682638134X + 1566028350940383, \\
\mathcal{H}_{32} &= X^2 - 52250000X + 12167000000, \\
\mathcal{H}_{35} &= X^2 + 117964800X - 134217728000, \\
\mathcal{H}_{36} &= (X-1728)^{1/2}(X^2 - 153542016X - 1790957481984), \\
\mathcal{H}_{39} &= X^4 + 331531596X^3 - 429878960946X^2 \\
&\quad +109873509788637459X + 20919104368024767633, \\
\mathcal{H}_{40} &= X^2 - 425692800X + 9103145472000.
\end{aligned}$$

モジュラー多項式を対角に制限したものは類多項式の積となる, すなわち次が成り立つ.

命題 4.0.3 n が平方数でないならば

$$\Phi_n(X,X) = \pm \prod_{r^2<4n} \mathcal{H}_{4n-r^2}(X).$$

n が平方数のときは

$$\left.\frac{\Phi_n(X,Y)}{X-Y}\right|_{Y\to X} = \pm\sqrt{n}\frac{\prod_{r^2<4n}\mathcal{H}_{4n-r^2}(X)}{\prod_{r^2<4}\mathcal{H}_{4-r^2}(X)}.$$

これは古典的な結果である. 右辺の符号も n で記述できるが, 必要としないので省略する. 証明は D.A. Cox の本[2]を参照のこと.

これを用いて $\sum_{r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}(4n-r^2)=0$ の証明をする. まず, $\mathcal{H}_d(j(\tau))$ の q-展開を計算すると,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_d(j(\tau)) &= \prod_{\substack{[Q]\\ \mathrm{disc}(Q)=-d}} (q^{-1}+744-j(\alpha_Q)+O(q))^{1/w_Q} \\
&= \prod_{\substack{[Q]\\ \mathrm{disc}(Q)=-d}} \left(q^{-1}(1-(j(\alpha_Q)-744)q+O(q^2))\right)^{1/w_Q} \\
&= q^{-H(d)}(1-\mathbf{t}(d)q+O(q^2)).
\end{aligned}$$

一方, 定義より

$$\begin{aligned}
\Phi_n(j(\tau),j(\tau)) &= \prod_{ad=n}\prod_{b=0}^{d-1}\left(j(\tau)-j\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right) \\
&= \prod_{ad=n}\prod_{b=0}^{d-1}(q^{-1}-\zeta_d^b q^{-a/d}+O(q^{1/d})) \\
&= \prod_{ad=n}(q^{-d}-q^{-a})(1+O(q^{>1})) \\
&= \pm\prod_{ad=n} q^{-\max(a,d)}(1-q^{|a-d|})(1+O(q^{>1})) \\
&= \pm\prod_{ad=n} q^{-\max(a,d)}(1-\varepsilon_a q+O(q^{>1})),
\end{aligned}$$

[2]Primes of the form x^2+ny^2, John Wiley & Sons, 1989, §13, Theorem 13.4. ただしそこでの Φ_n は原始的な方 (Φ_n^0 と書いたもの) である. 類多項式も異なるが, modify するのは難しくない.

ここに $\zeta_d = e^{2\pi i/d}$, ε_a は $a-d=\pm 1$ のとき (こうなるのは $4n+1$ が平方数のときに限る) 1 でその他のとき 0. これより, n が平方でないとき, $\Phi_n(j(\tau), j(\tau)) = \pm\prod_{r^2<4n}\mathcal{H}_{4n-r^2}(j(\tau))$ に $-q\frac{d}{dq}\log$ を施したものの定数項, 一次の項を較べてそれぞれ

$$\sum_{r^2<4n} H(4n-r^2) = \sum_{ad=n}\max(a,d)$$

および

$$\sum_{r^2<4n}\mathbf{t}(4n-r^2) = \begin{cases} 2, & 4n+1 = \text{平方数}, \\ 0, & 4n+1 \neq \text{平方数}. \end{cases}$$

($4n+1=r^2$ のとき $a=\frac{r-1}{2}$, $d=\frac{r+1}{2}$ または $a=\frac{r+1}{2}$, $d=\frac{r-1}{2}$.) $\mathbf{t}(-1)=-1$ としているので辻褄があって (すなわち, 左辺の和の r の範囲をすべての整数と変えたとき, $4n+1$ が平方の時のみ, $\mathbf{t}(-1)$ の項が出る. n は非平方としているので, $\mathbf{t}(0)$ は出ない) $\sum_{r\in\mathbf{Z}}\mathbf{t}(4n-r^2)=0$ を得る.

n が平方数の時, $4n+1$ は平方ではなく,

$$\left(\left.\frac{\Phi_n(X,Y)}{X-Y}\right|_{Y\to X}\right)\Bigg|_{X=j(\tau)} = q^{-(\sum_{ad=n}\max(a,d)-1)}(1+O(q^2)).$$

一方

$$\begin{aligned}&\prod_{r^2<4}\mathcal{H}_{4-r^2}(j(\tau)) = \mathcal{H}_3(j(\tau))^2\mathcal{H}_4(j(\tau))\\ =\ & q^{-2/3}(1+744q+O(q^2))^{2/3}\cdot q^{-1/2}(1-984q+O(q^2))^{1/2}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&\frac{\prod_{r^2<4n}\mathcal{H}_{4n-r^2}(j(\tau))}{\prod_{r^2<4}\mathcal{H}_{4-r^2}(j(\tau))}\\ =\ & q^{-(\sum_{r^2<4n}H(4n-r^2)-2/3-1/2)}\big(1-(\sum_{r^2<4n}\mathbf{t}(4n-r^2)+4)q+O(q^2)\big).\end{aligned}$$

先と同様に係数を較べて

$$\sum_{r^2<4n}H(4n-r^2) = \sum_{ad=n}\max(a,d)+\frac{1}{6}$$

および

$$\sum_{r^2<4n}\mathbf{t}(4n-r^2)+4 = 0$$

を得る. $H(0) = -\frac{1}{12}$, $\mathbf{t}(0) = 2$ としているので,

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} H(4n-r^2) = \sum_{ad=n} \max(a,d)$$

および

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}(4n-r^2) = 0$$

がそれぞれ得られる.

次に $\mathbf{t}(d)$ の第二の漸化式であるが, これは次の命題より導かれる. その証明の詳細は Zagier の論文[3]に譲る. また, 命題 4.0.3 と同様 n が平方数の時は補正が必要だが, その補正は読者に委ねるとする.

$\mathcal{H}_d(j(\tau))$ の $-q\frac{d}{dq}\log$ をとったものを $\Lambda_d(\tau)$ とする:

$$\Lambda_d(\tau) := -q\frac{d}{dq}\log \mathcal{H}_d(j(\tau)).$$

命題 4.0.4 n を平方でない正整数とする. このとき

$$\frac{E_4(\tau)E_6(\tau)}{\Delta(\tau)} \sum_{M\in\Gamma\backslash\mathcal{M}_n} \frac{(E_4|M)(\tau)}{j(\tau)-j(M\circ\tau)} = \frac{1}{2}\sum_{r^2<4n}(n-r^2)\,\Lambda_{4n-r^2}(\tau)\,,$$

ここに $\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$, $\mathcal{M}_n$ は 30 ページで定義した集合で, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_n$ に対し $(E_4|M)(\tau) := n^3(c\tau+d)^{-4}E_4(M\tau)$.

証明　両辺が $SL_2(\mathbf{Z})$ の重さ 2 の有理型モジュラー形式で, $i\infty$ で正則, 極は皆一位, なので留数を比較すればよいということになる. 計算は上述の Zagier 論文に譲る. □

命題の両辺の q-展開の 1 次までの項を比較する. まず

$$\frac{E_4(\tau)E_6(\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{1}{q}\left(1-240q+O(q^2)\right).$$

M の代表としてはモジュラー多項式の時にとった通常の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $ad=n$, $0 \le b < d$ を取るとして, $\zeta_d = e^{2\pi i/d}$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} & j(\tau) - j\left(\frac{a\tau+b}{d}\right) \\ = \;& q^{-1} - \zeta_d^{-b}q^{-a/d} + O(q^{>0}) \\ = \;& \begin{cases} q^{-1}\left(1-\zeta_d^{-b}q^{1-a/d}+O(q^{>1})\right), & a<d\text{ のとき} \\ -\zeta_d^{-b}q^{-a/d}\left(1-\zeta_d^{b}q^{a/d-1}+O(q^{>a/d})\right), & a>d\text{ のとき}. \end{cases} \end{aligned}$$

[3] *Traces of singular moduli*, MPI preprint series 2000 (8), §4 Proposition.

これより

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{ad=n\\0\le b<d}} \frac{n^3d^{-4}E_4(\frac{a\tau+b}{d})}{j(\tau)-j(\frac{a\tau+b}{d})}\\
= &\sum_{\substack{ad=n,\,a<d\\0\le b<d}} \frac{n^3d^{-4}(1+240\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_3(i)\zeta_d^{ib}q^{ia/d})}{q^{-1}\left(1-\zeta_d^{-b}q^{1-a/d}+O(q^{>1})\right)}\\
&+\sum_{\substack{ad=n,\,a>d\\0\le b<d}} \frac{n^3d^{-4}(1+240\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_3(i)\zeta_d^{ib}q^{ia/d})}{-\zeta_d^{-b}q^{-a/d}\left(1-\zeta_d^{b}q^{a/d-1}+O(q^{>a/d})\right)}\\
= &\sum_{\substack{ad=n,\,a<d\\0\le b<d}} n^3d^{-4}q(1+240\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_3(i)\zeta_d^{ib}q^{ia/d})\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_d^{-jb}q^{j(1-a/d)}+O(q^{>1})\right)\\
- &\sum_{\substack{ad=n,\,a>d\\0\le b<d}} n^3d^{-4}\zeta_d^{b}q^{a/d}(1+240\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_3(i)\zeta_d^{ib}q^{ia/d})\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_d^{jb}q^{j(a/d-1)}+O(q^{>a/d})\right).
\end{aligned}
$$

これに $\frac{1}{q}(1-240q+O(q^2))$ をかけたものの定数項と q の項までを計算する.

まず, $a<d$ の項 であるが,

$$
\begin{aligned}
&(1+240\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_3(i)\zeta_d^{ib}q^{ia/d})(1+\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_d^{-jb}q^{j(1-a/d)})\\
= \; &240\sum_{i,j=0}^{\infty}\sigma_3(i)\zeta_d^{(i-j)b}q^{j+(i-j)a/d} \quad (\sigma_3(0)=\frac{1}{240})
\end{aligned}
$$

の定数項は 1. (従って, 和 $\sum_{\substack{ad=n,\,a<d\\0\le b<d}}$ を取ると 定数項として

$$
\sum_{\substack{ad=n,\,a<d\\0\le b<d}} n^3d^{-4} = \sum_{\substack{ad=n,\,a<d\\0\le b<d}} a^3d^{-1} = \sum_{ad=n,\,a<d} \min(a,\frac{n}{a})^3
$$

が出るのだが, $H(d)$ の関係式についてはこれ以上触れない.) 次に q の項はどこから出てくるかを考える. $j+(i-j)a/d=1$ より, $i=j$ ならば $j=1$. $i\neq j$ ならば $a/d=(1-j)/(i-j)=(j-1)/(j-i)$, $d>a\ge 1$ であるから, $j\neq 0$ なら $i=0$, $a/d=(j-1)/j$, または $j=0$, で $a/d=1/i$.

1) $i=j=1$ なら $240q$.

2) $i=0$ のとき, $aj=d(j-1)$ より j は d の約数だが, $j\neq d$ だと $\sum_{0\le b<d}\zeta_d^{-jb}=0$ となるので, $j=d$ の項のみ生き残って, このとき $a=d-1$, $4n+1=$

$4d(d-1)+1=(2d-1)^2$. そして

$$\sum_{0\le b<d} n^3 d^{-4}\zeta_d^{-jb} q^{j(1-a/d)} = \left(\frac{n}{d}\right)^3 q = \left(\frac{|r|-1}{2}\right)^3 q \quad (4n+1=r^2).$$

3) $j=0$ のとき, $d=ai$ で, $i|d$ だが, $i\ne d$ なら同じく $\sum_{0\le b<d}\zeta_d^{ib}=0$ なので, $i=d,\ a=1$, すなわち $d=n,\ a=1$ の項のみ残り, その項は $240\sigma_3(n)q$.

よって,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{q}\left(1-240q+O(q^2)\right) \\
\times\ & \sum_{\substack{ad=n,\, a<d \\ 0\le b<d}} n^3 d^{-4}(1+240\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_3(i)\zeta_d^{ib}q^{ia/d})\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_d^{-jb}q^{j(1-a/d)}+O(q^{>1})\right) \\
=\ & \left(1-240q+O(q^2)\right) \\
\times\ & \left(1+240q+240\sigma_3(n)q+O(q^{>1})+\begin{cases}0, & 4n+1\ne \text{平方} \\ \left(\frac{|r|-1}{2}\right)^3 q, & 4n+1=r^2\end{cases}\right) \\
=\ & 1+240\sigma_3(n)q+O(q^{>1})+\begin{cases}0, & 4n+1\ne\text{平方}, \\ \left(\frac{|r|-1}{2}\right)^3 q, & 4n+1=r^2.\end{cases}
\end{aligned}$$

次に $a>d$ の項を見る. $a/d>1$ であるから q で割っても定数項は出ない. q の項は, $q^{ia/d}q^{j(a/d-1)}=q^{2-a/d}$ のとき, すなわち $(i+j+1)a/d=j+2$ のとき. これは, $a/d=(j+2)/(i+j+1)>1$ より $i=0,\ a/d=(j+2)/(j+1)$ が唯一の場合で, 先と同様に $j+1|d$ だが $j+1=d$ の項のみ残る. これはすなわち $a=d+1$ で, やはり $4n+1=$ 平方 のときである. このとき

$$\begin{aligned}
& \sum_{0\le b<d} n^3 d^{-4}\zeta_d^{b} q^{a/d}\zeta_d^{(d-1)b}q^{(d-1)(a/d-1)} \\
=\ & \sum_{0\le b<d} n^3 d^{-4} q^2 = \left(\frac{n}{d}\right)^3 q^2 = \left(\frac{|r|+1}{2}\right)^3 q^2 \qquad (4n+1=r^2).
\end{aligned}$$

合わせると, q の係数は

$$240\sigma_3(n)+\begin{cases}0, & 4n+1\ne\text{平方}, \\ \left(\frac{|r|-1}{2}\right)^3-\left(\frac{|r|+1}{2}\right)^3 (=n-r^2), & 4n+1=r^2.\end{cases}$$

よって命題 4.0.4 の両辺の q の係数を較べて

$$\frac{1}{2}\sum_{r^2<4n}(n-r^2)\mathbf{t}(4n-r^2)=240\sigma_3(n)+\begin{cases}0, & 4n+1\neq \text{平方},\\ n-r_1^2, & 4n+1=r_1^2.\end{cases}$$

$\mathbf{t}(4n-r_1^2)=\mathbf{t}(-1)=-1$ で, r_1 と $-r_1$ の場合があるから結局

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}}(n-r^2)\mathbf{t}(4n-r^2)=480\sigma_3(n)$$

が得られる. □

第5章　Borcherds の定理と Zagier の定理

Borcherds は一般 Kac-Moody Lie 環の理論を使って直交群 $O_{n,2}(\mathbf{R})$ 上の保型形式を無限積により構成した[1]が, これは特別な場合として $SL_2(\mathbf{Z})$ のモジュラー形式に対しても新しいことを言っていた. その, $SL_2(\mathbf{Z})$ の場合の Borcherds の定理が実質的に定理 Z と同値であることを示すのがこの章の目的である. 特に定理 Z は Borcherds の定理からも導かれることになる.

5.1　Borcherds の定理

記号を用意する.

$$\begin{aligned} M_{k+1/2}^{mer} &= \Gamma_0(4) \text{ に関する, 重さ } k+\frac{1}{2}, \text{上半平面 } \mathfrak{H} \text{ 上正則, 尖点} \\ &\quad i\infty, 0, -\frac{1}{2} \text{で有理型なる保型形式の全体}, \\ M_{k+1/2}^{mer,+} &= M_{k+1/2}^{mer} \text{の元で, その } i\infty \text{ でのフーリエ展開を } \sum_{n\gg-\infty} a(n)q^n \\ &\quad (q=e^{2\pi i\tau}) \text{ とするとき}, (-1)^k n \not\equiv 0,1 \pmod 4 \text{ ならば} \\ &\quad a(n)=0, \text{なるもの (“Kohnen's plus space”)}, \\ M_{k+\frac{1}{2}}^{mer,+}(\mathbf{Z}) &= M_{k+\frac{1}{2}}^{mer,+} \text{の元でフーリエ係数 } a(n) \text{ が } \mathbf{Z} \text{ に入るもの全体}. \end{aligned}$$

さらに,

$$h := \sum_{d=0}^{\infty} H(d)q^d = -\frac{1}{12} + \frac{1}{3}q^3 + \frac{1}{2}q^4 + q^7 + q^8 + q^{11} + \frac{4}{3}q^{12} + \cdots$$

[1] *Automorphic forms on* $O_{s+2,2}(\mathbf{R})$ *and infinite products*, Invent. math. **120** (1995), 161–213.

とおく．$H(d)$ は前章で定義したクロネッカー・フルヴィッツ類数である．このとき，

定理 B (Borcherds) $M_{1/2}^{mer,+}(\mathbf{Z}) \ni f = \sum_{n \gg -\infty} a(n)q^n$ に対し $s \in \mathbf{Q}$ を fh の q 展開の定数項とし，

$$\Psi_f(\tau) := q^{-s} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{a(n^2)} \quad (q = e^{2\pi i \tau})$$

とすると，$\Psi_f(\tau)$ は $SL_2(\mathbf{Z})$ 上の，重さ $a(0)$，指標つきの有理型保型形式を与える．$\Psi_f(\tau)$ の零点および極は尖点もしくは CM 点にのみあり，その判別式 $-D\,(<0)$ の CM 点での位数は $\sum_{t>0} a(-t^2D)$ (有限和，$-t^2D<0$ だから f の負べき項の係数しか寄与しない) で与えられる．

一般には，というより f が尖点で正則でない場合は常に，右辺の無限積は $\mathrm{Im}(\tau)$ が十分大なるところでのみ収束している．それが上半平面に有理型に解析接続されるというのである．また，$SL_2(\mathbf{Z})$ 上の，重さ整数の指標つきの有理型保型形式で，q-展開係数が整数，先頭の係数 $=1$，またその零点および極が尖点もしくは CM 点にのみあるような保型形式の全体を $\mathfrak{M}^{mer,CM}$ と書くとき，対応 $f \mapsto \Psi_f$ は加群 $M_{k+\frac{1}{2}}^{mer,+}(\mathbf{Z})$ と乗法群 $\mathfrak{M}^{mer,CM}$ の同型を与えている．

例として，

$$f = \theta_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2} = 1 + 2q + 2q^4 + \cdots$$

をとると，$fh = -\frac{1}{12} - \frac{1}{6}q + \frac{1}{3}q^2 + \cdots$ より $s = -\frac{1}{12}$ で，$\forall a(n^2) = 2\,(n \geq 1)$ なので

$$\Psi_f(\tau) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 = \eta(\tau)^2 \quad (\text{重さ } 1)$$

となる．また，あとで出てくる記号で，

$$f = f_3 + 4f_0 = q^{-3} + 4 - 240q + 26760q^4 + \cdots$$

ととると $s=0$ で，対応するものは重さ 4 の

$$E_4(\tau) = (1-q)^{-240}(1-q^2)^{26760} \cdots$$

である．これらの例についてはまた後述する．

この定理 B と Zagier の定理 Z の関係を見るために，まず，対応 $f \mapsto \Psi_f$ をより具体的に見る．すなわち $M_{\frac{1}{2}}^{mer,+}$ の基底を具体的に与え，その行き先を見る．

命題 5.1.1 各整数 $d \geq 0, \equiv 0, 3 \pmod 4$ に対し $i\infty$ での q-展開が $f_d = q^{-d} + O(q)$ であるような元 $f_d \in M^{mer,+}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{Z})$ が一意的に存在し, これらの f_d が $M^{mer,+}_{\frac{1}{2}}$ の $\mathbf{C}$ 上の基底をなす.

証明の前に始めの方の例を書いておくと,

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 1 + 2q + 2q^4 + 0 \cdot q^5 + 0 \cdot q^8 + \cdots (= \theta_0) \\
f_3 &= q^{-3} - 248q + 26752q^4 - 85995q^5 + 1707264q^8 + \cdots \\
f_4 &= q^{-4} + 492q + 143376q^4 + 565760q^5 + 18473000q^8 + \cdots \\
f_7 &= q^{-7} - 4119q + 8288256q^4 - 52756480q^5 + 5734772736q^8 + \cdots \\
f_8 &= q^{-8} + 7256q + 26124256q^4 + 190356480q^5 + 29071392966q^8 + \cdots .
\end{aligned}
$$

証明 次の補題が成り立つ.

補題 5.1.2 i) $\Gamma_0(4)$ の重さ $\frac{1}{2}$ の正則保型形式は $\theta_0(\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2} = 1 + 2q + 2q^4 + \cdots$ に限る (定数倍を除き).

ii) $M^{mer,+}_{\frac{1}{2}}$ の元は $i\infty$ で正則なら他の尖点でも正則である.

この補題より, $M^{mer,+}_{\frac{1}{2}}$ の元は $i\infty$ での q-展開の非正べき項で一意に決まることになるから, 各 d に対して実際に命題の f_d が存在することを示せばよい. それには, まず $f_0 = \theta_0$ ととり,

$$
f_3 = \frac{1}{12} \frac{E_4(4\tau)}{\Delta(4\tau)} \left(6E_6(4\tau)\theta_0(\tau)' - \frac{1}{2} E_6(4\tau)'\theta_0(\tau) \right) - 88\theta_0(\tau)
$$

とする ($' = q\frac{d}{dq}, E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$). この $(6E_6(\tau)\theta_0(\tau)' - \frac{1}{2}E_6(4\tau)'\theta_0(\tau))$ は前章でも出てきた Rankin-Cohen bracket で, 一般に, f, g がある群の重さ k, l のモジュラー形式とするとき, $[f, g] := kfg' - lf'g$ はその群の重さ $k + l + 2$ の形式になる. これは f^l/g^k が重さ 0 となり, その微分が重さ 2 となることからわかることであるが, 2 つのモジュラー形式のより高階の微分を組み合わせて新たなモジュラー形式を作りだすのが Rankin-Cohen bracket というものである. そして, $j(4\tau) = q^{-4} + 744 + \cdots$ が $\Gamma_0(4)$ の weight 0 の関数となることより, あとは f_0, f_3 に $j(4\tau)$ の多項式をかけることで順に構成できる. 例えば, f_7 ならばまず $f_3 j(4\tau)$ を作って, これから f_3 の定数倍と f_0 の定数倍を引いて $q^{-7} + O(q)$ となるようにすればよい. 以下同様である. 実は $M^{mer,+}_{\frac{1}{2}} = \mathbf{C}[j(4\tau)]\langle f_0, f_3 \rangle$ ($\mathbf{C}[j(4\tau)]$ 上の rank 2 の自由加群) となって

いることが示される. □

補題の証明 i) については, 例えば Koblitz の本[2]を参照 ($\Gamma_0(4)$ の重さ半整数の正則モジュラー形式の環が具体的に記述されている).

ii) であるが, $M^{mer,+}_{\frac{1}{2}} \ni f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ とし, これを

$$f(\tau) = f^{(0)}(4\tau) + f^{(1)}(4\tau), \quad f^{(0)} = \sum_{n\equiv 0(4)} a_n q^{n/4},\ f^{(1)} = \sum_{n\equiv 1(4)} a_n q^{n/4}$$

と書く.

$$f\left(\frac{\tau}{4\tau+1}\right) = \sqrt{4\tau+1}f(\tau)$$

より (一般に $z \in \mathbf{C}$ の平方根 $\sqrt{z}$ は偏角が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ になるようとるものとする),

$$f^{(0)}\left(\frac{4\tau}{4\tau+1}\right) + f^{(1)}\left(\frac{4\tau}{4\tau+1}\right) = \sqrt{4\tau+1}(f^{(0)}(4\tau) + f^{(1)}(4\tau)). \tag{5.1}$$

ここで $4\tau+1$ を τ におきかえると,

$$f^{(0)}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) + f^{(1)}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) = \sqrt{\tau}(f^{(0)}(\tau-1) + f^{(1)}(\tau-1)).$$

$f^{(0)}(\tau+1) = f^{(0)}(\tau),\ f^{(1)}(\tau+1) = if^{(1)}(\tau)$ より,

$$f^{(0)}(-\frac{1}{\tau}) + if^{(1)}(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{\tau}(f^{(0)}(\tau) - if^{(1)}(\tau)). \tag{5.2}$$

また, (5.1) で $4\tau+1$ を $-\frac{1}{\tau}$ におきかえて整理すると (平方根の取り方より $\sqrt{-\frac{1}{\tau}} = \frac{i}{\sqrt{\tau}}$ に注意する),

$$f^{(0)}(-\frac{1}{\tau}) - if^{(1)}(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{\tau}(-if^{(0)}(\tau) + f^{(1)}(\tau)) \tag{5.3}$$

を得る. (5.2), (5.3) より

$$\begin{aligned} f^{(0)}(-\frac{1}{\tau}) &= \frac{1-i}{2}\sqrt{\tau}(f^{(0)}(\tau) + f^{(1)}(\tau)) \\ f^{(1)}(-\frac{1}{\tau}) &= \frac{1-i}{2}\sqrt{\tau}(f^{(0)}(\tau) - f^{(1)}(\tau)) \end{aligned}$$

[2] Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Second Edition, Graduate Text in Mathematics **97**, Springer-Verlag, 1993, Ch.IV, Proposition 4, Corollary.

を得, 従って

$$f(-\frac{1}{\tau}) = f^{(0)}(-\frac{4}{\tau}) + f^{(1)}(-\frac{4}{\tau}) = \frac{1-i}{2}\sqrt{\tau} f^{(0)}(\frac{\tau}{4})$$

となる. これより, f は尖点 0 で正則であることがわかる.

また, もう一つの尖点 $-\frac{1}{2}$ においても, それを $i\infty$ にうつす変換 $\frac{\tau}{2\tau+1}$ によって

$$\begin{aligned} f(\frac{\tau}{2\tau+1}) &= f^{(0)}(\frac{4\tau}{2\tau+1}) + f^{(1)}(\frac{4\tau}{2\tau+1}) \\ &= f^{(0)}(2-\frac{2}{2\tau+1}) + f^{(1)}(2-\frac{2}{2\tau+1}) \\ &= f^{(0)}(-\frac{2}{2\tau+1}) - f^{(1)}(-\frac{2}{2\tau+1}) \\ &= (1-i)\sqrt{\tau+\frac{1}{2}} f^{(1)}(\tau+\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

と計算されるので f は $-\frac{1}{2}$ でも正則である. $\square$

この命題によって, 定理 B は実質的には $M^{mer,+}_{\frac{1}{2}}$ の各基底 f_d の対応 $f \mapsto \Psi_f$ による行き先が, 定理に述べられたモジュラー形式になることを確かめればよいことになる. $f_0 = \theta_0$ の像が

$$\Psi_{f_0} = q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 = \eta(\tau)^2$$

となることは既に述べた. $d > 0$ に対しては, まず $f_d h$ の定数項 $= H(d)$ であるから, $\Psi_{f_d} = q^{-H(d)} + \cdots$, 重さは f_d の定数項 $= 0$. また, 判別式 $-D < 0$ の CM 点での零点 (または極) の位数が $\sum_{t>0} a(-t^2 D)$ で与えられるというのだが, f_d の負べき項は唯一 q^{-d} だけなのであるから, それは, $d = t^2 D$ なる t が存在すれば 1, さもなくば 0.

これらの条件を満たす $\mathfrak{H}$ 上の関数は第 4 章で定義した類多項式

$$\mathcal{H}_d(X) = \prod_{\substack{[Q] \\ \mathrm{disc}(Q)=-d}} \bigl(X - j(\alpha_Q)\bigr)^{1/w_Q}$$

によって $\mathcal{H}_d(j(\tau))$ で与えられる. すると, $\Psi_{f_d}(\tau)/\mathcal{H}_d(j(\tau))$ は $\mathfrak{H}$ 上到るところ消えない, 重さ 0 の (指標がつくかも知れない) 関数で, $i\infty$ での値は 1. $SL_2(\mathbf{Z})$ の指標は $(SL_2(\mathbf{Z})/[SL_2(\mathbf{Z}), SL_2(\mathbf{Z})] \simeq \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ ゆえ$)12$ 乗すると消えるから,

$(\Psi_{f_d}(\tau)/\mathcal{H}_d(j(\tau)))^{12}$ は $\mathfrak{H}$ 上正則な $SL_2(\mathbf{Z})$ 不変な関数で, $i\infty$ でも正則であるので定数である. したがって $\Psi_{f_d}(\tau)/\mathcal{H}_d(j(\tau))$ は定数関数で, $i\infty$ での値が 1 ゆえ $\Psi_{f_d}(\tau) = \mathcal{H}_d(j(\tau))$ となる.

従って, Borcherds の定理の本質的な部分は次のようにも述べられる. f_d を先の命題の通りとし, その $i\infty$ でのフーリエ展開を

$$f_d(\tau) = q^{-d} + \sum_{D>0} A(d, D)q^D$$

とする. $D \equiv 0,\,1 \pmod 4$ でなければ $A(d, D) = 0$ である.

定理 B′ (Borcherds) $d > 0,\ d \equiv 0,\,3 \pmod 4$ に対し

$$\mathcal{H}_d(j(\tau)) = q^{-H(d)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{A(d,n^2)}.$$

ところで一方, $\mathcal{H}_d(j(\tau)) = q^{-H(d)}(1 - \mathbf{t}(d) + O(q^2))$ であったから, これと定理を較べると

系 5.1.3

$$\mathbf{t}(d) = A(d, 1) \quad \forall d > 0,\ \equiv 0,\,3 \pmod 4.$$

すなわち $\mathbf{t}(d)$ は重さ $\frac{1}{2}$ のモジュラー形式の一次の係数に現れているということである. 定理 Z のモジュラー形式 $g(\tau)$ は重さ $\frac{3}{2}$ であった. 実は次節に述べることより, この系から定理 Z が従うのである. それのみならず, 逆に, 定理 Z から定理 B が導かれる. それを次節で示すために, 上の系の一般化として, 定理の両辺の対数微分 $-q\frac{d}{dq}\log$ をとって, より一般の q^n の係数を較べることを考えよう.

今,

$$j(q) := \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots \in \mathbf{C}(\!(q)\!)$$

を $j(\tau)$ のフーリエ展開級数とし, j を変数とする多項式 $\varphi_n(j) \in \mathbf{C}[j]$ を

$$\varphi_0(j) = 1,\ \varphi_n(j(\tau)) = n(j(\tau) - 744)\big|_0 T_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

によって定義する. ここに,

$$f(\tau)\big|_0 T_n = \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \le b < d}} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right)$$

は重さ 0 のヘッケ[3]作用素である. $n(j(\tau)-744)\big|_0 T_n$ は $j(\tau)$ の n 次多項式となりそれを $\varphi_n(j)$ とするのである. また, 純代数的に, $\varphi_n(j)$ は $\varphi(j(q)) = q^{-n} + O(q)$ となる唯一の多項式としても特徴づけられる. $\varphi_n(j)$ は j の n 次モニック多項式で, 整数係数となる. 例えば,

$$\begin{aligned}
\varphi_0(j) &= 1, \\
\varphi_1(j) &= j - 744, \\
\varphi_2(j) &= j^2 - 1488j + 159768, \\
\varphi_3(j) &= j^3 - 2232j^2 + 1069956j - 36866976, \\
\varphi_4(j) &= j^4 - 2976j^3 + 2533680j^2 - 561444608j + 8507424792,
\end{aligned}$$

$-1963211493744.$

など.

補題 5.1.4 $\mathbf{C}[j][[q]]$ において,

$$-q\frac{\partial}{\partial q}\log(j(q) - j) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(j) q^n.$$

証明 $j(q) = q^{-1} + c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots$ とする. ヘッケ作用素を計算することで容易に

$$\varphi_n(j(q)) = \frac{1}{q^n} + nc_n q + O(q^2) \tag{5.4}$$

が分かる. また, $\varphi_1(j) = j - c_0$. そこで,

$$\begin{aligned}
&(j(q) - j)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(j) q^n\right) \\
= \ & (\frac{1}{q} - (j - c_0) + c_1 q + \cdots)(1 + \varphi_1 q + \varphi_2 q^2 + \cdots) \\
= \ & \frac{1}{q} + (c_1 + \varphi_2) q + \cdots
\end{aligned}$$

を計算するとその q^n $(n \geq 1)$ の係数は

$$\varphi_{n+1} - (j - c_0)\varphi_n + c_1\varphi_{n-1} + c_2\varphi_{n-2} + \cdots + c_{n-1}\varphi_1 + c_n$$

[3]Erich Hecke (1887.9.20 — 1947.2.13)

となる. これは j の多項式であるが, その j に $j(q)$ を代入して $O(q)$ を法として見ると, (5.4) より,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^{n+1}}+O(q)-\left(\frac{1}{q}+c_1q+c_2q^2+\cdots\right)\left(\frac{1}{q^n}+nc_nq+O(q^2)\right)\\&\quad+\frac{c_1}{q^{n-1}}+\frac{c_2}{q^{n-2}}+\cdots\frac{c_{n-1}}{q}+c_n+O(q)\\=&\quad -nc_n+O(q)\end{aligned}$$

となる. 従ってこの j の多項式は定数 $-nc_n$ でなければならず,

$$(j(q)-j)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(j)q^n\right)=-q\frac{\partial}{\partial q}j(q)$$

が得られる. □

注意 5.1.5 この補題は Borcherds の Moonshine 予想の証明で一つのポイントとなった *"denominator formula for the monster Lie algebra"*

$$(p^{-1}-q^{-1})\prod_{m,n>0}(1-p^mq^n)^{c_{mn}}=j(p)-j(q)$$

と同値である.

この補題を使うと,

$$\begin{aligned}-q\frac{d}{dq}\log\mathcal{H}_d(j(q)) &= -q\frac{d}{dq}\log\prod_{\substack{[Q]\\ \mathrm{disc}(Q)=-d}}(j(q)-j(\alpha_Q))^{1/w_Q}\\&=\sum_{\substack{[Q]\\ \mathrm{disc}(Q)=-d}}\frac{1}{w_Q}\left(-q\frac{d}{dq}\log\left(j(q)-j(\alpha_Q)\right)\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{[Q]\\ \mathrm{disc}(Q)=-d}}\frac{1}{w_Q}\varphi_n(j(\alpha_Q))\right)q^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{t}_n(d)q^n.\end{aligned}$$

ここに,

$$\mathbf{t}_n(d):=\sum_{\substack{[Q]\\ \mathrm{disc}(Q)=-d}}\frac{1}{w_Q}\varphi_n(j(\alpha_Q))$$

で, これは $H(d)\,(=\mathbf{t}_0(d))$, $\mathbf{t}(d)\,(=\mathbf{t}_1(d))$ の一般化である. 一方,

$$\begin{aligned} & -q\frac{d}{dq}\log\left(q^{-H(d)}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{A(d,n^2)}\right) \\ = \; & H(d)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nA(d,n^2)q^n}{1-q^n} \\ = \; & H(d)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l|n} lA(d,l^2)\right)q^n. \end{aligned}$$

よって二つを較べることにより, Borcherds の定理 (定理 B′) の系として

系 5.1.6

$$\mathbf{t}_n(d)=\sum_{l|n} lA(d,l^2) \quad (n\geq 1,\ d>0, \equiv 0,\, 3 \bmod 4).$$

あるいはメビウス[4]の反転公式を使って

$$A(d,n^2)=\frac{1}{n}\sum_{l|n}\mu(\frac{n}{l})\mathbf{t}_l(d).$$

5.2　Zagier の定理との関係

命題 5.1.1 で $M_{\frac{1}{2}}^{mer,+}$ の基底を与えたが, 同様に $M_{\frac{3}{2}}^{mer,+}$ の基底も具体的に与えることができる.

命題 5.2.1 各整数 $D>0$, $D\equiv 0,1 \pmod 4$ に対し $g_D=q^{-D}+O(1)$ である元 $g_D\in M_{\frac{3}{2}}^{mer,+}(\mathbf{Z})$ が一意的に存在し, これら g_D が $M_{\frac{3}{2}}^{mer,+}$ の $\mathbf{C}$ 上の基底をなす.

はじめのいくつかのフーリエ展開は

$$\begin{aligned} g_1 &= q^{-1}-2+248q^3-492q^4+4119q^7-7256q^8+\cdots, \\ g_4 &= q^{-4}-2-26752q^3-143376q^4-8288256q^7-26124256q^8+\cdots, \\ g_5 &= q^{-5}+0+85995q^3-565760q^4+52756480q^7-190356480q^8+\cdots, \\ g_8 &= q^{-8}+0-1707264q^3-18473000q^4-5734772736q^7-29071392966q^8+\cdots, \end{aligned}$$

[4]August Ferdinand Möbius (1790.11.17 — 1868.9.26)

となっている.

証明は $M^{mer,+}_{\frac{1}{2}}$ のときと同様で, 今度は $\Gamma_0(4)$ の重さ $\frac{3}{2}$ の正則形式はないこと (したがって前の命題では $O(q)$ だったところが $O(1)$ となる), また $i\infty$ で正則なら他の尖点でも正則なることを同じ計算で示し, 結局 g_1 と g_4 を構成すればあとは $j(4\tau)$ を使って作れる (やはり $M^{mer,+}_{\frac{3}{2}} = \mathbf{C}[j(4\tau)]\langle g_1, g_4\rangle$ となる). g_1, g_4 は

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= \frac{E_4(4\tau)\theta_1(\tau)}{\eta(4\tau)^6} \quad (= -g(\tau)) \\ g_4(\tau) &= -\frac{2j'(4\tau) + f_3(\tau)g_1(\tau)}{f_0(\tau)} \end{aligned}$$

で与えられる. $' = q\frac{d}{dq}$, $\theta_1(\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n q^{n^2}$ である. $\eta(\tau)$ は $\mathfrak{H}$ 上零点を持たず, $f_0 = \eta(2\tau)^5/(\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2)$ より f_0 も $\mathfrak{H}$ 上に零点を持たない. この表示からは $g_4(\tau)$ が “plus space” に入ることが明らかではないが (g_1 の方は定義から分かる),

$$g_4(\tau) = \frac{1}{20}\left(\frac{[g_1(\tau), E_4(4\tau)E_6(4\tau)]}{\Delta(4\tau)} - g_1(\tau)(10j(4\tau) - 21344)\right)$$

とも書けること (二つの右辺の等しいことは q-展開の始めの方の一致より分かる) から見てとれる.

さて, f_d, g_D の実例をよく眺めると著しいことに気がつかれるであろう. これは一般的に成り立つ. 即ち, それぞれのフーリエ係数を

$$\begin{aligned} f_d(\tau) &= q^{-d} + \sum_{D>0} A(d,D)q^D \\ g_D(\tau) &= q^{-D} + \sum_{d\geq 0} B(D,d)q^d \end{aligned}$$

と書くとき

定理 5.2.2 (Zagier) $\forall D > 0, D \equiv 0, 1 \pmod 4$, $\forall d \geq 0, d \equiv 0, 3 \pmod 4$ に対し

$$A(d,D) = -B(D,d).$$

証明 $f_d g_D$ の定数項 $= A(d,D) + B(D,d)$ となることに注意する. そこで, より一般に

$$f \in M^{mer,+}_{\frac{1}{2}}, g \in M^{mer,+}_{\frac{3}{2}} \text{ならば } fg \text{ の定数項} = 0$$

を示す (より一般に, 重さは $k+\frac{1}{2}$, $1-k+\frac{1}{2}$ でよい). fg は重さ 2 であるから, $f(\tau)g(\tau)d\tau$ は $\mathfrak{H}/\Gamma_0(4)$ (のコンパクト化) 上の有理型微分で, その留数の和は 0 である. fg の定数項は $(2\pi i)f(\tau)g(\tau)d\tau$ の $i\infty$ での留数に他ならないから, 他の尖点での留数の和を計算する. まず, それぞれの尖点の「幅」は 0 で 4, $-\frac{1}{2}$ で 1 である. すなわちそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m\mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \subset \Gamma_0(4)$$

および

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m\mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \subset \Gamma_0(4)$$

となる最小の正整数 m が 4, 1 である. 従って, fg の 0 での留数は

$$\tau^{-2}(fg)(-\frac{1}{\tau}) \text{ の } q^{\frac{1}{4}} \text{での展開の定数項} \times 4$$

$(2\pi i d\tau = 4d(q^{\frac{1}{4}})/q^{\frac{1}{4}})$ であり, $-\frac{1}{2}$ でのそれは

$$(2\tau+1)^{-2}(fg)\left(\frac{\tau}{2\tau+1}\right) \text{ の } q \text{ 展開の定数項}$$

に等しい. 命題 5.1.1 の証明中の計算のように,

$$\begin{aligned} f(\tau) &= f^{(0)}(4\tau) + f^{(1)}(4\tau) \\ g(\tau) &= g^{(0)}(4\tau) + g^{(3)}(4\tau) \end{aligned}$$

と書いて計算を行うと

$$\begin{aligned} \tau^{-2}(fg)(-\frac{1}{\tau}) &= \frac{1}{8}f^{(0)}\left(\frac{\tau}{4}\right)g^{(0)}\left(\frac{\tau}{4}\right) \\ (2\tau+1)^{-2}(fg)\left(\frac{\tau}{2\tau+1}\right) &= \frac{1}{2}f^{(1)}(\tau+\frac{1}{2})g^{(3)}(\tau+\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

となる. 定数項は $\frac{\tau}{4}$ や $\tau+\frac{1}{2}$ を 4τ に代えても変わらないので, 結局 0 と $-\frac{1}{2}$ での留数の和は

$$\frac{1}{2}\left(f^{(0)}(4\tau)g^{(0)}(4\tau) + f^{(1)}(4\tau)g^{(3)}(4\tau)\right) \text{ の } q \text{ 展開の定数項}$$

となる. 一方, $fg=(f^{(0)}(4\tau)+f^{(1)}(4\tau))(g^{(0)}(4\tau)+g^{(3)}(4\tau))$ の q-展開の定数項は, $f^{(0)}(4\tau)g^{(0)}(4\tau)+f^{(1)}(4\tau)g^{(3)}(4\tau)$ の定数項に等しい. ($f^{(0)}g^{(3)}$ などからは定数項は出ない). よってこれらの和 (留数和) が 0 に等しいということは

$$\frac{3}{2}\left(f^{(0)}(4\tau)g^{(0)}(4\tau)+f^{(1)}(4\tau)g^{(3)}(4\tau)\right) \text{ の } q \text{ 展開の定数項} = 0,$$

つまり fg の定数項は 0 に等しい. □

これと系 5.1.3 を合わせて,

$$\mathbf{t}(d)=-B(1,d)$$

すなわち

$$\sum_{d\in\mathbf{Z}}\mathbf{t}(d)q^d=-g_1(\tau)$$

が言えて, つまり Zagier の定理 Z が Borcherds の定理 B′ より導かれた.

注意 5.2.3 ちなみに, $g_1(\frac{\tau}{4})=-\sum_{d\in\mathbf{Z}}\mathbf{t}(d)q^{d/4}$ を, 証明中に出てきたように分けて

$$g_1^{(0)}(\tau)=-\sum_{\substack{d\in\mathbf{Z}\\ d\equiv 0(4)}}\mathbf{t}(d)q^{d/4},\quad g_1^{(3)}(\tau)=-\sum_{\substack{d\in\mathbf{Z}\\ d\equiv 3(4)}}\mathbf{t}(d)q^{d/4}$$

とするとき,

$$g_1^{(0)}(\tau)=2\frac{E_4(\tau)}{\theta_0(\tau)\theta_1(\tau)^4},\quad g_1^{(3)}(\tau)=-2\frac{E_4(\tau)}{\theta_2(\tau)\theta_1(\tau)^4}$$

というきれいな表示がある. $\theta_2(\tau)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}q^{(n+1/2)^2}$ は三つ目の Jacobi テータ.

さてこんどは逆に定理 Z から定理 B′ がどのように導かれるかの大筋を説明する. その中心をなすのは次の命題である.

命題 5.2.4 $\widetilde{g_n}:=\sum_{l|n}lq^{-l^2}-2\sigma_1(n)-\sum_{d>0,\,\equiv 0,3(4)}\mathbf{t}_n(d)q^d$ とおくと

$$\widetilde{g_n}=g_1\big|T_{n^2}\quad(\in M^{mer,+}_{\frac{3}{2}})$$

である. ここに, $\sigma_1(n)=\sum_{d|n}d$, $\mathbf{t}_n(d)$ は前節で定義したもの, T_{n^2} は $\Gamma_0(4)$ の重さ $\frac{3}{2}$ のヘッケ作用素である.

証明　n が素数 p のときのみ証明の概略を述べる．ヘッケ作用素 T_{p^2} は $g = \sum b_d q^d \in M_{\frac{3}{2}}^{mer,+}$ に対し

$$g|T_{p^2} = \sum (b_{p^2d} + \left(\frac{-d}{p}\right) b_d + p b_{d/p^2}) q^d$$

で作用する．$\left(\frac{-d}{p}\right)$ は平方剰余指標で, $p^2 \nmid d$ のとき $b_{d/p^2} = 0$ とする．従って,

$$\mathbf{t}_p(d) = \mathbf{t}_1(p^2 d) + \left(\frac{-d}{p}\right) \mathbf{t}_1(d) + p\mathbf{t}_1\left(\frac{d}{p^2}\right)$$

を示せばよい．これは次の命題の特別な場合である．

　一般に $\mathfrak{H}$ 上の $SL_2(\mathbf{Z})$ 不変関数 φ (これを格子の同型類上の関数とも見る), 及び $d > 0, d \equiv 0, 3 \pmod 4$ に対し

$$\mathcal{S}_d(\varphi) := \sum_{\mathfrak{O} \supset \mathfrak{O}_d} \frac{2}{w_{\mathfrak{O}}} \sum_{[\mathfrak{a}]} \varphi(\mathfrak{a})$$

と定義する．ここに, $\mathfrak{O}_d$ は判別式が $-d$ の虚 2 次整環で, $\mathfrak{O}$ はそれを含む整環をわたる．$w_{\mathfrak{O}}$ は $\mathfrak{O}$ の単数の個数, 又 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{O}$ の固有イデアルで, $[\mathfrak{a}]$ は固有 $\mathfrak{O}$ イデアル類の代表をわたることを表す．ここで, 整環 $\mathfrak{O}$ の固有イデアルというときは, 乗数環が丁度 $\mathfrak{O}$ となるような階数 2 の $\mathbf{Z}$ 加群を表し, 環論の意味での $\mathfrak{O}$ のイデアルとは限らない格子も含めている．ここでは, 証明の便宜のため整環とそのイデアルの言葉で書いているが, 右辺の和は $H(d)$ や $\mathbf{t}(d)$ の定義に現れた和と同じものである．

　p を素数とする．ヘッケ作用素 T_p を

$$(\varphi|T_p)(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \\ [\mathfrak{a}:\mathfrak{b}] = p}} \varphi(\mathfrak{b})$$

で定義する．右辺は $\mathfrak{a}$ の指数 p の部分加群 (必ずしも固有 $\mathfrak{O}$ イデアルであるとは限らない, 全部で $p+1$ 個) をわたる．44 ページで重さ 0 のモジュラー関数に対して T_p をこの p 倍で定義したが, ここでは p で割らないこととする．このとき,

命題 5.2.5

$$\mathcal{S}_d(\varphi|T_p) = \mathcal{S}_{p^2 d}(\varphi) + \left(\frac{-d}{p}\right) \mathcal{S}_d(\varphi) + p\mathcal{S}_{d/p^2}(\varphi).$$

ただし $\mathcal{S}_{d/p^2}(\varphi)$ は p が $\mathfrak{O}_d$ の導手を割らなければ 0 とする．

証明　証明には次の補題を用いる.

補題 5.2.6 p を素数とし, 整環 $\mathfrak{O}_d$ の導手を f とする.

i) 固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアル $\mathfrak{a}$ の指数 p の部分加群 $p+1$ 個のうち,

$p \nmid f$ ならば

固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$イデアルとなるものが $p - \left(\dfrac{d}{p}\right)$ 個,

固有 $\mathfrak{O}_d$イデアルとなるものが $1 + \left(\dfrac{d}{p}\right)$ 個,

$p|f$ ならば

固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$イデアルとなるものが p 個,

固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$ イデアルとなるものが 1 個,

である.

ii) $\mathfrak{O}_d$ の類数を h_d とし, $\mathfrak{a}_i,\ 1 \le i \le h_d$ を固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルの代表系, $\mathfrak{a}_i^{(j)},\ 1 \le j \le p+1$ を, $\mathfrak{a}_i$ の指数 p の部分加群全体とする. $(p+1)h_d$ 個の加群 $\mathfrak{a}_i^{(j)},\ 1 \le i \le h_d,\ 1 \le j \le p+1$ のうち,

固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$イデアルの代表系が重複度 $w_{\mathfrak{O}_d}/w_{\mathfrak{O}_{p^2d}}$

で現れる (類数公式より合計 $w_{\mathfrak{O}_d}/w_{\mathfrak{O}_{p^2d}} \cdot h_{p^2d} = h_d \cdot \left(p - \left(\frac{d}{p}\right)\right)$ 個). 更に,

$p \nmid f$ ならば

固有 $\mathfrak{O}_d$イデアルの代表系が重複度 $1 + \left(\dfrac{d}{p}\right)$

で現れ (合計 $\left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right) h_d$ 個),

$p|f$ ならば 固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルは現れず,

固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$イデアルの代表系が重複度 $w_{\mathfrak{O}_d}/w_{\mathfrak{O}_{d/p^2}} \cdot \left(p - \left(\dfrac{d/p^2}{p}\right)\right)$

で現れる (合計 $w_{\mathfrak{O}_d}/w_{\mathfrak{O}_{d/p^2}} \cdot \left(p - \left(\frac{d/p^2}{p}\right)\right) h_{d/p^2} = h_d$ 個).

これは新谷卓郎[5]の 1975 年の論文[6] の Lemma 2.3 および Lemma 2.5 と同じである. ii) の証明だけ与えておこう.

[5] 1943.2.4—1980.11.14

[6] *On construction of holomorphic cusp forms of half-integral weight*, Nagoya J. **58** (1975) 83–126.

はじめに固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$ イデアルについての言明から．まず, 任意の固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$ イデアル $\mathfrak{b}$ がある $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ に同値であることを示す．$\frac{1}{p}\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{b}$ を指数 p^2 で含む固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$ イデアルである．補題の i) より, これの指数 p の部分加群で, 固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルとなるもの $\mathfrak{c}$ が唯一つある．$\mathfrak{c}$ は $p(\frac{1}{p}\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ を指数 p で含む．$\mathfrak{c}$ はある $\mathfrak{a}_i$ に同値であるので, $\mathfrak{b}$ はある $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ に同値である．また, $\mathfrak{a}_i \supset \mathfrak{a}_i^{(j)}$ という包含で, $\mathfrak{O}_d^\times$ の元 u をかけると, $\mathfrak{a}_i$ は固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルであるから $u\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i$. しかるに, $u\mathfrak{a}_i^{(j)}$ は, $u \notin \mathfrak{O}_{p^2d}^\times$ であれば, $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ とは異なる $\mathfrak{a}_i$ の指数 p の加群. しかし $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ と同値には違いないから, $\mathfrak{b}$ は少なくとも $[\mathfrak{O}_d^\times : \mathfrak{O}_{p^2d}^\times]$ 個の $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ と同値になる．$\mathfrak{b}$ は任意の固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$ イデアルでよかったから, $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ のうちには少なくとも $[\mathfrak{O}_d^\times : \mathfrak{O}_{p^2d}^\times h_{p^2d}]$ 個の固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$ イデアルがあることになる．ところで, $d = f^2d_0$ (d_0 は基本判別式) と書くとき, 類数関係式[7]

$$
\begin{aligned}
h_d &= \frac{fh_{d_0}}{[\mathfrak{O}_{d_0}^\times : \mathfrak{O}_d^\times]}\prod_{l|f}\left(1-\left(\frac{d_0}{l}\right)\frac{1}{l}\right)\\
h_{p^2d} &= \frac{pfh_{d_0}}{[\mathfrak{O}_{d_0}^\times : \mathfrak{O}_{p^2d}^\times]}\prod_{l|fp}\left(1-\left(\frac{d_0}{l}\right)\frac{1}{l}\right)
\end{aligned}
$$

より

$$h_{p^2d} = h_d \cdot \frac{p}{[\mathfrak{O}_d^\times : \mathfrak{O}_{p^2d}^\times]} \cdot \left(1-\left(\frac{d}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

($\left(\frac{d}{p}\right)$ は $p|f$ なら 0 である) 従って

$$[\mathfrak{O}_d^\times : \mathfrak{O}_{p^2d}^\times]h_{p^2d} = h_d\left(p-\left(\frac{d}{p}\right)\right).$$

補題の i) によればこれは $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ $1 \le i \le h_d$, $1 \le j \le p+1$ の中の固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$ イデアルの総数に等しい．よってそれら $h_d\left(p-\left(\frac{d}{p}\right)\right)$ 個の固有 $\mathfrak{O}_{p^2d}$ イデアルのうち丁度 $[\mathfrak{O}_d^\times : \mathfrak{O}_{p^2d}^\times]$ 個ずつが同値で, 完全代表系がこの重複度で現れている.

次に $p \nmid f$ のときの固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルであるが, $\mathfrak{a}_i$ の指数 p の部分加群のうち固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルは $1+\left(\frac{d}{p}\right)$ 個であった．これが 0 個のときは何も言うことはない．1 個のとき, 先と同じ議論で, 任意の固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアル $\mathfrak{b}$ に対しこれを指数 p で含む固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアル $\mathfrak{c}$ があって, これはどれかの $\mathfrak{a}_i$ と同値になるから, $\mathfrak{b}$ はある $\mathfrak{a}_i^{(j)}$(唯一) と同値．すると, 個数の一致から, 各 i について一つずつ出てくる固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアル $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ が h_d 個の代表系となる．$1+\left(\frac{d}{p}\right) = 2$

[7]例えば Cox: Primes of the form x^2+ny^2 の Theorem 7.24.

のときは, p が $\mathfrak{O}_d$ の中で $\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ と分解し, $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ の指数 p の部分加群で固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルになっているものとは $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_i$, $\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}_i$ に他ならない. すると, $\{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_i\}_{1\leq i\leq h_d}$ 及び $\{\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}_i\}_{1\leq i\leq h_d}$ がそれぞれ固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアル類の代表となっているからよい.

最後に $p|f$ のとき. $\mathfrak{a}_i$ の指数 p の部分加群の中に固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$ イデアルが唯一つある (補題の i)). 類数関係式

$$h_{d/p^2} = \frac{\frac{f}{p}h_{d_0}}{[\mathfrak{O}_{d_0}^\times : \mathfrak{O}_{d/p^2}^\times]}\prod_{l|\frac{f}{p}}\left(1-\left(\frac{d_0}{l}\right)\frac{1}{l}\right)$$

と先の類数関係式より

$$h_d = \frac{h_{d/p^2}}{[\mathfrak{O}_{d/p^2}^\times : \mathfrak{O}_d^\times]}\left(p-\left(\frac{d/p^2}{p}\right)\right). \tag{5.5}$$

今, 固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$ イデアル $\mathfrak{b}$ に対し, これを指数 p で含むような固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルは $\frac{1}{p}\mathfrak{b}$ の指数 p の固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルと同じことで, その個数は補題 i) より $p-\left(\frac{d/p^2}{p}\right)$ 個.

主張 これら $p-\left(\frac{d/p^2}{p}\right)$ 個は

$$[\mathfrak{O}_{d/p^2}^\times : \mathfrak{O}_d^\times] \text{ 個ずつ互いに同値な, } \frac{1}{[\mathfrak{O}_{d/p^2}^\times : \mathfrak{O}_d^\times]}\left(p-\left(\frac{d/p^2}{p}\right)\right) \text{ 個}$$

の類に分かれる.

これを示す. このような ($\mathfrak{b}$ を指数 p で含むような固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアル) 相異なる $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ が同値, すなわち $\mathfrak{c}_1=\alpha\mathfrak{c}_2,\ \alpha\in K(=\mathfrak{O}_d$ の商体) とする. $\mathfrak{c}_2\supset\mathfrak{b}$ より $\mathfrak{c}_1=\alpha\mathfrak{c}_2\supset\alpha\mathfrak{b}$. 一方仮定より $\mathfrak{c}_1\supset\mathfrak{b}$ でもあり, $\mathfrak{c}_1$ の指数 p の固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$ イデアルは一つしかない (補題 i)) から, $\alpha\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$. よって $\alpha\in\mathfrak{O}_{d/p^2}^\times$. $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ は相異なるので, $\alpha\notin\mathfrak{O}_d^\times$. 逆に, $\alpha\in\mathfrak{O}_{d/p^2}^\times\setminus\mathfrak{O}_d^\times$ に対しては, $\mathfrak{b}=\alpha\mathfrak{b}$ でありまた, $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{c}$(指数 p) なる $\mathfrak{c}$ に対し $\alpha\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{b}$ を指数 p で含む, $\mathfrak{c}$ とは異なる (しかし同値な) 固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアル. これで主張が言えた.

この主張より, 勝手な固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$ イデアル $\mathfrak{b}$ は少なくとも $\frac{1}{[\mathfrak{O}_{d/p^2}^\times:\mathfrak{O}_d^\times]}\left(p-\left(\frac{d/p^2}{p}\right)\right)$ 個の異なる固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$ イデアル $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ と同値になることがわかる. なぜなら, $\mathfrak{b}$ を指数 p で含む非同値な固有 $\mathfrak{O}_d$ イデアルが少なくとも $\frac{1}{[\mathfrak{O}_{d/p^2}^\times:\mathfrak{O}_d^\times]}\left(p-\left(\frac{d/p^2}{p}\right)\right)$ 個は存在することが主張より言えており, これらはそれぞれ指数 p の固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$

イデアルを唯一つづつ含むから, それは $\mathfrak{b}$, 従って $\mathfrak{b}$ は少なくともこの個数の $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ と同値. 各 $\mathfrak{b}$ に対しこれが成り立ち, 前の (5.5) から,

$$\frac{1}{[\mathfrak{O}_{d/p^2}^\times : \mathfrak{O}_d^\times]}\left(p-\left(\frac{d/p^2}{p}\right)\right)\cdot h_{d/p^2} = h_d$$

であるから, $\mathfrak{a}_i^{(j)}$ $1\le i\le h_d$, $1\le j\le p+1$ のうち固有 $\mathfrak{O}_{d/p^2}$ イデアルが h_d 個あることを合わせて, $p|f$ の場合の補題が言えた. $\square$

命題の証明 ひとつの整環 $\mathfrak{O}_{d'}$ に対し, 補題 ii) より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{[\mathfrak{a}]\\ \mathfrak{O}_{d'}-類}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}\\ [\mathfrak{a}:\mathfrak{b}]=p}}\varphi(\mathfrak{b})\\
=\ &\frac{w_{\mathfrak{O}_{d'}}}{w_{\mathfrak{O}_{p^2d'}}}\sum_{\substack{[\tilde{\mathfrak{a}}]\\ \mathfrak{O}_{p^2d'}-類}}\varphi(\tilde{\mathfrak{a}})\\
+\ &\begin{cases}(1+\left(\frac{d'}{p}\right))\displaystyle\sum_{\substack{[\mathfrak{a}]\\ \mathfrak{O}_{d'}-類}}\varphi(\mathfrak{a}), & p\nmid\mathfrak{O}_{d'}の導手,\\ \frac{w_{\mathfrak{O}_{d'}}}{w_{\mathfrak{O}_{d'/p^2}}}(p-\left(\frac{d'/p^2}{p}\right))\displaystyle\sum_{\substack{[\mathfrak{a}']\\ \mathfrak{O}_{d'/p^2}-類}}\varphi(\mathfrak{a}'), & p|\mathfrak{O}_{d'}の導手,\end{cases}
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{w_{\mathfrak{O}_{d'}}}\sum_{\substack{[\mathfrak{a}]\\ \mathfrak{O}_{d'}-類}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}\\ [\mathfrak{a}:\mathfrak{b}]=p}}\varphi(\mathfrak{b})\\
=\ &\frac{2}{w_{\mathfrak{O}_{p^2d'}}}\sum_{\substack{[\tilde{\mathfrak{a}}]\\ \mathfrak{O}_{p^2d'}-類}}\varphi(\tilde{\mathfrak{a}})\\
+\ &\begin{cases}\frac{2}{w_{\mathfrak{O}_{d'}}}(1+\left(\frac{d'}{p}\right))\displaystyle\sum_{\substack{[\mathfrak{a}]\\ \mathfrak{O}_{d'}-類}}\varphi(\mathfrak{a}), & p\nmid\mathfrak{O}_{d'}の導手,\\ \frac{2}{w_{\mathfrak{O}_{d'/p^2}}}(p-\left(\frac{d'/p^2}{p}\right))\displaystyle\sum_{\substack{[\mathfrak{a}']\\ \mathfrak{O}_{d'/p^2}-類}}\varphi(\mathfrak{a}'), & p|\mathfrak{O}_{d'}の導手.\end{cases}
\end{aligned}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_d(\varphi|T_p) &= \sum_{\mathfrak{O}_d\subset\mathfrak{O}_{d'}} \frac{2}{w_{\mathfrak{O}_{d'}}} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}]\\ \mathfrak{O}_{d'}-\text{類}}} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}\\ [\mathfrak{a}:\mathfrak{b}]=p}} \varphi(\mathfrak{b}) \\
&= \sum_{\mathfrak{O}_d\subset\mathfrak{O}_{d'}} \frac{2}{w_{\mathfrak{O}_{p^2d'}}} \sum_{\substack{[\tilde{\mathfrak{a}}]\\ \mathfrak{O}_{p^2d'}-\text{類}}} \varphi(\tilde{\mathfrak{a}}) \\
&+ \begin{cases} \sum_{\mathfrak{O}_d\subset\mathfrak{O}_{d'}} \frac{2}{w_{\mathfrak{O}_{d'}}}(1+\left(\frac{d'}{p}\right)) \displaystyle\sum_{\substack{[\mathfrak{a}]\\ \mathfrak{O}_{d'}-\text{類}}} \varphi(\mathfrak{a}), & p \nmid \mathfrak{O}_{d'}\text{の導手}, \\ \frac{2}{w_{\mathfrak{O}_{d'/p^2}}}(p-\left(\frac{d'/p^2}{p}\right)) \displaystyle\sum_{\substack{[\mathfrak{a}']\\ \mathfrak{O}_{d'/p^2}-\text{類}}} \varphi(\mathfrak{a}'), & p | \mathfrak{O}_{d'}\text{の導手}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで場合を分けて考える.

イ) $p \nmid \mathfrak{O}_d$の導手 のとき: このとき, $\mathfrak{O}_d \subset \mathfrak{O}_{d'}$ なるすべての $\mathfrak{O}_{d'}$ について $p \nmid \mathfrak{O}_{d'}$の導手 であり, $\mathfrak{O}_{p^2d}$ を含む整環の全体は $\mathfrak{O}_d$ を含む $\mathfrak{O}_{d'}$ に対する $\mathfrak{O}_{p^2d'}$ と $\mathfrak{O}_{d'}$ の全体であるから, 最後の式の右辺は

$$\mathcal{S}_{p^2d}(\varphi) + \left(\frac{d}{p}\right)\mathcal{S}_d(\varphi)$$

となっている. ($\forall d'$ について $\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{d'}{p}\right)$ に注意.)

ロ) $p|\mathfrak{O}_d$の導手 のとき: $d = p^{2n}d_0$ で, p は $\mathfrak{O}_{d_0}$ の導手を割らないとする. このとき, $\mathfrak{O}_d \subset \mathfrak{O}_{d'}$ なる整環 $\mathfrak{O}_{d'}$ 全体は $\mathfrak{O}_{d_0} \subset \mathfrak{O}_{d'_0}$ なる d'_0 に対する

$$\mathfrak{O}_{p^{2n}d'_0},\, \mathfrak{O}_{p^{2n-2}d'_0},\, \ldots,\, \mathfrak{O}_{p^2d'_0},\, \mathfrak{O}_{d'_0}$$

の全体. また $\mathfrak{O}_{p^2d}$ を含む整環の全体は同じく

$$\mathfrak{O}_{p^{2n+2}d'_0},\, \mathfrak{O}_{p^{2n}d'_0},\, \ldots,\, \mathfrak{O}_{p^2d'_0},\, \mathfrak{O}_{d'_0}$$

の全体. このうち $\mathfrak{O}_{p^{2n}d'_0}, \mathfrak{O}_{p^{2n-2}d'_0}, \ldots, \mathfrak{O}_{p^2d'_0}$ が右辺第一項からでてきて, 第二項は $\mathfrak{O}_{d'} = \mathfrak{O}_{d'_0}$ のとき上の場合 ($p \nmid \mathfrak{O}_{d'}$の導手), 他は下の場合 ($p|\mathfrak{O}_{d'}$の導手) になるが, 下の場合, $\mathfrak{O}_{d'} = \mathfrak{O}_{p^{2n}d'_0}, \ldots, \mathfrak{O}_{p^4d'_0}$ のときは $\left(\frac{d'/p^2}{p}\right) = 0$ で,p 倍が前にかかり, $\mathfrak{O}_{d'} = \mathfrak{O}_{p^2d'_0}$ のとき, $p - \left(\frac{d'/p^2}{p}\right) = p - \left(\frac{d'_0}{p}\right)$ と, 上の場合からくる $\left(\frac{d'_0}{p}\right)$ を合わせて p. 上の場合の残り 1 の分は $\mathfrak{O}_{p^2d}$ を含む方から丁度来て, 合う. これで

$$\mathcal{S}_{p^2d}(\varphi) + p\mathcal{S}_{d/p^2}(\varphi)$$

が出る. □

　さて, $M^{mer,+}_{\frac{3}{2}}$ の元は主要部で決まるから

$$\widetilde{g}_n = \sum_{l|n} l g_l^2,$$

これを反転公式で逆に解くと

$$g_{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{l|n}\mu\left(\frac{n}{l}\right)\widetilde{g}_l.$$

この両辺の q^d の係数を較べて

$$B(n^2,d) = -\frac{1}{n}\sum_{l|n}\mu\left(\frac{n}{l}\right)\mathbf{t}_l(d).$$

定理 5.2.2 より $A(d,n^2) = -B(n^2,d)$ であるから, これより系 5.1.6 の公式が得られ, そこに至った計算を逆にたどれば Borcherds の定理 B′ が得られる.

5.3　定理 A の別証明

　命題 5.2.4 から特に $n=2$ として

$$\widetilde{g}_2 = 2q^{-4} + q^{-1} - 6 - \sum_{\substack{d>0 \\ d\equiv 0,3(4)}} \mathbf{t}_2(d)q^d \in M^{mer,+}_{\frac{3}{2}}.$$

このことから, 命題 4.0.2 の証明中でも用いたように,

$$(\widetilde{g}_2\theta_0)|U_4 = -\sum_n(\sum_r \mathbf{t}_2(4n-r^2))q^n,$$

ただし $\mathbf{t}_2(0)=6, \mathbf{t}_2(-1)=-1, \mathbf{t}_2(-4)=-2,$ その他の値 0, が $SL_2(\mathbf{Z})$ の重さが 2 の有理型モジュラー形式になることが知れて, 実際フーリエ係数を計算して $-2j'(\tau)$ に等しいことがわかる. 従って $j(\tau)=\sum_{n=-1}^{\infty} c_n q^n$ と書くとき

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}_2(4n-r^2) = 2nc_n.$$

すなわち c_n の公式の別な形として

$$c_n = \frac{1}{2n} \sum_{r \in \mathbf{Z}} \mathbf{t}_2(4n - r^2).$$

これはシンプルだが, $\mathbf{t}_2(d)$ の, $\mathbf{t}_1(d)$ と同様の漸化式から値を求めようとしても, その漸化式には c_n が含まれてきて (まさに上の式), 堂々巡りになる. ところで

$$\mathbf{t}_2(d) = \mathbf{t}_1(4d) + \left(\frac{-d}{2}\right) \mathbf{t}_1(d) + 2\mathbf{t}_1(d/4)$$

であったから, 右辺を $\mathbf{t}_1$ で書くことができる. まず,

$$\sum_{r \in \mathbf{Z}} \mathbf{t}_2(4n - r^2) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \big(\mathbf{t}_2(4n - (2r-1)^2) + \mathbf{t}_2(4n - (2r)^2)\big)$$

と分ける. ここで

$$-(4n - (2r-1)^2) \equiv \begin{cases} 1 \bmod 8, & n \text{ が偶数の時}, \\ 5 \bmod 8, & n \text{ が奇数の時}, \end{cases}$$

より

$$\left(\frac{-(4n - (2r-1)^2)}{2}\right) = (-1)^n.$$

よって

$$\mathbf{t}_2(4n - (2r-1)^2) = \mathbf{t}_1(16n - 4(2r-1)^2) + (-1)^n \mathbf{t}_1(4n - (2r-1)^2).$$

また,

$$\mathbf{t}_2(4n - (2r)^2) = \mathbf{t}_1(16n - 16r^2) + 2\mathbf{t}_1(n - r^2).$$

これらより,

$$\begin{aligned} &\sum_{r \in \mathbf{Z}} \mathbf{t}_2(4n - r^2) \\ = &\sum_{r \in \mathbf{Z}} \Big(\mathbf{t}_1(16n - (2(2r-1))^2) + (-1)^n \mathbf{t}_1(4n - (2r-1)^2) \\ &\quad + \mathbf{t}_1(16n - (2 \cdot 2r)^2) + 2\mathbf{t}_1(n - r^2) \Big) \\ = &\sum_{r:\text{even}} \mathbf{t}_1(16n - r^2) + (-1)^n \sum_{r:\text{odd}} \mathbf{t}_1(4n - r^2) + 2 \sum_{r \in \mathbf{Z}} \mathbf{t}_1(n - r^2). \end{aligned}$$

$\sum_{r\in\mathbf{Z}}\mathbf{t}_1(4n-r^2)=0$ であったから，

$$\sum_{r:\mathrm{even}}\mathbf{t}_1(16n-r^2)=-\sum_{r:\mathrm{odd}}\mathbf{t}_1(16n-r^2).$$

これを使い，r を正の奇数だけわたらせると 2 倍されて，$2n$ で全体を割ると 25 ページの注意に書いた形の c_n の公式が得られる．

第6章　問題と文献

これからの問題のひとつとして考えられるのは, $SL_2(\mathbf{Z})$ を他の種数 0 の群にして, そこでの $j(\tau)$ にあたるもの (“Hauptmodul”) の係数の公式を問うことであろう. そのための手がかりとなるべき Zagier の定理の一般化について, 何を考えればよいかということは Zagier の論文

D. Zagier: *Traces of singular moduli*, Max-Planck-Institut für Mathematik Preprint Series 2000 (8)
http://www.mpim-bonn.mpg.de/html/preprints/preprints.html

に論じてある. この論文ではその他, Zagier の定理の一般化について様々な方向, すなわち, 一般の $B(D,d)$ (D が完全平方でないとき) の意味を問うこと, 重さを一般にする, ヒルベルトモジュラー形式との関連, などが実例の計算と共に論じられていて, どれも方向性を与えてあるだけなので, 例えば修士論文の題材等にはこと欠かないように思われる. 進んで勉強されたい方は是非この論文に取り組まれることをお勧めする.

彼がこういうことを考えるきっかけとなったのが Borcherds の論文

R. Borcherds: *Automorphic forms on* $O_{s+2,2}(\mathbf{R})$ *and infinite products,* Invent. Math. **120** (1995), 161–213

である. その Theorem 14.1 が第 5 章の定理 B で, これを一変数モジュラー形式の言葉だけで理解しようとする試みから上記論文の内容が生まれた. 定理 B を合同部分群に一般化することや, 第 5 章で述べた定理 B と定理 Z の関係の一般化なども考えられてよい問題である.

本文中で引用した論文は大抵脚注に情報を与えておいたが, 以下, それらと若干の補足を, 主題別に挙げておく. 何かの参考になれば幸いである. また以前, 第 41 回代数学シンポジウム (1996, 山形市) の報告集に書いた $j(\tau)$ に関す

る文章の最後にも文献を挙げてあるので, それも参考になるかも知れない.

- $j(\tau)$ の Fourier 係数の表

  - W.E.H. Berwick: *An invariant modular equation of the fifth order*, Quarterly Journal of Mathematics **47** (1916), 94–103.
  - H.S. Zuckerman: *The computation of the smaller coefficients of* $J(\tau)$, Bulletin of the American Mathematical Society **45** (1939), 917–919.
  - A. van Wijngaarden: *On the coefficients of the modular invariant* $J(\tau)$, Indagationes Math. **15** (1953), 389–400.

- $j(\tau)$ の Fourier 係数の解析的公式

  - H. Petersson: *Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen,* Acta Math. **58** (1932), 169–215.
  - H. Rademacher: *The Fourier coefficients of the modular invariant* $J(\tau)$*,* Amer. J. Math. **60** (1938), 501–512.
  - H. Rademacher: *The Fourier series and the functional equations of the absolute modular invariant* $J(\tau)$*,* Amer. J. Math. **61** (1939), 237–248.
  - M.I. Knopp: *Rademacher on* $J(\tau)$*, Poincaré series of nonpositive weights and the Eichler cohomology,* Notices AMS **37-4** (1990), 385–393. (Rademacher の仕事の survey)

- $j(\tau)$ の Fourier 係数の合同式, Atkin の予想

  - D.H. Lehmer: *Properties of the coefficients of the modular invariant* $J(\tau)$*,* Amer. J. Math. **64** (1942), 488–502.
  - J. Lehner: *Divisibility properties of the Fourier coefficients of the modular invariant* $j(\tau)$*,* Amer. J. Math. **71** (1949), 136–148.
  - J. Lehner: *Further congruence properties of the Fourier coefficients of the modular invariant* $j(\tau)$*,* Amer. J. Math. **71** (1949), 373–386.
  - M. Newman: *Congruences for the coefficients of modular forms and for the coefficients of* $j(\tau)$*,* Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 609–612.

- O. Kolberg: *Congruences for the coefficients of the modular invariant $j(\tau)$,* Math. Scand. **10** (1962), 173–181.
- O. Kolberg: *The coefficients of $j(\tau)$ modulo powers of* 3, Arbok Univ. Bergen Mat.-Natur. Ser. no.16 (1962), 7pp.
- A.O.L. Atkin and J.N. O'Brien: *Some properties of $p(n)$ and $c(n)$ modulo powers of* 13, Trans. Amer. Math. Soc. **126** (1967), 442–459.
- A.O.L. Atkin: *Congruence Hecke operators,* Proc. Symp. Pure Math. **12** (1969), 33–40.
- O. Kolberg: *On the Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$,* Årb. Univ. Bergen, Mat.-Naturv. Serie **3** (1969), 3–8.
- M. Koike: *Congruences between modular forms and functions and applications to the conjecture of Atkin,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **20** (1973), 129–169.
- S. Akiyama: *A note on Hecke's absolute invariants,* J. Ramanujan Math. Soc. **7**, no.1 (1992), 65–81.
- S. Akiyama: *On the 2^n divisibility of the Fourier coefficients of J_q functions and the Atkin conjecture for $p = 2$,* Analytic number theory and related topics (Tokyo, 1991), 1–15, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1993).

• Monstrous Moonshine 関係

- J.H. Conway and S.P. Norton: *Monstrous Moonshine,* Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 308–339. (Monstrous Moonshine の原典)
- I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman: "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Applied Mathematics **134**, Academic Press, 1988.
- R. Borcherds: *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras,* Invent. Math. **109** (1992), 405–444.
- J.H. Conway: *Monster and Moonshine,* Math. Intelligencer **2** (1980), 165–171. (面白い読み物)

- 小池正夫: Moonshine–単純群と保型関数の不思議な関係–,「数学」40 巻 3 号 (1988).
- 原田耕一郎: モンスターの数学,「数学」51 巻 1 号 (1999). また, 同号に原田耕一郎, 松尾厚による, Borcherds の業績紹介 (フィールズ賞受賞による) がある.
- 原田耕一郎: モンスター 群のひろがり, 岩波書店 (1999).

- モジュラー多項式, 類多項式 (虚数乗法論)

- G. Pick: *Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen I, II,* Math. Annalen **25** (1885) 433–447, 同 **26** (1886), 219–230.
- H. Weber: “Leherbuch der Algebra”, 第 III 巻 1908, Chelsea. (ここにも 196884 はある.)
- S. Lang: “Elliptic Functions”, Second Edition, Graduate Text in Mathematics **112**, Springer-Verlag, 1987.
- D.A. Cox: “Prime of the form x^2+ny^2”, John Wiley & Sons, 1989.
- J.H. Silverman: “Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves”, Graduate Text in Mathematics **151**, Springer-Verlag, 1994.
- S.G. Vladut: “Kronecker's Jugendtraum and modular functions”, Gordon and Breach, 1991. (歴史に詳しい)

- 重さ半整数のモジュラー形式

- G. Shimura: *On modular forms of half-integral weight*, Annals of Math. **97** (1973), 440–481.
- W. Kohnen: *Modular forms of half-integral weight on* $\Gamma_0(4)$, Math. Annalen **248** (1980), 249–266.
- N. Koblitz: “Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms”, Second Edition, Graduate Text in Mathematics **97**, Springer-Verlag, 1993. (この第 IV 章)

- $j(\tau)$ の Fourier 係数の数論的公式

– M. Kaneko: *Traces of singular moduli and the Fourier coefficients of the elliptic modular function* $j(\tau)$, CRM Proceedings and Lecture Notes **19** (1999), 173–176.