偏微分方程式入門
— 数理ファイナンスとともに

石村 直之
一橋大学大学院経済学研究科

（２００１年度前期　神戸大学理学部集中講義をもとに）

内容

はじめに

この講義録は, ２００１年度前期に神戸大学理学部で行われた集中講義の内容をまとめたものである. 集中講義そのものは, 著者による一橋大学経済学部での解析学講義の一部に, 手を加える形で行われた. 参加していた神戸大学, あるいは一橋大学の学生さん院生さんには, 様々な反応を示していただき感謝している.

取り扱われている題材に新しいものはほとんどないが, 社会現象への数理科学的な切り込み, という観点から整理してみたつもりである. このような方法論, あるいは見方に興味を持つ人が増えれば, この講義録も成功したと考える. 同時期に行われた藤田岳彦教授（一橋大学商学研究科）の集中講義録と合わせて読んでいただければ, 数理ファイナンスへの理解はより深まると確信している.

最後になったが, 集中講義の機会を与えていただいた宮川鉄朗教授に深い感謝の意を表します. また, 講義録作成でお世話になった福山克司助教授に合わせて感謝の意を述べます. 事務室の橋本ゆみさんにもお世話になりました. この講義録と直接の関係はないが, 共同研究者の今井仁司教授（徳島大学工学部）には, 自由境界問題全般に関して常に多くのご教示をいただきました. ここに謝意を述べます.

２００１年６月　国立にて

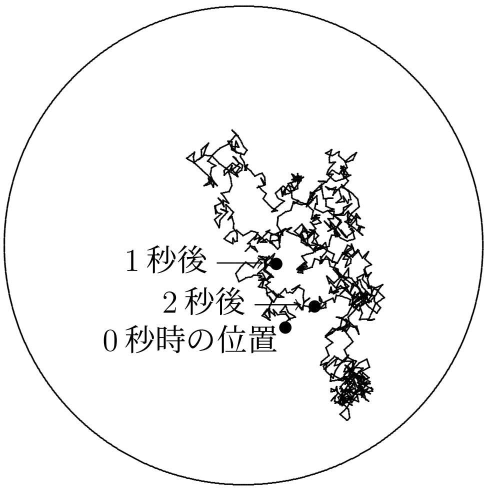
石村　直之

1　Brown 運動と拡散方程式

1.1. Brown 運動

よく知られた次の物理現象の解説から始めよう.

水面に浮かぶ花粉の運動を, 簡単な光学顕微鏡を用いて調べてみよう. これは England の植物学者 R. Brown (1773–1858) が試みた実験である (1828). 花粉粒子はたえず小さく震えていて, ほぼ同じ場所で振動していたかと思うと急に少し動いたり, 右にふれたり左にふれたり, と落ち着かない挙動を示すはずである. さらに水に浮かぶ粒子は, 特に花粉でなくとも鉱物粒子でもやはり似たような同じような乱雑な動きをする. 当初は, 粒子の中に何かこのような運動を起こさせる「物質」が存在するとみなされていたようだ. 現在での解釈は, このような「物質」は仮定せず, 以下のように熱分子運動論の立場である.



水分子 H_2O は花粉の粒子と比べると大変小さく, ひとつひとつの H_2O 分子は熱運動している. その速度分布は統計法則に従っており, 数は少ないが速い H_2O 分子もあれば, 数は多いが速くも遅くもない H_2O 分子もある. 花粉の粒子の乱雑な運動は, 花粉を取り囲む大量の水分子が熱運動のため花粉に色々な方向から衝突し, その結果としての運動となる. ある瞬間に花粉粒子が右方向から受ける衝撃と, 左方向から受ける衝撃とは,

ほとんどの場合つり合うことはない．そのため花粉粒子はでたらめな運動を見せるのである．このような乱雑な運動は発見者にちなんで Brown 運動と呼ばれている．Brown 運動の物理的な背景や歴史的な事実に関しては, 江沢 (1976) に丁寧に興味深く述べられている．

Brown 運動の理論は, 相対性理論で著名な A. Einstein により初めて与えられた (1905). その最も単純化されたモデルは, 一次元で考えて次のような論法をとる．

微小時間 Δt の間に, ひとつの粒子が微小区間 $(x, x + y\Delta x)$ にある確率は, 確率分布関数 φ を用いて $\varphi(y)\Delta x$ とあらわされるとする．ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, dy = 1$$
$$\varphi(y) = \varphi(-y)$$

を仮定する．時刻 t での単位体積あたりの粒子の数を $u(x,t)$ とおくと, 定め方より

$$u(x, t + \Delta t)dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x + y\Delta x, t)\varphi(y)\, dy \right) dx.$$

この両辺を展開する．まず左辺は

$$u(x, t + \Delta t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Delta t + O((\Delta t)^2).$$

また右辺は

$$u(x + y\Delta x, t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)y\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)y^2(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3)$$

を用いると, φ が遠方で十分に速く 0 になるとすれば

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} u(x+y\mathit{\Delta} x,t)\varphi(y)\,dy \\
&\qquad\qquad = u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\,dy\mathit{\Delta} x \\
&\qquad\qquad\quad +\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\,dy(\mathit{\Delta} x)^2+O((\mathit{\Delta} x)^3) \\
&\qquad\qquad = u(x,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\frac{(\mathit{\Delta} x)^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\,dy+O((\mathit{\Delta} x)^3).
\end{aligned}
$$

ただし上の計算では φ が偶関数であることから

$$
\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\,dy = 0
$$

を用いた. これは, 粒子の移動確率の平均が 0 ということである. そこで

$$
\nu = \frac{(\mathit{\Delta} x)^2}{\mathit{\Delta} t}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\,dy \tag{1}
$$

と定めてまとめると

$$
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{2}
$$

を得る. これは拡散方程式 (diffusion equation) あるいは熱方程式 (heat equation) と呼ばれている.

現在の確率論では, Einstein の理論とは別個に, 全く数学の立場から標準的な Brown 運動 W_t が定められている. すなわち W_t は連続な加法過程であり, dW_t は平均 $=0$, 分散 $=1$ の正規分布に従う. 重要な「規則」は, Itô （伊藤清）の補題と呼ばれる

$$
(dW_t)^2 = dt \tag{3}
$$

である. Einstein の理論では (1) の関係式に対応している. 雑な類推だが

$$\Delta x \leftrightarrow dW_t, \qquad \Delta t \leftrightarrow dt$$

の対応である. このとき 2ν は確率過程の分散を意味している. さらに詳しい理解やその他の情報は, 確率論ないし確率過程の教科書, 例えば伊藤 (1953), 渡辺 (1975), 長井 (1999) を参照のこと.

確率過程 dW_t から (3) の操作をほどこし, 期待値に関する拡散方程式, Kolmogorov の後ろ向き方程式が導出されることに注意しておこう. ただし名前の通り時間が後ろ向きになる. すなわち $\partial u/\partial t$ が $-\partial u/\partial t$ に置き換わる. これは dW_t の方向は, 乱雑さがより増す方向であることを意味する. この場合には, 時間 t の未来に向かっては一般には解くことができない.

1.2. 拡散方程式

上の (2) で得られた拡散方程式は, 拡散現象を記述する方程式である. ここでまず, 拡散現象と Brown 運動との関連について手短かに考えてみよう.

例えば砂糖が水に溶けて行く状況を考えよう. かき混ぜればもちろん早くよく溶けるが, 水に砂糖を入れてそのままにしておいても, 重力の影響を無視すれば, 何時間か何日間かの後には十分に均一な砂糖水ができる. 砂糖の分子が水分子の中に拡散して行くのである. この現象を微細な運動の観点から解釈すると, 大きな砂糖の分子に小さな動き回る水分子が次々に衝突して砂糖分子を動かして行く, ということだ. Brown 運動において, 例えば花粉がちょこまか動くのと同じメカニズムである. このような拡散現象は, 巨視的には拡散方程式として定式化されるので, Brown 運動と拡散方程式とが結び付くことは, 現象論的には納得できることになる.

念のために物理的な考察から拡散方程式を導出しておこう. 一次元的な細い管に溶液が入っており, 物質が溶けて拡散して行く状況を考える. 例えば, 試験管の食塩水を思い浮かべていただきたい. 物質は濃度の高い

方から低い方へと拡散し, その単位時間当たりの拡散量は, そこでの濃度勾配に比例すると仮定する. $u(x,t)$ を, 位置 x, 時刻 t における溶液の濃度をあらわす未知関数とする. 微小区間 $[x, x+\Delta x]$ における微小時刻 $t \sim t+\Delta t$ の間の物質の移動量は

$$\begin{aligned}
&\nu(\text{左端での濃度勾配} - \text{右端での濃度勾配}) \cdot \Delta t \\
&\qquad = \nu\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big) \cdot \Delta t \\
&\qquad = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Delta t\Delta x + O(\Delta t(\Delta x)^2).
\end{aligned}$$

ただし ν (>0) を単位拡散係数とする. この増加量は

$$\begin{aligned}
\Delta u \cdot \Delta x &= (u(x, t+\Delta t) - u(x,t))\Delta x \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Delta t\Delta x + O((\Delta t)^2\Delta x)
\end{aligned}$$

に等しいので, 微小項を無視すると結局

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

と, やはり拡散方程式 (2) を得る.

さて拡散方程式 (2) は通常, 境界条件と初期条件のもとで考察される. すなわち, 考えている溶液が一次元的に $0 < x < l$ の有界な領域にあるとし, $u = u(x,t)$ を, 溶液の濃度分布をあらわす未知関数とする.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{in } 0 < x < l,\ t > 0 \\
&u(0,t) = a(t), \qquad u(l,t) = b(t) \qquad \text{in } t > 0 \\
&u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{on } 0 \le x \le l.
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで ν (>0) は拡散定数と呼ばれる物理定数, $a(t)$, $b(t)$ は与えられた t の関数, $u_0(x)$ は初期濃度分布をあらわすやはり与えられた関数である. 今の場合境界条件 (4) の第二式は, Dirichlet 型と呼ばれるものである. 当然

$$u_0(0) = a(0), \quad u_0(l) = b(0)$$

が要請される．これを適合条件 (compatibility condition) という．

拡散方程式は, 無限の領域で考察したり, 別種の Neumann 型の境界条件を課して解く場合も多い．しかし拡散方程式の解の一般的な性質は次のようなものである．

(i) 時間 t の過去に向かって ($t < 0$ の方向) は一般には解けない．すなわち拡散現象は時間に対して一般には可逆ではない．

(ii) 時間が充分に経過すると, すなわち $t \to \infty$ のとき, u はおおむね一様な状態になる．言い換えると濃度はよく混ざり合うのである．

拡散方程式のみならず, 一般に偏微分方程式は自然現象や社会現象の数理的な考察のために欠かせない道具である．これら偏微分方程式に関しては, F. John (1981), あるいは最近の良書として儀我・儀我 (1999) を挙げておく．

2　株価変動モデルと Black-Scholes 方程式

2.1. 株価変動モデル

株価変動のメカニズムを微視的な観点から考察しよう. 資本市場には様々な性向の自由な投資家の大集団が存在すると仮定する. 様々な性向とは, ある投資家は risk を大変に好む傾向があるが, 別の投資家は全く堅実な性格である, ということを意味する. このような多様な投資家が, 自由意志により色々な銘柄を各人の好みの量売買する. その統計的な結果として株価が乱雑に変動する.

以上のように考えると, 現象論的には株価変動は Brown 運動での花粉の動きと類似の構造があるとみなせないであろうか. 別のいい方をすると, Brown 運動を用いて株価変動の数理モデル化は可能ではないだろうか.

実際にこのような類推から, L. Bachelier は Brown 運動を用いて株価変動のモデル化を, Einstein の理論に先駆けて試みたようである (1900). 孫引きのまま述べるが, それは

$$dS_t = \sigma dW_t$$

と定式化されるものだったようだ. ここで S_t は t 時点での株価をあらわす. $\sigma(> 0)$ は, すぐ後にも出てくるが volatility と呼ばれる定数である. 残念ながらこの Bachelier の先駆的な試みは, 当時の数学の世界に受け入れられなかったようで, その後半世紀近く興味を持たれず忘れられることとなった.

現在は Bachelier のモデルを変更し, 株価指数 S_t は次の形のモデルに従うと仮定されることが多い. もちろんこのモデルは, 不断に統計的に検証されねばならないが, ある程度の範囲では, またその他の理由から, 現実をよく記述するモデルとして重宝されている. この場合でも拡散現象をあらわすことを注意しておく.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t + \mu dt. \tag{5}$$

$dS_t/S_t = d(\log S_t)$ なので対数正規過程とも呼ばれている．ここで $\sigma(>0)$, $\mu(>0)$ は，それぞれ volatility, drift と呼ばれる定数である．σ が不確実性の大きさ，あるいは想定している系の分散に対応することは，Brown 運動との類似から理解可能であろう．μdt の項は，株価が考えている範囲では確実に上昇傾向にあることを表している．阿波踊りでの「にわか連」での例えを持ち出すと，「にわか連」におけるひとりひとりは統制のとれていない乱雑な動き，すなわち平均 0 の Brown 運動しているとみなせるが，連全体としてははっきりと前に進んでいる．この全体として前に進んでいる動きに対応するのが drift 項 μdt である．

2.2. Black-Scholes 方程式

株価変動が (5) に従うと仮定し，さらにその上で無裁定価格理論を適用すると，現在では既にして著名な Black-Scholes 方程式が導出される．無裁定価格理論とは，“There is no free lunch” と俗称されている原則であるが，その意味するものは次である．すなわち 0 以下の投資から確実に無 risk で正の利益を得ることはない．この一見当たり前の要請から様々な重要な帰結が導かれており，金融分野においてはもはや核となるような考え方である．これについては刈屋 (2000) に詳しく論じられている．

さて European call option の価格 $C(S,t)$ $(S := S_t)$ に関する Balck-Scholes 方程式を導出しよう．その前に，手短に基本概念について解説しておこう．

派生証券 (derivative securities) とは，株式や現物などの，もとになる（金融）商品から派生して定められた証券あるいは契約をいう．もとになる金融商品を原証券 (underlying asst) という．派生証券には例えば次のような商品がある．

· 先渡し (forward)：ある金融商品を，未来のある時点 T (満期日という) において現在の時点で取り決めた価格で受け渡しをする取り引き．

· Option：先渡し取り引きに, その取り引きを実行するかどうかの選択権 (option) が付加された取り引き．この場合, 原証券は一般には株式である．

先渡しを買うとはどういうことか, もう少し詳しく述べると以下のようになる．満期日 T において, 取り決めておいた契約価格 K （行使価格という）を支払いその金融商品を受け取るのである．その金融商品は満期日 T における価格 S_T で売ることができる．すなわちこの先渡し買いの満期日 T における損益, あるいは価格は

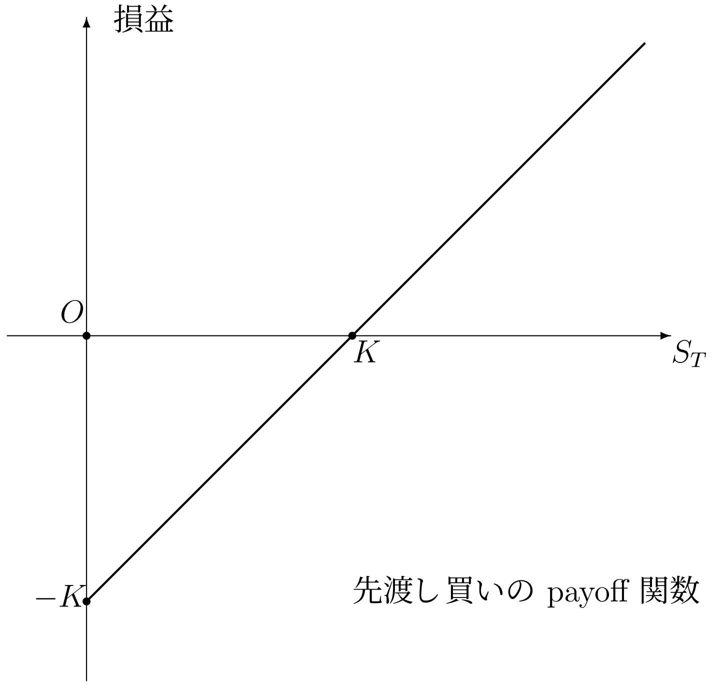
$$S_T - K$$

となる．現実にはこの差額 $S_T - K$ が取り引きされる．

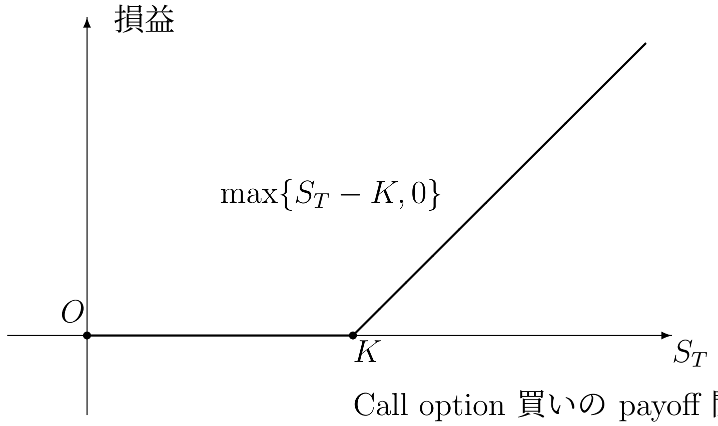
それでは call option を買うとはどういうことであろうか．これは満期日 T において株式を行使価格 K で買う権利のことである．権利なので義務ではなく, その権利を行使しなくとも良い．すなわち満期日 T における株式の価格 S_T が行使価格 K を越えていれば, この権利を行使して上と同様に考えて $S_T - K$ の利益を受け取ることになる．しかし S_T が K を下回っていれば, この権利を行使しないので受け取るものはない．よって, この call option 買いの満期日 T における損益, あるいは価値は

$$\begin{cases} S_T - K & \text{if } S_T \geq K \\ 0 & \text{if } S_T < K \end{cases} = \max\{S_T - K, 0\} \quad (\geq 0)$$

となる．これを call option 買いの payoff 関数という．この payoff 関数は非負なので, 購入する人にとって損はない．よってこのままではこのような option を売る人はいない．そこで現時点 t $(< T)$ においては, 何らかの価格 (premium) を支払ってこの call option を買うことになる．



先渡し買いの payoff 関数



Call option 買いの payoff 関数

問題は, この call option $C(S,t)$ $(S := S_t)$ の現時点 t $(< T)$ における価格, あるいは価値はどうなるか, ということである.

Black-Scholes 方程式とは, 株価変動モデル (5) のもとで, この $C(S,t)$ のみたすべき方程式を表わしている. 以下それを導出して行こう.

第一段. $C(S,t)$ の変動.

まず $C(S,t)$ の微小変動 dC を計算しよう. ($dW := dW_t$.)

$$
\begin{aligned}
dC &= C(S+dS, t+dt) - C(S,t) \\
&= C(S,t) + \frac{\partial C}{\partial t}(S,t)dt + \frac{\partial C}{\partial S}(S,t)dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t)(dS)^2 \\
&\qquad\quad + (\text{高次項}) - C(S,t) \\
&= \frac{\partial C}{\partial t}(S,t)dt + \frac{\partial C}{\partial S}(S,t)(\sigma S dW + \mu S dt) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t)(\sigma S dW + \mu S dt)^2 + (\text{高次項}) \\
&= \sigma S \frac{\partial C}{\partial S}(S,t)dW \\
&\quad + \Big(\mu S \frac{\partial C}{\partial S}(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t) + \frac{\partial C}{\partial t}(S,t)\Big)dt + (\text{高次項}).
\end{aligned}
$$

ただし Itô の補題 $(dW)^2 = dt$ を適用した（(3) 式）. よって高次項を無視すると

$$
\begin{aligned}
dC &= \sigma S \frac{\partial C}{\partial S}(S,t)dW \\
&\quad + \Big(\mu S \frac{\partial C}{\partial S}(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t) + \frac{\partial C}{\partial t}(S,t)\Big)dt
\end{aligned}
$$

を得る.

第二段. Riskless portfolio の構成.

今 call option $C(S,t)$ と株式 S とを組み合わせて, 次の portfolio を組む. ここで portfolio とは, 投資戦略くらいの意味と思っておいて欲しい.

$$
\Pi = C(S,t) - \varDelta S.
$$

ただし $\varDelta$ (delta) は, 微小変化には係わらない量とする.

Π の微小変化を計算する. 第一段から

$$
\begin{aligned}
d\Pi &= dC - \mathit{\Delta} dS \\
&= \sigma S\Big(\frac{\partial C}{\partial S}(S,t) - \mathit{\Delta}\Big)dW \\
&\quad + \Big(\mu S\frac{\partial C}{\partial S}(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t) + \frac{\partial C}{\partial t}(S,t) - \mu S \mathit{\Delta}\Big)dt.
\end{aligned}
$$

そこで, delta hedging と呼ばれる

$$
\mathit{\Delta} = \frac{\partial C}{\partial S}
$$

と選ぶと, Π の微小変化から不確実な項 dW が消える.

$$
d\Pi = \left(\frac{\partial C}{\partial t}(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t)\right) dt.
$$

この dW の項がなくなる portfolio Π を, riskless portfolio という.

第三段. No arbitrage.

第二段で構成された riskless portfolio Π は, 健全な銀行あるいは国債への投資と差があってはならない. 例えば Π がこれらの投資よりも割安ならば, Π を借り健全な利子率 r で運用すれば, 無 risk で差額の利益を得ることができる. 無裁定価格理論では, このような場合は許されないとする. よって

$$
\begin{aligned}
d\Pi &= r\Pi dt \\
&= \Big(\frac{\partial C}{\partial t}(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t)\Big)dt.
\end{aligned}
$$

ただし最初の等式では連続複利の考えを用いた（後述する）.

$$
\Pi = C(S,t) - S\frac{\partial C}{\partial S}(S,t)
$$

を代入して $d\Pi$ のふたつの等式をまとめると, 次の Black-Scholes 方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial C}{\partial t}(S,t)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t)+rS\frac{\partial C}{\partial S}(S,t)-rC(S,t)=0 \\
&\qquad\qquad\qquad \text{in } S>0,\ t<T \\
&C(0,t)=0 \qquad \text{for } t\le T \\
&C(S,t)\sim S \qquad \text{as } S\to\infty \text{ for } t\le T \\
&C(S,T)=\max\{S-K,0\} \qquad \text{on } S\ge 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ただしもう一度述べると, $K(>0)$ は行使価格, $T(\in \boldsymbol{R})$ は満期日, $r(>0)$ は無 risk 利子率と呼ばれるそれぞれ定数である. 他のさまざまな option たちの基本的な事項については例えば, 高橋・新井 (1996), 森・藤田 (1999), 三浦 (2000), 齋藤 (2000) を参照のこと. ひと言付け加えると, 拡散現象を時間の逆方向に解くため, 偏微分方程式論で通常の初期条件ではなく, 満期日での状態を指定する満期条件 $C(S,T)=\max\{S-K,0\}$ を課していることに注意する.

多くの書物に解説されており, また後の §4 で詳しく導出するが, (6) の解は次のように与えられる.

$$
C(S,t)=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{7}
$$

ただし

$$
N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy
$$

であり, d_1, d_2 は次で定められる.

$$
\begin{aligned}
d_1&=\frac{\log(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\\
d_2&=\frac{\log(S/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.
\end{aligned}
$$

解 $C(S,t)$ は (5) での μ に依らないことを注意しておく．この事実も無裁定価格理論のひとつの帰結である．

2.3. 連続複利について

Black-Scholes 方程式の導出に現れた連続複利の考え方について，簡単に述べておこう．今仮に，利子率（年率） r は一定とする．K 円を預金すれば T 年後には

$$(1+r)^T K \quad 円$$

となる．もし半年複利ならば，半期利子率 $r/2$ が $2T$ 期なので，T 年後には

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2T} K \quad 円$$

となる．$12/n$ 年複利ならば，$12/n$ 期利子率が nT 期なので T 年後には

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nT} \quad 円$$

になる．理想的に $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nT} K = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/r}\right)^{(n/r)\cdot rT} K = e^{rT} K \quad 円$$

これを連続複利という．

$$\Pi = e^{rt} K \quad \leftrightarrow \quad d\Pi = r\Pi dt$$

なので，連続複利での増加率は $r\Pi dt$ ということになる．

3　拡散方程式の解法

3.1. 有界区間の場合

それでは拡散方程式, より正確には熱方程式を実際に解こう. ここで解くとは解の存在を示すことのみでを意味しない. 具体的な解表示を得ることを目標とする.

まず有界区間の場合を考察しよう. 簡単のため閉区間 $[0,1]$ における一次元熱方程式の斉次 Dirichlet 問題を考える.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad &\text{in } 0<x<1,\ t>0\\ u(0,t)=u(1,t)=0 \qquad &\text{for } t \geq 0\\ u(x,0)=u_0(x) \qquad &\text{on } 0 \leq x \leq 1.\end{aligned} \tag{8}$$

ここで ν (>0) は定数, また初期値 $u_0(x)$ は与えられた関数とする.

$$u_0(0)=u_0(1)=0$$

をみたす必要（適合条件）がある.

変数分離解と呼ばれる次の特別な形の解を探してみよう.

$$u(x,t)=U(x)V(t).$$

これを (7) に代入して計算する. ただし第三式は除いておく.

$$U(x)V'(t)=\nu U''(x)V(t)$$
$$U(0)=U(1)=0.$$

第一式の微分 $'$ はそれぞれの変数によるものである. 変形すれば

$$\frac{V'(t)}{V(t)}=\nu\frac{U''(x)}{U(x)}=\lambda.$$

ただし $\lambda \in \boldsymbol{C}$ は, 同時に x, t の関数であるため定数でなければならない.

そこで $U(x)$ の方程式を解く.

$$\begin{aligned} U''(x) &= \frac{\lambda}{\nu} U(x) \qquad \text{in } 0 < x < 1 \\ U(0) &= U(1) = 0. \end{aligned}$$

これは以下のように解くことができる. まず $U(x)$ の一般解は

$$U(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda/\nu} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda/\nu} x} \quad (C_1, C_2 \in \boldsymbol{C} \text{ は定数}).$$

これが境界条件をみたすためには

$$\begin{cases} U(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ U(1) = C_1 e^{\sqrt{\lambda/\nu}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda/\nu}} = 0. \end{cases}$$

すなわち $|C_1| + |C_2| \neq 0$ となる定数 (C_1, C_2) が存在するには

$$\begin{aligned} e^{2\sqrt{\lambda/\nu}} &= 1 \\ \lambda &= -n^2 \pi^2 \nu \quad (n \in \boldsymbol{N}) \end{aligned}$$

が必要十分となる. よって解 $U(x)$ として

$$U(x) = R_n \sin n\pi x \qquad (n \in \boldsymbol{N},\ R_n \in \boldsymbol{R})$$

を得る.

さて次に, $\lambda = -n^2 \pi^2 \nu$ のもとで $V(t)$ の方程式を解くと

$$\begin{aligned} V'(t) &= -n^2 \pi^2 \nu V(t) \qquad \text{for } t > 0 \\ V(t) &= V(0) e^{-n^2 \pi^2 \nu t}. \end{aligned}$$

まとめると, 解 $u(x,t)$ のひとつの候補として

$$u(x,t) = a_n e^{-n^2\pi^2\nu t} \sin n\pi x \qquad (n \in \boldsymbol{N},\, a_n \in \boldsymbol{R})$$

を得る.

熱方程式 (8) 第一式は線形なので, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ が解ならばその線形結合 $a_1u_1(x,t)+a_2u_2(x,t)$ $(a_1, a_2 \in \boldsymbol{R})$ も解である. やや乱暴だが無限個の線形結合でも良いとして

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2\nu t} \sin n\pi x \qquad (a_n \in \boldsymbol{R})$$

が一般解であると考えて差し支えなかろう.

係数 a_n $(n \in \boldsymbol{N})$ は初期値 $u_0(x)$ を用いて決定される. $t = 0$ とすれば

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x.$$

両辺に $\sin n\pi x$ を乗じて区間 $(0,1)$ で積分する.

$$\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x \, dx = \begin{cases} 1/2 & \text{if } n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

に注意して計算すると

$$a_n = 2\int_0^1 u_0(x) \sin n\pi x \, dx$$

を得る.

これよりまとめとして, (8) の解は

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi^2\nu t}\Bigl(\int_0^1 u_0(y)\sin n\pi y\,dy\Bigr)\sin n\pi x \\
&= \int_0^1 \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi^2\nu t}\sin n\pi x \sin n\pi y\Bigr) u_0(y)\,dy
\end{aligned}
\tag{9}
$$

と与えられることが分かる. これを熱方程式の Fourier 級数解という. この変数分離法による Fourier 級数解で, ある意味十分であることは関数解析の教科書, 例えば増田 (1994) を参照のこと.

問題 1. 有界区間 $[0,1]$ において, 熱方程式の Neumann 問題を上と同様の方法で解け. すなわち

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{in } 0<x<1,\ t>0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \qquad \text{for } t>0 \\
&u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{on } 0\le x\le 1
\end{aligned}
$$

の Fourier 級数解を求めよ.

問題 2. 有界区間 $[a,b]$ における Dirichlet 問題

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{in } a<x<b,\ t>0 \\
&u(a,t) = u(b,t) = 0 \qquad \text{for } t>0 \\
&u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{on } a\le x\le b
\end{aligned}
$$

を変数変換 $(x,t) \to ((b-a)x+a,(b-a)^2t)$ することにより, 本文の Fourier 級数解を用いて解け.

さらに有界区間 $[a,b]$ で斉次 Neumann 境界条件を課したときはどうなるか.

3.2. 全空間の場合

では次に, 一次元空間全体で熱方程式を解いてみよう. 問題を改めて書き下しておくと

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{in } -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{for } x \in \boldsymbol{R}. \end{aligned} \tag{10}$$

ここで初期値 $u_0(x)$ は与えられた関数である. 一般には $|x| \to \infty$ での挙動を指定することが多く, またそれは解の一意性のために必要である. 今は $u(x,t)$, $u_0(x)$ ともに $|x| \to \infty$ のとき, 高々多項式程度の増大度であるとしておく.

有界区間の場合にならって変数分離形の解を探してみる.

$$u(x,t) = U(x)V(t)$$

とおいて方程式に代入すると

$$\begin{aligned} U(x)V'(t) &= \nu U''(x)V(t) \\ \frac{V'(t)}{V(t)} &= \nu \frac{U''(x)}{U(x)} = -\omega^2 \nu. \end{aligned}$$

ただし ω (> 0) は定数である. これよりそれぞれの方程式を解いて

$$\begin{aligned} U(x) &= a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x \\ V(t) &= V(0)e^{-\omega^2 \nu t} \end{aligned}$$

が解のひとつの候補となる. ただし $a(\omega)$, $b(\omega)$ は ω の実数値関数である.

さて, 有界区間の場合では, 一般解の表示は, 上の解の候補たちの離散的な $n \in \boldsymbol{N}$ に関する線形結合として与えられた. 今の全空間の場合での類似物は, 連続的な $\omega \in \boldsymbol{R}$ $(\omega > 0)$ に関する積分として与えられると考

えても差し支えないであろう. すなわち, 全空間での熱方程式の一般解として

$$u(x,t) = \int_0^\infty (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)e^{-\omega^2\nu t}\,d\omega$$

が適当であろう. ただし一般性を失わずに $V(0) = 1$ とした.

有界区間のときと同様に考えると, 係数関数 $a(\omega)$, $b(\omega)$ は初期値 $u_0(x)$ から決まると予想される. 強引に $t = 0$ としてみると

$$u_0(x) = u(x,0) = \int_0^\infty (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)\,d\omega.$$

ここで次の Fourier 積分公式を用いる.

命題. (Fourier 積分公式.) $f(x)$ を $-\infty < x < \infty$ において滑らかな関数で, $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\,dx < \infty$ をみたすとする. このとき

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\omega(y-x)\,dy\right)\,d\omega$$

が成り立つ.

証明は例えば 谷島 (1994), 金子 (1998) を参照. ひとつ注意をしておくと, 有界区間 $[0,1]$ での対応物は, (9) で $t = 0$ とおいた

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^\infty 2\left(\int_0^1 u_0(y)\sin n\pi y\sin n\pi x\,dy\right)$$

である. 有界区間では離散スペクトルであるが, 全空間では連続スペクトルであることと対応している.

さて今の場合, 命題の式において

$$\cos\omega(y-x) = \cos\omega y\cos\omega x + \sin\omega y\sin\omega x$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
a(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\cos\omega y\, dy \\
b(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\sin\omega y\, dy
\end{aligned}
$$

とすればのちのち適当であろうことが推定される.

実際ここまでの議論を認めると, 求める解 $u(x,t)$ は, 積分の順序交換が自由にできるとして

$$
u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)u_0(y)\, dy
$$

ただし

$$
G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\omega^2\nu t}\cos\omega x\, d\omega
$$

と表わすことができる.

そこで上の G を具体的に求めよう. $G(x,t)$ を x で微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x}(x,t) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \omega e^{-\omega^2\nu t}\sin\omega x\, d\omega \\
&= -\frac{x}{2\pi\nu t}\int_0^{\infty} e^{-\omega^2\nu t}\cos\omega x\, d\omega \\
&= -\frac{x}{2\nu t}G(x,t).
\end{aligned}
$$

上の計算では部分積分を用いた. 結果の等式は積分できて

$$
\begin{aligned}
G(x,t) &= G(0,t)e^{-x^2/4\nu t} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}e^{-x^2/4\nu t}
\end{aligned}
$$

となり, Gauss 核 $G(x,t)$ が導出された. まとめると

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} e^{-(x-y)^2/4\nu t} u_0(y)\, dy \tag{11}$$

が求める (10) の解であることが示された. これを熱方程式の解の基本解表示という. Gauss 核 $G(x,t)$ を基本解という. (11) は有界区間の場合の (9) に対応している.

問題 3. 全空間での熱方程式の解の導出に関して, 本文中の議論を数学として厳密に行うとどうなるか. 詳しく述べよ.

また Fourier 積分公式について, さらに詳細な形の定理を調べよ. どのような関数空間を設定するのが適当であるか考えよ.

問題 4. 全空間での熱方程式の基本解表示 (11) を $u_0(x)$ に対して $u(x,t)$ が定まる作用素であると考える. このとき $u(x,t)$ が, 実際に

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{in } -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\
&\lim_{t \to 0} u(x,t) = u_0(x) \qquad \text{uniformly on } x \in \boldsymbol{R}
\end{aligned}$$

をみたすことを, 直接計算することにより確かめよ. ただし簡単のため $u_0(x)$ は, $x \in \boldsymbol{R}$ において一様に連続かつ有界であるとしてよい. さらには, $u_0(x)$ としてどのような関数までを許すことができるか調べよ.

4　Black-Scholes 方程式の解法

4.1. 熱方程式への変換

前の §3 で導出された拡散方程式の解表示を用いて, European call option の価格 $C(S,t)$ に関する方程式 (6) を解いてみよう. この節ではそのための準備として変数変換を行い, (6) を単純な熱方程式に変換する.

具体的には次の変換を行う.

$$C(S,t) = Ke^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau).$$

ただし

$$\begin{aligned}
&x = \log S - \log K \qquad (\text{i.e. } S = Ke^x)\\
&\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\\
&\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2 \qquad \text{ただし } k = \frac{r}{\sigma^2/2}.
\end{aligned}$$

このとき $u(x,\tau)$ のみたすべき方程式と, 初期条件および境界条件を求めるのである. まずこの変換で領域は

$$\{0 \le S < \infty\} \times \{t < T\} \longleftrightarrow \{-\infty < x < \infty\} \times \{\tau > 0\}$$

と対応することに注意する. そこで

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2, \qquad \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}$$

に留意して計算すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t}(S,t) &= \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}(Ke^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)) \\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2 Ke^{\alpha x+\beta\tau}(\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)+\beta u(x,\tau)) \\
\frac{\partial C}{\partial S}(S,t) &= \frac{\partial x}{\partial S}\frac{\partial}{\partial x}(Ke^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)) \\
&= \frac{1}{S}Ke^{\alpha x+\beta\tau}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)+\alpha u(x,\tau)) \\
S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t) &= Ke^{\alpha x+\beta\tau}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau)+ \\
&\qquad + (2\alpha-1)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)-\alpha(1-\alpha)u(x,\tau)).
\end{aligned}
$$

まとめると (6) 第一式は

$$
\begin{aligned}
&\{-\frac{1}{2}\sigma^2(\beta+\alpha(1-\alpha))+r(\alpha-1)\}u(x,\tau) \\
&\qquad +\{\frac{1}{2}\sigma^2(2\alpha-1)+r\}\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau) \\
&\qquad +\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau)-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)=0
\end{aligned}
$$

となる. ここで

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sigma^2(\beta+\alpha(1-\alpha))+r(\alpha-1) &= \frac{1}{8}\sigma^2((k+1)^2+k^2-1)-\frac{r}{2}(k+1) \\
&= 0 \\
\frac{1}{2}\sigma^2(2\alpha-1)+r &= -\frac{1}{2}\sigma^2 k+r=0
\end{aligned}
$$

と計算されるので, 結局

$$
\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) \qquad \text{in } -\infty<x<\infty,\ \tau>0
$$

を得る.

満期条件 $C(S,T)=\max\{S-K,0\}$ は, $u(x,\tau)$ に対する初期条件となり

$$u(x,0)=e^{-\alpha x}\max\{e^x-1,0\}=\max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k-1)x},0\}.$$

境界条件はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&u(x,\tau)\to 0 \qquad \text{as } x\to-\infty\\
&u(x,\tau)\sim e^{-\beta\tau+(1-\alpha)x} \qquad \text{as } x\to\infty
\end{aligned}$$

となる.

4.2. Black-Scholes option 評価公式

いよいよ Black-Scholes option 評価公式 (7) を示そう. 変換された方程式をもう一度書いておくと

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial\tau}(x,\tau)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) \qquad \text{in } -\infty<x<\infty,\ \tau>0\\
&u(x,\tau)\to 0 \qquad \text{as } x\to-\infty\\
&u(x,\tau)\sim e^{-\beta\tau+\frac{1}{2}(k+1)x} \qquad \text{as } x\to\infty\\
&u(x,0)=\max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k-1)x},0\}=:u_0(x) \qquad \text{on } x\in\boldsymbol{R}.
\end{aligned}$$

熱方程式の基本解表示 (11) を用いる. $\nu=1$ であり, 初期条件は

$$u_0(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k-1)x} & \text{if } x>0\\ 0 & \text{if } x\le 0\end{cases}$$

であることに注意すると, 解 $u(x,\tau)$ は

$$\begin{aligned}
u(x,\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-(x-y)^2/4\tau}u_0(y)\,dy\\
&=\int_0^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-(x-y)^2/4\tau}\big(e^{(k+1)y/2}-e^{(k-1)y/2}\big)\,dy
\end{aligned}$$

となる．右辺各項を計算する．まず第一項は

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-(x-y)^2/4\tau+(k+1)y/2}\,dy \\
&\qquad = e^{(k+1)x/2+(k+1)^2\tau/4}\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-(y-(k+1)\tau-x)^2/4\tau}\,dy \\
&\qquad = e^{(k+1)x/2+(k+1)^2\tau/4} N(d_1).
\end{aligned}$$

ただし最後の等式では

$$N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy,$$

および

$$d_1 := \frac{\log(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{x+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

を用いた．同様にして第二項は

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-(x-y)^2/4\tau+(k-1)y/2}\,dy \\
&\qquad = e^{(k-1)x/2+(k-1)^2\tau/4}\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-(y-(k-1)\tau-x)^2/4\tau}\,dy \\
&\qquad = e^{(k-1)x/2+(k-1)^2\tau/4} N(d_2),
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
d_2 &:= \frac{\log(S/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \\
&= \frac{x+(k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}
\end{aligned}$$

に留意した．よって解 $u(x,\tau)$ は

$$u(x,\tau) = e^{(1-\alpha)x-\beta\tau}N(d_1) - e^{-\alpha x-\beta\tau-k\tau}N(d_2)$$

と与えられる．変数変換を元にもどして European call option の価格 $C(S,t)$ を計算すると

$$\begin{aligned} C(S,t) &= Ke^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) \\ &= Ke^{x}N(d_1) - Ke^{-k\tau}N(d_2) \\ &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \end{aligned}$$

これは (7) に他ならない．

問題 5. Option delta $(\partial C/\partial S)(S,t)$ を計算せよ．また

$$\begin{aligned} &\sigma \to 0 \quad \text{および } \sigma \to \infty \\ &r \to 0 \quad \text{および } r \to \infty \end{aligned}$$

のときに $C(S,t)$ はそれぞれどのようになるか計算せよ．その漸近挙動の経済的な意味を考えよ．

5 自由境界問題

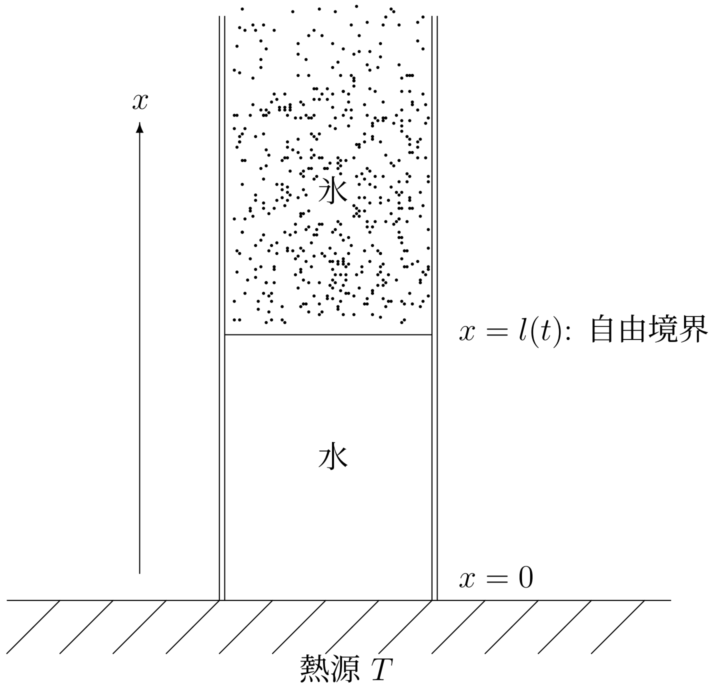
5.1. Stefan 問題

再び拡散現象の考察にもどり, 身の回りの拡散現象を思い浮かべてみよう. 例えば coffee に砂糖が溶けていく現象や, またあるいは氷が水へと融ける現象がすぐに思いつく. 実はこれらの現象に関しては, §1 での (4) 式における固定された境界以外の境界条件が現われる. この事実を, 氷の融解についてもう少し追求しよう.

Austria の物理学者 J. Stefan (1835–1893) は, 以下のような実験を行った (1889). 長い半円筒の中に氷柱が詰まっているとする. この円筒の下端が熱源 T (>0) に接しており, だんだんと氷が融けて行く. このときの氷と水の境界の運動あるいは時間発展を調べるのである. 円筒を一次元的に考え, 最初の氷柱の底からの距離を x (≥ 0) とする. 時刻 t における x での温度を未知関数として $u(x,t)$ とあらわす. さらに時刻 t までに氷が融けてできた水柱の高さを $l(t)$ とおく. このとき $u(x,t)$, $l(t)$ に対する偏微分方程式は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{in } 0 < x < l(t),\ t > 0 \\
u(0,t) &= T \qquad \text{for } t > 0 \\
u(l(t),t) &= 0 \qquad \text{for } t > 0 \\
\frac{dl(t)}{dt}(t) &= -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(l(t),t) \qquad \text{for } t > 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ここで ν (>0) は水の拡散定数, κ (>0) は熱伝導率であり, それぞれ物理定数である. (12) 第一式は水の領域における熱方程式である. (12) 第二式第三式は境界での温度を指定する境界条件である. (12) 第四式は境界での熱のやり取りを示す.



Stefan 問題

(12) においては $u(x,t)$ と $l(t)$ とが未知関数である．$l(t)$ は自由境界 (free boundary) と呼ばれている．そのため (12) は自由境界問題 (free boundary problems) と分類される非線形偏微分方程式の問題群のひとつである．今の場合は最初の研究者を讃えて一相 Stefan 問題とも呼ばれている．非線形問題の性格上, 解をあらわに求めることは一般には不可能で, 数値解を実行することとなる．

一相 Stefan 問題 (12) は, 初期条件のもとで u と l とを求める．すなわち

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{on } 0 \leq x \leq l_0 := l(0)$$

を課して解く．ここで $u_0(x)$ は初期状態を指定する与えられた関数である．当然熱源での条件, (12) 第二式第三式が満たされなければならない．すなわち

$$u_0(0) = T, \qquad u_0(l_0) = 0.$$

これを初期状態に対する適合条件 (compatibility condition) という.

さてこのような自由境界を伴う拡散現象は, 自然界には実に多く存在する. 例えば, 黒部ダムなどのダムのコンクリート部分に, 貯水された水がどれくらいまで染み込んでいるかという問題がある. この染み込みの境界は自由境界となる. さらには半導体製造過程などでの結晶成長において, 結晶の成長面は一般に自由境界としてモデル化される. これら自由境界問題全般については, 例えば河原田 (1989) を参照のこと.

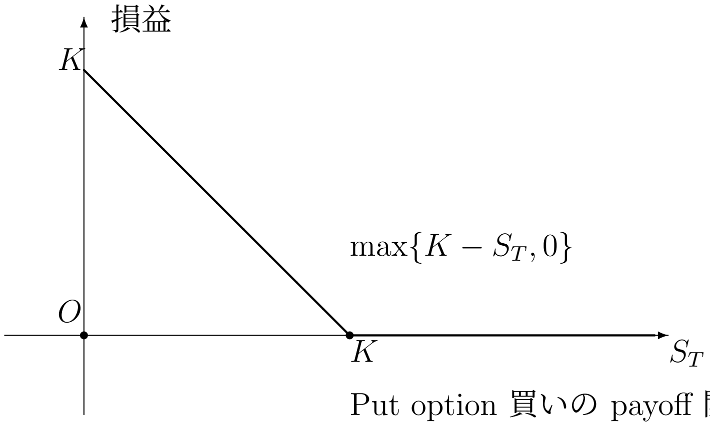
自然な発想として, 拡散現象としてとらえた株価変動モデルにおいても, 自由境界を伴う問題は当然あり得ることが予想される.

5.2. Put-call parity

American put option $P(S,t)$ の価格評価が, 権利行使境界を自由境界とする自由境界問題であることは, option の価格理論の初期から認識されていた (Merton (1973)). その自由境界問題の偏微分方程式を書き下す前に, いくつかの基本事項について述べておこう.

まず option には大きく分けて call option と put option とがある. Call option の売買とは, 株式を定められた行使価格 K で買う権利を売買することである. これに対して put option の売買とは, 株式を行使価格 K で売る権利を売買することである. 念のため付け加えると, 行使価格 K の put option $P(S,t)$ の満期日 T での payoff 関数は

$$P(S,T) = \max\{K - S, 0\}.$$



Put option 買いの payoff 関数

また別に, option の型 (type) には様々なものがあるが, 主要なものに European type と American type とがある. European type とは, 権利行使が満期日においてのみ可能な option である. これに対して American type とは, 権利行使が満期日の前のいつでも可能な option である. 市場では大体 American type だそうである. 他には Bermudan type（Bermuda 島は大西洋の間にある）等がある.

さて今, 次の portfolio Π を考える. すなわち Π は, ひとつの債権 S を買い (long position) , 満期日 T と行使価格 K を同じくするひとつの put option $P(S,t)$ を買い (long position), ひとつの call option $C(S,t)$ を売る (short position).

$$\Pi = S + P(S,t) - C(S,t).$$

満期日 T におけるこの portfolio Π の価格は

$$\begin{aligned}\Pi &= S + \max\{K - S, 0\} - \max\{S - K, 0\} \\ &= K\end{aligned}$$

となり, S に関係なく一定の値 K をとる.

ということは, 満期前の t $(< T)$ においては, この portfolio と健全な銀行あるいは国債への投資と差があっては no arbitrage に反することにな

る．その差額分だけ無 risk で profit を得ることが可能だからである．すなわち

$$\begin{aligned}\Pi &= S + P(S,t) - C(S,t)\\ &= Ke^{-r(T-t)}.\end{aligned}$$

の等式が成り立つ．ただし r は無 risk 利子率であり, 連続複利の考えを用いて割り引いた割引価格 $Ke^{-r(T-t)}$ を考えている．この関係を put-call parity という．

5.3. American put option の価格評価

さて Black-Scholes の European call option $C(S,t)$ に対する評価公式 (7) によると, 満期日前 t $(< T)$ では

$$C(S,t) > \max\{S-K, 0\} \quad \text{for } S > 0$$

となることがわかる．これと put-call parity とから, 特に S の小さいところでは確実に, 満期日前の t $(< T)$ においては

$$P(S,t) < \max\{K-S, 0\}$$

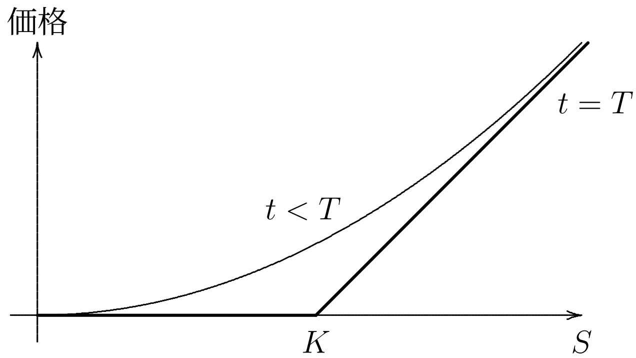
をみたすことが従う．これはやはり no arbitrage 原則に反する．なぜなら, もしある $t(t < T)$ で

$$P(S,t) < K - S$$

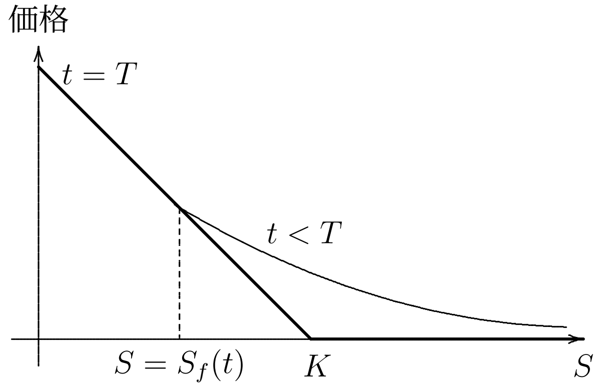
が成り立っているとすれば, 債権 S と行使価格 K の put option を同時に買い, 直ちに put option の権利を行使して債権 S を K の価格で売る．すると差し引き差額分の

$$K - S - P(S,t) > 0$$

の利益を得る．つまり無 risk で正の利益を得ることになる．これは no arbitrage に反している．



call option の価格



put option の価格

行使境界 $S_f(t)$

よって American put option $P(S,t)$ の価格評価問題では, 満期日前行使 $S = S_f(t)$ が存在することになる．境界条件の詳細は他の成書 (P. Wilmott et al. 1993, 1995) に譲ることにして, 偏微分方程式の自由境界問題としての定式化を書いておくと次のようになるに.

$$
\begin{aligned}
P(S,t) = K - S,\ &\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP\right)(S,t) < 0 \\
&\text{in } 0 \le S < S_f(t),\ t < T \\
P(S,t) > K - S,\ &\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP\right)(S,t) = 0 \\
&\text{in } S_f(t) < S,\ t < T \\
P(S_f(t),t) &= \max\{K - S_f(t), 0\} \qquad \text{for } t < T \\
\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t),t) &= -1 \qquad\qquad \text{for } t < T \\
P(S,T) &= \max\{K - S, 0\} \\
S_f(T) &= K.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ここで $S = S_f(t)$ は権利行使境界と呼ばれる自由境界である.

方程式 (13) は満期条件

$$
P(S,T) = \max\{K - S, 0\} \tag{14}
$$

のもとで解かれる. しかしこれにはひとつ問題点がある. それは (14) 右辺に関しては

$$
\frac{\partial}{\partial S}\max\{K - S, 0\} = \begin{cases} -1 & \text{if } 0 < S < K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

となるため, 権利行使境界 $S_f(t)$ に対する適合条件は

$$
S_f(T) \le K
$$

であるときのみ満たされる. 別の言い方をすれば, 満期条件には一種の不連続性がある.

一相 Stefan 問題 (12) の初期関数 $u_0(x)$ には, 通常不連続性は仮定しない. 適合条件をみたさない初期値のもとで偏微分方程式を解くことは, 普通の場合考察の対象とならない. そのため American put option の価格評価問題は, 偏微分方程式論の上からは実は大変特異な問題となる. 実際, 数値計算によるとこの自由境界問題は, 満期日での不連続性のため数値解は極めて安定しない様相を示す (T. Takeuchi, N. Ishimura, and H. Imai (2001)).

実は option 価格評価問題では, この American put option のみならず, Amrican call option with dividents（配当付き option）, あるいはより複雑な exotic options のいくつかはやはり自由境界問題となる. これら問題では, 適合条件の不連続性にも関係なく, ある程度に robust な数値計算法の開発は不可欠であり, それは強く求められている課題である.

参考文献

F. Black and M. Scholes; The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Econ. **81** (1973), 637–659.

A. Einstein; Investigations on the Theory of the Brownian Movement, Dover, 1956.

江沢洋; だれが原子をみたか, 岩波科学の本, 1976 年.

儀我美一・儀我美保; 非線形偏微分方程式, 共立出版, 1999 年.

伊藤清; 確率論, 岩波書店, 1953 年.

F. John; Partial Differential Equations, 4th. ed., Springer-Verlag, 1981.

金子晃; 偏微分方程式入門, 東京大学出版会, 1998 年.

刈屋武昭; 金融工学とは何か, 岩波新書, 2000 年.

河原田秀夫; 自由境界問題, 東京大学出版会, 1989 年.

増田久弥; 関数解析, 裳華房, 1994 年.

R.C. Merton; Theory of rational option pricing, Bell J. Econ. Manag. Sci. **4** (1973), 141–183.

三浦良造; デリバティブの数理, サイエンス社, 2000 年.

森真・藤田岳彦; 確率・統計入門, 講談社, 1999 年.

長井英生; 確率微分方程式, 共立出版, 1999 年.

齊藤誠; 金融技術の考え方・使い方, 有斐閣, 2000 年.

D. Ševčovič; Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option, European J. Appl. Math. **12** (2001), 25–37.

高橋誠・新井富雄; デリバティブ入門, 日本経済新聞社, 1996 年.

D.M. Salopek; American Put Options, Pitman Research Monographs and Surveys in Pure and Applied athematics 84, Addison-Wesley Longman, 1997.

T. Takeuchi, N. Ishimura, and H. Imai; A new numerical technique for the option pricing problem of American type, to appear, 2001.

谷島賢二; 物理数学入門, 東京大学出版会, 1994 年.

渡辺信三; 確率微分方程式, 産業図書, 1975 年.

P. Wilmott, J. Dewynne, and S. Howison; Option Pricing: Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, 1993.

P. Wilmott, S. Howison, and J. Dewynne; The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge University Press, 1995.