

Nevanlinna 理論の微分方程式への応用

下村 俊

(慶応義塾大学)

まえがき

解析的微分方程式の研究において複素関数論の諸結果を応用するのはごく自然な発想である．特に有理型関数解の大域的性質を調べるにあたっては Nevanlinna 理論は有効な手法の一つである．このような試みの萌芽はすでに P. Boutroux の 20 世紀初頭の仕事において見い出されるが，当時はまだ有理型関数についての Nevanlinna 理論は建設されてはいなかった．Nevanlinna 理論の微分方程式への応用は 1930 年代の吉田耕作による Malmquist の定理の証明が最初である．その後 1950 年代に H. Wittich らを中心に Painlevé 方程式他への応用という形で発展してきた．

著者は 2002 年秋学期，神戸大学理学部で Nevanlinna 理論と Painlevé 超越関数の値分布についての集中講義を担当する機会を得た．本講義録はこのときの講義内容に 1 階非線形方程式についての話題や Painlevé property の証明，Painlevé 超越関数の位数の話題などを加筆してまとめたものである．内容については関数論の基本的事項以外はほとんどすべての結果に証明をつけたつもりである．諸般の事情により本講義録の完成が一年後にまで延びてしまったが，なんとか形のあるものにまとめることができたのでほっとしている．

神戸大学で集中講義をする機会を与えて下さりさらに講義中にも有益な助言を戴いた高野恭一先生，最後まで授業を聴講して下さった神戸大学の大学院生，学生諸君に深く感謝する．

2003 年 10 月

下村 俊

目次

第 1 章 Nevanlinna 理論

1. 個数関数・近接関数・特性関数	1
2. 第 1 基本定理	3
3. 特性関数の基本的性質	7
4. 整関数の位数	11
5. 不足指数・分岐指数	12
6. 対数導関数の近接関数	13
7. Clunie 型の補題	20
8. 第 2 基本定理	22

第 2 章 微分方程式の有理型関数解

9. 解の特異点	27
10. 1 階非線形方程式, Riccati 方程式	29
11. Riccati 方程式の有理型関数解の値分布	36
12. Painlevé 方程式	38
13. 方程式 (I), (II) に対する Painlevé property の証明	40
14. Painlevé 方程式の有理関数解	47

第 3 章 Painlevé 超越関数の増大度

15. Painlevé 超越関数の位数の有限性	51
16. Painlevé 超越関数の位数のより精密な評価	56

第 4 章 Painlevé 超越関数の値分布

17. 方程式 (I) の解の値分布	73
18. 方程式 (II) の解の値分布	76

付録 微分方程式の局所解	82
--------------	----

文献	87
----	----

記号

$\ll, \gg, \asymp$	1
$\log^+ x$	1
$m(r, f)$	2
$N(r, f), \quad \overline{N}(r, f), \quad N_1(r, f)$	1
$n(r, f), \quad \overline{n}(r, f), \quad n_1(r, f)$	1
$S(r, f)$	19
$T(r, f)$	2
$\delta(\infty, f), \quad \delta(\alpha, f)$	12
$\vartheta(\infty, f), \quad \vartheta(\alpha, f)$	12
$\mu(\cdot)$	17
$\varrho(f)$	2

第 1 章 Nevanlinna 理論

微分方程式の有理型関数解の値分布を調べるのに必要な Nevanlinna 理論の基本的事項を解説する．予備知識としては複素関数論の標準的な基礎程度のものを仮定する．以下，Nevanlinna 理論の標準的な記号の他に次のような記号を使う．

- (1) $r > r_0$ で定義された関数 $\chi(r), \psi(r)$ に対し $\chi(r) = O(\psi(r))$ ($r \rightarrow \infty$) のとき $\chi(r) \ll \psi(r)$ または $\psi(r) \gg \chi(r)$ と書く．また $\chi(r) \ll \psi(r)$ と $\psi(r) \ll \chi(r)$ とが同時に成り立つとき $\chi(r) \asymp \psi(r)$ と書く．
 (2) $x > 0$ に対し $\log^+ x := \max\{\log x, 0\}$ ．

1. 個数関数・近接関数・特性関数

全複素平面 $\mathbb{C}$ における有理型関数 $f(z)$ を考える． $f(z)$ の任意の極 a に対しその重複度（つまり位数）を $\iota(a)$ と書くと

$$n(r, f) := \sum_{\substack{|a| \leq r \\ f(a) = \infty}} \iota(a)$$

は半径 r の閉円板に含まれる極を重複度をこめて数えた個数を表す．このとき $f(z)$ の極に関する**個数関数** (counting function) を

$$N(r, f) := \int_0^r \left(n(\rho, f) - n(0, f) \right) \frac{d\rho}{\rho} + n(0, f) \log r$$

と定義する．これは $n(r, f)$ を平均化し滑らかにしたものであるが，やはり極の頻度を表現しているといってよい．他の極の個数の数え方としては，重複度を無視して（つまり重複度をすべて 1 として）数える数え方，また，重複極（つまり位数 2 以上の極）のみを数える数え方などが考えられる．そのような数え方をしたときの個数はそれぞれ

$$\bar{n}(r, f) := \sum_{\substack{|a| \leq r \\ f(a) = \infty}} 1, \quad n_1(r, f) := n(r, f) - \bar{n}(r, f) = \sum_{\substack{|a| \leq r \\ f(a) = \infty}} (\iota(a) - 1)$$

となり，対応する個数関数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{N}(r, f) &:= \int_0^r \left(\bar{n}(\rho, f) - \bar{n}(0, f) \right) \frac{d\rho}{\rho} + \bar{n}(0, f) \log r, \\ N_1(r, f) &:= \int_0^r \left(n_1(\rho, f) - n_1(0, f) \right) \frac{d\rho}{\rho} + n_1(0, f) \log r \end{aligned}$$

により定義される．任意の複素数 α に対してもその α -点に関する個数関数が考えられる． $N(r, 1/(f - \alpha))$ は閉円板 $|z| \leq r$ における α -点の頻度を表現している．重複度を無視した α -点に関する個数関数，重複 α -点に関する個数関数はそれぞれ $\bar{N}(r, 1/(f - \alpha))$, $N_1(r, 1/(f - \alpha))$ となる．さらに $f(z)$ の**近接関数** (proximity function) を

$$m(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})| d\phi$$

により定義する．円周 $|z| = r$ 上に $f(z)$ の極 $z_0 = re^{i\phi_0}$ が存在する場合にはその近くでは被積分関数は $\log |r(\phi - \phi_0)|$ 程度の大きさなので上式の右辺は広義積分と解釈する．これは半径 r の円周上での $f(z)$ の大きさの平均を反映した量である．有理型関数 $f(z)$ のふるまいの複雑さを測る尺度としての関数

$$T(r, f) := m(r, f) + N(r, f)$$

を $f(z)$ の**特性関数** (characteristic function) と呼ぶ． $r \rightarrow \infty$ のときに $T(r, f)$ の増え方が大きければ大きいほど $f(z)$ が複雑なふるまいをするといえることができる． $T(r, f)$ の増え方を数値的にあらわすものとしてたとえば

$$\rho(f) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

が考えられるが，これを $f(z)$ の**位数** (growth order) と呼ぶ．

Example 1.1. $f_1(z) = e^z$ に対しては， $N(r, f_1) = 0$, $m(r, f_1) \asymp r$ であり $T(r, f_1) \asymp r$. $f_2(z) = e^{-z}$ に対しては $N(r, f_2) = 0$, $m(r, f_2) \asymp r$ より $T(r, f_2) \asymp r$. さらに $f_3(z) = 1/(e^z - 1)$ に対しては少し計算すれば $N(r, f_3) \asymp r$, $m(r, f_3) = O(1)$ であることがわかるから $T(r, f_3) \asymp r$ となる．これら 3 つの関数のうち $f_1(z)$, $f_2(z)$ は整関数， $f_3(z)$ は本当の意味での有理型関数であるが，その特性関数 $T(r, f_j)$ ($j = 1, 2, 3$) はすべて同じ程度の大きさであり位数 $\rho(f_j)$ はいずれも 1 である．位数という数値的指標をとおしてみた場合，これら 3 つの関数が有理型関数として同じ程度の複雑さをもっているということになるが，この事はもとの 3 つの関数の形から見た複雑さの感覚とは矛盾しないであろう．

Example 1.2. $T(r, e^z) \asymp r$, $T(r, \exp(z^2)) \asymp r^2$, また任意の有理関数 $g(z)$ に対して $T(r, g) = O(\log r)$ である (後述の Proposition 3.1 参照). そして位数はそれぞれ順に 1, 2, 0 となる．

Example 1.3. 位数は必ずしも整数であるとはかぎらない．実際，整関数 $f(z) = (\exp(z^{1/2}) + \exp(-z^{1/2}))/2 = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/(2k)!$ に対しては $T(r, f) = m(r, f) \asymp r^{1/2}$ であるから $\varrho(f) = 1/2$ である．他の例については Example 3.2 を参照せよ．

2. 第1基本定理

Example 1.1 で見たように $T(r, e^z)$ と $T(r, 1/(e^z - 1))$ は同じ程度の大きさを持つが，もっと一般に次の等式が成立する．

Theorem 2.1. (第1基本定理) $f(z)$ を定数でない有理型関数とする．任意の複素数 α に対して

$$T(r, f) = T(r, 1/(f - \alpha)) + O(1).$$

Remark 2.1. この定理の証明中で示されるように，上の等式の $O(1)$ の部分を $R(r, f, \alpha)$ と書けば， $|R(r, f, \alpha)| \leq C_0 + 2 \log^+ |\alpha|$ をみたとす．ここで C_0 は $f(z)$ のみに依存する正定数である．

この定理は値分布の理論においてもっとも基本的かつ重要なものである．これを証明するのに次の公式を用いる．

Lemma 2.2. (Jensen-Poisson の公式) R を任意の正数とする．円板 $|z| \leq R$ 内の $f(z)$ の零点を重複度をこめて a_j ($j = 1, \dots, p$)，極を b_k ($k = 1, \dots, q$) とあらわす．このとき $|z| < R$ ならば

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\phi})| \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \log \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \overline{a_j}z} \right| - \sum_{k=1}^q \log \left| \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \overline{b_k}z} \right|. \end{aligned}$$

Remark 2.2. $f(z)$ が零点もしくは極をもたない場合も上の式はそれらに対応する項ぬきで成立する．また円周 $|z| = R$ 上に零点または極が存在する場合には右辺の積分は広義積分として解釈する．

Proof. 関数 $F(z)$ が $|z| < R + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ で正則かつ $F(z) \neq 0, \infty$ を満たすとする．このとき $\log F(z)$ の分枝

$$\log F(z) := \log F(0) + \int_0^z \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} d\zeta$$

は $|z| < R + \varepsilon$ で正則である．従って， $|z| < R$ ならば

$$\log F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\log F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

であり，そして $|R^2/\bar{z}| > R$ であるから

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\log F(\zeta)}{\zeta - R^2/\bar{z}} d\zeta$$

である．この2式の差をとり，さらに $\zeta\bar{\zeta} = R^2$ ，

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - R^2/\bar{z}} = \frac{R^2 - |z|^2}{(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z)} = \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2 \zeta}$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned} \log F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \log F(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2 \zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log F(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi \end{aligned} \quad (2.1)$$

を得る．両辺の実部をとれば， $|z| < R$ において

$$\log |F(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(Re^{i\phi})| \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi \quad (2.2)$$

が成立することがわかる．円周 $|z| = R$ の上で $f(z) \neq 0, \infty$ のとき，

$$F(z) = f(z) \prod_{j=1}^p \frac{R^2 - \bar{a}_j z}{R(z - a_j)} \prod_{k=1}^q \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z} \quad (2.3)$$

とおく．十分小さい正数 ε' をとれば $|z| < R + \varepsilon'$ において $F(z) \neq 0, \infty$ であり，円周 $|z| = R$ 上で $|F(z)| = |f(z)|$ が成立する．よって， $F(z)$ を (2.2) に代入すれば求める等式を得る．円周 $|z| = R$ 上に $f(z)$ の零点（または極） a_* が存在する場合には，各 a_* の付近の円弧を $|z - a_*| = \varepsilon_*$ ， $|z| < R$ なる小円弧でおきかえることにより得られる閉曲線を考える．すると，円周 $|z| = R$ 上の零点，極はこの閉曲線の外部に位置するようになる．(2.1) における積分路として（円周 $|z| = R$ のかわりに）この閉曲線を採用し， $|z| = R$ 上のものも含めた零点，極に対応する (2.3) により定義された $F(z)$ を代入し， $\varepsilon_* \rightarrow 0$ とした広義積分を考える．その過程

で, $|z| = R$ 上 $f(z) \neq 0, \infty$ なる点では $|f(z)| = |F(z)|$ であることや, a_* のまわりの小円弧に沿っては $\log F(\zeta) = O(\log \varepsilon_*)$ であることに注意して, 上と同様の考察をおこなえば求める等式を得る. $\square$

Proof of Theorem 2.1. $f(z)$ が $z = 0$ において零点または極を持つ場合も念頭において, $f(z) = z^l g(z)$, $g(0) \neq 0, \infty$, $l \in \mathbf{Z}$ と書く. このとき $l = n(0, 1/f) - n(0, f)$ とおける. Lemma 2.2 で $R, f(z)$ をそれぞれ $r, g(z) = z^{-l} f(z)$ とおき $z = 0$ とする. すると

$$\begin{aligned} \log |g(0)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |f(re^{i\phi})| - l \log r) d\phi + \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \neq 0}}^p \log \frac{|a_j|}{r} - \sum_{\substack{k=1 \\ b_k \neq 0}}^q \log \frac{|b_k|}{r} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi})| d\phi - (n(0, 1/f) - n(0, f)) \log r + \dots \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})| d\phi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |1/f(re^{i\phi})| d\phi \\ &\quad + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ a_j \neq 0}}^p \log \frac{|a_j|}{r} - n(0, 1/f) \log r \right) - \left(\sum_{\substack{k=1 \\ b_k \neq 0}}^q \log \frac{|b_k|}{r} - n(0, f) \log r \right) \end{aligned}$$

を得る. ここで $f(z)$ の 0 でない零点 (または極) は $g(z)$ の零点 (または極) に一致するという事実を使う. 最後の式に

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \neq 0}}^p \log \frac{|a_j|}{r} &= \int_0^r \log \frac{\rho}{r} d(n(\rho, 1/f) - n(0, 1/f)) \\ &= \left[\log \frac{\rho}{r} \cdot (n(\rho, 1/f) - n(0, 1/f)) \right]_0^r - \int_0^r (n(\rho, 1/f) - n(0, 1/f)) \frac{d\rho}{\rho} \\ &= -N(r, 1/f) + n(0, 1/f) \log r \end{aligned}$$

などを代入すれば

$$\log |g(0)| = m(r, f) - m(r, 1/f) + N(r, f) - N(r, 1/f)$$

つまり

$$T(r, f) = T(r, 1/f) + \log |g(0)| \quad (2.4)$$

を得る. また任意の $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して $N(r, f - \alpha) = N(r, f)$ であり, さ

らに

$$\begin{aligned} m(r, f - \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi}) - \alpha| d\phi, \\ \log^+ |f(re^{i\phi}) - \alpha| &\leq \log^+ |f(re^{i\phi})| + \log^+ |-\alpha| + \log 2, \\ \log^+ |f(re^{i\phi}) - \alpha| &\geq \log^+ |f(re^{i\phi})| - \log^+ |\alpha| - \log 2 \end{aligned}$$

(Lemma 2.3 参照) であるから $m(r, f - \alpha) = m(r, f) + O(1)$. よって

$$T(r, f) = T(r, f - \alpha) + O(1).$$

これと (2.4) をくみあわせれば求める等式をえる. □

上の証明においては以下の不等式が使われているがそれらは簡単に確かめることができる.

Lemma 2.3. 任意の複素数 α_j ($j = 1, \dots, h$) に対して

$$\begin{aligned} \log^+ \left(\sum_{j=1}^h |\alpha_j| \right) &\leq \log^+ \left(h \max_{1 \leq j \leq h} |\alpha_j| \right) \leq \sum_{j=1}^h \log^+ |\alpha_j| + \log h, \\ \log^+ \left(\prod_{j=1}^h |\alpha_j| \right) &\leq \sum_{j=1}^h \log^+ |\alpha_j|. \end{aligned}$$

本節の最後に $m(r, f)$, $T(r, f)$ に関する基本的な不等式をまとめておこう. これらは, 上の不等式を用いさらに有理型関数の和, 積の極を調べることにより簡単に証明することができる.

Proposition 2.4. $f(z)$, $g(z)$ を任意の有理型関数とする. 任意の複素数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ および自然数 $h \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} m(r, \alpha f + \beta g) &\leq m(r, f) + m(r, g) + O(1), \\ m(r, fg) &\leq m(r, f) + m(r, g), \\ m(r, f^h) &= hm(r, f), \\ T(r, \alpha f + \beta g) &\leq T(r, f) + T(r, g) + O(1), \\ T(r, fg) &\leq T(r, f) + T(r, g), \\ T(r, f^h) &= hT(r, f). \end{aligned}$$

3. 特性関数の基本的性質

まず有理関数の特性関数については次が成立する.

Proposition 3.1. 有理型関数 $f(z)$ が有理関数であるための必要十分条件は $T(r, f) = O(\log r)$ ($r \rightarrow \infty$) であることである.

Proof. $f(z)$ が有理関数であるとせよ. $f(z)$ の極の個数は有限個であるから $N(r, f) = O(\log r)$. さらに正数 γ を適当にとれば, 十分大きな正数 r に対して $\max_{|z|=r} |f(z)| = O(r^\gamma)$ となるから, $m(r, f) = O(\log r)$. よって $T(r, f) = O(\log r)$ が従う. 逆に $T(r, f) = O(\log r)$ を仮定せよ. 個数関数の定義より

$$\begin{aligned} n(r, f) - n(0, f) &\leq \frac{1}{\log r} \int_r^{r^2} (n(\rho, f) - n(0, f)) \frac{d\rho}{\rho} \\ &\leq \frac{N(r^2, f)}{\log r} + O(1) \leq \frac{T(r^2, f)}{\log r} + O(1) = O(1) \end{aligned}$$

であるから $f(z)$ の極は有限個である. それらを重複度込みで b_k ($k = 1, \dots, q$) と書く. さらに Theorem 2.1 より $T(r, 1/f) = T(r, f) + O(1) = O(\log r)$ より零点も有限個である. それらを重複度込みで a_j ($j = 1, \dots, p$) と書く. すると $g(z) = f(z) \prod_{j=1}^p (z - a_j)^{-1} \prod_{k=1}^q (z - b_k)$ は整関数であり全平面上 $g(z) \neq 0$ である. Lemma 2.2 より任意の正数 r に対して $|z| \leq r/2$ ならば

$$\begin{aligned} \log |g(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\phi})| \cdot \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2} d\phi \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\phi})| d\phi \ll m(r, g) = T(r, g) \ll T(r, f) + \log r \ll \log r \end{aligned}$$

が成立する. これは $g(z)$ がたかだか多項式であることすなわち $f(z)$ が有理関数であることをしめしている. $\square$

Remark 3.1. $f(z)$ が定数でない有理関数ならばある正数 A_0 が存在し $T(r, f) = A_0 \log r + O(1)$ である. また $f(z) \equiv C$ ならば $T(r, f) = \log^+ |C|$ である.

H. Cartan による次の定理は重要である.

Theorem 3.2. (H. Cartan) 有理型関数 $f(z)$ が $z = 0$ において極をもたないならば

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, 1/(f - e^{i\theta})) d\theta + \log^+ |f(0)|.$$

Proof. $\theta \in [0, 2\pi]$ が $e^{i\theta} \neq f(0)$ を満たすとき, $f(z) - e^{i\theta}$ に Lemma 2.2 を適用し $z = 0$ とすれば

$$\begin{aligned} & \log |f(0) - e^{i\theta}| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}| d\phi + \sum_{j=1}^p \log \frac{|a_j^\theta|}{r} - \sum_{k=1}^q \log \frac{|b_k|}{r} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}| d\phi - N(r, 1/(f - e^{i\theta})) + N(r, f). \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで a_j^θ, b_k は $f(z) - e^{i\theta}$ の $|z| \leq r$ における零点, 極をあらわす. また, Theorem 2.1 の証明で用いた和の変形を参照せよ. さらに $f(z) = a - z$, $a \neq 0$ に Lemma 2.2 を適用し $R = 1$, $z = 0$ とおけば

$$\begin{aligned} \log |a| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\phi}| d\phi \quad (|a| > 1), \\ \log |a| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\phi}| d\phi + \log |a| \quad (0 < |a| \leq 1), \end{aligned}$$

つまり $a = 0$ も込めてすべての $a \in \mathbf{C}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\phi}| d\phi = \log^+ |a|$$

がいえる. この事実に注意して (3.1) を $\theta \in [0, 2\pi]$ について積分すると (ただし $f(0) = e^{i\theta_0}$ なる値 $\theta = \theta_0$ があつたとしてもその付近では広義積分と解釈する),

$$\begin{aligned} \log^+ |f(0)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}| d\theta \right) d\phi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, 1/(f - e^{i\theta})) d\theta + N(r, f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})| d\phi + N(r, f) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, 1/(f - e^{i\theta})) d\theta \\ &= T(r, f) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, 1/(f - e^{i\theta})) d\theta \end{aligned}$$

となり求める等式を得る. □

$f(z)$ が $z = 0$ で極をもたなければ, Theorem 3.2 より

$$\frac{dT(r, f)}{d \log r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(r, 1/(f - e^{i\phi})) d\phi$$

である．さらに $z = 0$ で重複度 l の極をもつ場合は $f(z) = z^{-l}g(z)$, $g(0) \neq 0, \infty$ と書けば (2.4) より $T(r, f) = T(r, 1/f) + \log |g(0)|$ である．これらの事実から特性関数のふるまいに関するつぎの性質が従う．

Theorem 3.3. $T(r, f)$ は $\log r$ について単調増加かつ凸な関数である．

超越有理型関数はその特性関数によりつぎのように特徴づけられる．

Proposition 3.4. 有理型関数 $f(z)$ が超越的であるための必要十分条件は $\log r/T(r, f) = o(1)$ ($r \rightarrow \infty$) であることである．

Proof. 十分条件であることは Proposition 3.1 より明らか．必要であることをいうために $f(z)$ が超越的であるとせよ． $T_*(r) = T(r, f)$ を $\log r$ の関数とみると Theorem 3.3 により $(d/d \log r)T_*(r)$ は r の単調増加関数であるが，もしもこれが有界ならば $T(r, f) = T_*(r) = O(\log r)$ ($r \rightarrow \infty$) となり Proposition 3.1 より $f(z)$ は有理関数になり矛盾する．したがって $(d/d \log r)T_*(r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) であり，任意の正数 ε に対し十分大きな r_ε をとれば $r \geq r_\varepsilon$ ならば $(d/d \log r)T_*(r) \geq \varepsilon^{-1}$ が成立する．よって $r \geq r_\varepsilon$ のとき $T_*(r) \geq \varepsilon^{-1} \log r + O(1)$ ，つまり $\log r/T(r, f) \leq \varepsilon + O(1/\log r)$ である． ε は任意だったからこれは $\log r/T(r, f) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) であることを示している． $\square$

Example 3.1. 上で見たように有理関数ならばその位数は 0 であるが，逆は必ずしも正しくない．たとえば

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-k}z)$$

を考えよう．あきらかに $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}|z|$ は全平面で広義一様収束するから， $f(z)$ は超越整関数でありその零点は e^k ($k = 1, 2, \dots$) である．不等式

$$\log^+ |f(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \log^+ (1 + e^{-k}|z|)$$

の右辺 $\sum_{k=1}^{\infty}$ を以下のように 2 つの和にわけて評価する． $n(t, 1/f) = n(t)$ と略記すれば，上の事実より $n(t) \asymp \log t$ であるから，十分大きな r に対し $|z| = r$ 上で

$$\sum_{e^k \leq r} \log^+ (1 + e^{-k}|z|) \ll n(r) \log(r+1) \ll (\log r)^2,$$

また

$$\begin{aligned}\sum_{e^k > r} \log^+(1 + e^{-k}|z|) &= \int_r^\infty \log(1 + r/t) dn(t) \ll \int_r^\infty \frac{r}{t} dn(t) \\ &\ll r \left[\frac{n(t)}{t} \right]_r^\infty + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^2} dt \ll r \int_r^\infty \frac{\log t}{t^2} dt \ll \log r.\end{aligned}$$

よって $|z| = r$ 上 $\log^+ |f(z)| \ll (\log r)^2$ であるから $T(r, f) = m(r, f) \ll (\log r)^2$ である. そして

$$T(r, 1/f) \geq N(r, 1/f) \gg \int_1^r \frac{n(t)}{t} dt \gg \int_1^r \frac{\log t}{t} dt \gg (\log r)^2$$

であるから $T(r, f) \asymp (\log r)^2$, $\varrho(f) = 0$ がいえた.

Example 3.2. 任意の正数 $\gamma > 0$ が与えられたとき $T(r, f) \asymp r^\gamma$, $\varrho(f) = \gamma$ であるような整関数 $f(z)$ を上と類似の方法で構成することができる. $0 < \gamma < 1$ のとき

$$E_k(z) := 1 - \frac{z}{k^{1/\gamma}},$$

$\gamma \geq 1$ のとき

$$E_k(z) := \left(1 - \frac{z}{k^{1/\gamma}}\right) \exp\left(\frac{z}{k^{1/\gamma}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{k^{1/\gamma}}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{[\gamma]}\left(\frac{z}{k^{1/\gamma}}\right)^{[\gamma]}\right)$$

とおく. すると $f(z) = \prod_{k=1}^\infty E_k(z)$ は整関数となりその零点は $k^{1/\gamma}$ ($k = 1, 2, \dots$) である. $\gamma \geq 1$ の場合を考えよう. $n(t, 1/f) = n(t) \asymp t^\gamma$ であるから, $|z| = r$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k^{1/\gamma} \leq 2r} \log^+ |E_k(z)| &\leq \sum_{k^{1/\gamma} \leq 2r} \left(\log(1 + rk^{-1/\gamma}) + [\gamma](2rk^{-1/\gamma})^{[\gamma]} \right) \\ &\ll \int_1^{2r} \log(1 + r/t) dn(t) + r^{[\gamma]} \int_1^{2r} \frac{dn(t)}{t^{[\gamma]}} \ll \int_1^{2r} \frac{n(t)}{t} dt + r^\gamma \ll r^\gamma,\end{aligned}$$

また, $k^{1/\gamma} > 2r$ のとき $|\log E_k(z)| \leq 2([\gamma] + 1)^{-1} (rk^{-1/\gamma})^{[\gamma]+1}$ であるから

$$\sum_{k^{1/\gamma} > 2r} \log^+ |E_k(z)| \ll \sum_{k^{1/\gamma} > 2r} (rk^{-1/\gamma})^{[\gamma]+1} \ll r^{[\gamma]+1} \int_{2r}^\infty t^{-[\gamma]-1} dn(t) \ll r^\gamma.$$

よって $|z| = r$ 上 $\log^+ |f(z)| \ll r^\gamma$ より $T(r, f) \ll r^\gamma$. これと $N(r, 1/f) \gg r^\gamma$ とをあわせて $T(r, f) \asymp r^\gamma$ を得る. $0 < \gamma < 1$ の場合も同様である.

4. 整関数の位数

第1節で有理型関数の位数を定義したが、ここでは特に整関数の位数について述べる．整関数 $g(z)$ については位数はその円周 $|z| = r$ の上で大きさそのものを反映している．歴史的には整関数の位数の方が先に定義されており、それは以下の等式で与えられるようなものであった．

Proposition 4.1. $g(z)$ を定数でない整関数とすると

$$\varrho(g) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, g)}{\log r}, \quad M(r, g) := \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

これを証明するには次をいえばよい．

Lemma 4.2. r, R を $r < R$ なる任意の正数とする．定数でない整関数 $g(z)$ が $M(r, g) \geq 1$ をみたすならば

$$T(r, g) \leq \log M(r, g) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, g).$$

実際 $g(z)$ は定数でないから Liouville の定理と最大値の原理より r が十分大きければ $M(r, g) \geq 1$ ．この補題において $R = 2r$ とおけば

$$T(r, g) \leq \log M(r, g) \leq 3T(2r, g)$$

となり Proposition 4.1 が従う．

Proof of Lemma 4.2. 左側の不等式は

$$\begin{aligned} T(r, g) = m(r, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\phi})| d\phi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log M(r, g) d\phi \leq \log M(r, g) \end{aligned}$$

よりいえる．右側の不等式を導くために $M(r, g) = |g(z_r)|$ となる点 z_r , $|z_r| = r$ をとる． $g(z)$ は極をもたないこと、および $|a_j| \leq r$ なる任意の零点 a_j に対して $|R(z_r - a_j)/(R^2 - \overline{a_j}z_r)| \leq 1$ であることに注意して Lemma 2.2 をつかえば

$$\begin{aligned} \log M(r, g) = \log |g(z_r)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(Re^{i\phi})| \frac{R^2 - r^2}{|Re^{i\phi} - z_r|^2} d\phi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2} \log^+ |g(Re^{i\phi})| d\phi = \frac{R+r}{R-r} m(R, g) = \frac{R+r}{R-r} T(R, g) \end{aligned}$$

となり求める不等式を得る. $\square$

5. 不足指数・分岐指数

有理型関数 $f(z)$ について

$$\delta(\infty, f) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, f)}{T(r, f)}$$

を極の**不足指数** (deficiency), 任意の複素数 α に対し

$$\delta(\alpha, f) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, 1/(f - \alpha))}{T(r, f)}$$

を α の不足指数という. 定義から明らかなように $0 \leq \delta(\infty, f) \leq 1$, $0 \leq \delta(\alpha, f) \leq 1$ であるが, さらにこれらの指数は次のような意味をもつ.

Proposition 5.1. 超越有理型関数 $f(z)$ に対して次が成立する.

(1) $\delta(\infty, f) < 1$ (resp. $\delta(\alpha, f) < 1$) ならば無数の極 (resp. α -点) が存在する.

(2) 極 (resp. α -点) が有限個ならば $\delta(\infty, f) = 1$ (resp. $\delta(\alpha, f) = 1$) である.

Proof. (2) のみ証明すればよい. 極が有限個ならば $N(r, f) \ll \log r$ であるから $f(z)$ の超越性と Proposition 3.4 より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m(r, f)}{T(r, f)}\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f)}{T(r, f)} = 0.$$

よって $\delta(\infty, f) = 1$. $\square$

重複度が 2 以上の点の頻度を測る指標として

$$\vartheta(\infty, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r, f)}{T(r, f)}, \quad \vartheta(\alpha, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r, 1/(f - \alpha))}{T(r, f)}$$

を定義する. これらはそれぞれ極の**分岐指数**, α の分岐指数と呼ばれる. 不足指数の場合と同様に以下が証明できる.

Proposition 5.2. 超越有理型関数 $f(z)$ に対して次が成立する.

(1) $\vartheta(\infty, f) > 0$ (resp. $\vartheta(\alpha, f) > 0$) ならば極 (resp. α -点) のうちで重複度が 2 以上のものが無数に存在する.

(2) 極 (resp. α -点) のうちで重複度が 2 以上のものが有限個しかなければ $\vartheta(\infty, f) = 0$ (resp. $\vartheta(\alpha, f) = 0$) である.

Example 5.1. $f(z)$ の極がすべて simple ならば $\vartheta(\infty, f) = 0$, すべて double ならば $\vartheta(\infty, f) \leq 1/2$ である. 例えば $\varphi(z) = 1/(e^z - 1)$ に対しては $\vartheta(\infty, \varphi) = 0$.

Example 5.2. Weierstrass の $\wp$ -関数は

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{(j,k) \in (\mathbf{Z}^2)_*} \left((z - \Omega_{jk})^{-2} - \Omega_{jk}^{-2} \right),$$

$$\Omega_{jk} = j\omega_1 + k\omega_2, \quad \text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0, \quad (\mathbf{Z}^2)_* = \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

により定義される楕円関数で ω_1, ω_2 を周期とする. そして

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \quad (5.1)$$

という関係式をみたす. ここで g_2, g_3 は周期 ω_1, ω_2 からきまる定数で $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ をみたす. 極は格子状に分布していることより $N(r, \wp) \asymp r^2$ であり, また後ほど示されるように $m(r, \wp) = O(\log r)$ (Example 7.1 参照) であるから $T(r, \wp) \asymp r^2$. 従って $\delta(\infty, \wp) = 0$. またすべての極は double であるから $\vartheta(\infty, \wp) = 1/2$.

6. 対数導関数の近接関数

本節の目標は有理型関数の対数導関数 $f'(z)/f(z)$ に対する近接関数の評価式を与えることである (Theorem 6.5). それは値分布の研究において応用範囲の極めて広いものである. まず次の等式からはじめよう.

Proposition 6.1. 定数でない有理型関数 $f(z)$ に対して Lemma 2.2 と同じ仮定のもとで $|z| < R$ において

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\phi})| \cdot \frac{Re^{i\phi}}{(Re^{i\phi} - z)^2} d\phi \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{z - a_j} + \frac{\overline{a_j}}{R^2 - \overline{a_j}z} \right) - \sum_{k=1}^q \left(\frac{1}{z - b_k} + \frac{\overline{b_k}}{R^2 - \overline{b_k}z} \right) \end{aligned}$$

が成立する.

Proof. 一般に正則関数 $F(z)$, $z = x + iy$ に対して

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\operatorname{Re} F(z)) &= F'(z), & \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)F(z) &= 2F'(z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)F(\bar{z}) &= 0 \end{aligned}$$

であることに注意せよ. Lemma 2.2 における等式の両辺に微分作用素 $\partial/\partial x - i\partial/\partial y$ をほどこす. すると例えば

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} = \frac{Re^{i\phi}}{Re^{i\phi} - z} + \frac{\bar{z}}{Re^{-i\phi} - \bar{z}}$$

であるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} = \frac{2Re^{i\phi}}{(Re^{i\phi} - z)^2}$$

となる. また

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \log |f(z)| &= \frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \log \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| &= \frac{1}{z - a_j} + \frac{\bar{a}_j}{R^2 - \bar{a}_j z}. \end{aligned}$$

これらの事実をつかえば求める等式を得る. $\square$

Proposition 6.2. $f(z)$ を定数でない有理型関数とする. このとき十分大きな正数 r_0 をとれば $r_0 < r < R$ なる任意の r, R に対して

$$m(r, f'/f) \leq 3 \log^+ T(R, f) + 4 \log^+ \frac{R}{R - r} + C_0$$

が成立する. ここで C_0 は r, R に無関係な正定数である.

この命題の証明には次の不等式がつかわれる. それを先に証明しておこう.

Lemma 6.3. 円板 $|z| \leq \rho$ における $f(z)$ の零点と極をあわせて重複度込みで並べたものを c_j ($j = 1, \dots, \nu$) とおく. ここで $\nu = \nu(\rho, f) := n(\rho, f) + n(\rho, 1/f)$ である. さらに $D(z) := \min_{1 \leq j \leq \nu} \{|z - c_j|\}$ と書く. このとき, 任意の $r < \rho$ に対して

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{r}{D(re^{i\theta})} d\theta \leq \frac{3}{2} \log \nu(\rho, f) + \frac{1}{2}.$$

Proof of Lemma 6.3. $\theta_j = \arg c_j$ ($0 \leq \theta_j < 2\pi$) と書く (もしも $c_j = 0$ なるものがあれば $\theta_j = 0$ と約束する). これら ν 個の値のうち異なるものを取りだし改めて番号を付け直し $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{\nu'} < 2\pi$ ($\nu' \leq \nu$) とおく. さらに便宜上 $\theta_0 = \theta_{\nu'} - 2\pi$, $\theta_{\nu'+1} = \theta_1 + 2\pi$ とする. このとき $k = 1, \dots, \nu'$ に対して区間

$$\Theta_k := [\theta_k - \eta_k^-, \theta_k + \eta_k^+],$$

$$\eta_k^- = \min\left\{\frac{\pi}{2\nu}, \frac{1}{2}(\theta_k - \theta_{k-1})\right\}, \quad \eta_k^+ = \min\left\{\frac{\pi}{2\nu}, \frac{1}{2}(\theta_{k+1} - \theta_k)\right\}$$

を考える. すると積分は

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{r}{D(re^{i\theta})} d\theta \leq \sum_{k=1}^{\nu'} I(\Theta_k) + I(\Theta^*), \quad (6.1)$$

$$I(X) = \int_X \log^+ \frac{r}{D(re^{i\theta})} d\theta, \quad \Theta^* = [0, 2\pi] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\nu'} \Theta_k\right)$$

と分割できる. $\theta \in \Theta_k$ ならば $D(re^{i\theta}) \geq r \sin |\theta - \theta_k|$ であるから

$$\begin{aligned} I(\Theta_k) &\leq \int_{\Theta_k} \log^+ \frac{1}{\sin |\theta - \theta_k|} d\theta \leq \int_{|\theta - \theta_k| \leq \pi/(2\nu)} \log^+ \frac{1}{\sin |\theta - \theta_k|} d\theta \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/(2\nu)} \log^+ \frac{\pi}{2\phi} d\phi = -\pi \int_0^{1/\nu} \log \psi d\psi = \frac{\pi}{\nu} (\log \nu + 1). \end{aligned}$$

また

$$I(\Theta^*) \leq \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\sin(\pi/(2\nu))} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \log \nu d\theta = 2\pi \log \nu.$$

これらを (6.1) に代入すれば目標の不等式を得る. $\square$

Proof of Proposition 6.2. $\rho = (r + R)/2$ とおく. Proposition 6.1 の R を ρ としたものを適用すれば, $z = re^{i\theta}$ に対し,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log |f(\rho e^{i\phi})| \right| \cdot \frac{\rho}{(\rho - r)^2} d\phi + \sum_{|c_j| \leq \rho} \left(\frac{1}{D(z)} + \frac{1}{\rho - r} \right) \\ &\leq \frac{2\rho}{(\rho - r)^2} (m(\rho, f) + m(\rho, 1/f)) + \nu(\rho, f) \left(\frac{1}{D(z)} + \frac{1}{\rho - r} \right) \quad (6.2) \end{aligned}$$

を得る．ここで c_j , $D(z)$, $\nu(\rho, f)$ は Lemma 6.3 において与えられた記号である．個数関数の定義より

$$N(R, f) \geq \int_{\rho}^R \left(n(t, f) - n(0, f) \right) \frac{dt}{t} \geq \frac{R - \rho}{R} \left(n(\rho, f) - n(0, f) \right)$$

であるから

$$n(\rho, f) \leq \frac{R}{R - \rho} N(R, f) + n(0, f) = \frac{2R}{R - r} N(R, f) + n(0, f).$$

零点についても同様なことがいえるから

$$\begin{aligned} \nu(\rho, f) &\leq \frac{2R}{R - r} \left(N(R, f) + N(R, 1/f) \right) + O(1) \\ &\leq \frac{4R}{R - r} \left(T(R, f) + O(1) \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

また

$$m(\rho, f) + m(\rho, 1/f) \leq 2T(\rho, f) + O(1) \leq 2T(R, f) + O(1). \quad (6.4)$$

(6.3), (6.4) を (6.2) に代入し, $2\rho(\rho - r)^{-2} \leq 8R(R - r)^{-2}$, $(\rho - r)^{-1} = 2(R - r)^{-1}$ であることをつかうと, $z = re^{i\theta}$ に対して

$$\begin{aligned} \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| &\leq \frac{8R}{(R - r)^2} \left(2T(R, f) + O(1) \right) \\ &\quad + \frac{4R}{R - r} \left(T(R, f) + O(1) \right) \left(\frac{1}{D(z)} + \frac{2}{R - r} \right) \\ &\leq \frac{4R}{R - r} (T(R, f) + O(1)) \left(\frac{6}{R - r} + \frac{r}{D(z)} \right). \end{aligned}$$

両辺の $\log^+$ をとると

$$\log^+ \left| \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right| \leq 2 \log^+ \frac{R}{R - r} + \log^+ T(R, f) + \log^+ \frac{r}{D(re^{i\theta})} + O(1).$$

これを θ について積分し Lemma 6.3 と (6.3) をつかえば目標の不等式を得る. $\square$

さらに実数値関数についての次の補題を与える.

Lemma 6.4. (Pólya) 関数 $T(r)$ が区間 $[r_0, \infty)$ ($r_0 > 0$) 上連続, 単調増加, そして $T(r) \geq 1$ をみたすと仮定する. このとき $E \subset [r_0, \infty)$, $\mu(E) \leq 2$ なる例外集合 E が存在し, $[r_0, \infty) \setminus E$ において

$$T\left(r + 1/T(r)\right) < 2T(r)$$

が成立する. ここで $\mu(\cdot)$ は Lebesgue 測度をあらわす.

Proof. $r_1 := \min\{r \geq r_0 \mid T(r + 1/T(r)) \geq 2T(r)\}$ とおく. (このような値が存在しなければ $E = \emptyset$ とすればよい.) そして $r'_1 := r_1 + 1/T(r_1)$ とする. さらに $r_2 := \min\{r \geq r'_1 \mid T(r + 1/T(r)) \geq 2T(r)\}$ をとり $r'_2 := r_2 + 1/T(r_2)$ とする. これを続けて, 一般に

$$\begin{aligned} r_j &:= \min\{r \geq r'_{j-1} \mid T(r + 1/T(r)) \geq 2T(r)\}, \\ r'_j &:= r_j + 1/T(r_j) \end{aligned}$$

により r_j, r'_j を定義する. もしも r_j が存在しなければ r_{j-1}, r'_{j-1} まで得たところでこの操作を中止する. 明らかにこの点列は

$$r_1 < r'_1 \leq r_2 < r'_2 \leq \cdots \leq r_j < r'_j \leq r_{j+1} < r'_{j+1} \leq \cdots$$

を満たす. この列が無限に続くならば $r_j \rightarrow \infty$ である. なぜならもしも $r_j \rightarrow r_\infty < \infty$ ならば $r'_j - r_j = 1/T(r_j) \rightarrow 0$ つまり $T(r_\infty) = \infty$ となるから. 今, 例外集合を $E := \{r \mid T(r + 1/T(r)) \geq 2T(r)\}$ とおく. すると先に述べた事実より $E \subset \bigcup_{j \geq 1} [r_j, r'_j]$ となる. $T(r_{j+1}) \geq T(r'_j) = T(r_j + 1/T(r_j)) \geq 2T(r_j)$ であるから $T(r_j) \geq 2^{j-1}T(r_1) \geq 2^{j-1}$. 従って上の列が有限で終る場合も含めて

$$\mu(E) \leq \sum_{j \geq 1} (r'_j - r_j) = \sum_{j \geq 1} 1/T(r_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j-1)} = 2.$$

これで証明された. □

Theorem 6.5. 有理型関数 $f(z)$ に対して, $\mu(E) < \infty$ なる例外集合 $E \subset (0, \infty)$ が存在し $r \rightarrow \infty, r \notin E$ のとき

$$m(r, f'/f) \ll \log T(r, f) + \log r.$$

特に $\varrho(f) < \infty$ (位数有限) ならば (例外集合なしで) $r \rightarrow \infty$ のとき

$$m(r, f'/f) \ll \log r.$$

Proof. $\varrho(f) = \gamma < \infty$ のとき $T(r, f) = O(r^{\gamma+1})$ ($r \rightarrow \infty$) である. Proposition 6.2 で $R = 2r$ とおけば $r \rightarrow \infty$ としたとき

$$m(r, f'/f) \ll \log^+ T(2r, f) + O(1) \ll \log r.$$

位数が有限でない場合には Proposition 6.2 において $R = r + 1/T(r, f)$ とおく. すると Lemma 6.4 よりある除外集合 E , $\mu(E) < \infty$ が存在して $r \notin E$ ならば $T(r + 1/T(r, f), f) < 2T(r, f)$ が成り立つ. 従って $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$ とすれば

$$\begin{aligned} m(r, f'/f) &\ll \log^+ T(r + 1/T(r, f), f) + \log T(r, f) + \log r \\ &\ll \log(2T(r, f)) + \log T(r, f) + \log r \\ &\ll \log T(r, f) + \log r. \end{aligned}$$

これで証明された. □

Corollary 6.6. $f(z)$ を有理型関数とする. 任意の正整数 k に対しある除外集合 E_k , $\mu(E_k) < \infty$ が存在し, $r \rightarrow \infty$, $r \notin E_k$ とするとき

$$m(r, f^{(k)}/f) \ll \log T(r, f) + \log r.$$

さらに $\varrho(f) < \infty$ ならば $m(r, f^{(k)}/f) \ll \log r$ が除外集合なしで成立する.

Proof. $k = 1$ のときは Theorem 6.5 より成立する. k に対し成立するとせよ. すると $r \rightarrow \infty$, $r \notin E_k$, とすれば

$$m(r, f^{(k)}) \leq m(r, f^{(k)}/f) + m(r, f) \leq m(r, f) + O(\log T(r, f) + \log r).$$

また $f(z)$ の l 位の極は $f^{(k)}(z)$ の $(l + k)$ 位の極であるから

$$N(r, f^{(k)}) \leq (k + 1)N(r, f).$$

よって $r \notin E_k$ ならば

$$T(r, f^{(k)}) \leq (k + 1)T(r, f) + O(\log T(r, f) + \log r) \quad (6.5)$$

が成立する. また $r \notin E_k$ ならば

$$\begin{aligned} m(r, f^{(k+1)}/f) &\leq m(r, f^{(k+1)}/f^{(k)}) + m(r, f^{(k)}/f) \\ &\ll m(r, f^{(k+1)}/f^{(k)}) + \log T(r, f) + \log r \end{aligned} \quad (6.6)$$

である. (6.5) に注意して $f^{(k)}(z)$ に Theorem 6.5 を適用すれば, ある $E_{k+1} (\supset E_k)$, $\mu(E_{k+1}) < \infty$ が存在し $r \notin E_{k+1}$ ならば

$$m(r, f^{(k+1)}/f^{(k)}) \ll \log T(r, f^{(k)}) + \log r \ll \log T(r, f) + \log r.$$

これを (6.6) に代入することにより $k+1$ のときも問題の評価が正しいことがいえる. よってすべての自然数 k に対しても成立することがいえた. $\varrho(f) < \infty$ の場合についても類似の議論で証明できる. $\square$

上の証明中の (6.5) より

Corollary 6.7. 任意の正整数 k に対しある除外集合 E_k , $\mu(E_k) < \infty$ が存在し, $r \rightarrow \infty$, $r \notin E_k$ ならば

$$T(r, f^{(k)}) \leq (k+1)T(r, f) + O(\log T(r, f) + \log r).$$

さらに $\varrho(f) < \infty$ ならば除外集合なしで

$$T(r, f^{(k)}) \leq (k+1)T(r, f) + O(\log r).$$

以下導入する記号はしばしば使用される. 区間 $[r_0, \infty)$ ($r_0 > 0$) において定義された実数値関数 $\chi(r)$ を考える. ある除外集合 E , $\mu(E) < \infty$ が存在し $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$ とするとき $\chi(r)/T(r, f) \rightarrow 0$ が成り立つならば

$$\chi(r) = S(r, f)$$

と書く.

Corollary 6.8. $f(z)$ を定数でない有理型関数とする. 任意の正整数 k に対し

$$m(r, f^{(k)}/f) = S(r, f).$$

Proof. $f(z)$ が超越的な場合は Corollary 6.6, Proposition 3.4 よりあきらかである. 定数でない有理関数の場合は $|z| \rightarrow \infty$ のとき $f^{(k)}(z)/f(z) = O(z^{-1})$ であることおよび Remark 3.1 より直ちに従う. $\square$

除外集合における関数のふるまいを補間するのにつぎの補題は有効である.

Lemma 6.9. 実数値関数 $\chi(r)$, $\psi(r)$ が区間 $[r_0, \infty)$ で単調増加であるとする. さらに, ある除外集合 E , $\mu(E) < \infty$ が存在し $[r_0, \infty) \setminus E$ にお

いて $\chi(r) \leq \psi(r)$ が成立するとする. このときある正数 r_* が存在し, 区間 $[r_0, \infty)$ において除外集合なしで $\chi(r) \leq \psi(r + r_*)$ が成立する.

Proof. r_* を $\mu(E) < r_*$ をみたすようにとる. すると任意の $r \in [r_0, \infty)$ に対し $c_r < r_*$ を適当にとれば $r + c_r \notin E$ であるようにできる. このとき $\chi(r) \leq \chi(r + c_r) \leq \psi(r + c_r) \leq \psi(r + r_*)$. $\square$

7. Clunie 型の補題

この節で述べる 2 種類の補題は微分方程式の有理型解の値分布を調べるのにきわめて有効である.

Lemma 7.1. (Clunie) u に関する微分多項式

$$Q(z, u) = \sum_{\iota \in I} q_\iota(z) u^{\iota_0} (u')^{\iota_1} \cdots (u^{(s)})^{\iota_s}, \quad \iota = (\iota_0, \iota_1, \dots, \iota_s)$$

を考える. ここで $q_\iota(z)$ は多項式, I は添字 ι の集合であり, ある $h \in \mathbb{N}$ が存在してすべての $\iota \in I$ に対して $\iota_0 + \iota_1 + \cdots + \iota_s \leq h$ が成り立つとせよ. このとき, 超越有理型関数 $f(z)$ が関係式

$$f^{h+1} = Q(z, f)$$

をみたせば $m(r, f) = S(r, f)$ が成立する. さらに $\varrho(f) < \infty$ ならば $m(r, f) = O(\log r)$.

Proof. $I := \{\phi \in [0, 2\pi] \mid |f(re^{i\phi})| \geq 1\}$ とおけば近接関数は

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})| d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_I \log^+ |f(re^{i\phi})| d\phi \quad (7.1)$$

と書ける. $\phi \in I$ ならば

$$\begin{aligned} \log^+ |f(re^{i\phi})| &= \log^+ |Q(z, f) f^{-h}| \\ &\leq \log^+ \left(\sum_{\iota \in I} |q_\iota| \left| \frac{f'}{f} \right|^{\iota_1} \cdots \left| \frac{f^{(s)}}{f} \right|^{\iota_s} |f|^{\iota_0 + \iota_1 + \cdots + \iota_s - h} \right) \\ &\leq \log^+ \left(\sum_{\iota \in I} |q_\iota| \left| \frac{f'}{f} \right|^{\iota_1} \cdots \left| \frac{f^{(s)}}{f} \right|^{\iota_s} \right) \\ &\ll \log r + \log^+ |f'/f| + \cdots + \log^+ |f^{(s)}/f|. \end{aligned}$$

これを (7.1) に代入し Corollaries 6.6, 6.8 より求める結果を得る. $\square$

Lemma 7.2. (A. Z. Mohon'ko and V. D. Mohon'ko) $F(z, u)$ を $z, u, u', \dots, u^{(s)}$ についての多項式とする. そして超越有理型関数 $f(z)$ が関係式 $F(z, f) = 0$ をみたすとする. このとき, 複素数 $c \in \mathbf{C}$ が $F(z, c) \neq 0$ をみたせば $m(r, 1/(f - c)) = S(r, f)$ となる. さらに $\varrho(f) < \infty$ ならば $m(r, 1/(f - c)) = O(\log r)$.

Proof. $g = f - c$ とおく. 仮定より

$$\begin{aligned} -F(z, c) &= F(z, f) - F(z, c) = F(z, g + c) - F(z, c) \\ &= \sum_{1 \leq \iota_0 + \dots + \iota_s \leq d_0} q_\iota(z) g^{\iota_0} (g')^{\iota_1} \dots (g^{(s)})^{\iota_s}, \end{aligned}$$

$\iota = (\iota_0, \dots, \iota_s)$ と書ける. ここで $q_\iota(z)$ は多項式であり, d_0 はある正整数である. $\phi \in I := \{\phi \in [0, 2\pi] \mid |g(re^{i\phi})| \leq 1\}$ であるならば

$$\begin{aligned} \log^+ |1/g(re^{i\phi})| &\leq \log^+ \left(|F(z, c)^{-1}| \sum_{1 \leq \iota_0 + \dots + \iota_s \leq d_0} |q_\iota| \left| \frac{g'}{g} \right|^{\iota_1} \dots \left| \frac{g^{(s)}}{g} \right|^{\iota_s} \right) \\ &\ll \log^+ |F(z, c)^{-1}| + \log r + \log^+ |g'/g| + \dots + \log^+ |g^{(s)}/g| \end{aligned}$$

が成り立つ. これを $\phi \in I$ について積分すれば求める結果を得る. その際, $S(r, g) = S(r, f)$ および $m(r, F(z, c)^{-1}) \leq T(r, F(z, c)^{-1}) = O(\log r)$ であることに注意する. $\square$

Remark 7.1. Lemma 7.1 および Lemma 7.2 の結論の $S(r, f)$ の部分は “測度有限の除外集合の外部で $\ll \log T(r, f) + \log r$ ” でおきかえることができる.

Example 7.1. Weierstrass の $\wp$ -関数 $\wp(z)$ (cf. Example 5.2) は関係式 $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ をみたす. Lemma 7.1 より $m(r, \wp) = S(r, \wp)$. 一方 $N(r, \wp) \asymp r^2$ であつたから $T(r, \wp) \ll r^2 + S(r, \wp)$. つまり, $\mu(E) < \infty$ なる除外集合 E が存在して, $r \notin E$ であるかぎり $T(r, \wp) = O(r^2) + o(T(r, \wp))$ である. よつてある正数 K_0 が存在し $T(r, \wp) \leq K_0 r^2$ が $r \notin E$ に対して成立する. ここで Theorem 3.3 および Lemma 6.9 を使えば, ある $r_* > 0$ が存在して $T(r, \wp) \leq K_0(r + r_*)^2 = O(r^2)$ が除外集合なしで成立する. つまり $\varrho(\wp) \leq 2$ であるから再び Lemma 7.1 を適用すれば, 除外集合なしで

$$m(r, \wp) = O(\log r)$$

が成立することがいえる.

8. 第2基本定理

値分布論のもうひとつの基本的な結果として

Theorem 8.1. (第2基本定理) $f(z)$ を定数でない有理型関数, q を任意の正整数とする. このとき相異なる任意の複素定数 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ に対して

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^q m(r, 1/(f - \alpha_j)) + N_1(r, f) + N(r, 1/f') \leq 2T(r, f) + S(r, f).$$

まずこの定理から導かれるいくつかの結果を述べよう.

Corollary 8.2. 定数でない有理型関数 $f(z)$, 任意の複素定数 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ に対して

$$\delta(\infty, f) + \vartheta(\infty, f) + \sum_{j=1}^q (\delta(\alpha_j, f) + \vartheta(\alpha_j, f)) \leq 2.$$

Proof. $\sum_{j=1}^q N_1(r, 1/(f - \alpha_j)) \leq N(r, 1/f')$ であるから Theorem 8.1 の不等式より

$$\begin{aligned} m(r, f) + N_1(r, f) + \sum_{j=1}^q (m(r, 1/(f - \alpha_j)) + N_1(r, 1/(f - \alpha_j))) \\ \leq 2T(r, f) + S(r, f) \end{aligned}$$

を得る. この両辺を $T(r, f)$ で割って $r \rightarrow \infty$ とし, 左辺の $\liminf$ を考えれば求める結果を得る. $\square$

Corollary 8.2 より, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\delta(\alpha, f) \geq 1/n$ となるような $\alpha \in \mathbf{C}$ の個数は $2n$ を越えないことがわかる. また $\vartheta(\alpha, f) \geq 1/n$ となるような α についても同様である. したがって, $\delta(\alpha, f) > 0$ または $\vartheta(\alpha, f) > 0$ が成り立つような α は可算個であることがわかる. この事実と Corollary 8.2 より

Corollary 8.3. 定数でない有理型関数 $f(z)$ に対して

$$\sum_{\alpha \in \hat{\mathbf{C}}} (\delta(\alpha, f) + \vartheta(\alpha, f)) \leq 2, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

$\alpha \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ に対し $f(z) = \alpha$ なる点 z がたかだか有限個しか存在しないならば α を **Picard の除外値** (exceptional value of Picard) と呼ぶ. 上の系より $\delta(\alpha, f) = 1$ となるような $\alpha \in \hat{\mathbf{C}}$ はたかだか 2 個しか存在しないので

Theorem 8.4. (Picard) 超越有理型関数に対しては Picard の除外値はたかだか 2 個である.

Example 8.1. $f(z) = e^z$ の Picard の除外値は $0, \infty$ である. $f(z) = 1/\cos z$ の Picard の除外値は 0 である.

第 2 基本定理の証明には次の事実をつかう.

Theorem 8.5. (Valiron) 定数でない共通因子をもたない多項式 $P(u), Q(u) \in \mathbf{C}[u]$ により表される有理関数 $R(u) = P(u)/Q(u)$ を考える. $P(u), Q(u)$ の次数をそれぞれ d_P, d_Q で表すとき, $d_R := \max\{d_P, d_Q\}$ とおく. このとき任意の有理型関数 $f(z)$ に対し

$$T(r, R(f)) = d_R T(r, f) + O(1). \quad (8.1)$$

Remark 8.1. $\mathcal{M}_z$ を z の有理型関数の体とする. u の $\mathcal{M}_z$ -係数多項式 $P(z, u), Q(z, u) \in \mathcal{M}_z[u]$ が定数以外の共通因子をもたないとする. このとき $\mathcal{M}_z$ -係数の有理関数 $R(z, u) = P(z, u)/Q(z, u)$ に対しても上と類似の等式が成立する. つまり u に関する次数 $d_R = \max\{d_P, d_Q\}$ を上と同様に定義し, $\{c_\lambda(z) \in \mathcal{M}_z \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $P(z, u), Q(z, u)$ のすべての係数とすると

$$T(r, R(z, f)) = d_R T(r, f) + O\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} T(r, c_\lambda)\right) + O(1).$$

この証明は Theorem 8.5 のものに少し手を加えればよい.

Proof of Theorem 8.5. まず $R(u)$ が多項式, つまり $d_Q = 0, d_R = d_P = d \geq 1$ の場合を考えよう. $R(u) = P(u) = C_0 + C_1 u + \cdots + u^d$ としてよい.

$$\begin{aligned} T(r, P(f)) &\leq T(r, C_0) + T(r, (C_1 + C_2 f + \cdots + f^{d-1})f) + O(1) \\ &\leq T(r, f) + T(r, C_1 + C_2 f + \cdots + f^{d-1}) + O(1) \\ &\leq \cdots \\ &\leq dT(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

あとは逆向きの不等式を証明すればよい．そのためにまず円周 $|z| = r$ 上

$$\log^+ |P(f)| \geq d \log^+ |f| + O(1) \quad (8.2)$$

が成り立つことをいう．円周 $|z| = r$ 上の点を2つの種類に分けてそれぞれの場合に (8.2) が成り立つことを証明する．まず $|P(f)| \geq |f|^d/2$ がみたされているような点においては

$$\log^+ |P(f)| \geq d \log^+ |f| - \log 2$$

となり (8.2) は成り立つ．そうでない場合、つまり $|P(f)| < |f|^d/2$ であるような点 z_0 においては

$$f^d + C_{d-1}f^{d-1} + \cdots + C_1f + C_0 = \alpha(z_0)f^d, \quad |\alpha(z_0)| < 1/2 \quad (8.3)$$

と書ける． ζ の関数 $F(\zeta) = (1 - \alpha(z_0))\zeta^d + C_{d-1}\zeta^{d-1} + \cdots + C_1\zeta + C_0$ を考えたとき z_0 に無関係な正数 $\kappa_0 = \kappa_0(C_0, \dots, C_{d-1})$ を適当にとり $|\zeta| \geq \kappa_0$ において $|F(\zeta)| \geq 1$ とできる．この事実注意到すれば (8.3) より $|f(z_0)| \leq \kappa_0$ がいえるから $O(1)$ として $-d \log^+ \kappa_0$ をとれば (8.2) が成り立つことがいえる．(8.2) を積分することにより

$$m(r, P(f)) \geq dm(r, f) + O(1)$$

を得る．また明らかに $N(r, P(f)) = dN(r, f)$ であるから逆向きの不等式 $T(r, P(f)) \geq dT(r, f) + O(1)$ が従う．よって $d_Q = 0$ の場合には (8.1) は証明できた．

次に $d_Q \geq 1$ のときを考える． $T(r, R(f)) = T(r, 1/R(f)) + O(1)$ であるから、 $d_R = d_Q \geq d_P$ であると仮定してよい．まず $d_Q = d_R$ に関する帰納法で

$$T(r, R(f)) \leq d_R T(r, f) + O(1) \quad (8.4)$$

を証明する． $d_Q = 1 \geq d_P$ のときは $R(u) = B_0 + 1/(B_1 + B_2 u)$, $B_2 \neq 0$ と書けるから、(8.4) はあきらかに成立する．つぎに $d \geq d_Q \geq d_P$ のとき (8.4) が成立すると仮定する．今 $d_Q = d + 1 \geq d_P$ である場合を考える．

$$R(u) = \frac{P(u)}{Q(u)} = B_0 + \frac{P_1(u)}{Q(u)} = B_0 + \frac{1}{U(u) + P_2(u)/P_1(u)},$$

$$d_{P_1} \leq d_Q - 1 = d, \quad d_U = d_Q - d_{P_1}, \quad d_{P_2} < d_{P_1}$$

と書けることにより

$$\begin{aligned} T(r, R(f)) &= T(r, P_1(f)/Q(f)) + O(1) = T(r, Q(f)/P_1(f)) + O(1) \\ &\leq T(r, U(f)) + T(r, P_2(f)/P_1(f)) + O(1). \end{aligned}$$

$U(u)$ が多項式であるということと帰納法の仮定より

$$T(r, R(f)) \leq d_U T(r, f) + d_{P_1} T(r, f) + O(1) = d_Q T(r, f) + O(1).$$

これより $d_Q = d+1$ のときも (8.4) が成立することがいえる. ゆえにすべての場合に対して (8.4) が成立つことがいえた. 一方, 反対向きの不等号を示すには, ある $V(u), W(u) \in \mathbf{C}[\mathbf{u}]$ が存在し $V(u)Q(u) + W(u)P(u) = 1$, $d_V + d_Q = d_W + d_P$ と書けることに注意する. $d_R = d_Q \geq d_P$ より, $d_W \geq d_V$ であるから, (8.4) をつかえば

$$\begin{aligned} T(r, 1/(Q(f)W(f))) &= T(r, P(f)/Q(f) + V(f)/W(f)) \\ &\leq T(r, R(f)) + T(r, V(f)/W(f)) + O(1) \leq T(r, R(f)) + d_W T(r, f) + O(1), \end{aligned}$$

また,

$$T(r, 1/(Q(f)W(f))) = T(r, Q(f)W(f)) + O(1) = (d_Q + d_W)T(r, f) + O(1)$$

であるから, $T(r, R(f)) \geq d_Q T(r, f) + O(1)$. これと (8.4) をあわせて, 一般の場合の等式 (8.1) が得られる. $\square$

Proof of Theorem 8.1. まず

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q m(r, 1/(f - \alpha_j)) &= \sum_{j=1}^q (T(r, 1/(f - \alpha_j)) - N(r, 1/(f - \alpha_j))) \\ &= qT(r, f) - \sum_{j=1}^q N(r, 1/(f - \alpha_j)) + O(1) \end{aligned}$$

である. $P(u) = \prod_{j=1}^q (u - \alpha_j)$ とおくと Theorem 8.5 より $qT(r, f) = T(r, P(f)) + O(1) = T(r, 1/P(f)) + O(1)$ であるから

$$\begin{aligned} &= T(r, 1/P(f)) - \sum_{j=1}^q N(r, 1/(f - \alpha_j)) + O(1) \\ &= m(r, 1/P(f)) + N(r, 1/P(f)) - \sum_{j=1}^q N(r, 1/(f - \alpha_j)) + O(1) \\ &\leq m(r, 1/P(f)) + O(1). \end{aligned}$$

さらに α_j ($1 \leq j \leq q$) は相異なるから $1/P(u) = \sum_{j=1}^q \gamma_j(u - \alpha_j)^{-1}$, $\gamma_j \neq 0$ と書ける. 従って

$$\begin{aligned}
&= m\left(r, \sum_{j=1}^q \gamma_j / (f - \alpha_j)\right) \\
&\leq m\left(r, \sum_{j=1}^q \gamma_j f' / (f - \alpha_j)\right) + m(r, 1/f') + O(1) \\
&= m(r, 1/f') + S(r, f) \\
&= T(r, 1/f') - N(r, 1/f') + S(r, f) \\
&= T(r, f') - N(r, 1/f') + S(r, f) \\
&= m(r, f') + N(r, f') - N(r, 1/f') + S(r, f) \\
&\leq m(r, f'/f) + m(r, f) + N(r, f') - N(r, 1/f') + S(r, f).
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
m(r, f) + \sum_{j=1}^q m(r, 1/(f - \alpha_j)) &\leq 2m(r, f) + N(r, f') - N(r, 1/f') + S(r, f) \\
&= 2T(r, f) - \left(2N(r, f) - N(r, f') + N(r, 1/f')\right) + S(r, f) \\
&= 2T(r, f) - \left(N_1(r, f) + N(r, 1/f')\right) + S(r, f)
\end{aligned}$$

となり求める不等式を得る. $\square$

第2章 微分方程式の有理型関数解

微分方程式の解に Nevanlinna 理論を応用してその解析的性質を調べることは我々の大きな目標のうちのひとつである．そのためには有理型関数を解にもつような微分方程式を問題にしたい．多項式係数をもつ線形方程式，たとえば Airy 方程式 $w'' + zw = 0$ はそのような微分方程式であるが，それらの解については収束級数展開，漸近級数展開などをもちいればその解析的性質は詳しく知ることが可能である．したがってこのようなものについては Nevanlinna 理論をもちだすまでもないであろう．線形方程式でも Mathieu 方程式 $w'' + (\theta_0 + \theta_1(e^{iz} + e^{-iz}))w = 0$ などは超越関数を係数とする方程式であり Nevanlinna 理論をもちいる余地もあるがそれには触れない．ここでは有理型関数を解にもつ非線形方程式を考えよう．なお複素変数の常微分方程式の基本的な事柄のうち以下の議論で必要なものについては付録にまとめてある．

9. 解の特異点

非線形微分方程式の有理型関数解の一般的な話しを始める前にいくつかの例についてその解の特異点がどのようなになるかを見てみよう．

非線形方程式

$$w' = 1 + w^2, \quad (9.1)$$

$$w' = z^{-1}w^2, \quad (9.2)$$

$$w' = -(1 + 2z)z^{-2}w - w^2, \quad (9.3)$$

$$w' = w^{-1}/2, \quad (9.4)$$

($' = d/dz$) を考える．方程式 (9.1) は一般解 $w = \tan(z - C)$ をもつ．この解の特異点は極 $z = C + \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) であるが，その位置は任意定数 C に依存しておりもとの方程式の外観から直接みることはできない．それに対して，(9.2) の解は $w = (C - \log z)^{-1}$ でありその特異点は $z = 0, \infty, e^C$ である．このうちはじめの2つの対数的分岐点 $z = 0, \infty$ は方程式の係数の極であり外観から伺い知ることができるものであるが，極 e^C は任意定数に依存した特異点である．また (9.3) の一般解 $w = z^{-2}e^{1/z}(C - e^{1/z})^{-1}$ の特異点については，真性特異点 $z = 0$ は方程式の係数の極として現れているが，もう一方の $z = 1/\log C$ は任意定数に依存した極である．さらに (9.4) の一般解は $w = (z - C)^{1/2}$ でその

特異点は $z = \infty, C$ でありいずれも代数的分岐点である．これらの例をみてわかるように解の特異点には任意定数に依存するものとそうでないものが存在する．

一般に $F(z, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ を $z, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ の有理関数とすると微分方程式

$$w^{(n)} = F(z, w, w', \dots, w^{(n-1)}) \quad (9.5)$$

を考える． $F(z, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ が点 $(z_0, w_0^0, w_1^0, \dots, w_{n-1}^0)$ のまわりで正則であるとする．初期条件

$$w(z_0) = w_0^0, \quad w'(z_0) = w_1^0, \quad \dots, \quad w^{(n-1)}(z_0) = w_{n-1}^0$$

をみたす (9.5) の解 $w(z) = w(w_0^0, w_1^0, \dots, w_{n-1}^0; z)$ を解析接続したときに遭遇する特異点を考えよう．その特異点の位置が初期値 $w_0^0, w_1^0, \dots, w_{n-1}^0$ の関数であるとき，つまり初期値 $w_0^0, w_1^0, \dots, w_{n-1}^0$ を少し動かせば特異点の位置もそれにつられて動くとき，それを $w(z)$ の **動く特異点** (movable singular point) と呼ぶ．それ以外の解の特異点を **不動特異点** (fixed singular point) と呼ぶ．動く特異点が極の場合それを **動く極** という．**動く分岐点**，**動く代数的分岐点**，**動く真性特異点**なども同様に定義できる．線形方程式については方程式の係数の特異点以外では解の特異点は現れないので動く特異点は存在しない．それに対して，非線形方程式の場合は上の例でみたように任意定数に依存した動く特異点があられる．方程式 (9.1), (9.2), (9.3) の解の動く特異点はすべて極である．一方 (9.4) の解については動く代数的分岐点のまわりでは解は多価である．

非線形方程式の解を研究しようとする場合，多価性があるとやっかいである．不動特異点が分岐点であるのは方程式の外観からその位置がわかるのでまだ許せるとしても，動く分岐点が存在する場合には大域的な多価性を知ることは解の具体的な表示式がないかぎりはず不可能でありその研究には大きな困難がともなう．さらに高階方程式に対しては，動く特異点が（そのまわりで一価であっても）真性特異点である場合や自然境界になる場合もありそのような解のふるまいも複雑である．したがって非線形方程式のうちでも，解の動く特異点がすべて動く極であるようなものを我々の研究対象とすることにしよう（上の例では (9.1), (9.2), (9.3)）．“動く特異点はすべて動く極である” という性質は **Painlevé property** と呼ばれている．Painlevé property をもつ方程式の場合，不動特異点からきまる universal covering 上ではその解は有理型である．特に ∞ 以外に不動特異点が存在しない場合はその解は全平面で有理型関数であり Nevanlinna 理論の適用対象となりうる．

10. 1階非線形方程式，Riccati 方程式

1 階非線形方程式

$$w' = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)} \quad (10.1)$$

を考える．ここで $P(z, w)$, $Q(z, w)$ は z, w の多項式であり定数以外の共通因子をもたないものと仮定する．まずこのような方程式の解の動く特異点について調べよう． $P(z, w)$, $Q(z, w)$ の w に関する次数をそれぞれ p, q と書く．解のとり値が有限のときはこの方程式そのままでもいいが，とり値が有限でない場合は $u = 1/w$ のみたす方程式

$$u' = \frac{P_*(z, u)}{Q_*(z, u)} \quad (10.2)$$

を扱う必要がある．ここで $P_*(z, u)$, $Q_*(z, u)$ は

$$P_*(z, u) := -u^{d+2}P(z, 1/u), \quad Q_*(z, u) := u^dQ(z, 1/u), \quad (10.3)$$

$$d := \max\{p - 2, q\}$$

と表される z, u についての多項式でやはり定数以外の共通因子をもたない．上の方程式の右辺から直接計算できる有限個の点の集合

$$Z := Z_0 \cup Z'_0 \cup Z_1 \cup Z'_1, \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} Z_0 &:= \{z_0 \in \mathbf{C} \mid Q(z_0, w) \equiv 0\}, \\ Z'_0 &:= \{z_0 \in \mathbf{C} \mid Q_*(z_0, u) \equiv 0\}, \\ Z_1 &:= \{z_0 \in \mathbf{C} \mid P(z_0, w_0) = Q(z_0, w_0) = 0 \text{ for some } w_0 \in \mathbf{C}\}, \\ Z'_1 &:= \{z_0 \in \mathbf{C} \mid P_*(z_0, 0) = Q_*(z_0, 0) = 0\} \end{aligned}$$

を考える．

Theorem 10.1. $w = \phi(z)$ を方程式 (10.1) の任意の解とする． $\phi(z)$ が $c \notin Z$ において特異点をもてばそれは動く代数的分岐点または動く極である．

Proof. 点 $c \notin Z$ が $\phi(z)$ の特異点であるとする．このとき c を終点とする曲線 $C: z = \chi(t)$, $t > 0$ で $C \setminus \{c\}$ 上の任意の点において $w = \phi(z)$

が正則であるようなものがとれる．このとき集積値集合

$$\Gamma_\infty := \bigcap_{\tau>0} \overline{\Gamma(\tau)} \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\}, \quad \Gamma(\tau) := \{\phi(\chi(\mathbf{t})) \mid \mathbf{t} \geq \tau\}.$$

を考えよう．

Claim 1: 任意の $\gamma \in \Gamma_\infty$ は次の性質をもつ．

- (a) $\gamma \neq \infty$ ならば $P(c, \gamma) \neq 0$ かつ $Q(c, \gamma) = 0$,
- (b) $\gamma = \infty$ のとき, $Q_*(c, 0) = 0$ ならば $P_*(c, 0) \neq 0$.

$\gamma \neq \infty$ とする． Γ_∞ の定義より $z_\nu \rightarrow c, \phi(z_\nu) \rightarrow \gamma$ であるような点列 $\{z_\nu\} \subset C$ がとれる．もしも $Q(c, \gamma) \neq 0$ であるならば, Theorem A.3 より $\phi(z)$ は c で正則となり c が特異点であることに矛盾するから, $Q(c, \gamma) = 0$ でなければならない．このとき $c \notin Z_1$ より $P(c, \gamma) \neq 0$ となる． $\gamma = \infty$ のときは $c \notin Z'_1$ であるから (b) はあきらかである．

Claim 2: Γ_∞ は一点のみからなる, つまりある $\gamma_0 \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ が存在し C に沿って $z \rightarrow c$ とするとき $\phi(z) \rightarrow \gamma_0$ である．

$c \notin Z_0$ であるから $Q(c, w) \not\equiv 0$ である． $Q(c, w)$ の相異なる零点を $\gamma_1, \dots, \gamma_{q'}$ ($q' \leq q$) とすれば Claim 1 より

$$\Gamma_\infty \subset \{\gamma_1, \dots, \gamma_{q'}, \infty\},$$

となる．そこで近傍 $\Delta_j := \{w \mid |w - \gamma_j| < \rho_j\}$ ($j = 1, \dots, q'$), $\Delta_\infty := \{w \mid |w| > \rho_\infty\}$ を $\Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset$ が $k \neq l$ なるすべての $k, l \in \{1, \dots, q', \infty\}$ に対して成立するように選ぶ．もしも Γ_∞ が2点以上を含む, つまり $\gamma, \gamma' \in \Gamma_\infty, \gamma \neq \gamma'$ であるとすれば, ある $k \neq l$ に対し $\gamma \in \Delta_k, \gamma' \in \Delta_l$ であるから点列 $\{z_\nu^*\} \subset C$ で

$$z_\nu^* \rightarrow c, \quad \phi(z_\nu^*) \rightarrow \lambda \in \mathbf{C} \setminus (\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_{q'} \cup \Delta_\infty) \subset \mathbf{C} \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_{q'}, \infty\}$$

なる性質をもつものを選ぶことができる．このときあきらかに $Q(c, \lambda) \neq 0$ であり Theorem A.3 より $\phi(z)$ は c で正則になり矛盾．したがって Γ_∞ は一点よりなる．

以下 γ_0 の値によって2つの場合に分類する．

Case 1: $\gamma_0 \neq \infty$ とする．このとき Claim 1 の (a) がみたされるので, C を十分 c に近い部分に限定しておけば, $C \setminus \{c\}$ 上 $\phi'(z) \neq 0$ であり, さらにそこで正則だから $C \setminus \{c\}$ 上 $\phi'(z) \neq \infty$ である．よって $w = \phi(z)$ の逆関数 $z = \phi_-(w)$ を w -平面内の曲線 $C_- := \phi(C \setminus \{c\})$ 上正則であるようにとることができる． $z = \phi_-(w)$ は方程式

$$\frac{dz}{dw} = \frac{Q(z, w)}{P(z, w)} \tag{10.5}$$

の解であり, $w \rightarrow \gamma_0$, $w \in C_-$ のとき $\phi_-(w) \rightarrow c$ をみたす. Theorem A.3 より $\phi_-(w)$ は $w = \gamma_0$ においても正則であり $(d\phi_-/dw)(\gamma_0) = 0$ である. この事実より点 $w = \gamma_0$ のまわりで

$$\phi_-(w) = c + a_m(w - \gamma_0)^m + O((w - \gamma_0)^{m+1}),$$

$a_m \neq 0$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$ と書くことができる. したがって

$$\phi(z) = \gamma_0 + a_m^{-1/m}(z - c)^{1/m} + \dots.$$

ここで c は任意パラメーターと見なすことができるから $z = c$ は解 $\phi(z)$ の動く代数的分岐点であることがいえる.

Case 2: $\gamma_0 = \infty$ とする. $u = \psi(z) = 1/\phi(z)$ は (10.2) の解であり, $z \rightarrow c$, $z \in C$ のとき $\psi(z) \rightarrow 0$ をみたす. まず $Q_*(c, 0) = 0$ の場合を考える. $c \notin Z'_0$ および Claim 1, (b) に注意すれば上と同様な議論より $u = \psi(z)$ の逆関数 $z = \psi_-(u)$ で曲線 $C_-^* := \psi(C \setminus \{c\})$ 上正則なものが存在し, これは

$$\frac{dz}{du} = \frac{Q_*(z, u)}{P_*(z, u)}$$

の解である. さらに $u \rightarrow 0$, $u \in C_-^*$ のとき $\psi_-(u) \rightarrow c$ をみたす. よって $u = 0$ のまわりで $\psi_-(u)$ は正則であり, $(d\psi_-/du)(0) = 0$ となるから

$$\psi_-(u) = c + a_m u^m + O(u^{m+1}),$$

$a_m \neq 0$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$ が成立する. この場合も

$$\phi(z) = 1/\psi(z) = a_m^{1/m}(z - c)^{-1/m} + \dots$$

であるから $z = c$ は動く代数的分岐点である. 最後に $Q_*(c, 0) \neq 0$ の場合を考える. このとき $u = \psi(z)$ は $z = c$ において正則であり $\psi(c) = 0$ をみたす. よって

$$1/\phi(z) = \psi(z) = b_n(z - c)^n + O((z - c)^{n+1}),$$

$b_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$ となり $z = c$ は解 $\phi(z)$ の動く極である. □

Remark 10.1. 動く極の重複度は常に一定であるとはかぎらない. たとえば方程式 $u' = z + u$ の解 $u = (c + 1)e^{z-c} - z - 1$ はその零点 $z = c$

のまわりで $u = c(z - c) + (c + 1)(z - c)^2/2 + \dots$ と展開できるので、 $w = 1/u$ のみたす方程式

$$w' = -zw^2 - w$$

の解 $w = \phi(c, z) = \left((c + 1)e^{z-c} - z - 1\right)^{-1}$ は

$$\phi(c, z) = (z - c)^{-1} \left(c + (c + 1)(z - c)/2 + \dots \right)^{-1}$$

という表示式を持つ。これは動く極 $z = c$ は $c \neq 0$ のとき simple であるが $c = 0$ のときは double であることをあらわしている。

以上、上のような 1 階非線形方程式の解の動く特異点は代数的分岐点か極であることがわかったのであるが、それでは Painlevé property をもつ方程式はどのようなものであろうか。これに答えるのがつぎの定理である。

Theorem 10.2. $\mathcal{R}$ を $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ の universal covering とする。(10.1) の任意の解が $\mathcal{R}$ 上で有理型ならば (10.1) は Riccati 方程式

$$w' = p_0(z) + p_1(z)w + p_2(z)w^2 \quad (10.6)$$

である。ここで $p_j(z)$ ($j = 0, 1, 2$) は有理関数である。

Proof. (10.1) において $p \leq 2, q = 0$ であることをいえばよい。 $q \geq 1$ であると仮定する。 $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ なる点をとれば $Q(c, w) \neq 0$ であるから $Q(c, \lambda) = 0$ なる値が存在し、さらにこの値に対し $P(c, \lambda) \neq 0$ である。今、方程式

$$\frac{dz}{dw} = \frac{Q(z, w)}{P(z, w)}$$

の解 $z = \Phi(w)$ で初期条件 $\Phi(\lambda) = c$ をみたすものを考えれば $(d\Phi/dw)(\lambda) = 0$ であるから

$$z = \Phi(w) = c + a_m(w - \lambda)^m + O((w - \lambda)^{m+1}),$$

$a_m \neq 0, m \in \mathbf{N}, m \geq 2$ と書ける。これは $\Phi(w)$ の逆関数 $w = \phi(z)$ が $z = c$ で代数的分岐点をもつことを示しており、(10.1) のすべての解が $\mathcal{R}$ 上有理型であるという仮定に矛盾する。よって $q = 0$ つまり $Q(z, w) = Q(z)$ がいえた。次に $p \geq 3$ であると仮定すれば $d = p - 2 \geq 1$ であるから $u = 1/w$ のみたす方程式 (10.2) においては $Q_*(z, u) = Q(z)u^d$

である. $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ なる点をとれば $P_*(c, 0) \neq 0$ であることに注意する. 方程式

$$\frac{dz}{du} = \frac{Q(z)u^d}{P_*(z, u)}$$

の解 $z = \Phi_*(u)$ で初期条件 $\Phi_*(0) = c$ をみたすものについて上と同様の議論をおこなえば矛盾を導くことができる. このようにして $p \leq 2$ も証明できる. $\square$

Riccati 方程式 (10.6) については (10.4) で定義された集合 Z は

$$Z_* = \left\{ z_0 \mid 1/p_j(z_0) = 0 \text{ for some } j \right\}$$

と書ける. このとき Theorem 10.2 の逆がいえ.

Theorem 10.3. $\mathcal{R}_0$ を $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_*$ の universal covering とする. このとき Riccati 方程式 (10.6) の任意の解は $\mathcal{R}_0$ 上有理型である. 特に $p_j(z)$ ($j = 0, 1, 2$) がすべて多項式ならば (10.6) の任意の解は $\mathbf{C}$ で有理型である.

Proof. $p_j(z)$ の極以外の点 c および c を終点とする曲線 C を考える. $\phi(z)$ が C 上 c 以外の点で有理型であり, c において特異点をもったとする. 今 $A := \liminf_{z \rightarrow c, z \in C} |\phi(z)|$ とおく. もしも $0 \leq A < +\infty$ ならば点列 $\{z_\nu\} \subset C$ で $z_\nu \rightarrow c$, $\phi(z_\nu) \rightarrow \gamma_\infty \in \mathbf{C}$ をみたすものがとれる. よって Theorem A.3 より $\phi(z)$ は $z = c$ で正則である. $A = +\infty$ の場合は $z \rightarrow c$, $z \in C$ のとき $\phi(z) \rightarrow \infty$ である. よって方程式

$$v' = -p_2(z) - p_1(z)v - p_0(z)v^2$$

の解 $v = \psi(z) = 1/\phi(z)$ は $z \rightarrow c$, $z \in C$ のとき $\psi(z) \rightarrow 0$ をみたす. 再び Theorem A.3 より $z = c$ は $\psi(z)$ の (正則点であり) 零点であり, $\phi(z)$ の極である. 以上 $\phi(z)$ は $\mathcal{R}_0$ 上有理型であることが証明された. $\square$

Riccati 方程式に関するひとつの特徴づけを与えよう. これはもともと Malmquist により証明されたものであるが拡張も含めてその証明に Nevanlinna 理論をもちいたのは Yosida (吉田耕作) (1930 年代) である.

Theorem 10.4. (Malmquist-Yosida) n を任意の正整数, $R(z, w)$ を z, w の有理関数とする. 方程式

$$(w')^n = R(z, w) \tag{10.7}$$

が超越有理型関数解 $w = \phi(z)$ を一つでももつならば $R(z, w)$ は w についてのたかだか $2n$ 次多項式, つまり

$$R(z, w) = R_{2n}(z)w^{2n} + \cdots + R_1(z)w + R_0(z), \quad R_j(z) \in \mathbf{C}(z)$$

である. とくに $\phi(z)$ の極がたかだか有限個の場合には $R(z, w)$ は w についてのたかだか n 次多項式である.

Remark 10.2. $n = 1$ の場合には (10.7) が Riccati 方程式になることを主張しておりこれはある意味では Theorem 10.2 より強い結果である. なお上の主張の中で “超越” は外せないことはあきらかである.

Example 10.1. $w = \wp(z)$ は $(w')^2 = 4w^3 - g_2w - g_3$ をみたす (Example 5.2). また $w = 1/\wp(z)$ は $(w')^2 = -g_3w^4 - g_2w^3 + 4w$ をみたす.

Example 10.2. $n = 1$ の場合, $\phi(z)$ がたかだか有限個の極しかもたなければ (10.7) は線形方程式になる. $n = 2$ の場合の例として, たとえば $w = \cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ は $(w')^2 = 1 - w^2$ をみたす. また, $\phi(z)$ が無数の極をもつ場合でも $R(z, w)$ の w に関する次数が n 以下になることもある. たとえば $w = \tan z = -i(e^{iz} - e^{-iz})/(e^{iz} + e^{-iz})$ は $(w')^2 = 1 + w^2$ をみたす.

Proof. まず $\phi(z)$ が無数の極を持つ場合を考えよう. 方程式の右辺の有理関数を $R(z, w) = P(z, w)/Q(z, w)$ とおく. ここで, $P(z, w), Q(z, w)$ は定数以外の共通因子を持たない z, w の多項式で, w についての次数を p, q と書く. $P(z, w), Q(z, w)$ の w^j の係数は z の多項式であるがそれらの零点は有限個であるという事実に注意する. これらの零点のいずれともことなる $\phi(z)$ の極 z_0 を考えそのまわりで

$$\phi(z) = c_{-l}(z - z_0)^{-l} + \cdots, \quad l \in \mathbf{N}$$

と書く. もしも $p \leq q$ ならば $w = \phi(z)$ を (10.7) に代入すると $z = z_0$ の近くで $R(z, \phi(z)) = O((z - z_0)^{-(p-q)l}) = O(1)$ であるがこれはありえない. したがって $p > q$ である. 再び $\phi(z)$ を (10.7) に代入し $z - z_0$ の次数を比較すれば $n(l + 1) = (p - q)l$ つまり $l = n/(p - q - n) \in \mathbf{N}$ であるから $n + 1 \leq p - q \leq 2n$ である. $Q(z, \phi)(\phi')^n = P(z, \phi)$ であるから $\phi^p = \hat{Q}(z, \phi, \phi')$ (ただし $\hat{Q}(z, u, v)$ は u, v のたかだか $(p - 1)$ 次多項式) となり Lemma 7.1 より

$$m(r, \phi) = S(r, \phi) \tag{10.8}$$

である．ここで $q \geq 1$ であると仮定する． $P(z, w)$ を $Q(z, w)$ で割って $R(z, w) = U(z, w) + P_1(z, w)/Q(z, w)$ と書いておく．ただし $U(z, w)$ および $P_1(z, w)$ は z の有理関数を係数とする w についての多項式でその次数はそれぞれ $p - q, q - 1$ またはそれ以下である． $\phi(z)$ を (10.7) に代入すれば

$$\Phi(z) := \phi'(z)^n - U(z, \phi(z)) = \frac{P_1(z, \phi(z))}{Q(z, \phi(z))} \quad (10.9)$$

を得る．(10.8) および Theorem 6.5 より

$$\begin{aligned} m(r, \Phi) &= m(r, (\phi')^n - U(z, \phi)) \\ &\ll m(r, \phi'/\phi) + m(r, \phi) + O(\log r) = S(r, \phi) \end{aligned} \quad (10.10)$$

である．また (10.9) の左辺をみれば $\Phi(z)$ の極は有限個をのぞいて $\phi(z)$ の極に含まれることがわかるが，右辺をみればそれら $\phi(z)$ の極は有限個をのぞいて $\Phi(z)$ の零点となっている．従って $\Phi(z)$ にはたかだか有限個の極しか存在しない．つまり $N(r, \Phi) \ll \log r$ でありそして $N(r, 1/\Phi) \geq N(r, \phi) + O(\log r)$ である．このうちの前者と (10.10) をあわせて $T(r, \Phi) = S(r, \phi)$ であることがわかる．一方この後より $T(r, \Phi) = T(r, 1/\Phi) + O(1) \geq N(r, 1/\Phi) + O(1) \geq N(r, \phi) + O(\log r)$ であるから $N(r, \phi) = S(r, \phi)$ となりこれと (10.8) をあわせると $T(r, \phi) = S(r, \phi)$ となり矛盾．よって $q = 0$ つまり $R(z, w)$ は w のたかだか $2n$ 次多項式であることがいえた．次に $\phi(z)$ の極が有限個の場合を考えよう．Corollary 8.2 より $\delta(\gamma, \phi) = 0$ であるような $\gamma \neq \infty$ が存在するから， $\phi(z)$ の超越性より $\phi(z)$ は無数の γ -点をもつ．このとき $v = \psi(z) = 1/(\phi(z) - \gamma)$ は無数の極をもつから，上の結果よりそれはつぎの形の方程式

$$\begin{aligned} (v')^n &= \hat{R}(z, v) := (-v)^{2n} R(z, \gamma + 1/v), \\ \hat{R}(z, v) &= \hat{R}_{2n}(z)v^{2n} + \cdots + \hat{R}_1(z)v + \hat{R}_0(z) \end{aligned}$$

をみたす．これより $R(z, w) = (\gamma - w)^{2n} \hat{R}(z, 1/(w - \gamma))$ も w についての $2n$ 次多項式であることがいえる．さらにもしも $R(z, w)$ の w についての次数が $n+1$ 以上であったと仮定すると Lemma 7.1 より $m(r, \phi) = S(r, \phi)$ を得る． $\phi(z)$ の超越性と極が有限個であることより $N(r, \phi) = O(\log r) = S(r, \phi)$ ．よって $T(r, \phi) = S(r, \phi)$ となり矛盾．したがってこのときは $R(z, w)$ の w についての次数は n を越えない． $\square$

11. Riccati 方程式の有理型関数解の値分布

今まで見てきたように Riccati 方程式

$$w' = p_0(z) + p_1(z)w + p_2(z)w^2, \quad p_j(z) \in \mathbf{C}(z) \quad (11.1)$$

は適当な条件下では全平面で有理型であるような解をもつ．これら有理型関数解の値分布論的性質を調べよう．Riccati 方程式 (11.1) は変換 $w = v/p_2$, $v = -u'/u$ により線形 2 階方程式

$$u'' - (p_2'(z)/p_2(z) + p_1(z))u' + p_0(z)p_2(z)u = 0$$

に帰着されるからこの事実より解の性質を知ることにも可能であるが，ここでは後に述べる Painlevé 方程式との比較ということを念頭において，線形方程式を経由しないで直接 (11.1) を取り扱う．まず有理型関数解の位数についてはつぎの結果が得られる．

Theorem 11.1. Riccati 方程式 (11.1) の任意の有理型関数解 $\phi(z)$ に対して $T(r, \phi) = O(r^\theta)$ である．ここで θ は係数 $p_j(z) \in \mathbf{C}(z)$ ($j = 0, 1, 2$) にのみ依存する正数である．

Proof. まず $p_2(z) \not\equiv 0$ のときを考える． $p_j(z)$ ($j = 0, 1, 2$) は有理関数であるから適当な $\kappa \in \mathbf{Z}$, $c_0 \neq 0$, $\mu \geq 1$ をとれば，十分大きな z に対し $p_2(z) = z^\kappa(c_0 + O(z^{-1}))$, $|p_0(z)| + |p_1(z)| = O(|z|^\mu)$ とできる．有理型関数解 $\phi(z)$ の任意の極 z_0 のまわりで他の極が存在しないような近傍の大きさを調べよう． $\phi(z)$ のかわりに $\psi(z) = 1/\phi(z)$ を考えれば極 z_0 は $\psi(z)$ の零点である． $u = \psi(z)$ は方程式

$$u' = -p_2(z) - p_1(z)u - p_0(z)u^2$$

をみたす．したがってもしも $|z_0|$ が十分おおきければ $|z - z_0| < 1$ において $|\psi(z)| \leq |z_0|^{-2\mu-|\kappa|}$ であるかぎりには $\psi'(z) = z_0^\kappa(-c_0 + O(|z_0|^{-1}))$ をみたす． z_0 の近くでのふるまいをみるために変数変換 $z = z_0 + z_0^{-\kappa}t$ を行なう．すると $\Psi(t) = \psi(z_0 + z_0^{-\kappa}t)$ とおいたとき， $\Psi(0) = 0$ であり，さらに $|t| < |z_0|^{-|\kappa|}$ において $|\Psi(t)| \leq |z_0|^{-2\mu-|\kappa|}$ であるかぎりには

$$(d/dt)\Psi(t) = -c_0 + O(|z_0|^{-1}) \quad (11.2)$$

が成立する．この事実より $|t| \leq \tau_0 := (|c_0|^{-1}/3)|z_0|^{-2\mu-|\kappa|}$ において

$$|c_0||t|/2 \leq |\Psi(t)| \leq 2|c_0||t| \quad (11.3)$$

が成立することが証明される．実際

$$\tau_* = \sup\left\{\tau \mid |t| < \tau \text{ において } |\Psi(t)| \leq |z_0|^{-2\mu-|\kappa|} \text{ が成立}\right\}$$

とするとき, $\tau_* \leq \tau_0$ と仮定すれば (11.2) より $|t| \leq \tau_*$ において $|\Phi(t)| \leq |-c_0 + O(|z_0|^{-1})|\tau_0 \leq (1/2)|z_0|^{-2\mu-|\kappa|}$ となり τ_* の定義に反する．したがって $\tau_* > \tau_0$ となり, $|t| \leq \tau_0$ において (11.2) が成立する．これを積分すると $|t| \leq \tau_0$ において

$$\Psi(t) = (-c_0 + O(|z_0|^{-1}))t$$

となり (11.3) が従う．変数を $z, \phi(z)$ にもどすと (11.3) より解 $\phi(z)$ は

$$|z - z_0| < |z_0|^{-\kappa}\tau_0 = C_0|z_0|^{-\lambda}, \\ C_0 := |c_0|^{-1}/3, \quad \lambda := \kappa + |\kappa| + 2\mu \geq 2$$

において z_0 以外の極はもたないことがわかる．以上の考察よりその絶対値が十分大きな極 z_0 には上のような近傍を対応させることができるので r が十分大きければ円板 $|z| \leq r$ における $\phi(z)$ の極の個数は

$$n(r, \phi) \ll \pi r^2 (\pi C_0^2 r^{-2\lambda})^{-1} \ll r^{2+2\lambda}$$

と評価できる．よって $N(r, \phi) = O(r^{2+2\lambda})$ である．さらに (11.1) に $w = \phi(z)$ を代入して Lemma 7.1 を適用すれば $m(r, \phi) = S(r, \phi)$ であるから $T(r, \phi) = O(r^{2+2\lambda}) + o(T(r, \phi))$ が $r \notin E$, $\mu(E) < \infty$ に対して成り立つ．そして Lemma 6.9 をつかえば除外集合なしで $T(r, \phi) = O(r^{2+2\lambda})$ がいえる (Example 7.1 参照). $p_2(z) \equiv 0$ のときには

$$\phi'(z) = p_0(z) + p_1(z)\phi(z)$$

であるから $\phi(z)$ はたかだか有限個の極しかもたない．係数の有限個の極を通らない積分路に沿って求積すれば z が十分大きいところで一様に $|\phi(z)| = O(\exp(C_1|z|^{\mu+1}))$ ($C_1 > 0$) を得るからやはり $T(r, \phi) = m(r, \phi) + O(\log r) \ll r^{\mu+1}$ を得る. $\square$

Theorem 11.2. $\phi(z)$ を (11.1) の任意の超越有理型関数解とする．

(1) $p_2(z) \not\equiv 0$ であるならば $m(r, \phi) = O(\log r)$, $\delta(\infty, \phi) = 0$ である．一方 $p_2(z) \equiv 0$ ならば極の個数は有限個であり $\delta(\infty, \phi) = 1$.

(2) $\alpha \in \mathbf{C}$ が $p_0(z) + \alpha p_1(z) + \alpha^2 p_2(z) \not\equiv 0$ をみたせば $m(r, 1/(\phi - \alpha)) = O(\log r)$, $\delta(\alpha, \phi) = 0$ である．一方 $p_0(z) + \alpha p_1(z) + \alpha^2 p_2(z) \equiv 0$ ならば $\phi(z)$ の α -点はたかだか有限個であり $\delta(\alpha, \phi) = 1$.

(3) 重複度が 2 以上の極は存在してもたかだか有限個でありそれらは係数 $p_j(z)$ ($j = 0, 1, 2$) の極または $p_2(z)$ の零点の位置以外には存在しない.

(4) 重複度が 2 以上の α -点は存在しても有限個である. それらは $p_j(z)$ の極であるかまたは $p_0(z) + \alpha p_1(z) + \alpha^2 p_2(z) = 0$ の根であるかのいずれかである.

Remark 11.1. 上の定理で $\delta(\infty, \phi) = 0$, $\delta(\alpha, \phi) = 0$ はそれぞれ極, α -点が無数に存在することを示している (Proposition 5.1).

Proof. $p_2(z) \not\equiv 0$ のときは Lemma 7.1 と Theorem 11.1 の結果 $T(r, \phi) = O(r^\theta)$ より $m(r, \phi) = O(\log r)$ である. そして $\phi(z)$ の超越性と Proposition 3.4 より $\delta(\infty, \phi) = 0$ がいえる. $p_2(z) \equiv 0$ の場合は $\phi(z)$ は線形方程式 $w' = p_0(z) + p_1(z)w$ をみたすから $\phi(z)$ の極は存在しても係数 $p_0(z)$, $p_1(z)$ の極の位置以外には存在しない. これより $N(r, \phi) = O(\log r)$ がいえるので $\delta(\infty, \phi) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} N(r, \phi)/T(r, \phi) = 1$ である. 以上で (1) が証明された. $v = 1/(\phi(z) - \alpha)$ は方程式

$$v' = -p_2(z) - (p_1(z) + 2\alpha p_2(z))v - (p_0(z) + \alpha p_1(z) + \alpha^2 p_2(z))v^2$$

をみたすことに注意しこの解に (1) をあてはめれば (2) を得る. (3) については $\phi(z)$ を (11.1) に代入し極の位数を比較すれば確かめられる. さらに v の方程式に (3) をあてはめれば (4) を得る. $\square$

12. Painlevé 方程式

1 階非線形方程式で (10.1) の形のもののうち Painlevé property をもつものは Riccati 方程式になるということがわかったがこれは 2 階線形方程式に帰着される. また (10.1) 以外の形の 1 階の代数的微分方程式

$$F(z, w, w') = 0$$

($F(z, w_0, w_1)$ は z, w_0, w_1 の有理関数) で Painlevé property をもつものは $\wp$ -関数 (Example 5.2) のみたす方程式

$$(w')^2 = 4w^3 - g_2w - g_3$$

以外には本質的に新しいものは存在しないということが知られている. Painlevé property をもつ興味のある方程式を探そうとすれば 2 階非線形方程式

$$w'' = R(z, w, w') \tag{12.1}$$

($R(z, w_0, w_1)$ は z, w_0, w_1 の有理関数) にまで対象を広げなければならない. もちろん 2 階線形方程式が Painlevé property をもつことはあきらかであるし, また方程式

$$w'' = 6w^2 - g_2/2$$

の一般解は $\wp$ -関数であるからやはり Painlevé property をもつ. このような良く知られた方程式や求積できるものの以外で Painlevé property をもつ方程式 (12.1) はどのようなものであろうか. 方程式 (12.1) の任意の解が動く分岐点をもたないならば (本質的に新しいものは) つぎの 6 つの方程式に限られるということを 1900 年前後に Painlevé および Gambier は長い困難な計算の末に証明した.

$$w'' = 6w^2 + z, \quad (\text{I})$$

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \quad (\text{II})$$

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \quad (\text{III})$$

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}, \quad (\text{IV})$$

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) (w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \quad (\text{V})$$

$$w'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) (w')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) w' + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left(\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2} \right). \quad (\text{VI})$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$ は任意の係数である. これらは **Painlevé 方程式** と呼ばれている.

Painlevé 方程式の導出において用いられた手法 (α -method) を大雑把に述べればつぎのようになる. 方程式 (12.1) の任意の解がある領域において一価であると仮定する. このときある適当な方法でパラメーター α (方程式 (II), ..., (VI) に含まれる α とは別) を導入する. $0 < |\alpha| < \varepsilon$ のとき解が一価であるという性質がパラメーターに関する極限操作 $\alpha = 0$ のもとでも不変であるという事実をもちいることにより方程式の形を絞り込むことができる. この操作を繰り返すことにより得られる方程式の

うちで求積できるものなどを除外していった結果残ったものが上の6つの方程式である。

上で説明したように Painlevé 方程式は Painlevé property をもつための必要条件としてでてきたわけである。つぎにやるべきことはこれらの方程式が実際に Painlevé property をもつことを証明することである。この事実に関して、Painlevé 自身が方程式 (I) について一部分不完全ではあるがその証明を与えている。1960年代、Hukuhara (福原満洲雄) はそれを完全なものにしさらに (VI) についての証明も与えた。

Theorem 12.1. 方程式 (I), (II), (IV) の任意の解は $\mathbb{C}$ 上有理型である。さらに領域 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ の universal covering をそれぞれ $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_{0,1}$ と書くとき, (III), (V) の任意の解は $\mathcal{R}_0$ 上有理型であり, (VI) の任意の解は $\mathcal{R}_{0,1}$ 上有理型である。

(I), (II), (IV) の解は全平面で有理型であり不動特異点は $z = \infty$ のみであるが, (III), (V) は $z = 0, \infty$ で, (VI) は $z = 0, 1, \infty$ で不動特異点をもつので解は一般には多価関数である。以下の節では方程式 (I), (II) について Theorem 12.1 の証明を与えよう。他の方程式についての Painlevé property の証明も原理的にはすべて同じである。しかし例えば w の有限な値に対して方程式の右辺が極をもつような場合があり、一般には少し複雑な取り扱いを必要とする。

13. 方程式 (I), (II) に対する Painlevé property の証明

Painlevé 方程式

$$w'' = 6w^2 + z, \quad (\text{I})$$

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \quad (\text{II})$$

の Painlevé property の証明を与えよう。ごく基本的な部分は Riccati 方程式の Painlevé property (Theorem 10.3) の証明と同じ方針であるが、この場合は解自身のとる値だけでなくその導関数も考慮にいれなければならない。そのためにある種の Ljapunov 関数を用いる必要がある。以下の証明を Theorem 10.3 の証明と比較し 1 階と 2 階ではどの部分が本質的に異なるのかを理解されたい。

13.1. (I) についての Theorem 12.1 の証明

Step 1: 以下 $w(z)$ を方程式 (I) の任意の解とする。これはある点にお

ける初期条件をみたす解を極も許しながらできるかぎり解析接続したものと解釈する．まず極についての性質からはじめよう．

Proposition 13.1. $w(z)$ はその任意の極 $z = \sigma$ のまわりでは級数

$$w(z) = (z - \sigma)^{-2} - \sigma(z - \sigma)^2/10 - (z - \sigma)^3/6 + b(z - \sigma)^4 + \dots$$

に展開される．ここで b は積分定数，つまり初期値に依存する定数である．

Proof. 極のまわりでの展開 $w(z) = c_{-l}(z - \sigma)^{-l} + \dots$, $l \in \mathbf{N}$, $c_{-l} \neq 0$ を (I) に代入して最低次の項を比較すれば $l + 2 = 2l$, $(l + 1)lc_{-l} = 6c_{-l}^2$ を得る．よって $l = 2$, $c_{-2} = 1$ である．級数 $\sum_{j=-2}^{\infty} c_j(z - \sigma)^j$ を再び代入し両辺の $(z - \sigma)^{j-2}$ の係数を比較すれば

$$(j - 4)(j + 3)c_j = G_j(\sigma, c_k; k \leq j - 1), \quad j \geq -1$$

($G_j(\sigma, c_k; \dots)$ は σ, c_k の多項式) となる．これより c_j が順次きまる．とくに $G_4(\sigma, c_k; k \leq 3) = 0$ となり $c_4 = b$ (任意定数) を得る． $\square$

Remark 13.1. 上の展開で σ, b が 2 つの積分定数である．

Remark 13.2. 上の証明において $G_4(\sigma, c_k; k \leq 3) = 0$ となり c_4 が任意定数にとれるところが重要である．もしも G_4 が消えなければ (I) の解は動く極は持たないことになる．このように，極のまわりの級数展開が存在したと仮定しその係数が矛盾なく決まるか否かをチェックする操作を Painlevé test という．Painlevé test が通っただけでは，極以外の動く特異点の存在までは否定されてはいないので，Painlevé property が証明されたことにはならない．

極 σ の近くで $w(z) = u(z)^{-2}$ とおくととき， $u(z)$ としては 2 つの分枝がとれるがそれらは $z = \sigma$ のまわりで解析的ではなくである．以下 $u(z)$ のみたす方程式を求めよう． $\xi = z - \sigma$ とおけば $\sigma = z - \xi$ であるから上で求めた級数は

$$w(z) = \xi^{-2} - z\xi^2/10 - \xi^3/15 + b\xi^4 + \dots \quad (13.1)$$

と書ける．さらに

$$w'(z) = -2\xi^{-3} - z\xi/5 - 3\xi^2/10 + 4b\xi^3 + \dots \quad (13.2)$$

となる．(13.1) より $\xi = \pm u(z)(1 - zu(z)^4/20 \mp u(z)^5/30 + bu(z)^6/2 + \dots)$ を得てこれを (13.2) に代入すれば

$$w'(z) = \mp 2u(z)^{-3} \mp zu(z)/2 - u(z)^2/2 \pm 7bu(z)^3 + \dots$$

となる．この式の右辺で任意定数 b のある部分はもう一つの未知関数とみられるので，改めて未知変数 (u, v) を

$$w = u^{-2}, \quad w' = -u^2/2 \mp (2u^{-3} + zu/2 - u^3v) \quad (13.3)$$

により導入する． w は (I) の未知変数であることに注意して w を消去すれば (u, v) に関する連立方程式

$$\begin{aligned} \pm u' &= 1 + zu^4/4 \pm u^5/4 - u^6v/2, \\ v' &= \pm z^2u/8 + 3zu^2/8 \pm (1/4 - zv)u^3 - 5u^4v/4 \pm 3u^5v^2/2 \end{aligned} \quad (13.4)$$

が導かれる．この方程式は (13.3) により定義された変数 (u, v) についての (I) に同値な方程式である．

Step 2: (13.3) より $w' + w^{-1}/2 = \mp u(2w^2 + z/2 - w^{-1}v)$ を得るがこの両辺を平方すれば

$$(w')^2 + \frac{w'}{w} - 4w^3 - 2zw = -\frac{1}{4w^2} + \frac{z^2}{4w} + \frac{v^2}{w^3} - \frac{zv}{w^2} - 4v. \quad (13.5)$$

今，解 $w(z)$ に対し

$$\Phi(z) := w'(z)^2 + \frac{w'(z)}{w(z)} - 4w(z)^3 - 2zw(z) \quad (13.6)$$

とおく．すると等式 (13.5) より $\Phi(z)$ は $w(z)$ の零点以外の正則点および極において正則であることがわかる．実際 $w(z)$ の極のまわりでは (13.3) により定義される $u(z), v(z)$ は正則なので (13.5) の右辺も，さらにはその左辺 $\Phi(z)$ も正則となる．さらに (I) に $w(z)$ を代入し両辺に $2w'(z)$ をかけて積分すれば $(d/dz)(\Phi(z) - w'(z)/w(z)) = -2w(z)$ となるので，再び (I) をつかえば

$$\begin{aligned} \Phi'(z) + 2w(z) &= \frac{w''(z)}{w(z)} - \frac{w'(z)^2}{w(z)^2} \\ &= 6w(z) + \frac{z}{w(z)} - \frac{\Phi(z)}{w(z)^2} + \frac{w'(z)}{w(z)^3} - 4w(z) - \frac{2z}{w(z)}. \end{aligned}$$

つまり $\Phi(z)$ は

$$\Phi'(z) + \frac{\Phi(z)}{w(z)^2} = -\frac{z}{w(z)} + \frac{w'(z)}{w(z)^3} \quad (13.7)$$

をみたす. 従って z を終点とする路 $\gamma(z_0, z)$ 上で $w(t) \neq 0$ であるならば

$$\begin{aligned} \Phi(z) = E(z_0, z)^{-1} & \left[\Phi(z_0) - \frac{E(z_0, z)}{2w(z)^2} + \frac{1}{2w(z_0)^2} \right. \\ & \left. - \int_{\gamma(z_0, z)} \frac{E(z_0, t)}{2w(t)^4} (2tw(t)^3 - 1) dt \right] \quad (13.8) \end{aligned}$$

が成立する. ここで

$$E(z_0, t) = \exp\left(\int_{\gamma(z_0, t)} w(\tau)^{-2} d\tau\right), \quad t \in \gamma(z_0, z), \quad \gamma(z_0, t) \subset \gamma(z_0, z).$$

この関数 $\Phi(z)$ は一種の Ljapunov 関数である.

Step 3: 以上でひとまず必要なものは揃った. $w(z)$ が $z = a_0$ に動く特異点をもったとし, a_0 を終点とする線分 Γ 上で $w(z)$ は有理型であるとする. 今

$$A = \liminf_{z \rightarrow a_0, z \in \Gamma} |w(z)|$$

とおく. まず $0 < A < +\infty$ のときを考える. Γ 上 $|w(z)| \geq A/2$ としてよいので, (13.8) より $\Phi(z)$ は Γ 上有界である. 点列 $\{a_n\} \subset \Gamma$ で $a_n \rightarrow a_0$, $w(a_n) \rightarrow w_0 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ なるものをとる. このとき (13.6) より $\{w'(a_n)\}$ も有界となる. $\{a_n\}$ の部分列を適当にとり $w'(a_{n(k)})$ ($k \rightarrow \infty$) も収束するようにして Theorem A.3 をつかうと, $w(z)$ は $z = a_0$ で正則となることがいえる. つぎに $A = +\infty$ とする. このとき $w(z) \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow a_0$, $z \in \Gamma$) であるから (13.8) より $\Phi(z)$ は Γ 上有界である. (13.5), (13.6) を $v(z)$ についての 2 次方程式とみたとき, $v(z)$ の分枝のうちのひとつは Γ 上有界である. この分枝は $w(z)^{-1/2}$ の分枝 $\pm u(z)$ のうちのひとつに対応している. このような分枝を改めて $u(z)$, $v(z)$ と書くとき, 点列 $\{a'_n\} \subset \Gamma$ で $a'_n \rightarrow a_0$, $u(a'_n) \rightarrow 0$, $v(a'_n) \rightarrow v_0 \in \mathbf{C}$ となるようなものがとれる. 再び Theorem A.3 をつかえば a_0 は $u(z)$ の零点つまり $w(z)$ の極となる. 上の議論において線分 Γ を長さ有限の曲線で置き換えてもよいことはあきらかである.

Step 4: 残った $A = 0$ の場合を考える. Painlevé の原証明においては, この場合に相当する部分に問題があった. それを修正するために以下の Hukuhara による議論をおこなう. 方程式 (II) にも適用できるようにもう少し一般的な方程式

$$w'' = f_0(z, w) \quad (13.9)$$

を考えよう. ここで $f_0(z, w)$ は z, w の多項式であり, $|z - a_0| \leq 1, |w| \leq 1$ において $|f_0(z, w)| \leq K$ をみたしていると仮定する.

Lemma 13.2. $\theta_0 := \min\{1/2, K^{-1}/2\}$ とおく. 点 c を $|c - a_0| < 1/2$ なる任意の点とする. 方程式 (13.9) の解 $w(z)$ が点 $z = c$ において正則であり $|w(c)| \leq \theta_0/6, |w'(c)| \geq 2$ をみたしているとする. このとき $w(z)$ は $|w'(c)||z - c| < \theta_0$ で正則であり, 円周 $|w'(c)||z - c| = \theta_0/2$ 上 $|w(z)| \geq \theta_0/4$ をみたす.

Proof. 変数変換 $\xi = \rho(z - c), \rho = w'(c), w(z) = \eta(\xi)$ をおこなえば (13.9) は

$$\ddot{\eta} = \rho^{-2} g_0(\xi, \eta), \quad g_0(\xi, \eta) := f_0(z, w) = f_0(c + \rho^{-1}\xi, \eta)$$

($\dot{} = d/d\xi$) となり, 解 $\eta(\xi)$ は初期条件 $\eta(0) = w(c), \dot{\eta}(0) = 1$ をみたす. よって $\eta(\xi)$ は積分方程式

$$\eta(\xi) = \eta(0) + \xi + \xi^2 h(\xi), \quad (13.10)$$

$$h(\xi) := \rho^{-2} \xi^{-2} \int_0^\xi \int_0^\tau g_0(t, \eta(t)) dt d\tau$$

の解である. さて

$$r_0 := \sup\{r \mid M(r) < 1\}, \quad M(r) := \max_{|\xi| \leq r} |\eta(\xi)|$$

とする. このとき $|\eta(0)| = |w(c)| \leq \theta_0/6 \leq 1/12$, であるから $r_0 > 0$ である. $M(|\xi|) < 1, |\xi| < 1$ であるかぎりには, $|z - a_0| \leq |z - c| + |c - a_0| < 1/|w'(c)| + 1/2 \leq 1$ であるから (13.10) および $f_0(z, w)$ に関する仮定より

$$|h(\xi)| \leq |\rho|^{-2} |\xi|^{-2} (|\xi|^2/2) K \leq K/8, \quad (13.11)$$

$$|\eta(\xi)| \leq \theta_0/6 + |\xi| + K|\xi|^2/8 \quad (13.12)$$

が成立する. 今 $r_0 < \theta_0$ であると仮定しよう. (13.11) および θ_0 の定義より $|\xi| < r_0 < 1$ ならば

$$|\eta(\xi)| \leq \theta_0/6 + \theta_0 + (K\theta_0/8)\theta_0 \leq 1/12 + 1/2 + 1/32 < 2/3$$

となる. これは r_0 の定義に矛盾する. よって $r_0 \geq \theta_0$ であることがいえた. すると $|\xi| < \theta_0$ において (13.11), (13.12) が成立し $\eta(\xi)$ は正則となる. さらに円周 $|\xi| = \theta_0/2$ 上では

$$\begin{aligned} |\eta(\xi)| &\geq |\xi| - |\xi|^2 |h(\xi)| - |\eta(0)| \\ &\geq \left(1 - (\theta_0/2)K/8\right)(\theta_0/2) - \theta_0/6 \geq (1 - 1/32)\theta_0/2 - \theta_0/6 > \theta_0/4. \end{aligned}$$

もとの変数 $z, w(z)$ にもとせば補題を得る. $\square$

Step 5: $A = 0$ とする. $\Gamma = [c_0, a_0]$ が円 $|z - a_0| < 1/2$ の内部に含まれていると仮定してもよい. (13.9) を (I) と見た場合, $|z - a_0| \leq 1$, $|w| \leq 1$ ならば $|f_0(z, w)| \leq K = 7 + |a_0|$ であるから Lemma 13.2 の定数 θ_0 は $K^{-1}/2$ となる. この θ_0 に対し $\Gamma_0 := \{z \in \Gamma \mid |w(z)| \leq \theta_0/6\} \subset \Gamma$ を考える. $A = 0$ であるからどのように小さな $\varepsilon > 0$ に対しても $\Gamma_0 \cap \{z \mid |z - a_0| < \varepsilon\} \neq \emptyset$ である. さらに Γ_0 上 $|w'(z)| \geq 2$ であると仮定してよい. 実際もしもそうでなければ $\{a_n\} \subset \Gamma_0$, $a_n \rightarrow a_0$ なる点列で $\{w(a_n)\}$, $\{w'(a_n)\}$ が有界であるようなものがとれ, Theorem A.3 より $w(z)$ が $z = a_0$ で正則となるからである. 以上のような状況のもとで $\Gamma = [c_0, a_0]$ 上を c_0 から出発し a_0 へ向かって進む. このとき初めて出会う Γ_0 の点を c_1 とする. Lemma 13.2 より円板 $D_1 : |z - c_1| \leq |w'(c_1)|^{-1}\theta_0/2$ をとればその境界 ∂D_1 上で $|w(z)| \geq \theta_0/4$ がみたされる. 特異点 $z = a_0$ は D_1 の外部にあることはあきらかである. つぎに点 $\partial D_1 \cap [c_1, a_0]$ から再び a_0 へ向かって Γ 上を進む. すると再び Γ_0 の点に出会う. それを $c_2 \in \Gamma_0$ とし, 円板 $D_2 : |z - c_2| \leq |w'(c_2)|^{-1}\theta_0/2$ をとれば境界 ∂D_2 上では $|w(z)| \geq \theta_0/4$ である. 点 $\partial D_2 \cap [c_2, a_0]$ から a_0 へ向かって出発し $c_3 \in \Gamma_0$ に出会うまで進む. このような操作を無限回繰り返すことにより以下のような性質をもつ円板の列 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ およびその中心の点列 $\{c_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma_0$ を得ることができる.

- (1) $D_n : |z - c_n| \leq r_n =: |w'(c_n)|^{-1}\theta_0/2$.
- (2) ∂D_n 上 $|w(z)| \geq \theta_0/4$ が成立.
- (3) すべての n に対し特異点 a_0 は D_n の外部に位置する.
- (4) $|c_1 - a_0| > |c_2 - a_0| > \cdots > |c_n - a_0| > \cdots$.
- (5) 集合 $\{z \mid |z - c_n| > r_n\} \cap \Gamma_0$ の点のうちで $\partial D_n \cap [c_n, a_0]$ に最も近い点は c_{n+1} である.
- (6) すべての n に対して $|c_{n+1} - c_n| > r_n$ であり, 従って $\sum_{n \geq 1} r_n \leq |a_0 - c_0|$ である.

もしも $c_n \rightarrow c_\infty \in \Gamma \setminus \{a_0\}$ であると仮定すれば, (6) と (1) より $r_n = |w'(c_n)|^{-1}\theta_0/2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるから $|w(c_\infty)| \leq \theta_0/6$, $|w'(c_\infty)| = \infty$ となるがこれは $w(z)$ が $\Gamma \setminus \{a_0\}$ で有理型であることに矛盾する. よって $c_n \rightarrow a_0$ である. さらにそれぞれの n については D_n と交わる他の円板 D_j は有限個しか存在しない. 今集合 $D_\infty := \Gamma \cup \left(\bigcup_{n=1}^\infty D_n\right)$ をとりその境界に含まれる曲線

$$\Gamma_\infty := \partial D_\infty \cap \left\{z \mid \operatorname{Im}((z - c_0)/(a_0 - c_0)) \geq 0\right\}$$

を考える. Γ_∞ は a_0 を終点にもつ. $\Gamma_0 \subset \bigcup_{n=1}^\infty D_n$ であることと (2) より Γ_∞ 上で $|w(z)| \geq \theta_0/6$ が成り立つから $\liminf_{z \rightarrow a_0, z \in \Gamma_\infty} |w(z)| \geq \theta_0/6 > 0$ である. そして (6) より Γ_∞ の長さは $(1+\pi)|a_0 - c_0|$ を越えない. これらの事実より $A = 0$ の場合は他の場合 $0 < A \leq +\infty$ に帰着されることがいえた (Step 3 参照).

以上で a_0 はただか極であることが示された. つまり (I) についての Theorem 12.1 が証明された.

13.2. (II) についての Theorem 12.1 の証明

方程式 (II) に対する Painlevé property の証明も基本的には (I) と同様である. $w(z)$ を (II) の任意の解とする.

Proposition 13.3. σ を $w(z)$ の任意の極とするとときそのまわりでつぎのような展開をもつ.

$$w(z) = \pm(z - \sigma)^{-1} \mp \sigma(z - \sigma)/6 - (\alpha \pm 1)(z - \sigma)^2/4 + b(z - \sigma)^3 + \cdots.$$

ここで b は積分定数である.

(I) の場合と同じ議論により変換

$$w = u^{-1}, \quad w' = \mp u^{-2}(1 + zu^2/2 + (\alpha \pm 1/2)u^3 - u^4v) \quad (13.13)$$

および (II) と同値な連立系

$$\begin{aligned} \pm u' &= 1 + zu^2/2 + (\alpha \pm 1/2)u^3 - u^4v, \\ \pm v' &= (z/2 + (\alpha \pm 1/2)u - u^2v)(\alpha \pm 1/2 - 2uv) \end{aligned} \quad (13.14)$$

が導かれる. (13.13) より u を消去し, さらに平方して $\pm$ を取り去ることにより, Ljapunov 関数

$$\Phi(z) := w'(z)^2 + \frac{w'(z)}{w(z)} - w(z)^4 - zw(z)^2 - 2\alpha w(z)$$

および v に関する 2 次方程式

$$\frac{v^2}{w^4} + \left(-2 - \frac{z}{w^2} - \frac{2\alpha}{w^3}\right)v - \Phi(z) + \frac{\alpha^2 - 1/4}{w^2} + \frac{\alpha z}{w} + \frac{z^2}{4} = 0$$

を得る．さらに $\Phi(z)$ は

$$\Phi'(z) + \frac{\Phi(z)}{w(z)^2} = -\frac{\alpha}{w(z)} + \frac{w'(z)}{w(z)^3}$$

をみたすから，その上で $w(z)^{-1}$ が有界であるような曲線に沿っては $\Phi(z)$ は有界である． $w(z)$ が曲線 Γ の終点 a_0 で特異点をもったと仮定し， $A = \liminf_{z \rightarrow a_0, z \in \Gamma} |w(z)|$ とおき上の事実を用いて (I) の場合と同様の議論を行なえば a_0 がたかだか極であることが証明できる．

14. Painlevé 方程式の有理関数解

Painlevé 方程式の解の族の中で，有理関数，超越関数を分類することは重要な問題である．ここでは方程式 (I), (II) について考えよう．まず方程式 (I) に有理関数解が存在したとする．その $z = \infty$ のまわりでの級数展開

$$w(z) = c_p z^p + c_{p-1} z^{p-1} + \cdots, \quad p \in \mathbf{Z}, \quad c_p \neq 0$$

を方程式 (I) に代入し z の最高次の項の次数を比較すれば考えられるのは $p-2 = 2p \geq 1$, $p-2 = 1 \geq 2p$, $p-2 \leq 2p = 1$ の3通りであるがこれらはいずれも不可能である．この事実と Theorem 12.1 を組み合わせれば

Theorem 14.1. 方程式 (I) の任意の解は超越有理型関数である．

つぎに方程式 (II) を考える．この場合は係数 α の値によっては有理関数解が存在する．例えば $\alpha = 0$ のとき $w \equiv 0$ という解をもつ．

Theorem 14.2. 方程式 (II) が有理関数解をもつならば $\alpha \in \mathbf{Z}$ である．

Proof. (II) が有理関数解 $w_0(z)$ をもったとする．Proposition 13.3 よりその極は simple であり留数は ± 1 であるから

$$w_0(z) = \sum_{j=1}^p \varepsilon_j (z - \sigma_j)^{-1} + P_0(z), \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad P_0(z) \in \mathbf{C}[z]$$

と書ける．そして $z = \infty$ のまわりでは

$$w_0(z) = P_0(z) + \left(\sum_{j=1}^p \varepsilon_j \right) z^{-1} + O(z^{-2}) \quad (14.1)$$

である．もしも $P_0(z)$ の次数が $d \geq 1$ ならば，(14.1) を (II) に代入して z の最高次の次数を比較し $3d = d+1$ を得るから矛盾．よって $P_0(z) \equiv c_0$

とおく. $c_0 \neq 0$ ならば再び (14.1) を (II) に代入したとき $c_0 z$ 以外の項の次数はすべて 0 以下なのでやはり不合理である. 従って $P_0(z) \equiv 0$ である. $w_0(z)$ が極をもたなければ $w_0(z) \equiv 0$ であり, このときは $\alpha = 0$ である. また極をもつときはもう一度 (14.1) を (II) に代入し定数項を比較して

$$\alpha + \sum_{j=1}^p \varepsilon_j = 0 \quad (14.2)$$

を得る. これより $\alpha \in \mathbf{Z}$ が証明された. $\square$

この定理の逆もいえる.

Theorem 14.3. $\alpha \in \mathbf{Z}$ ならば方程式 (II) は唯一の有理関数解をもつ.

この証明には Bäcklund 変換をつかう. 方程式 (II) の係数が α であることを強調して $(\text{II})_\alpha$ と書こう.

Lemma 14.4. (1) $\alpha \neq -1/2$ とする. w_α を方程式 $(\text{II})_\alpha$ の任意の解とすれば

$$w_{\alpha+1} = T_\alpha^+(w_\alpha) := -w_\alpha - \frac{\alpha + 1/2}{w'_\alpha + w_\alpha^2 + z/2} \quad (14.3)$$

は $(\text{II})_{\alpha+1}$ をみたす.

(2) $\alpha \neq 1/2$ とする. w_α を方程式 $(\text{II})_\alpha$ の任意の解とすれば

$$w_{\alpha-1} = T_\alpha^-(w_\alpha) := -w_\alpha + \frac{\alpha - 1/2}{w'_\alpha - w_\alpha^2 - z/2} \quad (14.4)$$

は $(\text{II})_{\alpha-1}$ をみたす.

(3) $\alpha \neq \pm 1/2$ とすれば $(\text{II})_\alpha$ の任意の解 w_α に対し $(T_{\alpha+1}^- \circ T_\alpha^+)(w_\alpha) = (T_{\alpha-1}^+ \circ T_\alpha^-)(w_\alpha) = w_\alpha$ が成り立つ.

Remark 14.1. 方程式 $(\text{II})_\alpha$ は

$$\begin{aligned} w' &= \varepsilon w^2 + \varepsilon z/2 + v, \\ v' &= -2\varepsilon wv - \varepsilon/2 + \alpha, \end{aligned} \quad (14.5)$$

$\varepsilon = \pm 1$ と書けるから, $\alpha \neq -1/2$ (resp. $\alpha \neq 1/2$) ならば (14.3) (resp. (14.4)) の右辺の分母を $\equiv 0$ とするような解 w_α は存在しない. なお (14.5)

は $H(z, w, v) := \varepsilon w^2 v + v^2/2 - (\alpha - \varepsilon/2)w + \varepsilon z v/2$ を Hamilton 関数とする Hamilton 系

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial w}$$

である.

Proof. 方程式系 (14.5) に $U_{\varepsilon, \alpha} : \hat{w} = -w + \varepsilon(\alpha - \varepsilon/2)/v, \hat{v} = -v$ という変換を施せば

$$\begin{aligned} \hat{w}' &= -\varepsilon \hat{w}^2 - \varepsilon z/2 + \hat{v}, \\ \hat{v}' &= 2\varepsilon \hat{w} \hat{v} + \varepsilon/2 + (\alpha - \varepsilon) \end{aligned}$$

となる. この事実は (w, v) が $(\text{II})_\alpha$ に対応する連立系 (14.5) をみたせば $(\hat{w}, \hat{v})$ は $(\text{II})_{\alpha-\varepsilon}$ に対応するものの解であるということを示している. v の部分を w をつかって書けば (1), (2) が従う. また, $(\text{II})_\alpha$ に対応する系の解 (w_α, v_α) に対して変換 $U_{1, \alpha}$ を施せば $(-w_\alpha + (\alpha - 1/2)/v_\alpha, -v_\alpha)$ を得るがこれは $(\text{II})_{\alpha-1}$ に対応する系をみたす. これに再び $U_{-1, \alpha-1}$ を施せば (w_α, v_α) に戻る. このようにして (3) が確かめられる. $\square$

Proof of Theorem 14.3. まず $\alpha = 0$ の場合を考えよう. $W_0(z) \equiv 0$ が $(\text{II})_0$ の有理関数解であることはあきらかである. 他に $w(z) \not\equiv 0$ なる有理関数解があったとしてその $z = \infty$ のまわりでの展開を $w(z) = c_p z^p + c_{p-1} z^{p-1} + \cdots, p \in \mathbf{Z}, c_p \neq 0$ とおく. これを $(\text{II})_0$ に代入して z の最高次の次数を比較すれば $3p = p + 1$ となり矛盾. よって $(\text{II})_0$ には $W_0(z) \equiv 0$ 以外の有理関数解は存在しない. 次に $\alpha = m \in \mathbf{N}$ とし, $(\text{II})_m$ が有理関数解 $W_m(z)$ をもったとする. Lemma 14.4 より

$$w(z) = (T_1^- \circ \cdots \circ T_{m-1}^- \circ T_m^-)(W_m(z))$$

はやはり $(\text{II})_0$ の有理関数解であるから $w(z) \equiv 0$ である. よって

$$W_m(z) = (T_{m-1}^+ \circ \cdots \circ T_1^+ \circ T_0^+)(0)$$

は $(\text{II})_m$ の唯一の有理関数解である. $-m \in \mathbf{N}$ のときも同様である. $\square$

有理関数解の極については

Theorem 14.5. $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ に対して方程式 $(\text{II})_m$ の唯一の有理関数解は

$$W_m(z) = \sum_{j=1}^{m^2} \varepsilon_j (z - \sigma_j)^{-1}, \quad \varepsilon_j = \pm 1$$

と表される．さらに $\varepsilon_j = 1$ となる極の個数は $l_+ = (m^2 - m)/2$ であり $\varepsilon_j = -1$ となる極の個数は $l_- = (m^2 + m)/2$ である．

Proof. Theorem 14.2 の証明で示されたように

$$W_m(z) = \sum_{j=1}^p \varepsilon_j (z - \sigma_j)^{-1} = -mz^{-1} + O(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty), \quad (14.6)$$

$$m = -\sum_{j=1}^p \varepsilon_j \quad (14.7)$$

とおける． Proposition 13.3 より $W_m(z)^2$ の各極 σ_j における主要部は $(z - \sigma_j)^{-2}$ であるから

$$W_m(z)^2 = \sum_{j=1}^p (z - \sigma_j)^{-2} + P(z), \quad P(z) \in \mathbf{C}[z]$$

とおける． (14.6) より $P(z) \equiv 0$ であるから

$$W_m(z)^2 = \sum_{j=1}^p (z - \sigma_j)^{-2} = pz^{-2} + O(z^{-3}) \quad (z \rightarrow \infty). \quad (14.8)$$

よって (14.6), (14.8) より $p = m^2$ を得る． また，これと (14.7) より

$$l_+ + l_- = m^2, \quad l_+ - l_- = -m$$

であるから $l_+ = (m^2 - m)/2$, $l_- = (m^2 + m)/2$ である． □

第3章 Painlevé 超越関数の増大度

前章でみたように Painlevé 方程式 (I) の任意の解は超越有理型関数である (Theorems 12.1, 14.1). この章では主に (I) により定義される Painlevé 超越関数についてその特性関数 $T(r, w)$ (すなわち増大度) の評価をあたえる. 以下2つの異なる方法で Painlevé 超越関数の位数 $\varrho(w)$ が有限であることを証明する. 方程式 (I) の解 (そして (II), (IV) の解) に限っていえば2番目に述べる方法の方が強い結果を与えるが今のところ (III), (V) には適用できない. それに対して, 最初に述べる方法は与える結果は弱い (I) から (V) までのすべてに適用可能である.

15. Painlevé 超越関数の位数の有限性

この節ではつぎの定理を証明する.

Theorem 15.1. 方程式 (I) の任意の解 $w(z)$ は $T(r, w) = O(r^C)$ をみたす. ここで $C > 0$ は $w(z)$ には無関係なある正数である.

Remark 15.1. 上の結果より (I) の任意の解 $w(z)$ の位数は有限であることがわかる.

以下 $w(z)$ を (I) の任意の解としよう. Theorem 15.1 はつぎの評価から直ちに従う.

Proposition 15.2. $N(r, w) = O(r^C)$.

実際, Lemma 7.1 より $m(r, w) = S(r, w)$ であるから, $\mu(E) < \infty$ なる区間 E が存在して $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$ のとき $T(r, w) = N(r, w) + m(r, w) = O(r^C) + o(T(r, w))$ が成り立つ. ここで Lemma 6.9 をつかえば Theorem 15.1 の結果が導かれる. よって, Proposition 15.2 すなわち半径 r の円の内部での $w(z)$ の極の個数の評価を与えればよい. 以下の議論では13節で用いた Ljapunov 関数や Lemma 13.2 に類似の補題が本質的な役割をはたす.

15.1. 補題

つぎは Lemma 13.2 で $w'(c)$ に関する条件を取り去ったものに相当する.

Lemma 15.3. $\theta := 2^{-4}$ とする. $|c| \geq 5$ なる点 c において $|w(c)| \leq \theta^2 |c|^{1/2}/6$ であるならば次が成立する.

- (1) $w(z)$ は $|z - c| < \delta_c$ で正則かつ有界.
(2) $(5/6)\delta_c \leq |z - c| \leq \delta_c$ なる集合上 $|w(z)| \geq \theta^2|c|^{1/2}/5$.
ここで δ_c は不等式

$$\theta|c|^{-1/4} \min\{1, \theta|c|^{3/4}/|w'(c)|\} < \delta_c \leq 3\theta|c|^{-1/4} \quad (15.1)$$

をみたすある正数である.

Proof. 変換 $z - c = \rho t$, $\rho = c^{-1/4}$, $w(z) = w(c + \rho t) = \theta c^{1/2}W(t)$ を行なえば (I) は

$$\ddot{W}(t) = 6\theta W(t)^2 + \theta^{-1}(1 + \rho^5 t) \quad (\dot{} = d/dt)$$

となる. 両辺を 2 回積分して

$$\begin{aligned} W(t) &= W(0) + \dot{W}(0)t + \theta^{-1}t^2/2 + g(t), \\ W(0) &= \theta^{-1}c^{-1/2}w(c), \quad \dot{W}(0) = \theta^{-1}c^{-3/4}w'(c), \\ g(t) &:= \theta^{-1}\rho^5 t^3/6 + 6\theta \int_0^t \int_0^\tau W(s)^2 ds d\tau. \end{aligned} \quad (15.2)$$

を得る. 二つの場合に分けて考えよう.

Case 1: $|\dot{W}(0)| \leq 1$. このとき $\eta_0 := \sup\{\eta \mid M(\eta) \leq 8\theta\}$, $M(\eta) := \max_{|t| \leq \eta} |W(t)|$ とおく. $|W(0)| = \theta^{-1}|c|^{-1/2}|w(c)| \leq \theta/6$ であるから $\eta_0 > 0$ はあきらかである. $\eta_0 < 3\theta$ であると仮定する. $|t| \leq \eta_0$, $|c| \geq 5$ であるかぎりは

$$\begin{aligned} |g(t)| &\leq \frac{\theta^{-1}|\rho|^5|t|^3}{6} + 6\theta \int_0^t \int_0^\tau |W(s)|^2 ds d\tau \\ &\leq \theta^{-1}|\rho|^5(3\theta)^3/6 + 6\theta(8\theta)^2(3\theta)^2/2 < \theta/4 \end{aligned} \quad (15.3)$$

であることに注意すれば, (15.2) より

$$\begin{aligned} |W(t)| &\leq |W(0)| + |t| + \theta^{-1}|t|^2/2 + \theta/4 \\ &\leq (1/6 + 3 + 9/2 + 1/4)\theta < 7.92\theta \end{aligned} \quad (15.4)$$

が $|t| \leq \eta_0$ に対して成立することになるがこれは η_0 の定義に反する. 従って $\eta_0 \geq 3\theta$ であり (15.3) は $|t| \leq 3\theta$ において成立する. さらに $2.5\theta \leq |t| \leq 3\theta$ ならば

$$\begin{aligned} |W(t)| &\geq \theta^{-1}|t|^2/2 - |t| - |W(0)| - |g(t)| \\ &\geq (2.5^2/2 - 2.5 - 1/6 - 1/4)\theta > \theta/5. \end{aligned}$$

この不等式を得る過程では 2 次関数 $\theta^{-1}x^2/2 - x$ は $x \geq \theta$ で単調増加であることを使っている. もとの変数に戻せば主張 (1), (2) が $\delta_c = 3\theta|c|^{-1/4}$ に対して正しいことがいえる.

Case 2: $|\dot{W}(0)| = \kappa > 1$. このとき $\eta_1 := \sup\{\eta \mid M(\eta) \leq 5\theta\}$ とおく. $\eta_1 < (2/\kappa)\theta$ であると仮定すれば (15.3), (15.4) を導いたのと同じように $|t| \leq \eta_1$ で

$$\begin{aligned} |g(t)| &\leq \theta^{-1}|\rho|^5(2\theta)^3/6 + 6\theta(5\theta)^2(2\theta)^2/2 < \theta/24, \\ |W(t)| &\leq |W(0)| + \kappa|t| + \theta^{-1}|t|^2/2 + \theta/24 \\ &\leq (1/6 + 2 + 2 + 1/24)\theta < 4.3\theta \end{aligned}$$

であることがいえるが, これは η_1 の定義に反する. よって $\eta_1 \geq (2/\kappa)\theta$ であり, $|t| \leq (2/\kappa)\theta$ において $|g(t)| < \theta/24$ が成立することがいえる. さらに $(0.8/\kappa)\theta \leq |t| \leq (1.2/\kappa)\theta$ において

$$\begin{aligned} |W(t)| &\geq \kappa|t| - \theta^{-1}|t|^2/2 - |W(0)| - |g(t)| \\ &\geq (0.8 - 0.8^2/2 - 1/6 - 1/24)\theta > \theta/5. \end{aligned}$$

よって $\delta_c = 1.2\theta|c|^{-1/4}/\kappa = 1.2\theta|c|^{-1/4} \cdot \theta|c|^{3/4}/|w'(c)|$ とすれば主張 (1), (2) は正しい. $\square$

Remark 15.2. Lemma 15.3 において $|c| \geq 5$ であることをつかうと (2) は

(2') $(5/6)\delta_c \leq |z - c| \leq \delta_c$ において $|w(z)| \geq \theta^2|z|^{1/2}/5.5$.
 でおきかえられることがわかる.

Lemma 15.4. 円周 $|z| = R_0$ ($5 < R_0 < 10$) および $w(z)$ の任意の極 σ で $|\sigma| > 10$ なるものを考える. このとき曲線 $\Gamma_\sigma : z = \varphi(x)$ (x は Γ_σ の z までの部分の長さ) で次の性質をもつものが存在する.

- (1) Γ_σ は円周 $|z| = R_0$ 上の点から出発し, σ を終点とする.
- (2) $|\varphi(x)|$ は x の単調増加関数である.
- (3) Γ_σ 上 $|dz| \leq (6/\sqrt{11})d|z|$.
- (4) Γ_σ 上 $|w(z)| \geq 2^{-11}|z|^{1/2}$.

Proof. 点 $R_0e^{i\arg \sigma}$ と σ とを結ぶ線分 Γ_0 をとる. Γ_0 の部分集合 $\Gamma_* := \{z \mid |w(z)| \leq \theta^2|z|^{1/2}/6\}$ を考える. もしも $\Gamma_* = \emptyset$ ならば, $\theta^2/6 > 2^{-11}$ などに注意すればこの補題はあきらかである. 以下そうでないとする. 点 $R_0e^{i\arg \sigma}$ から出発し σ に向かって Γ_0 上を進む. 初めて出会う Γ_* 内の点

を $c_1 \in \Gamma_*$ とする. このとき小円板 $\Delta_1 : |z - c_1| \leq (5/6)\delta_{c_1}$ および線分 $\gamma_1 := \{z = \xi e^{i \arg \sigma} \mid \xi > 0, |z - c_1| \leq \delta_{c_1}\}$ (ここで δ_{c_1} は Lemma 15.3 で与えられる正数) をとる. 集合 $\Delta_1 \cup \gamma_1$ の凸包 (すなわち, 線分 γ_1 の両端から円周 $\partial\Delta_1$ へ引いた 4 本の接線と $\partial\Delta_1$ の一部の円弧により囲まれる集合の閉包) を $A(c_1)$ とする. γ_1 の端点のうち σ に近いものを $b_1 \in \partial A(c_1)$ とおく. Lemma 15.3 と Remark 15.2 より $\sigma \notin A(c_1)$ であり, さらに曲線 $\partial(\Gamma_0 \cup A(c_1)) \cap \{z \mid |z| \leq |b_1|\}$ ($\exists b_1$) 上では $|w(z)| \geq \theta^2 |z|^{1/2}/6$ そして $|w(b_1)| \geq \theta^2 |b_1|^{1/2}/5.5$ をみたとす. つぎに $b_1 \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_*$ から再び出発し Γ_0 上を σ の方へ進む. つぎに出会う Γ_* の点 $c_2 \in \Gamma_*$ が存在すれば Lemma 15.3 で与えられる正数 δ_{c_2} を用いて c_1 の場合と同様なやり方で円板と線分の和集合の凸包 $A(c_2)$ をつくる. $\partial A(c_2) \cap \Gamma_0$ の端点のうち σ に近いものを $b_2 \in \partial A(c_2)$ とする. b_2 から再び出発し Γ_0 上を進む. この操作を繰り返すことにより点列 $\{c_n\} \subset \Gamma_*$, 半径の列 $\{\delta_{c_n}\}$ そして凸包の列 $\{A(c_n)\}$ を得る. これらの列が無限列であったとしよう. (有限列の場合も議論はほとんど同じである.) このときもしも $c_n \rightarrow c_\infty \in \Gamma_0 \setminus \{\sigma\}$, $n \rightarrow \infty$ であるならば $\delta_{c_n} \rightarrow 0$ であるから $|w'(c_\infty)| = +\infty$ となる. ところが $w(c_n)$ は有界であるからこれは $c_\infty \in \Gamma_0 \setminus \{\sigma\}$ はたかだか極であることに反する. したがって $c_n \rightarrow \sigma$ である. 今曲線 Γ_σ を

$$\Gamma_\sigma := \partial \left(\Gamma_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A(c_n) \right) \right) \cap \{z \mid |z| \geq R_0, \operatorname{Im}(z/\sigma) \geq 0\}$$

とおく. この曲線のつくりかたより性質 (1), (2) はあきらかである. また Γ_σ 上 $|w(z)| \geq \theta^2 |z|^{1/2}/6$ であるから (4) がいえる. さらに凸包 $A(c_n)$ をつくるときの接線の傾きに注意して初等幾何的な計算をすれば (3) がいえる. $\square$

以上で証明に必要なものは揃った.

15.2. Proposition 15.2 の証明

$\sigma, |\sigma| > 10$ を $w(z)$ の任意の極とする. 13 節, (13.6) で定義した Ljapunov 関数

$$\Phi(z) = w'(z)^2 + \frac{w'(z)}{w(z)} - 4w(z)^3 - 2zw(z)$$

を思いだそう. Lemma 15.4 のおかげで極 σ の近くでの $\Phi(z)$ が評価できる. それさえできれば $w(z)$ のみたす 1 階方程式が得られたことになり, あとは Riccati 方程式の場合と同様に極のまわりの近傍を構成し極の個数を評価することができる.

Step 1: 今 $R_0, 5 < R_0 < 10$ を円周 $|z| = R_0$ 上で $w(z) \neq 0, \infty$ であるようにとっておく. すると

$$\max_{|z|=R_0} |\Phi(z)| < +\infty, \quad \max_{|z|=R_0} |1/w(z)| < +\infty \quad (15.5)$$

である. Lemma 15.4 で与えた Γ_σ 上の任意の点 z に対し z までの部分を $\Gamma_\sigma(z) := \{t \in \Gamma_\sigma \mid |t| \leq |z|\}$ と表す. また Γ_σ の出発点を $z_0(\sigma)$ ($|z_0(\sigma)| = R_0$) と書く. $\Phi(z)$ の積分表示式 (13.8) を用いて $\Phi(z)$ を評価しよう. Lemma 15.4 の (3), (4) をつかうと

$$\begin{aligned} |E(z_0(\sigma), z)^{\pm 1}| &\leq \exp\left(\int_{\Gamma_\sigma(z)} \frac{|dt|}{|w(t)|^2}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{6 \cdot 2^{22}}{\sqrt{11}} \int_{|z_0(\sigma)|}^{|z|} \frac{d|t|}{|t|}\right) = O(|z|^{C_0}), \end{aligned}$$

$C_0 = 3 \cdot 2^{23}/\sqrt{11}$ であるから, (15.5) を使って (13.8) を評価すれば

$$|\Phi(\sigma)| \ll |\sigma|^{C_0} \left(|\sigma|^{C_0-1} + \int_{\Gamma_\sigma} |t|^{C_0+1/2} d|t| \right) = O(|\sigma|^{2C_0+3/2}) \quad (15.6)$$

を得る. 極 σ の近傍

$$\begin{aligned} U(\sigma) &:= \{z \mid |z - \sigma| < \eta(\sigma)\}, \\ \eta(\sigma) &:= \sup\left\{\eta \mid 2|z|^{1/2} < |w(z)| < +\infty \text{ in } 0 < |z - \sigma| < \eta (\leq 1)\right\} \end{aligned}$$

を考える. 線分 $[\sigma, z] \subset U(\sigma)$ に対して, (13.8) を使う. $|E(\sigma, z)^{\pm 1}| = O(1)$ および (15.6) に注意すれば

$$|\Phi(z)| \ll |\Phi(\sigma)| + 1 + \int_{[\sigma, z]} |t|^{1/2} d|t| = O(|z|^{2C_0+3/2}),$$

つまり $U(\sigma)$ において

$$|\Phi(z)| \leq K_0 |z|^\Lambda \quad (15.7)$$

が成り立つ. ここで $\Lambda = 6 \cdot 2^{22} > 2C_0 + 3/2$ であり, K_0 は σ に無関係な正数である.

Step 2: $\Phi(z)$ の定義式 (13.6) において $w(z) = u(z)^{-2}$, $z = \sigma + \sigma^{-\Lambda/6}s$ とおく. すると $v(s) := u(\sigma + \sigma^{-\Lambda/6}s)$ は

$$\left| (\sigma + \sigma^{-\Lambda/6}s)^{\Lambda/6} v(s) \right| < \varepsilon_0 \quad (15.8)$$

であるかぎり

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds}(s) &= \sigma^{-\Lambda/6} (1 + h(s, v(s))), \\ |h(s, v(s))| &< 1/2, \quad v(0) = 0 \end{aligned} \quad (15.9)$$

をみtas. ここで $u(z)$ の分枝は $u'(\sigma) = \sigma^{\Lambda/6} (dv/ds)(0) = 1$ であるようにとっておく. また $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(K_0)$ は σ には無関係な十分小さい正数である. (15.8) がみたされていればあきらかに $z = \sigma + \sigma^{-\Lambda/6}s \in U(\sigma)$ である. 今

$$\eta_* := \sup\{\eta \mid |s| < \eta \text{ で (15.8) が成立} \} < \varepsilon_0/4$$

であると仮定する. すると (15.9) を積分して, $|s| \leq \eta_*$ ($< \varepsilon_0/4$) において

$$|s|/2 \leq |\sigma^{\Lambda/6} v(s)| \leq 3|s|/2 \leq 3\varepsilon_0/8 \quad (15.10)$$

を得る. よって十分大きな M_0 が存在し, $|\sigma| \geq M_0$ であるかぎり $|s| \leq \eta_*$ のとき

$$|(\sigma + \sigma^{-\Lambda/6}s)^{\Lambda/6} v(s)| \leq |\sigma^{\Lambda/6} v(s)| (1 + M_0^{-1})^{\Lambda/6} \leq \varepsilon_0/2$$

となる. $|\sigma| \geq M_0$ なる極にたいしては, これは η_* の定義に反する. 従って, $|\sigma| \geq M_0$ であるとき, $\eta_* \geq \varepsilon_0/4$ であり, (15.10) は $|s| < \varepsilon_0/4$ において成立し, そして $w(z)$ は $0 < |z - \sigma| < (\varepsilon_0/4)|\sigma|^{-\Lambda/6}$ において正則である. Theorem 11.1 と同じ論法により $n(r, w) = O(r^C)$, $C = 2 + \Lambda/3$ がいて, これより Proposition 15.2 の結論が得られる.

16. Painlevé 超越関数の位数のより精密な評価

前の節において得た結果によれば (I) の任意の解は $T(r, w) = O(r^C)$ をみtasからその位数は C を越えない. ところがこの C の数値は $C = 2 + 2^{23}$ というようなとんでもなく大きな値である. 位数の有限性だけでも十分役に立つのであるが (例えば Theorem 6.5), ここではもっと精密な評価を与えよう.

Theorem 16.1. Painlevé 方程式 (I) の任意の解 $w(z)$ に対して

$$\frac{r^{5/2}}{\log r} \ll T(r, w) \ll r^{5/2}$$

が成り立つ.

Corollary 16.2. (I) の任意の解 $w(z)$ の位数 $\varrho(w)$ は $5/2$ である.

16.1. Theorem 16.1 の証明 – 上からの評価 –

上からの評価の方から先に証明しよう. Theorem 15.1 の証明では解の零点を迂回するような路を利用して評価をおこなったのに対して, ここでは極を迂回する路を構成するという方法を採用する.

$w(z)$ を (I) の任意の解とする. 今まで用いてきた Ljapunov 関数

$$\Phi(z) = w'(z)^2 + \frac{w'(z)}{w(z)} - 4w(z)^3 - 2zw(z)$$

に加えてもうひとつの Ljapunov 関数

$$\Psi(z) := w'(z)^2 - 4w(z)^3 - 2zw(z)$$

を考えよう. (I) の両辺に $2w'(z)$ をかけてみればわかるように

$$\Psi'(z) = -2w(z)$$

であるから, z_0 と z を結ぶ路 $\gamma(z_0, z)$ 上 $w(z)$ が極をもたないならば

$$\Psi(z) = \Psi(z_0) - 2 \int_{\gamma(z_0, z)} w(t) dt \quad (16.1)$$

となる. 前と同じように円周 $|z| = r_0$, $r_0 > 10$ をその上には $w(z)$ の極も零点もないようにしておく. 正数 K を

$$K > 2r_0^{-1/2} M(w; r_0) + M(\Psi; r_0) + 10^2, \quad (16.2)$$

$M(f; r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$, をみたすようにとり領域

$$D_K := \{z \mid |w(z)| > K|z|^{1/2}\}$$

を考える. 目標の評価はつぎの二つの命題から導かれる.

Proposition 16.3. 点 $a \in R(\theta) := \{z = xe^{i\theta} \mid x \geq r_0\}$ がつぎの性質をもっているとする.

- (a) $|w(a)| = K|a|^{1/2}$, つまり $a \in \partial D_K$.
- (b) 十分小さい δ_a が存在して

$$R(\theta) \cap \{z \mid |a| - \delta_a < |z| \leq |a|\} \subset \mathbf{C} \setminus D_K,$$

$$R(\theta) \cap \{z \mid |a| < |z| < |a| + \delta_a\} \subset D_K.$$

$$(c) |\Psi(a)| \leq 4K|a|^{3/2}.$$

このとき $w(z)$ の極 σ_a および円板

$$\Delta(\sigma_a) : |z - \sigma_a| < (11/10)K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4}$$

が存在してつぎが成り立つ.

- (1) $|a| - 1/10 < |\sigma_a| < |a| + 1/10$.
- (2) $a \in \Delta(\sigma_a)$.
- (3) $w(z)$ は $\Delta(\sigma_a) \setminus \{\sigma_a\}$ において正則である.
- (4) 円周 $\partial\Delta(\sigma_a)$ 上 $|w(z)| < K|z|^{1/2}$, つまり $\partial\Delta(\sigma_a) \subset \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}_K$.

Proposition 16.4. $a', a'' \in R(\theta)$ を上の (a), (b), (c) をみたす点, $(\sigma_{a'}, \Delta(\sigma_{a'}))$, $(\sigma_{a''}, \Delta(\sigma_{a''}))$ を Proposition 16.3 で与えられる極と円板との組とする. このとき $\Delta(\sigma_{a'}) \cap \Delta(\sigma_{a''}) = \emptyset$ または $\Delta(\sigma_{a'}) = \Delta(\sigma_{a''})$ のうちのいずれか一方が成立する.

16.1.1. 上からの評価の導出

Propositions 16.3, 16.4 を仮定しよう. σ を $|\sigma| > 2r_0$ をみたす $w(z)$ の任意の極とする. このとき以下の議論により極 σ のまわりの領域

$$0 < |z - \sigma| < (11/10)K^{-1/2}|\sigma|^{-1/4}$$

において $w(z)$ が正則であることが示される. この事実より

$$n(r, w) \ll r^{5/2} \tag{16.3}$$

そして $N(r, w) = O(r^{5/2})$ がいえて目標の評価が得られることは前と同様である.

極 σ をとおる半直線 $R_\sigma := R(\arg \sigma) = \{z = xe^{i\arg \sigma} \mid x \geq r_0\}$ を引く. (16.2) より点 $z_0 := r_0e^{i\arg \sigma} \in R_\sigma$ において

$$|w(z_0)| < Kr_0^{1/2}/2, \quad |\Psi(z_0)| < K$$

が成り立つ. あきらかに $z_0 \notin D_K$ である. 点 z_0 から出発し R_σ 上を進む. $\sigma \in D_K$ であるから Proposition 16.3 の (a), (b) をみたす点 $a = a_1 \in R_\sigma$ が存在し $[z_0, a_1] \subset \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}_K$ となる. このとき (16.1) より

$$|\Psi(a_1)| \leq |\Psi(z_0)| + 2 \int_{[z_0, a_1]} |w(t)| |dt| \leq K + 2K|a_1|^{1/2}|a_1 - z_0| \leq 3K|a_1|^{3/2}$$

となり Proposition 16.3 条件 (c) もまたみたされる. したがって, Proposition 16.3 より極 $\sigma_1 := \sigma_{a_1}$, 円板 $\Delta(\sigma_1)$ で (1), $\dots$, (4) をみたすようなものが存在する. もしも $\sigma_1 = \sigma$ であったならば $\Delta(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ が求める領域となる. そうでない場合を考える. 円周 $\partial\Delta(\sigma_1)$ から $[0, \sigma]$ によって切りとられる円弧のうち短いほうを Γ_1 , その両端を b_1^-, b_1^+ , $|b_1^-| < |b_1^+|$ とする. 線分 $[b_1^-, b_1^+] \subset R_\sigma$ を Γ_1 でおきかえ新しい路 $R_\sigma^{(1)} := (R_\sigma \setminus [b_1^-, b_1^+]) \cup \Gamma_1$ をつくる. ($z_0 \in \Delta(\sigma_1)$ の場合には $[z_0, b_1^+]$ を Γ_1 の $|z| \geq r_0$ なる部分の円弧でおきかえる.) 点 b_1^+ から再び出発し $R_\sigma^{(1)}$ 上を進む. そして条件 (a), (b) をみたす点 $a = a_2$ に出会ったとし, $R_\sigma^{(1)}$ の a_2 までの部分を $R_\sigma^{(1)}[a_2]$ と書こう. すると $R_\sigma^{(1)}[a_2]$ の長さは $\pi|a_2|/2$ をこえず, さらに $R_\sigma^{(1)}[a_2]$ 上 $|w(z)| \leq K|z|^{1/2} \leq K|a_2|^{1/2}$ が成り立つ. よって

$$|\Psi(a_2)| \leq |\Psi(z_0)| + 2 \int_{R_\sigma^{(1)}[a_2]} |w(t)| |dt| \leq K + K|a_2|^{1/2} \pi |a_2| \leq 4K|a_2|^{3/2}$$

であり (c) もみたされる. 再び Proposition 16.3 を使えば極 $\sigma_2 := \sigma_{a_2}$, 円板 $\Delta(a_2)$ が存在し, さらに Proposition 16.4 より $\Delta(\sigma_1) \cap \Delta(\sigma_2) = \emptyset$ となっている. もしも $\sigma_2 \neq \sigma$ ならば σ_1 の場合と同じ方法で路の変形を行ないその結果 $R_\sigma^{(2)}$ を得る. そしてこのような操作を $\sigma_j \neq \sigma$ であるかぎり繰り返し行ない, 極の列 $\{\sigma_j\}$, 円板の列 $\{\Delta(\sigma_j)\}$ を得る. ところが $\Delta(\sigma_j)$ の面積は $\pi K^{-1}|\sigma_j|^{-1/2}$ ($\geq \pi K^{-1}(|\sigma| + 1)^{-1/2}$) より小さくはないので, 上の操作は有限回で終了する. すなわち (a), (b), (c) をみたす点 $a_* \in R_\sigma$, そして (1), $\dots$, (4) をみたす $w(z)$ の極 $\sigma_* = \sigma_{a_*}$, 円板 $\Delta(\sigma_*) \supset [a_*, \sigma] \setminus \{a_*\}$ が存在する. このときあきらかに σ_* は σ に一致し, $w(z)$ は $\Delta(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ で正則である.

我々の以下なすべきことは Propositions 16.3, 16.4 の証明である.

16.1.2. Proposition 16.3 の証明

点 a が Proposition 16.3 の条件をみたしているとする. まず a の近くに極 σ_a が存在することを示し, その極が命題にいうような性質をもつことを確かめるという方針で証明を進める. その際, 極の近くでの議論をおこなうので Ljapunov 関数としては $\Phi(z)$ を援用する.

$$|a| \geq r_0 > 10 \tag{16.4}$$

であること, (16.2), 条件 (a), (c) および $\Psi(z)$ の定義より

$$\begin{aligned} |w'(a)|^2 &\leq 4|w(a)|^3 + 2|a||w(a)| + |\Psi(a)| \\ &\leq (4K^3 + 2K + 4K)|a|^{3/2} < 10K^3|a|^{3/2} \end{aligned}$$

であるから $|w'(a)/w(a)| \leq \sqrt{10}K^{1/2}|a|^{1/4}$ となる．よって (16.4) と $K > 10^2$ より

$$\begin{aligned} |\Phi(a)| &\leq |\Psi(a)| + |w'(a)/w(a)| \\ &< 4K|a|^{3/2}(1 + K^{-1/2}|a|^{-5/4}) < 5K|a|^{3/2} \quad (16.5) \end{aligned}$$

である．以下の議論はおもに領域

$$U(a) := \{z \mid |z - a| < 2K^{-1/2}|a|^{-1/4}\}$$

において行なう．

Lemma 16.5. a と z を結ぶ路 $\gamma(z) \subset U(a)$ に対しつぎを仮定する．

$$(1) \|\gamma(z)\| := \int_{\gamma(z)} |dt| \leq 1/10.$$

(2) t が $\gamma(z)$ 上 a から z へ進むとき $|w(t)|$ は単調増加．

このとき $|\Phi(z)| < 6K|z|^{3/2}$ が成り立つ．

Proof. $\Phi(z)$ の積分表示 (13.8) を思い出す． $z_0 = a$ としてこれを評価したい．性質 (2) と (16.2), (16.4) より $t \in \gamma(z)$ に対し, $|w(t)| \geq |w(a)| = K|a|^{1/2} \geq 300$ であるから, $|E(a, t)^{\pm 1}| \leq \exp(\|\gamma(z)\|/300^2) < 1 + 10^{-3}$ となる．また性質 (1) より

$$0.99|a| \leq |t| \leq 1.01|a| \quad (16.6)$$

である．これらの事実と (16.5) より

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\leq |E(a, z)^{-1}| \left[|\Phi(a)| + \frac{|E(a, z)| + 1}{2|w(a)|^2} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma(z)} \frac{|E(a, t)|}{|w(t)|} \left(|t| + \frac{1}{|w(t)|^3} \right) |dt| \right] \\ &\leq 1.001 \left[5K|a|^{3/2} + 1.001 \left(10^{-4} + 10^{-2}(1.01|a| + 10^{-6}) \right) \right] < 6K|z|^{3/2} \end{aligned}$$

を得る． $\square$

つぎはいわゆる steepest descent path の存在を保証するものである．

Lemma 16.6. $f(z)$ を領域 D で正則な関数とする． $c_0 \in D$ において $f(c_0) \neq 0$ であるならば $D \cup \partial D$ 内の曲線 γ_0 でつぎの性質をもつものが存在する．

- (1) γ_0 は c_0 を出発し c_∞ を終点とする.
(2) $f(c_\infty) = 0$ または $c_\infty \in \partial D$ のうちの少なくとも一方が成立する.
(3) γ_0 上 $d|f(z)|/ds = -|df(z)/ds|$ が成立する. ここで s は γ_0 の c_0 から z までの長さとする.

Proof. $X := \operatorname{Re}f(z)$, $Y := \operatorname{Im}f(z)$ と書く. すると

$$\left(\frac{d|f(z)|}{ds}\right)^2 - \left|\frac{df(z)}{ds}\right|^2 = \left(\frac{d}{ds}\sqrt{X^2 + Y^2}\right)^2 - (X_s^2 + Y_s^2) = -\frac{(X_s Y - X Y_s)^2}{|f(z)|^2}$$

($X_s = dX/ds$). 等高線 $|f(z)| = C$ に沿っては $(d/ds)|f(z)| = 0$ より $XX_{s'} + YY_{s'} = 0$ が成り立つ. よって $f(z)f'(z) \neq 0$ であるかぎり, 曲線 $X_s Y - X Y_s = 0$ は等高線 $|f(z)| = C$, $C > 0$ と直交する. 従って c_0 から出発し特別な点 c_1 に会うまでは補題の (3) の性質をもつように, つまり等高線と直交しかつ $|f(z)|$ が減少していくように, 曲線を引くことができる. ここで特別な点 c_1 とはつぎの3つの性質のうち少なくともひとつをみたすような点である.

- (i) $c_1 \in \partial D$, (ii) $f(c_1) = 0$, (iii) $f'(c_1) = 0$.

もしも $c_1 \in D$ で $f'(c_1) = 0$ であっても $f(c_1) \neq 0$ であるならば, 最大値原理より c_1 は実関数 $|f(z)|$ の鞍点となり (つまり極小点ではない), c_1 からさらに (3) の性質がみたされるように曲線を延長することができる. このようにして求める曲線 γ_0 を得る. $\square$

Lemma 16.7. $w(z)$ の極 σ_a で

$$|\sigma_a - a| \leq 1.01K^{-1/2}|a|^{-1/4} < 1/10, \quad (16.7)$$

$$|\Phi(\sigma_a)| < 6K|\sigma_a|^{3/2} \quad (16.8)$$

をみたすようなものが存在する.

Proof. $w(z) = u(z)^{-2}$ とおく. ここで $u(z)$ の分枝は後で決める. $f(z) = u(z)$, $D = U(a)$, $c_0 = a$ として Lemma 16.6 を適用すれば, a と a_* を結ぶ路 γ_0 をとり

$$u(a_*) = 0 \quad \text{or} \quad a_* \in \partial U(a) \quad (16.9)$$

$$d|u(z)|/ds = -|du(z)/ds| \quad \text{on } \gamma_0 \quad (16.10)$$

とできる. このとき γ_0 上 $|u(z)|$ は単調減少であり

$$|u(z)| \leq |u(a)| = K^{-1/2}|a|^{-1/4} \quad (16.11)$$

である． $\Phi(z)$ の定義式に $w(z) = u(z)^{-2}$ を代入すれば

$$4u'(z)^2 - 2u(z)^5u'(z) - 4 - 2zu(z)^4 - u(z)^6\Phi(z) = 0$$

を得る．この $u'(z)$ についての 2 次方程式の判別式は $1 + F(z)$,

$$F(z) := zu(z)^4/2 + u(z)^6\Phi(z)/4 + u(z)^{10}/16 \quad (16.12)$$

である．路 γ_0 の z までの部分を $\gamma_0(z)$ と書く．すると $\|\gamma_0(z)\| \leq 1/10$ であるかぎりには, Lemma 16.5, (16.6), (16.11), (16.2) より

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq (1/2)K^{-2}|z/a| + (3/2)K^{-2}|z/a|^{3/2} + (1/16)K^{-5}|a|^{-5/2} \\ &\leq 2K^{-2} \cdot 1.01^{3/2} + (1/16)K^{-5} < 10^{-3}/3 \end{aligned} \quad (16.13)$$

が成り立つ． $u(z)$ のみたす方程式は

$$u'(z) = u(z)^5/4 + (1 + F(z))^{1/2} \quad (16.14)$$

と書ける． $\|\gamma_0(z)\| \leq 1/10$ のときこの右辺が $|(1 + F(z))^{1/2} - 1| < 10^{-3}/3$ をみたすように $u'(z)$, $u(z)$ の分枝を選ぶ．このとき $\|\gamma_0(z)\| \leq 1/10$ であるかぎり

$$u'(z) = 1 + g(z), \quad |g(z)| < 10^{-3} \quad (16.15)$$

となる．(16.15) の両辺を $\gamma_0(z)$ に沿って ds で積分する．(16.10) と $|ds/dt| = 1$ に注意すれば, $\|\gamma_0(z)\| \leq 1/10$ であるかぎり

$$\left| \int_{\gamma_0(z)} u'(t) ds \right| \leq \int_{\gamma_0(z)} \left| \frac{du(t)}{ds} \right| ds = - \int_{\gamma_0(z)} \frac{d|u(t)|}{ds} ds = |u(a)| - |u(z)|$$

そして

$$\left| \int_{\gamma_0(z)} (1 + g(t)) ds \right| \geq \left| \int_{\gamma_0(z)} ds \right| - \left| \int_{\gamma_0(z)} g(t) ds \right| \geq (1 - 10^{-3}) \|\gamma_0(z)\|$$

である．よって (16.2), (16.4) より $\|\gamma_0(z)\| \leq 1.01(K^{-1/2}|a|^{-1/4} - |u(z)|) < 0.06$ となる．ここで, もしも $\|\gamma_0(z_1)\| = 1/10$ となるような点 $z_1 \in \gamma_0$ があれば上の議論より $\|\gamma_0(z_1)\| < 0.06$ となるので不合理である．よって $\|\gamma_0\| < 1/10$, もっと正確に言えば (16.9) の a_* に対して

$$\|\gamma_0\| \leq 1.01(K^{-1/2}|a|^{-1/4} - |u(a_*)|) < 1/10 \quad (16.16)$$

である．もしも $a_* \in \partial U(a)$ であるならば $\|\gamma_0\| \geq |a - a_*| = 2K^{-1/2}|a|^{-1/4}$ となり (16.16) に反する．よって $u(a_*) = 0$ である．これは $\sigma_a = a_*$ が $w(z)$ の極であることを示しており，(16.16) と $\|\gamma_0\| \geq |a - \sigma_a|$ より (16.7) もみたされている．また Lemma 16.5 より (16.8) も成立する． $\square$

つぎに極 σ_a のまわりでの $w(z)$ のふるまいを調べる．

Lemma 16.8. 円板 $|z - \sigma_a| < (6/5)K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4}$ において

$$|\Phi(z)| < 7K|z|^{3/2}, \quad (16.17)$$

$$|u'(z) - 1| < 10^{-2}, \quad (16.18)$$

$$0.99|z - \sigma_a| \leq |u(z)| \leq 1.01|z - \sigma_a| \quad (16.19)$$

が成立する．ここで $u(z)$ は (16.18) をみたす $w(z)^{-1/2}$ の分枝である．

Proof. はじめに

$$\mu_0 := \sup\{\mu \mid |z - \sigma_a| < \mu \text{ で (16.17), (16.18), (16.19) が成立}\}$$

とおく．Lemma 16.7 の証明で見たように， $u(z)$ は γ_0 上で (16.18) をみたしていた．(16.15) より $|u'(\sigma_a) - 1| < 10^{-3}$ であるから， σ_a のまわりで (16.18) は成立し，また $\sigma_a (\in \gamma_0)$ は $u(z)$ の零点であるから (16.19) も成立する．これらの事実と (16.8) より $\mu_0 > 0$ である．今 $\mu_0 < (6/5)K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4} < 1/14$ であると仮定し， $U_0 := \{z \mid |z - \sigma_a| < \mu_0\}$ とおく． U_0 においては $0.99|\sigma_a| < |z| < 1.01|\sigma_a|$ であり，さらに (16.19) より

$$|u(z)| \leq 1.01\mu_0 < 1.3K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4}, \quad |w(z)^{-1}| < 10^{-2} \quad (16.20)$$

である．(13.8) において $z_0 = \sigma_a$ ，とおき，積分路として σ_a と z を結ぶ線分をとり， $|\Phi(\sigma_a)| < 6K|\sigma_a|^{3/2}$ と (16.20) を用いて Lemma 16.5 の証明と同じような計算をすれば U_0 内では

$$|\Phi(z)| < 6.5K|\sigma_a|^{3/2} \leq 6.7K|z|^{3/2} \quad (16.21)$$

が成り立つ．さらに (16.12), (16.20), (16.21) より U_0 で

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq (1/2)1.3^4K^{-2}|z/\sigma_a| + 2 \cdot 1.3^6K^{-2}|z/\sigma_a|^{3/2} + (1/16)1.3^{10}K^{-5} \\ &< 3 \cdot 1.3^6K^{-2} \cdot 1.01^{3/2} + (1/16)1.3^{10}K^{-5} < 10^{-2}/6 \end{aligned}$$

となる．よって (16.13) より U_0 内で

$$|u'(z) - 1| < 10^{-2}/3, \quad (16.22)$$

$$(1 - 10^{-2}/3)|z - \sigma_a| \leq |u(z)| \leq (1 + 10^{-2}/3)|z - \sigma_a| \quad (16.23)$$

が成り立つ．(16.21), (16.22), (16.23) は μ_0 の定義に矛盾するので, $\mu_0 \geq (6/5)K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4}$ でなければならない．以上で補題が証明された． $\square$

Remark 16.1. $w(z)^{-1/2}$ のもう一方の分枝 $u_-(z)$ は円板 $|z - \sigma_a| < (6/5)K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4}$ において $|u'_-(z) + 1| < 10^{-2}$ をみたすことは上と同様の議論で証明される．

いよいよ証明の最終段階である．(16.7) より Proposition 16.3 の (1) がいえる．さらに $|\sigma_a/a| \leq (|a| + 1/10)/|a| < 1.01$ であるから

$$|\sigma_a - a| \leq 1.01K^{-1/2}|a|^{-1/4} \leq 1.01^{5/4}K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4} < (11/10)K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4},$$

つまり $a \in \Delta(\sigma_a)$ がいえる．(16.19) を使い $\partial\Delta(\sigma_a)$ 上 $|z/\sigma_a - 1| < 10^{-2}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} |u(z)| &\geq 0.99 \cdot 1.1K^{-1/2}|\sigma_a|^{-1/4} \\ &\geq 1.08K^{-1/2}(0.99|z|^{-1})^{1/4} > 1.07K^{-1/2}|z|^{-1/4} \end{aligned}$$

を得る．よって $\partial\Delta(\sigma_a)$ 上 $|w(z)| < K|z|^{1/2}$ が成り立つ．以上で Proposition 16.3 の証明が終る．

16.1.3. Proposition 16.4 の証明

$\Delta(\sigma_{a'}) \cap \Delta(\sigma_{a''}) \neq \emptyset$ と仮定する． $u(z)$ の分枝を $\Delta(\sigma_{a'}) \cup \Delta(\sigma_{a''})$ において (16.18) が成立しているようにとれる． $z_* \in \Delta(\sigma_{a'}) \cap \Delta(\sigma_{a''}) \cap [\sigma_{a'}, \sigma_{a''}]$ なる点をとったとき

$$|u(z_*) - (z_* - \sigma_{a'})| \leq 10^{-2}|z_* - \sigma_{a'}|, \quad |u(z_*) - (z_* - \sigma_{a''})| \leq 10^{-2}|z_* - \sigma_{a''}|$$

であるから $|\sigma_{a'} - \sigma_{a''}| \leq 10^{-2}|\sigma_{a'} - \sigma_{a''}|$ つまり $\sigma_{a'} = \sigma_{a''}$ を得る． $\square$

以上により上からの評価の証明は完了した．

16.2. Theorem 16.1 の証明 – 下からの評価 –

つぎに下からの評価を証明しよう. 方法は上からの評価とはまったく異なる. ただしその証明中, 極の上からの評価 (16.3) が使われていることに注意せよ.

16.2.1. 補題

下からの評価の証明に必要な補題を準備しよう. $w(z)$ の全ての極を $\{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty}$ と書く. ただし, 極はすべて double であるが同じものは 2 回繰り返しては並べない. また番号は

$$|\sigma_1| \leq |\sigma_2| \leq \cdots \leq |\sigma_j| \leq \cdots$$

であるように付けておく.(極が無数にあることは $w(z)$ の超越性と Lemma 7.1 より直ちに従う.) κ を $\kappa > 1$ なる任意の正数とする. このとき極に関する和

$$S(\{\sigma_j\}, \kappa r, z) := \sum_{|\sigma_j| < \kappa r} |z - \sigma_j|^{-2}$$

を考える. つぎの評価が本質的な役割をはたす.

Lemma 16.9. $r_0(\kappa)$ が十分大きければ, $r > r_0(\kappa)$ なるすべての r に対し $r/\sqrt{2} < |z_r| < r$ なる点 z_r で不等式

$$S(\{\sigma_j\}, \kappa r, z_r) \leq 8n(\kappa r)r^{-2} \log r. \quad (16.24)$$

をみたすようなものが存在する. ここで $n(r) := \bar{n}(r, w) = n(r, w)/2$ とする.

Proof. $0 < \delta < 1$, $\omega(t) := \min\{1, t^{-1/4}\}$ ($t > 0$) とするとき, 集合 $\Delta_\delta(r) := \{z \mid |z| < r\} \setminus D_\delta$, $D_\delta := \bigcup_{j=1}^{\infty} \{z \mid |z - \sigma_j| < \delta\omega(|\sigma_j|)\}$ を考えよう. このとき, すでに証明された極の個数の上からの評価 (16.3) より $n(r) = n(r, w)/2 \ll r^{5/2}$ であるから

$$\begin{aligned} \Omega(r) &:= \sum_{1 \leq |\sigma_j| \leq r+1} \omega(|\sigma_j|)^2 \leq \int_1^{r+1} t^{-1/2} dn(t) \\ &\ll r^{-1/2} n(r+1) + \int_1^{r+1} t^{-3/2} n(t) dt \ll r^2. \end{aligned}$$

よって δ を十分小さくとり $\text{Ar}(D_\delta \cap \{z \mid |z| < r\}) < \pi\delta^2(\Omega(r) + O(1)) < \pi r^2/16$ としておく. ここで $\text{Ar}(\cdot)$ は面積を表す. さて $|z - \sigma_j| = \rho$,

$z = x + yi$ するとき

$$\begin{aligned} \iint_{\delta\omega(|\sigma_j|) \leq |z - \sigma_j| \leq (\kappa+1)r} |z - \sigma_j|^{-2} dx dy &= \iint_{\substack{\delta\omega(|\sigma_j|) \leq \rho \leq (\kappa+1)r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \rho^{-1} d\rho d\theta \\ &\leq 2\pi \left(\log(r/\omega(|\sigma_j|)) + B_\kappa \right), \quad B_\kappa := \log((\kappa+1)/\delta). \end{aligned}$$

この事実と $|\sigma_j| \leq \kappa r$ ならば $r/\omega(|\sigma_j|) \leq \kappa r^{5/4}$ であることに注意すれば

$$\iint_{\Delta_\delta(r)} S(\{\sigma_j\}, \kappa r, z) dx dy \leq (5/2)\pi n(\kappa r) (\log r + B_\kappa + \log \kappa) \quad (16.25)$$

を得る. 今 $F_r := \{z \in \Delta_\delta(r) \mid S(\{\sigma_j\}, \kappa r, z) \geq 8n(\kappa r)r^{-2} \log r\}$ とおけば, (16.25) より

$$8n(\kappa r)r^{-2} \log r \cdot \text{Ar}(F_r) \leq (5/2)\pi n(\kappa r) (\log r + B_\kappa + \log \kappa)$$

である. よって $r_0(\kappa)$ を十分大きくとれば $r > r_0(\kappa)$ に対して $\text{Ar}(F_r) \leq 3\pi r^2/8$ が成立する. 除外集合 $H_r := F_r \cup (D_\delta \cap \{z \mid |z| < r\})$ は $\text{Ar}(H_r) \leq (3/8 + 1/16)\pi r^2 < \pi r^2/2$ をみたすから点 z_r で $r/\sqrt{2} < |z_r| < r$, および $z_r \in \Delta_\delta(r) \setminus F_r$ をみたすものがとれる. $\square$

Lemma 16.10. $\kappa \geq 8$ とする. このとき κ に無関係な正数 K_0 が存在して, $r > 1$, $|z| < r$ なるすべての r, z に対して

$$\begin{aligned} \chi(\kappa r, z) &:= \sum_{|\sigma_j| \geq \kappa r} |(z - \sigma_j)^{-2} - \sigma_j^{-2}| \leq K_0 \kappa^{-1/2} r^{1/2}, \\ \sum_{|\sigma_j| \geq \kappa r} |z - \sigma_j|^{-4} &\leq K_0, \end{aligned}$$

が成立する.

Proof. $|\sigma_j| \geq \kappa r$, $|z| < r$ のとき, $|z/\sigma_j| \leq 1/8$ であることより, $|(z - \sigma_j)^{-2} - \sigma_j^{-2}| = 2|z||\sigma_j|^{-3} |1 - (z/\sigma_j)/2| |1 - z/\sigma_j|^{-2} \leq 3r|\sigma_j|^{-3}$ となる. (16.3) より $r > 1$ に対して $n(r) \leq K_1 r^{5/2}$ なる正数 K_1 がとれるので

$$\begin{aligned} \chi(\kappa r, z) &\leq 3r \sum_{|\sigma_j| \geq \kappa r} |\sigma_j|^{-3} = 3r \int_{\kappa r}^{\infty} t^{-3} dn(t) \\ &\leq 9r \int_{\kappa r}^{\infty} t^{-4} n(t) dt \leq 18K_1 \kappa^{-1/2} r^{1/2} \end{aligned}$$

が $r > 1$, $|z| < r$ に対し成り立つ. $|z| < r$ に対し $\sum_{|\sigma_j| \geq \kappa r} |z - \sigma_j|^{-4} \leq (8/7)^4 \sum_{|\sigma_j| \geq \kappa r} |\sigma_j|^{-4}$ であることを使えばもう一方の評価も同様にして得られる. $\square$

Lemma 16.11. $\mu(E) < \infty$ なる除外区間 $E \subset (0, \infty)$ が存在して $|z| \in (0, \infty) \setminus E$ をなるすべての z に対して

$$\sum_{0 < |\sigma_j| < \infty} |(z - \sigma_j)^{-2} - \sigma_j^{-2}| \ll |z|^9.$$

が成り立つ.

Proof. $E := (0, |\sigma_1| + 1) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{\infty} (|\sigma_j| - |\sigma_j|^{-3}, |\sigma_j| + |\sigma_j|^{-3}) \right)$ とおく. すると (16.3) より

$$\mu(E) \ll \sum_{j \geq 2} |\sigma_j|^{-3} \ll \int_1^{\infty} t^{-3} dn(t) \ll \int_1^{\infty} t^{-4} n(t) dt < \infty$$

である. また Lemma 16.10 の結果に注意すれば $|z| \notin E$ ならば

$$\left(\sum_{0 < |\sigma_j| < 8|z|} + \sum_{|\sigma_j| \geq 8|z|} \right) |(z - \sigma_j)^{-2} - \sigma_j^{-2}| \ll (|z|^6 + 1)n(8|z|, w) + |z|^{1/2} \ll |z|^9$$

を得る. $\square$

Lemma 16.12. $\kappa \geq 8$, および $0 < \eta < 1$ を仮定する. このとき κ にも η にも無関係な正数 $L_0 \geq 1$ が存在して, $r > 1$ なるすべての r に対して

$$\gamma(\kappa r) = \sum_{0 < |\sigma_j| \leq \kappa r} |\sigma_j|^{-2} \leq \eta^{-4} n(\kappa r) r^{-2} + L_0 (\eta r^{1/2} + 1)$$

が成り立つ.

Proof. $r > 1$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |\sigma_j| \leq \kappa r} |\sigma_j|^{-2} &= \int_1^{\kappa r} t^{-2} dn(t) \leq (\kappa r)^{-2} n(\kappa r) + 2 \left(\int_1^{\eta^2 r} + \int_{\eta^2 r}^{\kappa r} \right) t^{-3} n(t) dt \\ &\leq \left((\kappa r)^{-2} + 2 \int_{\eta^2 r}^{\kappa r} t^{-3} dt \right) n(\kappa r) + 2 \int_1^{\eta^2 r} t^{-3} n(t) dt \\ &= \eta^{-4} n(\kappa r) r^{-2} + 2 \int_1^{\eta^2 r} t^{-3} n(t) dt \end{aligned}$$

となる．正数 L_0 を $1 + \sum_{0 < |\sigma_j| < 1} |\sigma_j|^{-2} \leq L_0$ および $t \geq 1$ に対し $n(t) \leq L_0 t^{5/2}/4$ が成り立つように選べば求める不等式を得る． $\square$

16.2.2. 下からの評価の導出

Proposition 13.1 より $w(z)$ の極 σ_j における主要部は $(z - \sigma_j)^{-2}$ であるから Mittag-Leffler の定理と Lemma 16.10 より $w(z)$ は

$$w(z) = h(z) + G(z), \quad G(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \left((z - \sigma_j)^{-2} - \sigma_j^{-2} \right)$$

と表される．ここで $h(z)$ はある整関数である．また $\sigma_1 = 0$ である場合には $G(z)$ における対応する項は z^{-2} とする．以下 r, κ は $r > 1, \kappa \geq 8$ であるような任意の正数であるとする．まず $|G(z)| \leq S(\{\sigma_j\}, \kappa r, z) + \gamma(\kappa r) + \chi(\kappa r, z)$ であることに注意する．Lemma 16.10 より $\chi(\kappa r, z) \leq K_0 \kappa^{-1/2} r^{1/2}$ が $|z| < r$ に対して成り立つ．また Lemma 16.9 より, $r > r_0(\kappa)$ ならば $r/\sqrt{2} < |z_r| < r$ なる点 z_r が存在し $S(\{\sigma_j\}, \kappa r, z_r) \leq 8n(\kappa r) r^{-2} \log r$ が成り立つ．さらに Lemma 16.12 で $\eta = \eta_0(\kappa) := \kappa^{-1/2} L_0^{-1}$ とすれば $r > 1$ に対して

$$\gamma(\kappa r) \leq \eta_0(\kappa)^{-4} n(\kappa r) r^{-2} + \kappa^{-1/2} r^{1/2} + L_0$$

を得る．よって $r_*(\kappa) := r_0(\kappa) + \exp(\eta_0(\kappa)^{-4})$ とおけば, $r > r_*(\kappa)$ なるかぎり $r/\sqrt{2} < |z_r| < r$ なる z_r が存在し

$$\begin{aligned} |G(z_r)| &\leq 9n(\kappa r) r^{-2} \log r + (K_0 + 1) \kappa^{-1/2} r^{1/2} + L_0 \\ &\ll r^{1/2} \log r \quad (16.26) \end{aligned}$$

をみtas. 一方 $|\sum_{|\sigma_j| < \kappa r} (z_r - \sigma_j)^{-4}| \leq S(\{\sigma_j\}, \kappa r, z_r)^2$ であることに注意して Lemma 16.10 をつかえば $r > r_*(\kappa)$ に対して

$$|G''(z_r)| \leq 64n(\kappa r)^2 r^{-4} (\log r)^2 + 6K_0 \ll r(\log r)^2 \quad (16.27)$$

を得る．さて (16.3), Lemma 7.1 と Lemma 16.11 より $r \rightarrow \infty, r \notin E$ のとき

$$T(r, h) = m(r, h) \leq m(r, w) + m(r, G) = O(\log r)$$

である．これと Lemma 6.9 より除外集合なしで $T(r, h) = O(\log r)$ であることがいえるから Proposition 3.1 より $h(z)$ は多項式である．さらに $w(z_r) = (1/\sqrt{6})(w''(z_r) - z_r)^{1/2}$ であるから (16.26), (16.27) より

$$|h(z_r)| \leq |G(z_r)| + (|h''(z_r)| + |G'''(z_r)| + |z_r|)^{1/2} \ll r^{1/2} \log r + |h''(z_r)|^{1/2}$$

を得るが, $|z_r|$ はいくらでも大きくなれるから $h(z) \equiv C_0 \in \mathbf{C}$ である. こんどは $z_r = w''(z_r) - 6w(z_r)^2$ に対して再び (16.26), (16.27) をつかえば

$$\begin{aligned} 2^{-1/4}r^{1/2} &\leq |z_r|^{1/2} \leq \left(|G''(z_r)| + 6(|G(z_r)| + |C_0|)^2\right)^{1/2} \\ &\leq |G''(z_r)|^{1/2} + 3(|G(z_r)| + |C_0|) \\ &\leq 35n(\kappa r)r^{-2}\log r + 3(K_0 + 1)\kappa^{-1/2}r^{1/2} + O(1) \end{aligned}$$

が $r \geq r_*(\kappa)$ に対して成立することがいえる. ここで $\kappa = \kappa_0 > 8$ を

$$2^{-1/4} - 3(K_0 + 1)\kappa_0^{-1/2} > 0$$

が成り立つ位に大きくとれば $n(\kappa_0 r) \gg r^{5/2}/\log r$, つまり

$$n(r, w) \gg r^{5/2}/\log r, \quad N(r, w) \gg r^{5/2}/\log r$$

が従う. これで下からの評価を得ることができた.

16.3. Painlevé 方程式 (II), (IV) の解の位数

Painlevé 方程式 (II), (IV) についてもその解の増大度の上からの評価は (I) の場合と同様な方法で与えることができる. ただし (II), (IV) の場合は極はすべて simple であり, 一般には留数は ± 1 の二通りの値が存在する. このため証明の過程では極のまわりの 2 種類の円板を取り扱うことになる. 一方, これらの方程式には有理関数解や, Airy 関数, Weber 関数により表される解の族が存在するので, 下からの評価は (I) と同じ形では与えられない.

Theorem 16.13. 方程式 (II) の任意の解は $T(r, w) = O(r^3)$ をみたす. また, 方程式 (IV) の任意の解は $T(r, w) = O(r^4)$ をみたす.

ここでは方程式 (II) の場合の証明の概略を述べる. $w(z)$ を (II) の任意の解とする. Painlevé property の証明で用いた Ljapunov 関数

$$\Phi(z) = w'(z)^2 + \frac{w'(z)}{w(z)} - w(z)^4 - zw(z)^2 - 2\alpha w(z)$$

に加えて

$$\Psi(z) := w'(z)^2 - w(z)^4 - zw(z)^2 - 2\alpha w(z)$$

を用いる. これらはそれぞれ

$$\begin{aligned} \Phi'(z) + \frac{\Phi(z)}{w(z)^2} &= -\frac{\alpha}{w(z)} + \frac{w'(z)}{w(z)^3}, \\ \Psi'(z) &= -w(z)^2 \end{aligned}$$

をみたす. 従って, z_0 と z を結ぶ任意の路 $\gamma(z_0, z)$ に対しては, その上で極が存在しなければ

$$\Psi(z) = \Psi(z_0) - \int_{\gamma(z_0, z)} w(t)^2 dt,$$

またその上で零点が存在しなければ

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= E(z_0, z)^{-1} \left[\Phi(z_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{E(z_0, z)}{w(z)^2} - \frac{1}{w(z_0)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_{\gamma(z_0, z)} \frac{E(z_0, t)}{w(t)^4} (\alpha w(t)^3 - 1/2) dt \right], \\ E(z_0, t) &:= \exp \left(\int_{\gamma(z_0, t)} w(\tau)^{-2} d\tau \right), \quad \gamma(z_0, t) \subset \gamma(z_0, z) \end{aligned}$$

と表される. 円周 $|z| = r_0 > 10$ をその上に $w(z)$ の極も零点も存在しないようにしておく. 正数 K を

$$K > 2r_0^{-1/2} M(w; r_0) + M(\Psi; r_0) + 10^2 + 2|\alpha|$$

をみたすようにとり $D_K := \{z \mid |w(z)| > K|z|^{1/2}\}$ とおく. このときつぎの命題から $n(r, w) = O(r^3)$, そして $T(r, w) = O(r^3)$ を導くのは (I) の場合とまったく同じ議論による.

Proposition 16.14. 点 $a \in R(\theta) = \{z = xe^{i\theta} \mid x \geq r_0\}$ が Proposition 16.3 の (a), (b) および

$$(c') \quad |\Psi(a)| \leq 2K^2|a|^2$$

をみたすと仮定する. このとき $w(z)$ の極 σ_a および円板

$$\Delta'(\sigma_a) : |z - \sigma_a| < (11/10)K^{-1}|\sigma_a|^{-1/2}$$

が存在してつぎが成り立つ.

- (1) $|a| - 1/10 < |\sigma_a| < |a| + 1/10$.
- (2) $a \in \Delta'(\sigma_a)$.
- (3) $w(z)$ は $\Delta'(\sigma_a) \setminus \{\sigma_a\}$ において正則である.
- (4) 円周 $\partial\Delta'(\sigma_a)$ 上 $|w(z)| < K|z|^{1/2}$, つまり $\partial\Delta'(\sigma_a) \subset \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}_K$.

Proposition 16.15. $a', a'' \in R(\theta)$ を上の命題でいう (a), (b), (c') をみたす点, $(\sigma_{a'}, \Delta'(\sigma_{a'}))$, $(\sigma_{a''}, \Delta'(\sigma_{a''}))$ をその仮定のもとで得られる極と円板の組とする. このとき $\Delta'(\sigma_{a'}) \cap \Delta'(\sigma_{a''}) = \emptyset$ または $\Delta'(\sigma_{a'}) = \Delta'(\sigma_{a''})$ のうちのいずれか一方が成立する.

Proposition 16.14 は Proposition 16.3 の証明に並行な方法で導かれる．
まず (a), (c') および K に関する条件より

$$|\Phi(a)| \leq 3K^2|a|^2$$

が得られる．つぎに集合 $\{z \mid |z - a| < 2K^{-1}|a|^{-1/2}\}$ に含まれる a と z を結ぶ任意の路 $\gamma(z)$ を考える． $||\gamma(z)|| \leq 1/10$ および $|w(t)|$ が $\gamma(z)$ 上単調増加であるという仮定のもとで

$$|\Phi(z)| < 4K^2|z|^2$$

が導かれる． $u(z) = 1/w(z)$ が

$$u'(z)^2 - u(z)^3 u'(z) - 1 - zu(z)^2 - 2\alpha u(z)^3 - u(z)^4 \Phi(z) = 0$$

をみたすことに注意して，上の事実と steepest descent path に沿った積分を使うことにより $w(z)$ の極 σ_a で

$$|\sigma_a - a| \leq 1.01K^{-1}|a|^{-1/2}, \quad |\Phi(\sigma_a)| < 4K^2|\sigma_a|^2$$

をみたすようなものが存在することを証明できる．そして σ_a のまわりでは 2 種類の留数に対応した導関数を含むつぎの補題を得る．

Lemma 16.16. 円板 $|z - \sigma_a| < (6/5)K^{-1}|\sigma_a|^{-1/2}$ において

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &< 5K^2|z|^2, \\ |u'(z) - 1| &< 10^{-2} \quad \text{or} \quad |u'(z) + 1| < 10^{-2}, \\ 0.99|z - \sigma_a| &\leq |u(z)| \leq 1.01|z - \sigma_a| \end{aligned}$$

が成り立つ．

この補題の $u'(z)$ に関する部分は (I) の場合の (16.18) と若干異なっていることに注意する．これより Proposition 16.14 が得られるのは (I) の場合と同様である．また Proposition 16.15 も Proposition 16.4 と同じように証明できる．なおこの場合二つの極の円板が一致するのはそこでの留数が一致するときに限る．

第4章 Painlevé 超越関数の値分布

本章では Nevanlinna 理論を応用して Painlevé 超越関数の値分布をしらべる. 方程式 (I), (II), (IV) の任意の解は全平面で有理型であるので第1章で述べた Nevanlinna 理論がそのまま適用できる. ここでは方程式 (I), (II) の解についての結果を述べよう. 方程式 (III), (V) の解は $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ の universal covering 上で有理型であるから独立変数についての変換 $z = e^t$ を施したものを考えれば同じような取り扱いが可能である.

17. 方程式 (I) の解の値分布

この節では $w(z)$ は方程式

$$w'' = 6w^2 + z \quad (\text{I})$$

の任意の解とする. これは先に証明されたように超越有理型関数である. 方程式 (I) を $6w^2 = w'' - z$ と書くと, $w(z)$ の位数が有限であること (Theorem 15.1 または Theorem 16.1) と Lemma 7.1 より

Theorem 17.1. $m(r, w) = O(\log r)$.

さらに $w(z)$ の超越性より

Corollary 17.2. $\delta(\infty, w) = 0$.

任意の複素数 $a \in \mathbf{C}$ に対して $w \equiv a$ は (I) をみたさないので Lemma 7.2 を位数有限という仮定のもとで使えば

Theorem 17.3. 任意の $a \in \mathbf{C}$ に対して $m(r, 1/(w - a)) = O(\log r)$.

Corollary 17.4. 任意の $a \in \mathbf{C}$ に対して $\delta(a, w) = 0$.

以上より (I) の任意の解は $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ に属するすべての値を無限回とることがわかる (Proposition 5.1). つまり Picard の除外値は存在しない. 特に任意の解は無数の極をもつことがいえるので

Corollary 17.5. 方程式 (I) は整関数の解はもたない.

この事実を Nevanlinna 理論を使わずに, たとえば解の級数展開の収束半径が有限であることを示すなどのやり方で, 証明するのは困難である.

つぎの補題は第2基本定理の証明や, 分岐指数の評価に用いられる.

Lemma 17.6. $m(r, w') = O(\log r)$.

Proof. 位数有限の場合の Theorem 6.5 と Theorem 17.1 より

$$m(r, w') \leq m(r, w'/w) + m(r, w) = O(\log r)$$

となる. □

$w'(z)$ の極はすべて重複度 3 であるから $N(r, w') = (3/2)N(r, w) = O(r^{5/2})$ となることより

Corollary 17.7. $T(r, w') = O(r^{5/2})$.

方程式 (I) の解に限れば一般の場合の第 2 基本定理 (Theorem 8.1) よりも精密なことがいえる.

Theorem 17.8. $N(r, 1/w') + N_1(r, w) = 2T(r, w) + O(\log r)$.

Proof. (I) の両辺を微分すれば $w^{(3)} = 12ww' + 1$ つまり $1/w' = w^{(3)}/w' - 12w$. また Corollary 17.7 より $w'(z)$ も位数有限である. よって Corollary 6.6 を使うと

$$m(r, 1/w') \ll m(r, w^{(3)}/w') + m(r, w) = O(\log r).$$

従って, Lemma 17.6 に注意すれば

$$\begin{aligned} N(r, 1/w') &= T(r, 1/w') - m(r, 1/w') \\ &= T(r, w') + O(\log r) = N(r, w') + m(r, w') + O(\log r) \\ &= (3/2)N(r, w) + O(\log r) = (3/2)T(r, w) + O(\log r) \end{aligned}$$

を得る. これと $N_1(r, w) = (1/2)N(r, w) = (1/2)T(r, w) + O(\log r)$ をあわせれば求める等式が得られる. □

上の証明の過程で得られたように

Corollary 17.9. $N(r, 1/w') = (3/2)T(r, w) + O(\log r)$.

この結果は重複 a -点はすべての a についてのものをかき集めればずいぶん沢山存在することを示している. にもかかわらず個々の a については重複 a -点はごく稀, つまり $\vartheta(a, w) = 0$ であることが予想されているがその証明はまだない. ただつぎのような結果があるのみである.

Theorem 17.10. 任意の $a \in \mathbb{C}$ に対しては

$$N_1(r, 1/(w-a)) \leq (1/6)T(r, w) + O(\log r), \quad (17.1)$$

そして $\vartheta(a, w) \leq 1/6$ である. また

$$N_1(r, w) = (1/2)T(r, w) + O(\log r), \quad (17.2)$$

そして $\vartheta(\infty, w) = 1/2$ である.

Proof. Theorem 17.1 と $N_1(r, w) = (1/2)N(r, w)$ より (17.2) はあきらかである. また $w(z)$ の超越性より $\vartheta(\infty, w) = 1/2$ も従う. あとは (17.1) のみを証明すればよい. a -点に関する分岐指数についても同じことがいえるからである. 重複 a -点の集合 $X := \{z \mid w(z) = a, w'(z) = 0\}$ を考える. X が有限集合ならば $N_1(r, 1/(w-a)) = O(\log r)$ であるから (17.1) はあきらかである. 従って X が無限集合の場合を考える. もしも $z_* \in X$ を重複度 3 以上の a -点, つまり $w''(z_*) = 0$ とすれば $z_* = w''(z_*) - 6w(z_*)^2 = -6a^2$ である. よって X の点はたかだか 1 点をのぞいて重複度 2 の a -点である. 16 節で使った Ljapunov 関数

$$\Psi(z) = w'(z)^2 - 4w(z)^3 - 2zw(z)$$

および (16.1) の表示式

$$\Psi(z) - \Psi(z_0) = -2 \int_{z_0}^z w(t) dt \quad (17.3)$$

を思い出す. ここで積分路は終点をのぞいてその上に極がないような曲線とする. いま $z_0 \in X$ であるようにすれば $w(z_0) = a, w'(z_0) = 0$ であるから (17.3) は

$$G(z) = 2a(z - z_0) - 2 \int_{z_0}^z w(t) dt, \quad (17.4)$$

$$G(z) := w'(z)^2 - 4(w(z)^3 - a^3) - 2z(w(z) - a) \quad (17.5)$$

と書ける. ここで (17.4) より

$$G'(z) = 2(a - w(z)), \quad G''(z) = -2w'(z)$$

であることに注意する. 任意の $\tau \in X \setminus \{-6a^2\}$ は $w(\tau) = a, w'(\tau) = 0, w''(\tau) \neq 0$ そして

$$G(\tau) = G'(\tau) = G''(\tau) = 0$$

をみtas. つまり τ は $G(z)$ の重複度 3 以上の零点になる. よって

$$\begin{aligned} N_1(r, 1/(w-a)) &\leq (1/3)N(r, 1/G) + O(\log r) \\ &\leq (1/3)T(r, G) + O(\log r) \quad (17.6) \end{aligned}$$

となる. $w(z)$ の極 $z = \sigma$ の近くでは $w(z) = (z - \sigma)^{-2} + o(1)$ でありこれを (17.4) の右辺に代入すれば $2(z - \sigma)^{-1} + O(1)$ となる. つまり σ は $G(z)$ の simple な極である. また (17.4) より, $G(z)$ の極は $w(z)$ の極になるから,

$$N(r, G) = (1/2)N(r, w) = (1/2)T(r, w) + O(\log r)$$

である. さらに (17.5) と Lemma 17.6 より

$$m(r, G) \ll m(r, w') + m(r, w) + O(\log r) = O(\log r).$$

よって $T(r, G) = (1/2)T(r, w) + O(\log r)$ となる. これを (17.6) に代入すれば目標の不等式を得る. $\square$

18. 方程式 (II) の解の値分布

方程式

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \quad (\text{II})$$

の任意の解は有理型であるがその値分布については (I) の場合とは少し異なる部分がある. Theorems 14.2, 14.3 より $\alpha \notin \mathbf{Z}$ ならば (II) のすべての解は超越的であり, $\alpha \in \mathbf{Z}$ のときはただ一つの有理関数解をのぞいて超越的である. 以下 $w(z)$ を (II) の**超越**関数解とする. Theorem 16.13 により $w(z)$ は位数有限である. まず Lemma 7.1 および $w(z)$ の超越性を使うと (I) の場合と同様に

Theorem 18.1. $m(r, w) = O(\log r)$ そして $\delta(\infty, w) = 0$.

この事実と Theorem 14.5 をあわせると

Corollary 18.2. 方程式 (II) の整関数解は $\alpha = 0$ のときの自明な解 $w \equiv 0$ 以外には存在しない.

さて $a \in \mathbf{C}$ を任意の複素数としよう. $w \equiv a$ が (II) の解となるのは $2a^3 + az + \alpha \equiv 0$ つまり $a = \alpha = 0$ のときに限ることは容易にわかる. 従って, Lemma 7.2 より

Theorem 18.3. 任意の $a \in \mathbf{C}$ に対して, $(\alpha, a) \neq (0, 0)$ であるかぎり $m(r, 1/(w - a)) = O(\log r)$ そして $\delta(a, w) = 0$.

$\alpha = a = 0$ の場合にはつぎのことまではいえる.

Theorem 18.4. $\alpha = 0$ ならば

$$m(r, 1/w) \leq (1/2)T(r, w) + O(\log r). \quad (18.1)$$

Remark 18.1. (18.1) の係数 $1/2$ をこれより小さくできるかどうかはわからない. しかし零点が無数に存在するということをいうのにはこれで十分である. ともかく (II) の任意の超越関数解についても Picard の除外値は存在しないことがいえた.

Proof. 16.3 節で与えた (II) についての Ljapunov 関数で $\alpha = 0$ としたもの

$$\Psi(z) = w'(z)^2 - w(z)^4 - zw(z)^2 \quad (18.2)$$

および積分表示式

$$\Psi(z) = \Psi(z_0) - \int_{z_0}^z w(t)^2 dt \quad (18.3)$$

を思いだそう. ここで積分路上では終点以外では $w(z)$ の極は存在しないとする. このとき関数

$$\Xi(z) := \Psi(z)/w(z) \quad (18.4)$$

を考える. σ を $w(z)$ の任意の極とする. Proposition 13.3 より極 σ のまわりでは $w(z) = \pm(z - \sigma)^{-1} + O(z - \sigma)$ だから $w(z)^2 = (z - \sigma)^{-2} + O(1)$. これを (18.3) に代入すれば $\Psi(z) = (z - \sigma)^{-1} + O(1)$ となるから (18.4) より $\Xi(\sigma) = \pm 1$ である. つまり $w(z)$ の任意の極は $\Xi(z)^2$ の 1-点の集合に含まれる. まず $\Xi(z) \neq \pm 1$ の場合を考えよう. 上の事実より

$$\begin{aligned} N(r, w) &\leq N(r, 1/(\Xi^2 - 1)) \leq T(r, 1/(\Xi^2 - 1)) \\ &= T(r, \Xi^2 - 1) + O(1) \leq 2T(r, \Xi) + O(1) \end{aligned} \quad (18.5)$$

である. τ を $\Xi(z)$ の任意の極とする. このとき τ は $\Psi(z)$ の極であるか, そうでなければ $w(z)$ の零点である. もしも $\Psi(z)$ の極であるならば, $w(z)$ の極でもあることになり上で見たように $\Xi(z)$ の 1-点になってしま

うので不合理である．従って τ は $w(z)$ の零点である．そして τ の $\Xi(z)$ の極としての重複度は $w(z)$ の零点としての重複度を越えない．よって

$$N(r, \Xi) \leq N(r, 1/w) = T(r, w) - m(r, 1/w) + O(1).$$

さらに $(w')^2/w = (w'/w)^2 w$ であることに注意して Theorem 18.1 と Theorem 6.5 を使うと

$$m(r, \Xi) \ll m(r, w'/w) + m(r, w) + O(\log r) = O(\log r).$$

よって

$$T(r, \Xi) \leq T(r, w) - m(r, 1/w) + O(\log r).$$

また

$$N(r, w) = T(r, w) - m(r, w) = T(r, w) + O(\log r).$$

これら 2 つの式を (18.5) に代入すれば求める不等式 (18.1) を得る．最後に $\Xi(z) \equiv \pm 1$ であると仮定する．このとき (18.2), (18.3), (18.4) より

$$w'(z)^2 - w(z)^4 - zw(z)^2 = \pm w(z), \quad (18.6)$$

$$\Psi(z_0) - \int_{z_0}^z w(t)^2 dt = \pm w(z) \quad (18.7)$$

である．(18.7) の両辺を微分して平方すれば $w'(z)^2 = w(z)^4$ となるがこれを (18.6) に代入すれば $-zw(z)^2 = \pm w(z)$ となり $w(z)$ の超越性に反する． $\square$

つぎの評価は Lemma 17.6, Corollary 17.7 と同様の方法で得られる．これらは第 2 基本定理の証明で使われる．

Lemma 18.5. $m(r, w') = O(\log r)$.

Corollary 18.6. $T(r, w') = O(r^3)$.

方程式 (II) の解に対する第 2 基本定理は

Theorem 18.7. $m(r, 1/w) + N(r, 1/w') = 2T(r, w) + O(\log r)$.

Remark 18.2. $\alpha \neq 0$ の場合には上の等式で $m(r, 1/w)$ の項は取り去ることができる．

Proof. (II) の両辺を微分すると $w^{(3)} = 6w^2w' + zw' + w$ つまり $w/w' = -z - 6w^2 + w^{(3)}/w'$ であるから Corollary 18.6 と Corollary 6.6 を使うと

$$m(r, w/w') \ll m(r, w) + m(r, w^{(3)}/w') + O(\log r) = O(\log r).$$

よって

$$-m(r, w/w') \leq m(r, 1/w) - m(r, 1/w') \leq m(r, w'/w)$$

に注意すれば $m(r, 1/w) = m(r, 1/w') + O(\log r)$. これと Lemma 18.5 を使えば

$$\begin{aligned} m(r, 1/w) + N(r, 1/w') &= m(r, 1/w') + N(r, 1/w') + O(\log r) \\ &= T(r, w') + O(\log r) = N(r, w') + m(r, w') + O(\log r) \\ &= 2N(r, w) + O(\log r) = 2T(r, w) + O(\log r) \end{aligned}$$

となり求める等式を得る. $\square$

最後に分岐指数についての結果を与えよう. 極は simple であるからあきらかに $\vartheta(\infty, w) = 0$ である.

Theorem 18.8. (1) 任意の $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$N_1(r, 1/(w - a)) \leq (1/4)T(r, w) + O(\log r) \quad (18.8)$$

そして $\vartheta(a, w) \leq 1/4$.

(2) $\alpha \neq 0$ ならば

$$N_1(r, 1/w) \leq (1/5)T(r, w) + O(\log r) \quad (18.9)$$

そして $\vartheta(0, w) \leq 1/5$. また $\alpha = 0$ ならば

$$N_1(r, 1/w) = 0 \quad (18.10)$$

そして $\vartheta(0, w) = 0$.

Proof. (1) $a \neq 0$ に対し集合 $X := \{z \mid w(z) = a, w'(z) = 0\}$ を考える. 重複度が 3 以上の a -点はあったとしても $z_* = -2a^2 - \alpha/a$ に限る. それ以外の X の点の重複度はすべて 2 である. X が有限集合の場合は (18.8) はあきらかであるから, 以下 X は無限集合であるとする. 16.3 節で与えた Ljapunov 関数

$$\Psi(z) = w'(z)^2 - w(z)^4 - zw(z)^2 - 2\alpha w(z) \quad (18.11)$$

およびその積分表示式

$$\Psi(z) - \Psi(z_0) = - \int_{z_0}^z w(t)^2 dt \quad (18.12)$$

を思い出す．今 $z_0 \in X$ であるようにとれば $w(z_0) = a$, $w'(z_0) = 0$ であるから (18.12) は

$$G(z) = (z - z_0)a^2 - \int_{z_0}^z w(t)^2 dt, \quad (18.13)$$

$$G(z) := w'(z)^2 - (w(z)^4 - a^4) - z(w(z)^2 - a^2) - 2\alpha(w(z) - a) \quad (18.14)$$

と書ける．すると (18.13) より

$$G'(z) = a^2 - w(z)^2, \quad G''(z) = -2w(z)w'(z) \quad (18.15)$$

でありこれと (18.14) を使えば，任意の $\tau \in X \setminus \{z_*\}$ に対して $G(\tau) = G'(\tau) = G''(\tau) = 0$ である．つまり τ は $G(z)$ の重複度 3 以上の零点になる．従って

$$\Theta(z) := G(z)/(w(z) - a) \quad (18.16)$$

とおけば $w(z)$ の重複度 2 の任意の a -点は $\Theta(z)$ の零点である．また σ を $w(z)$ の任意の極とすれば，そのまわりの表現 $w(z) = \pm(z-\sigma)^{-1} + O(z-\sigma)$ を (18.16) に代入してみれば $\Theta(\sigma) = \pm 1$ となる．さらに σ' が $\Theta(z)$ の極であるとすればそれは $G(z)$ の極であるか，そうでなければ $w(z)$ の a -点である．もしも σ' が $G(z)$ の極であるならば， $w(z)$ の極でもあることになるが，先に述べたことよりこれは $\Theta(z)$ の正則点となり矛盾する．従って， σ' は $w(z)$ の a -点の集合に含まれる．ところが上で見たように重複度 2 の a -点は Θ の零点であるから σ' はたかだか一つの例外 z_* を除いて $w(z)$ の simple な a -点の集合に含まれる．以上の事実より

$$\begin{aligned} N(r, \Theta) &\leq N(r, 1/(w - a)) - 2N_1(r, 1/(w - a)) + O(\log r) \\ &\leq T(r, w) - 2N_1(r, 1/(w - a)) + O(\log r) \end{aligned}$$

を得る．また (18.14), Theorems 18.1 より

$$m(r, \Theta) \leq m(r, w'/(w - a)) + m(r, w) + O(\log r) = O(\log r)$$

であるから

$$T(r, \Theta) \leq T(r, w) - 2N_1(r, 1/(w - a)) + O(\log r) \quad (18.17)$$

となる．一方，先にあきらかになった事実より $w(z)$ の任意の極 σ は $\Theta(\sigma) = \pm 1$ をみたし，また $\tau \in X \setminus \{z_*\} \neq \emptyset$ (X は無限集合だから) に対して $\Theta(\tau) = 0$ より $\Theta(z) \neq \pm 1$ である．従って

$$N(r, w) \leq N(r, 1/(\Theta^2 - 1)) \leq 2T(r, \Theta) + O(1).$$

これと $N(r, w) = T(r, w) + O(\log r)$ を (18.17) とあわせると (18.8) を得る．

(2) 重複零点 τ は $w(\tau) = w'(\tau) = 0$ をみたすので $\alpha = 0$ のときには $w(z)$ は自明な解 $w \equiv 0$ に一致し矛盾する．従ってこの場合は $w(z)$ の重複零点は存在しないので $N_1(r, 1/w) = 0$ である．よってあとは $\alpha \neq 0$ の場合を考えればよい． $a = 0$ より (18.14) は

$$G(z) = w'(z)^2 - w(z)^4 - zw(z)^2 - 2\alpha w(z) \quad (18.18)$$

となる．(18.15) で $a = 0$ において，

$$G'(z) = -w(z)^2, \quad G''(z) = -2w(z)w'(z),$$

$$G^{(3)}(z) = -2w'(z)^2 - 2w(z)w''(z),$$

$$G^{(4)}(z) = -6w'(z)w''(z) - 2w(z)w^{(3)}(z)$$

となる．任意の重複零点 τ は $w(\tau) = w'(\tau) = 0$, $w''(\tau) = \alpha \neq 0$ をみたすからその重複度は 2 である．さらに

$$G(\tau) = G'(\tau) = G''(\tau) = G^{(3)}(\tau) = G^{(4)}(\tau) = 0$$

より τ は $G(z)$ の重複度 5 以上の零点である．よって

$$N_1(r, 1/w) \leq (1/5)N(r, 1/G) \leq (1/5)T(r, G) + O(1) \quad (18.19)$$

である．一方 (18.13) より $G(z)$ の極は simple であり $w(z)$ のそれと重複度もこめて一致するから $N(r, G) = N(r, w)$ となる．これと

$$m(r, G) \ll m(r, w') + m(r, w) + O(\log r) = O(\log r)$$

を (18.19) と組み合わせると (18.9) を得る． □

付録 微分方程式の局所解

微分方程式の解の存在定理を述べる前に多変数関数の正則性について復習する. $\mathbf{C}^n$ 内の領域 D 上で定義された関数 $f(z_1, \dots, z_n)$ が任意の点 $\mathbf{z}^0 := (z_1^0, \dots, z_n^0) \in \mathbf{D}$ において全微分可能, つまり, ある $\alpha_1(\mathbf{z}^0), \dots, \alpha_n(\mathbf{z}^0) \in \mathbf{C}$ が存在して, $\mathbf{z}^0$ の近傍で

$$\begin{aligned} & f(z_1, \dots, z_n) - f(z_1^0, \dots, z_n^0) \\ &= \alpha_1(\mathbf{z}^0)(z_1 - z_1^0) + \dots + \alpha_n(\mathbf{z}^0)(z_n - z_n^0) + o(|z_1 - z_1^0| + \dots + |z_n - z_n^0|) \end{aligned}$$

が成立するとき, $f(z_1, \dots, z_n)$ は D で正則であると定義する. $n = 1$ とすれば一変数関数の正則性の定義に一致する.

Proposition A.1. $f(z_1, \dots, z_n)$ が D で正則であるための必要十分条件はつぎの (A), (B) が成立することである.

(A) $f(z_1, \dots, z_n)$ は D で連続である.

(B) 各変数 z_ν ($1 \leq \nu \leq n$) に対し, $\mathbf{z}^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in \mathbf{D}$ である限り, $f(z_1^0, \dots, z_\nu, \dots, z_n^0) = g_\nu(\mathbf{z}^0; z_\nu)$ は $z_\nu = z_\nu^0$ の近傍で正則である.

Proof. 正則性から (A), (B) は容易に導かれる. 逆に (A), (B) を仮定する. $\mathbf{z}^0$ の近傍 $U(\mathbf{z}^0) : |z_\nu - z_\nu^0| < r_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) でその閉包が D に含まれるようなものをとる. 各変数ごとに円周 $\Gamma_\nu : |t_\nu - z_\nu^0| = r_\nu$ 上の積分を繰り返すと, 任意の $(z_1, \dots, z_n) \in U(\mathbf{z}^0)$ に対し

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_n} \frac{f(t_1, \dots, t_n)}{\prod_{\nu=1}^n (t_\nu - z_\nu)} dt_1 \dots dt_n$$

が成立する. すると一変数の場合と同様にして, $U(\mathbf{z}^0)$ における収束級数展開

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{k_1 \geq 0} \dots \sum_{k_n \geq 0} c_{k_1 \dots k_n} (z_1 - z_1^0)^{k_1} \dots (z_n - z_n^0)^{k_n}, \\ c_{k_1 \dots k_n} &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_n} \frac{f(t_1, \dots, t_n)}{\prod_{\nu=1}^n (t_\nu - z_\nu^0)^{k_\nu + 1}} dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

を得るから, あきらかに全微分可能も従う. □

実は, 条件 (B) から条件 (A) が導かれることが知られている (Hartogs の定理), すなわち正則性の必要十分条件としては (B) のみでよい.

点 $(a, b_1, b_2) \in \mathbf{C}^3$ のまわりで正則な $f(z, u, v)$, $g(z, u, v)$ が与えられたとする. このときつぎの2つの条件がみたされるように正数 r, ρ, M がとれる.

(C1) 閉多重円板 $\Delta : |z - a| \leq r, |u - b_1| \leq \rho, |v - b_2| \leq \rho$ をその内部に含むある領域で $f(z, u, v)$, $g(z, u, v)$ は正則である.

(C2) Δ で $|f(z, u, v)| \leq M, |g(z, u, v)| \leq M$ が成り立つ.

このとき Proposition A.1 の証明中で述べたように, Δ の内部 Δ^0 で $f(z, u, v)$, $g(z, u, v)$ はべき級数

$$f(z, u, v) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} f_{jkl} (z - a)^j (u - b_1)^k (v - b_2)^l, \quad (1)$$

$$g(z, u, v) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} g_{jkl} (z - a)^j (u - b_1)^k (v - b_2)^l \quad (2)$$

に展開される. また同じく証明中の係数の積分表示式より

$$|f_{jkl}| \leq Mr^{-j} \rho^{-k-l}, \quad |g_{jkl}| \leq Mr^{-j} \rho^{-k-l} \quad (A.1)$$

をみたす. さて Δ^0 ($\ni (a, b_1, b_2)$) において微分方程式

$$\begin{aligned} u' &= f(z, u, v), \\ v' &= g(z, u, v) \end{aligned} \quad (A.2)$$

を考える. このとき

Theorem A.2. 初期条件 $\varphi(a) = b_1, \psi(a) = b_2$ をみたす (A.2) の解 $u = \varphi(z), v = \psi(z)$ は唯一存在し, $|z - a| < r(1 - e^{-\rho/(3Mr)})$ で正則ある.

Proof. $a = b_1 = b_2 = 0$ の場合を考えれば十分である. 実際

$$\begin{aligned} f(z, u, v) &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} f_{jkl} z^j u^k v^l, \\ g(z, u, v) &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} g_{jkl} z^j u^k v^l \end{aligned} \quad (A.3)$$

を右辺とする方程式の $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ をみたす解 $\varphi(z), \psi(z)$ に対して, $\hat{\varphi}(z) := b_1 + \varphi(z - a), \hat{\psi}(z) := b_2 + \psi(z - a)$ とおけばこれはもとの一般の方程式 (A.2) の解であり初期条件 $\hat{\varphi}(a) = b_1, \hat{\psi}(a) = b_2$ をみたしているからである. 従って以下 (A.2) の右辺が (A.3) で与えられているとす

る．このような仮定のもとで $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ をみたす解は存在したとすれば

$$\varphi(z) = \sum_{i \geq 1} c_i z^i, \quad \psi(z) = \sum_{i \geq 1} d_i z^i \quad (\text{A.4})$$

とおける．証明すべきことは，係数 c_i, d_i ($i \geq 1$) が一意的にきまること，さらにこの級数が定理にいうような領域で収束することの2点である．(A.4) を (A.3) を右辺にもつ (A.2) に代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} i c_i z^{i-1} &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} f_{jkl} z^j \left(\sum_{i \geq 1} c_i z^i \right)^k \left(\sum_{i \geq 1} d_i z^i \right)^l, \\ \sum_{i \geq 1} i d_i z^{i-1} &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} g_{jkl} z^j \left(\sum_{i \geq 1} c_i z^i \right)^k \left(\sum_{i \geq 1} d_i z^i \right)^l. \end{aligned}$$

これらの式の両辺の z^{i-1} ($i \geq 1$) の係数を比較し，対称性を考慮すれば

$$\begin{aligned} i c_i &= P_i(f_{jkl}, c_p, d_q; \max\{j+k+l, p, q\} \leq i-1), \\ i d_i &= P_i(g_{jkl}, c_p, d_q; \max\{j+k+l, p, q\} \leq i-1) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

を得る．ここで $P_i(\xi_{jkl}, \gamma_p, \delta_q; \dots)$ は $\max\{j+k+l, p, q\} \leq i-1$ なる変数 $\xi_{jkl}, \gamma_p, \delta_q$ の正整数を係数とする多項式である．特に

$$c_1 = f_{000}, \quad d_1 = g_{000}$$

であり， c_i, d_i ($i \geq 2$) も (A.5) により一意的にきまってゆく．よって $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ をみたす解は存在すれば唯一つである．このようにして係数のきまる形式解 $\sum_{i \geq 1} c_i z^i, \sum_{i \geq 1} d_i z^i$ の収束性をいうのには優級数の方法を使う．領域 $|z| < r, |u| < \rho, |v| < \rho$ において

$$F(z, u, v) := \frac{M}{(1-z/r)(1-u/\rho)(1-v/\rho)} = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} M r^{-j} \rho^{-k-l} z^j u^k v^l$$

と展開される関数 $F(z, u, v)$ を右辺とする方程式

$$\begin{aligned} u' &= F(z, u, v), \\ v' &= F(z, u, v) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

を考える．この方程式については，初期条件 $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ をみたす解 $u = \Phi(z)$, $v = \Psi(z)$ は $(\Phi(z) - \Psi(z))' = 0$ を考慮して

$$\Phi(z) = \Psi(z) = \sum_{i \geq 1} C_i z^i \quad (\text{A.7})$$

とおけるが，その係数も上と同様の議論より

$$iC_i = P_i(Mr^{-j}\rho^{-k-l}, C_p, C_q; \max\{j+k+l, p, q\} \leq i-1)$$

によりきまる．特に $C_1 = M$ である． $|c_1| = |f_{000}| \leq M$, $|d_1| = |g_{000}| \leq M$ そして (A.1) および $P_i(\dots)$ の係数がすべて正であることに注意するとすべての i について

$$|c_i| \leq C_i, \quad |d_i| \leq C_i$$

が成り立つことが帰納的に証明できる．よって $\Phi(z) = \Psi(z) = \sum_{i \geq 1} C_i z^i$ の収束域では $\varphi(z)$, $\psi(z)$ も収束する．その収束域を求めよう．(A.6) より $u = \Phi(z)$ は

$$u' = F(z, u, u) = \frac{M}{(1 - z/r)(1 - u/\rho)^2}$$

の $\Phi(0) = 0$ をみたす解である．これを解けば

$$\Phi(z) = \rho \left[1 - \left(1 + (3Mr/\rho) \log(1 - z/r) \right)^{1/3} \right]$$

を得る．ここで $\log \zeta$, $Z^{1/3}$ の分枝は $\zeta = 1$, $Z = 1$ でそれぞれ 0, 1 となるものをとる．すると $\Phi(z)$ は円板 $|z| \leq r(1 - e^{-\rho/(3Mr)})$ で正則となるから $\sum_{i \geq 1} C_i$, 従って $\sum_{i \geq 1} c_i$, $\sum_{i \geq 1} d_i$ もこの円内で収束する． $\square$

Remark A.1. Theorem A.2 は n -連立系に対してもそのまま成立する．その場合収束域は $|z - a| < r(1 - e^{-\rho/((n+1)Mr)})$ である．

Remark A.2. (A.2) が線形の場合，つまり $(k, l) \neq (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ に対して $f_{jkl} = g_{jkl} = 0$ となっている場合には対応する $u = \Phi(z)$ のみたす方程式は

$$u' = F(z, u, u) = \frac{M(1 + 2u/\rho)}{1 - z/r}$$

となる．これを解けば

$$\Phi(z) = (\rho/2) \left((1 - z/r)^{-2rM/\rho} - 1 \right)$$

となり解の収束域は方程式の定義されている領域 $|z| < r$ に一致する. 従って線形方程式の場合は Theorem A.2 における解の正則域は $|z - a| < r$ である.

Theorem A.3. (Painlevé) γ を z -平面内の長さ有限の曲線とし, その終点を a とする. (A.2) の解 $u = \varphi_*(z)$, $v = \psi_*(z)$ がつぎの条件をみたすとする.

- (i) $\gamma \setminus \{a\}$ 上の各点において $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ は有理型である.
- (ii) ある点列 $\{a_\nu\} \subset \gamma$, $a_\nu \rightarrow a$ が存在して, $\varphi_*(a_\nu) \rightarrow b_1$, $\psi_*(a_\nu) \rightarrow b_2$. このとき $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ は $z = a$ で正則で $\varphi_*(a) = b_1$, $\psi_*(a) = b_2$ をみたす.

Proof. $f(z, u, v)$, $g(z, u, v)$ に関する (a, b_1, b_2) のまわりでの条件 (C1), (C2) を思い出す. 条件 (ii) より, ν_0 が十分大きければ, すべての $\nu \geq \nu_0$ に対して閉円板

$$\Delta_\nu : |z - a_\nu| \leq r/2, |u - \varphi_*(a_\nu)| \leq \rho/2, |v - \psi_*(a_\nu)| \leq \rho/2$$

は $\Delta_\nu \subset \Delta$ をみたす. よって $\nu \geq \nu_0$ のとき Δ_ν 内で $|f(z, u, v)| \leq M$, $|g(z, u, v)| \leq M$ が成立する. (C1), (C2) は Δ を Δ_ν で置きかえてもみたされることに注意する. 領域 Δ_ν および初期値 $(a_\nu, \varphi_*(a_\nu), \psi_*(a_\nu))$ に対して Theorem A.2 を (特に解の一意性に注意して) 適用すれば $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ は

$$U_\nu : |z - a_\nu| < r_* := (r/2)(1 - e^{-\rho/(3Mr)})$$

において正則となる. この事実はすべての $\nu \geq \nu_0$ について成り立ち, r_* は ν に無関係である. 十分大きな ν に対しては $U_\nu \ni a$ であるから $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ は $z = a$ においても正則となる. そして (ii) より $\varphi_*(a) = b_1$, $\psi_*(a) = b_2$ がいえる. $\square$

Remark A.3. Theorem A.3 は n -連立系に対しても成立する. また $n = 2$ の場合は $n = 1$ の場合を含む. 何となれば点 (a, b) のまわりで正則な関数 $f(z, u)$ を右辺とする方程式

$$u' = f(z, u)$$

の初期値問題 $u(a) = b$ は連立系

$$u' = f(z, u) + v, \quad v' = 0$$

の初期値問題 $u(a) = b$, $v(a) = 0$ と同値であるからである.

文献

第1章では Nevanlinna 理論の基本的な部分について解説したがこの部分を書くにあたりつぎの文献を参考にした.

1. W. K. Hayman : *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford (1964)
2. 小沢 満 : 近代函数論 I – 値分布の理論 –, 森北出版 (1976)
3. I. Laine : *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1993)

Nevanlinna 理論のさらに進んだあるいは詳しい話題については文献 [1], [2] を見よ. 多変数関数の Nevanlinna 理論については例えば

4. 小平邦彦 : Nevanlinna 理論, 東大数学教室セミナーノート (1974)
5. 落合卓四郎, 野口潤次郎 : 幾何学的関数論, 岩波書店 (1984)
6. 野口潤次郎 : 多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似, 共立出版 (2003)

を挙げておく.

第2章では 1 階と 2 階の非線形微分方程式について述べた. 1 階非線形方程式の特異点に関する部分については

7. 福原満洲雄 : 常微分方程式, 岩波全書 (1950)
8. M. Hukuhara, T. Kimura and T. Matuda : *Équations Différentielles Ordinaires du Premier Ordre dans le Champ Complexe*, Math. Soc. Japan, Tokyo (1961)

を参考にした. Malmquist-Yoshida の定理については

9. K. Yosida : *A generalization of Malmquist's theorem*, Japan J. Math. **9** (1933), 253–256
10. K. Yosida : *A note on Riccati's equation*, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **15** (1933), 227–237

を参照せよ. Painlevé 方程式全般への入門としては

11. 岡本和夫 : パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究録 (1985)

を挙げておく. α -method により Painlevé 方程式を導く計算については

12. P. Painlevé : *Œuvres de Paul Painlevé tom. III*, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (1975)
13. E. L. Ince : *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York (1956)

を見よ. Painlevé property の福原による証明は

14. K. Okamoto and K. Takano : *The proof of the Painlevé property by Masuo Hukuhara* (Esperanto), Funkcial. Ekvac. **44** (2001), 201–217

に紹介されている. 他の Painlevé 方程式に対する Painlevé property の証明は例えば

15. V. I. Gromak, I. Laine and S. Shimomura : *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*, Walter de Gruyter, Berlin-New York (2002)
16. S. Shimomura : *Proofs of the Painlevé property for all Painlevé equations*, Japan. J. Math. **29** (2003)

を見よ. また Painlevé property はそれと同値な Hamilton 系の解についての defining manifolds の葉層構造の一様性という観点からも証明できる. それについては

17. K. Takano : *Defining manifolds for Painlevé equations, Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-linear*, 261–269, Kyoto Univ. Press, Kyoto (2000)

を見よ. Painlevé 方程式 (II), (IV) の有理関数解については

18. Y. Murata : *Rational solutions of the second and the fourth Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac. **28** (1985), 1–32

により完璧に求められた. なおそこで用いられる Bäcklund 変換については [15] の他, 例えば

19. 野海正俊 : パンルヴェ方程式, 対称性からの入門, 朝倉書店 (2000)

に詳しい.

第3章の Painlevé 超越関数の増大度の評価については

20. S. Shimomura : *The first, the second and the fourth Painlevé transcendents are of finite order*, Proc. Japan Acad. Ser. A **77** (2001), 42–45

21. S. Shimomura : *Growth of the first, the second and the fourth Painlevé transcendents*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **134** (2003), 259–269

22. S. Shimomura : *Lower estimates for the growth of Painlevé transcendents*, Funkcial. Ekvac. **46** (2003), 287–295

に依った.

第4章で述べたような Painlevé 超越関数 (I), (II) の値分布についての研究は

23. H. Wittich : *Eindeutige Lösungen der Differentialgleichungen $w'' = P(z, w)$* , Math. Ann. **125** (1953), 355–365

24. H. Schubart : *Zur Wertverteilung der Painlevéschen Transcendenten*, Arch. Math. **7** (1956), 284–290

25. H. Schubart and H. Wittich : *Über die Lösungen der beiden ersten Painlevéschen Differentialgleichungen*, Math. Z. **66** (1957), 364–370

が最初である. なお Theorem 18.8 は

26. H. Kießling : *Zur Wertverteilung der Lösungen algebraischer Differentialgleichungen*, Dissertation, Fachbereich 3 Mathematik Technischen Universität Berlin (1996)

に依った. 他の Painlevé 超越関数について値分布については [15] を見よ.

付録に述べた解の存在定理の他, 複素領域における微分方程式に関する標準的な教科書としては [7] の他,

27. 高野恭一 : 常微分方程式, 朝倉書店 (1994)

がある. また

28. K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida : *From Gauss to Painlevé*, Vieweg, Braunschweig (1991)

には, Painlevé 方程式についてのここでふれなかった話題, Garnier 系, 超幾何関数に関する解説がある.