偏相関関数

井上昭彦
北海道大学大学院理学研究科

はじめに

偏相関関数は, 単位円上の直交多項式の理論において reflection 係数, Verblunsky 係数, Geronimus 係数, Shur 係数, Szegö 係数などいろいろな名前で呼ばれているものと本質的に同じものである. 時系列解析では基本的な概念であるが, 一方, 最近, Schrödinger 作用素のスペクトル解析との関連で, 数理物理学者にもよってもさかんに研究されている.

この講義ノートのテーマは, 偏相関関数の表現定理とその漸近挙動への応用である. まず, 第 1 章では, 偏相関関数に関する基本的な事柄を説明する. 第 2 章では, 偏相関関数の漸近挙動に関する数値計算例を見る. 第 3 章が, この講義ノートの主要部分で, 偏相関関数の表現定理とその漸近挙動の解析への応用について詳しく述べる. 第 4 章では, 偏相関関数と関係の深い有限の過去からの予測の係数 (略して有限予測係数) を考察する. 有限予測係数の表現定理とその種々の応用, 特に偏相関関数の別の表現定理を紹介する.

この講義ノートは, 2004 年に神戸大学で行った集中講義が基になっている. このような機会を与えてくださった樋口 保成教授と福山 克司教授に感謝したい. 講義に参加して下さった大学院生の方々のフィードバックは有用であった. 福山教授は, 原稿に対しても有益なコメントを下さった. これらの点についても感謝したい.

2005 年 1 月　札幌にて　　井上 昭彦

目 次

第1章　偏相関関数

1.1　定常過程

定常過程とは, 時間のずれに対してある種の定常性を持つ確率過程のことである. 強定常過程と弱定常過程の 2 つが代表的である. この講義では後者の弱定常過程を扱う.

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 Z に対し, その平均は次のように P についての積分で定義される:

$$E[Z] := \int_\Omega Z(\omega) P(d\omega)$$

(但し, 右辺の積分が定義される時).

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実確率変数列 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ を考える. 次を仮定する:

(1) $E[|X_n|^2] < \infty \quad (n \in \mathbf{Z})$　　(つまり, 2 次のモーメントを持つ),

(2) $E[X_n] = 0 \quad (n \in \mathbf{Z})$　(つまり平均が 0).

この時, $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ が**実弱定常過程** (あるいは実弱定常時系列) であるとは, 任意の $n, m, k \in \mathbf{Z}$ に対して,

$$E[X_{n+k} X_{m+k}] = E[X_n X_m] \qquad (n, m, k \in \mathbf{Z}).$$

が成り立つことである. これは,

$$E[X_n X_m] = \gamma(n-m) \quad (\text{つまり } n-m \text{ の関数})$$

と同値である. この式で定義される関数 $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ をこの実弱定常過程の**自己共分散関数** (autocovariance function) あるいは共分散関数 (covariance function) と言う.

この講義では, 簡単のため**平均 0 の実弱定常過程**を単に**実定常過程** あるいは単に**定常過程**と呼ぶことにする.

例 1. $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実確率変数列で, 次を満たすものとする: (1) $E[\xi_n \xi_m] = \delta_{nm}$; (2) $E[\xi_n] = 0 \quad (n \in \mathbf{Z})$. すると $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ は定常過程になる. $\{\xi_n\}$ はしばしば (離散時間の) **ホワイトノイズ** (white noise) と呼ばれる. 今, 定数 $r \in (-1, 1)$ に対して,

$$X_n := \sqrt{1-r^2}\{r^0\xi_n + r^1\xi_{n-1} + r^2\xi_{n-2} + \cdots + r^k\xi_{n-k} + \cdots\} \quad (n \in \mathbf{Z})$$

とおく. すると, $n \geq m$ に対して,

$$\begin{aligned}
E[X_n X_m] &= (1-r^2)E\left[\left\{\sum\nolimits_{k=-\infty}^{n} r^{n-k}\xi_k\right\}\left\{\sum\nolimits_{k=-\infty}^{m} r^{m-k}\xi_k\right\}\right] \\
&= (1-r^2)\sum_{k=-\infty}^{m} r^{(n-k)+(m-k)} \\
&= (1-r^2)\sum_{j=0}^{\infty} r^{n-m+2j} \qquad (j = m-k \text{ とおいた}) \\
&= r^{n-m}
\end{aligned}$$

となるので, $\{X_n\}$ は自己共分散関数 $\gamma(n) = r^{|n|}$ を持つ実定常過程であることが分かる.

命題 1.1. 実弱定常過程 $\{X_n\}$ の自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ は次の性質を持つ:

(1) (**偶**)　$\gamma(n) = \gamma(-n)$;

(2) (**正定値**)　すべての正整数 n とすべてのベクトル $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$ について, 次が成り立つ :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \gamma(i-j)\overline{a_j} \geq 0.$$

問 1. 上の命題を証明せよ.

1.2　定常過程の線形予測 (I)

本章のタイトルの「偏相関関数」の背景として, この節と次の節では, 実定常過程 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ に対する**線形予測**とは何かを説明する. 前節の最後で述べたように, 任意の n について $E[X_n] = 0$ が仮定されていることに注意せよ.

$n=2$ を現在時刻とし, $n=3$ を１つ先の未来の時刻とする．例えば, 2.1, 1.6, 1.8, をそれぞれ X_0, X_1, X_2 たちの観測値 (or 実現値) とする．この時, 未来の値 X_3 の最ももっともらしい値 (最良予測値) は何か? というのが, 素朴な予測問題である．

上の問題に対しては, 「最良」の意味にいろいろな解釈がありえる．ここでは, 「最良」を分散を最小化するという意味で解釈することにする．従って, 我々は次の最小化問題を考察する:

$$\min_{b_0,b_1,b_2\in\mathbf{R}} E[|X_3-(b_0X_0+b_1X_1+b_2X_2)|^2] \tag{1.1}$$

上の最小化問題 (1.1) の解 $(b_0,b_1,b_2)\in\mathbf{R}^3$ が求まったとする．この時, $b_0X_0+b_1X_1+b_2X_2$ は, 最小 2 乗法の意味での X_3 の予測値ということになる．b_0,b_1,b_2 は確率過程 $\{X_n\}$ の統計的な性質から決まる量である．現実の世界では一種の統計量として推定できるはずであるが, ここでは理論的に考えていくことにする．

例 2. 上の解が $b_0=0.5, b_1=-1.0, b_2=0.8$ と求まったとする．もし, 1.8, 1.6, 2.5 がそれぞれ X_0, X_1, X_2 たちの観測値ならば,

$$X_3 \text{ の (最良) 予測値} = 0.5\times 1.8-1.0\times 1.6+0.8\times 2.5=1.3$$

となる．

問 2. $b_0=0.5, b_1=-1.0, b_2=0.8$ で, X_0, X_1, X_2 たちの観測値がそれぞれ $-2.0, 3.0, 1.5$ のとき, X_3 の予測値は何か？　**答.** -2.8

1.3　定常過程の線形予測 (II)

引き続き, 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上に定義されている実定常過程 $\{X_n : n\in\mathbf{Z}\}$ に対する予測問題を考える．n を 1 以上の整数とする．$n-1$ を現在の時間とする．我々は, 一つ先の未来の値 X_n を, $X_0,\ldots,X_{n-1}$ の観測データを基に予測したい．最小 2 乗法の意味では, 最小化問題 (1.1) を一般化した次の問題を解くことになる:

$$\min_{b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\in\mathbf{R}} E[|X_n-(b_0X_0+b_1X_1+\cdots+b_{n-1}X_{n-1})|^2]. \tag{1.2}$$

この問題に対する基本的なアプローチは, L^2-理論を用いるというものである. 実確率変数の空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は次で定義される:

$$
\begin{aligned}
&L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \\
&\quad := \{X : X \text{ は } (\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ 上の実確率変数で } E[X^2] < \infty \text{ を満たす}\}.
\end{aligned}
$$

実ベクトル空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の内積 $(\cdot, \cdot)$ とノルム $\|\cdot\|$ をそれぞれ次のように定義する:

$$(X, Y) := E[XY], \qquad \|X\| := \sqrt{(X, X)}.$$

すると, よく知られているように, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は実ヒルベルト空間になる (関数解析または測度論の適当な教科書を見よ).

定義 1. $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$, に対し, $\{X_k : k = m, \ldots, n\}$ で張られる $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の閉部分空間を $H_{[m,n]}$ と書く:

$$H_{[m,n]} := \{b_m X_m + \cdots + b_n X_n : b_m, \ldots, b_n \in \mathbf{R}\}.$$

すると, 問題 (1.2) は次と同じである:

$$\min_{Y \in H_{[0,n-1]}} \|X_n - Y\|. \tag{1.3}$$

定義 2. $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$, に対し, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から $H_{[m,n]}$ への正射影作用素を $P_{[m,n]}$ と書く.

問題 (1.3) は, 閉部分空間 $H_{[0,n-1]}$ 上の点 Y で点 X_n に一番近いものを求めよ, という問題である. それは, X_n から $H_{[0,n-1]}$ に下ろした垂線の足に他ならない. 従って, 次の定理が得られる.

定理 1.2. 予測問題 (1.3) の解 Y は $Y = P_{[0,n-1]} X_n$ で与えられる.

こうして, L^2-空間上の線形な理論に話が帰着されるので, 問題 (1.1), (1.2), (1.3) の予測を**線形予測**と言う. つまり,

$$\text{線形予測} = \text{最小 2 乗法の意味の予測}$$

である.

問 3. X_0 が与えられたときの X_1 の線形予測 $P_{[0,0]} X_1$ を, $\gamma(0) = E[|X_0|^2]$ と $\gamma(1) = E[X_1 X_0]$ を用いて求めよ.

答. $P_{[0,0]} X_1 = b X_0$, $b \in \mathbf{R}$, と書ける. $X_1 - P_{[0,0]} X_0$ と X_0 は直交するから, $(X_1 - b X_0, X_0) = 0$ である. よって, $b = \gamma(1)/\gamma(0)$. すなわち,

$$P_{[0,0]} X_1 = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} X_0.$$

1.4　テプリッツ行列とユール–ウォーカー方程式

実定常過程 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ に対する予測問題 (1.3) の解 $Y = P_{[0,n-1]}X_n$ は $X_0, \ldots, X_{n-1}$ の一次結合であるから, 次の様に表わされる:

$$\phi_{n,1}X_{n-1} + \cdots + \phi_{n,n}X_0 = P_{[0,n-1]}X_n \tag{1.4}$$

($\phi_{n,k}$ の添え字 k の付け方に注意せよ). **(有限) 予測係数**と呼ばれる実係数 $\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,n}$ の求め方を考えよう.

$k = 1, \ldots, n$ に対し, (1.4) の両辺に X_{n-k} を掛けて平均を取ると, 次が得られる:

$$\phi_{n,1}(X_{n-1}, X_{n-k}) + \cdots + \phi_{n,n}(X_0, X_{n-k}) = (P_{[0,n-1]}X_n, X_{n-k}).$$

正射影作用素は対称作用素であり, $X_{n-k} \in H_{[0,n-1]}$ であるから, 右辺は次のように変形できる:

$$(P_{[0,n-1]}X_n, X_{n-k}) = (X_n, P_{[0,n-1]}X_{n-k}) = (X_n, X_{n-k}) = \gamma(k).$$

よって, 次が得られる:

$$\phi_{n,1}\gamma(k-1) + \cdots + \phi_{n,k}\gamma(0) + \cdots \phi_{n,n}\gamma(-n+k) = \gamma(k).$$

まとめると, 有限予測係数 $\phi_{n,j}$ に対する次の連立一次方程式が得られる:

$$T_n \begin{pmatrix} \phi_{n,1} \\ \phi_{n,2} \\ \cdots \\ \phi_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \cdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

ただし,

$$T_n := \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \gamma(-2) & \cdots & \gamma(-n+1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots & \cdots \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma(n-1) & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

である. 行列 T_n は**テプリッツ** (Toeplitz) 行列と呼ばれる. また, (1.5) は**ユール–ウォーカー** (Yule–Walker) 方程式と呼ばれる.

$\gamma(k)=\gamma(-k)$ であるから, テプリッツ行列 T_n は実対称行列である. また, $\gamma(\cdot)$ が正定値関数であることは, すなわち T_n が正定値行列であることを意味する.

我々は, さらに定常過程 $\{X_n\}$ に対する次の条件を考える:

$$\text{すべての } n \in \mathbf{N} \text{ に対し } T_n \text{ は正則である.} \tag{1.6}$$

この条件のもとでは, 有限予測係数 $\phi_{n,1},\ldots,\phi_{n,n}$ は上の Yule–Walker 方程式 (1.5) の解として一意に決まる.

1.5　ヘルグロッツの定理

関数 $\gamma:\mathbf{Z}\to\mathbf{C}$ が**正定値 (positive definite)** であるとは, すべての正整数 n, すべてのベクトル $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbf{C}^n$ について, 次が成り立つことである:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i\gamma(i-j)\overline{a_j} \geq 0. \tag{1.7}$$

次はよく知られている.

定理 1.3 (自己共分散関数の特徴付け). 実数値関数 $\gamma:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ がある平均 0 の実定常過程の自己共分散関数であるための必要十分条件は, γ が正定値関数であることである.

以下, 区間 $(-\pi,\pi]$ 上の測度をしばしば考えるが, この場合 $-\pi$ と π は同一視する. $(-\pi,\pi]$ 上の測度が**対称**であるとは, Borel 可測集合 $A\subset(-\pi,\pi]$ に対して

$$\mu(A)=\mu(-A) \quad \text{ただし, } -A:=\{-a : a\in A\}$$

が成り立つことである.

次の定理もよく知られている.

定理 1.4 (Herglotz (ヘルグロッツ), 正定値関数の特徴付け). 関数 $\gamma:\mathbf{Z}\to\mathbf{C}$ が正定値関数であるための必要十分条件は,

$$\gamma(n)=\int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda}\mu(d\lambda) \qquad (n\in\mathbf{Z}) \tag{1.8}$$

が成り立つことである．ここで, μ は $(-\pi, \pi]$ 上の 0 でない有限測度 (i.e., $\mu(-\pi, \pi] < \infty$) である．また, この正定値関数 $\gamma(\cdot)$ と $(-\pi, \pi]$ 上の 0 でない有限測度 μ の間の対応は一対一である．さらに, $\gamma(\cdot)$ が実数値であることと μ が対称であることは, 同値である．

上の二つの定理により, 実定常過程 $\{X_n\}$ に対し, $(-\pi, \pi]$ 上の対称な (繰り返すが $-\pi$ と π は同一視する) 有限測度 μ が一意に定まるが, この μ を $\{X_n\}$ の (あるいは $\{X_n\}$ の自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ の) **スペクトル測度**という．特に, μ が $(-\pi, \pi]$ 上のルベーグ測度 $d\lambda$ について絶対連続な時,

$$\mu = \Delta(\lambda) d\lambda,$$

と書ける．ただし, Δ は $(-\pi, \pi]$ 上の非負で偶の可積分関数である, i.e.,

$$\Delta(\lambda) \geq 0, \quad \Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(\lambda) d\lambda < \infty.$$

この Δ を定常過程 $\{X_n\}$ の (あるいは $\{X_n\}$ の自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ の) **スペクトル密度 (関数)** という．

例 3. $r \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ とする．関数 $\gamma(\cdot)$ を $\gamma(n) = r^{|n|}$ とおくと, 例 1 で見たように, $\gamma(\cdot)$ は自己共分散関数である．次が成り立つ:

$$r^{|n|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\lambda}|^2} d\lambda \qquad (n \in \mathbf{Z}) \tag{1.9}$$

これより, $\gamma(n) = r^{|n|}$ は, スペクトル密度

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\lambda}|^2}$$

を持つことが分かる．

問 4. 上の (1.9) を示せ．

ヒント. 次の等式を用いて関数論の留数計算を行え*:*

$$\frac{1 - r^2}{|1 - rz|^2} = \frac{r}{z - r} + \frac{1}{1 - rz} \qquad (z = e^{i\lambda}).$$

1.6　非退化の条件

定義 3. $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ が**狭義正定値** (strictly positive definite) とは, 正定値であって, さらに (1.7) で等号が成り立つのが $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$ の場合に限ることを言う.

前々節の条件 (1.6) は, 次のように幾通りかに言い換えることができる.

定理 1.5. 実定常過程 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ の自己共分散関数, スペクトル測度, テプリッツ行列を, それぞれ $\gamma(\cdot)$, μ, T_n とする. 次は同値である:

(1) すべての $n = 1, 2, 3 \ldots$ について T_n は正則である (i.e., (1.6));

(2) $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ は一次独立である;

(3) $\gamma(\cdot)$ は狭義正定値である;

(4) μ の台は無限集合である (つまり, μ はディラック測度の有限 1 次結合ではない).

証明は省略する.

次の定義はこの講義だけの用語である.

定義 4. 上の定理の条件のどれか一つ (従ってすべて) が成り立つとき, 定常過程 $\{X_n\}$, あるいは自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$, あるいはスペクトル測度 μ は, **非退化である**と言う.

もし, スペクトル測度が密度を持てば, 上の定理の (4) が成り立つから非退化である. 特に, 例 3 より, $\gamma(n) = r^{|n|}$ は非退化である.

例 4. Z, Z' を平均が 0, 分散が 1 の二つの実確率変数とし, $E[ZZ'] = 0$ を仮定する. $\lambda_1 \in (-\pi, \pi]$ に対し, 次の様におく:

$$X_n = \cos(n\lambda_1)Z + \sin(n\lambda_1)Z' \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

すると, $n, m \in \mathbf{Z}$ に対して,

$$E[X_n X_m] = \cos(n\lambda_1)\cos(m\lambda_1) + \sin(n\lambda_1)\sin(m\lambda_1) = \cos\{(n-m)\lambda_1\}$$

となるから, $\{X_n\}$ は, 自己共分散関数 $\gamma(n) = \cos(n\lambda_1)$ を持つ実定常過程であることが分かる.

$$\cos(n\lambda_1) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} \tfrac{1}{2}\{\delta_{-\lambda_1}(d\lambda) + \delta_{\lambda_1}(d\lambda)\}$$

より, スペクトル測度は, $\frac{1}{2}\{\delta_{-\lambda_1} + \delta_{\lambda_1}\}$ である. これは, 退化した例である.

1.7 レビンソン–ダービンのアルゴリズム

この節では, 実定常過程 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ は, 非退化と仮定する.
$X_0, \ldots, X_{n-1}$ が与えられた時の X_n の線形予測

$$P_{[0,n-1]}X_n = \phi_{n,1}X_{n-1} + \cdots + \phi_{n,n}X_0$$

の予測係数 $\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,n}$ は, Yule–Walker 方程式 (1.5) の一意解として決まる. $\gamma(0), \ldots, \gamma(n)$ が与えられたとして, 予測係数 $\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,n}$ を求めるのに (1.5) を普通に解くと, その計算量は $O(n^3)$ である. しかし, 次のアルゴリズムを用いると $O(n^2)$ の計算量で済む.

レビンソン–ダービン (Levinson–Durbin) アルゴリズム

$$v_0 = \gamma(0), \qquad \phi_{1,1} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}, \tag{1.10}$$

$$\phi_{n,n} = \frac{1}{v_{n-1}}\left[\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1}\phi_{n-1,j}\gamma(n-j)\right] \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1.11}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{n,1} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \phi_{n,n}\begin{bmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{bmatrix} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1.12}$$

$$v_n = v_{n-1}[1 - \phi_{n,n}^2] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.13}$$

このアルゴリズムは, 1.11 節で, 単位円上の直交多項式に関する議論を用いて導く. 単位円上の直交多項式の理論では, この Levinson–Durbin アルゴリズムは, Szegö の名前を冠して呼ばれている (Szegö recurrences など).

$\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2), \ldots$ の値が与えられると, Levinson–Durbin アルゴリズムにより次の順序で予測係数 $\phi_{n,k}$ の値が求まっていく:

$$\begin{aligned} v_0, \phi_{1,1} \;\to\; v_1 &\to \phi_{2,2} \;\to\; \phi_{2,1}, v_2 \\ &\to \phi_{3,3} \;\to\; \phi_{3,1}, \phi_{3,2}, v_3 \\ &\to \phi_{4,4} \;\to\; \phi_{4,1}, \phi_{4,2}, \phi_{4,3}, v_4 \\ &\to \phi_{5,5} \;\to\; \cdots . \end{aligned}$$

このプロセスで平行して求まる量 $v_0, v_1, v_2, \ldots$ の意味は次の**平均 2 乗予測誤差**である:

$$v_n = \|X_n - P_{[0,n-1]}X_n\|^2 = E\left[(X_n - P_{[0,n-1]}X_n)^2\right] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

この事実も, 1.11 節で示す.

非退化の条件は, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し $X_0, X_1, \ldots, X_n$ が一次独立であることを意味するので,

$$v_n > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成り立つ. 実際, もし $v_n = 0$ とすると

$$X_n = P_{[0,n-1]}X_n = X_0, \ldots, X_{n-1} \text{ の一次結合}$$

となって矛盾である. このことと (1.13) より, 次が分かる:

命題 1.6. 非退化の実定常過程の偏相関関数の値の列 $\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \phi_{3,3}, \ldots$ は, 絶対値が 1 より小さい実数の列である. すなわち, 次が成り立つ:

$$-1 < \phi_{n,n} < 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

問 5. $r \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ とする. 自己共分散関数 $\gamma(n) = r^{|n|}$ を考える. 帰納法で次を示せ:

$$\phi_{n,1} = r \quad (n \geq 1), \quad \phi_{n,2} = \cdots = \phi_{n,n} = 0 \quad (n \geq 2),$$
$$v_0 = 1, \quad v_1 = v_2 = \cdots = 1 - r^2.$$

これより, $n \geq 1$ に対し, 次が分かる (一種のマルコフ性):

$$P_{[0,n-1]}X_n = rX_{n-1}, \qquad \|X_n - P_{[0,n-1]}X_n\|^2 = 1 - r^2.$$

答. $v_0 = \gamma(0) = 1$. $\phi_{1,1} = \gamma(1)/\gamma(0) = r$. $v_1 = v_0(1 - \phi_{1,1}^2) = 1 - r^2$.

$$\phi_{2,2} = \frac{1}{v_1}\left[\gamma(2) - \phi_{1,1}\gamma(1)\right] = \frac{1}{1 - r^2}\left[r^2 - r \cdot r\right] = 0.$$

また, $\phi_{2,1} = \phi_{1,1} - \phi_{2,2}\phi_{1,1} = r$. さらに, $v_2 = v_1(1 - \phi_{2,2}^2) = 1 - r^2$.

$n \geq 3$ に対し,

$$(\phi_{n-1,1}, \phi_{n-1,2}, \ldots, \phi_{n-1,n-1}) = (r, 0, \ldots, 0), \quad v_{n-1} = (1 - r^2)$$

を仮定する. すると,

$$\phi_{n,n} = \frac{1}{v_{n-1}}\left[\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1}\phi_{n-1,j}\gamma(n-j)\right] = \frac{1}{1-r^2}\left[r^n - r\cdot r^{n-1}\right] = 0.$$

よって, $v_n = v_{n-1}(1-\phi_{n,n}^2) = v_{n-1} = 1-r^2$. また,

$$\begin{bmatrix}\phi_{n,1}\\ \phi_{n,2}\\ \vdots\\ \phi_{n,n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_{n-1,1}\\ \phi_{n-1,2}\\ \vdots\\ \phi_{n-1,n-1}\end{bmatrix} - \phi_{n,n}\begin{bmatrix}\phi_{n-1,n-1}\\ \phi_{n-1,n-2}\\ \vdots\\ \phi_{n-1,1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

従って, 数学的帰納法により主張は証明された.

1.8 偏相関関数

定義 5. $m,n\in\mathbf{Z}$, $m\le n$, に対し, $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ から $H_{[m,n]}$ の直交補空間 $H_{[m,n]}^{\perp}$ への正射影作用素を $P_{[m,n]}^{\perp}$ と書く, i.e., $P_{[m,n]}^{\perp}Z = Z - P_{[m,n]}Z$.

非退化の条件を満たす実定常過程 $\{X_n : n\in\mathbf{Z}\}$ を考える. X_n の線形予測

$$P_{[0,n-1]}X_n = \phi_{n,1}X_{n-1} + \cdots + \phi_{n,n}X_0$$

における X_0 の係数 $\phi_{n,n}$ は, 次の定理が示すように特別な意味を持つ.

定理 1.7. $n\ge 2$ に対し, 次が成り立つ:

$$\phi_{n,n} = \frac{(P_{[1,n-1]}^{\perp}X_0, P_{[1,n-1]}^{\perp}X_n)}{\|P_{[1,n-1]}^{\perp}X_0\|\cdot\|P_{[1,n-1]}^{\perp}X_n\|}. \tag{1.14}$$

この定理は, 1.11 節において証明する.

(1.14) において,

$$\begin{aligned}P_{[1,n-1]}^{\perp}X_0 &= X_0 - P_{[1,n-1]}^{\perp}X_0\\ &= X_0 \text{ から } X_1,\ldots,X_{n-1} \text{ たちの影響を取り去った残り}\end{aligned}$$

であり, $P_{[1,n-1]}^{\perp}X_n$ についても同様である. 従って, (1.14) の右辺は, X_0 と X_n から $X_1,\ldots,X_{n-1}$ たちの影響を取り去った残りのものの間の相関係数を表している. それは, 多変量解析の分野では, 「X_0 と X_n の間の偏

相関係数」と呼ばれる．このため, (1.14) の右辺は, n の関数と見て**偏相関関数** (partial autocorrelation function) と呼ばれる．上の定理は,「$\phi_{n,n}$ は偏相関関数に一致する」という主張である．

偏相関関数は, 単位円上の直交多項式の理論で reflection 係数あるいは Verblunsky 係数などの名前で呼ばれているものと本質的に同じである．例えば, Barry Simon らは Verblunsky 係数と呼び ([DK], [DKS], [S1, S2]), Golinskii らは reflection 係数と呼んでいる ([GI], [GN]).

1.9　自己共分散関数と偏相関関数の一対一対応

つぎの $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ のクラス Γ を考える:

$$\Gamma := \{\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} : \text{狭義正定値関数}\}.$$

定理 1.3, 1.4 により, 次のように言ってもよい:

$$\Gamma = \{\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} : \text{非退化な実定常過程の自己共分散関数}\}.$$

各 $\gamma \in \Gamma$ に対し, 対応する偏相関関数 $(\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \phi_{3,3}, \dots) \in \Pi$ が定まる．ここで, Π は次のように絶対値が 1 より小の実数列の全体である:

$$\Pi := \{(a_1, a_2, a_3, \dots) : -1 < a_n < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)\}.$$

具体的には, $\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2), \dots$ から (1.7) 節の Levinson–Durbin アルゴリズムにより $\phi_{n,n} \in (-1, 1)$ $(n = 1, 2, \dots)$ が求まる．

ここで発想を変えて, 先に絶対値が 1 より小の実数列

$$(\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \phi_{3,3}, \dots) \in \Pi$$

を任意に取ってみる．さらに 正の数 $\gamma(0)$ も任意に取る．そして, Levinson–Durbin アルゴリズムを次の様に変形して走らせて見る．

Levinson–Durbin アルゴリズム (変形版)

$$v_0 = \gamma(0), \quad v_n = \gamma(0) \prod_{k=1}^{n} [1 - \phi_{k,k}^2] \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{1.15}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{n,1} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \phi_{n,n} \begin{bmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{bmatrix} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1.16}$$

$$\gamma(1) = \gamma(0)\phi_{1,1}, \tag{1.17}$$

$$\gamma(n) = \phi_{n,n} v_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \gamma(n-j) \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1.18}$$

まず, (1.15) により $v_0, v_1, v_2, \ldots$ が求まり, 一方 (1.16) により, $\phi_{n,k}$ が

$$\begin{aligned} &\phi_{2,1} \\ \to\ &\phi_{3,1}, \phi_{3,2} \\ \to\ &\phi_{4,1}, \phi_{4,2}, \phi_{4,3} \\ \to\ &\phi_{5,1}, \phi_{5,2}, \phi_{5,3}, \phi_{5,4} \\ \to\ &\cdots \end{aligned}$$

の様に求まる. 従って数列 $\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3), \ldots$ が, (1.18) により求まっていく.

こうして $(\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \phi_{3,3}, \ldots) \in \Pi$ と $\gamma(0) \in (0, 1)$ を与えると, Levinson–Durbin アルゴリズムから数列

$$\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2), \ldots$$

が求まるが, さらに $\gamma(-n) = \gamma(n)$ によりこれを $\mathbf{Z}$ 上の偶関数に拡張する. この時「γ は狭義正定値関数であろうか?」言い換えると「$\gamma \in \Gamma$ であろうか?」という素朴な疑問が生じる. 実は, 次の結果にあるようにその答えは Yes である.

定理 1.8. $(\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \phi_{3,3}, \ldots) \in \Pi$ と $\gamma(0) \in (0, 1)$ から Levinson–Durbin アルゴリズムにより求まる $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ は, Γ に属する. そして, γ に対応する偏相関関数は, $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ である.

定理 1.9. $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対し, それらに対応する偏相関関数が一致するための必要十分条件は,

$$\text{ある正の定数 } c \text{ があって } \gamma'(n) = c\gamma(n) \qquad (n \in \mathbf{Z}) \tag{1.19}$$

が成り立つことである.

問 6. 上の定理の十分性を示せ.

ヒント. Levinson–Durbin アルゴリズムを見れば分かる. あるいは定理 1.7 を使えばできる. その際, 自己共分散関数 γ を持つ実定常過程 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ に対し,

$$X'_n := c^{-1/2} X_n \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

とおけば, 定常過程 $\{X'_n\}$ の自己共分散関数 γ' は, $\gamma' = c\gamma$ を満たすことに注意せよ.

正規化した γ のクラス

$$\Gamma_0 := \{\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} : \text{偶かつ狭義正定値かつ } \gamma(0) = 1\}$$

を考えれば, 次のよう正確に一対一対応である.

定理 1.10. Levinson–Durbin アルゴリズムにより, $\gamma \in \Gamma_0$ と $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty} \in \Pi$ は 1:1 かつ onto に対応する.

正定値関数というのは特殊な数列である. 気まぐれに数列をとったとして, それはまず正定値にはならないだろうし, 従ってそれをある定常過程の自己共分散関数と見なすことはできないであろう. しかし, 上の結果から, 絶対値が 1 より小の数列を任意にとれば, それはある定常過程の偏相関関数と見なせる. 集合 Π が, 非退化な自己共分散関数の全体 (あるいは等式 (1.8) を通じて非退化な単位円上の確率測度全体) を parametrize していると見ることができる.

定理 1.8–1.10 の証明は省略する. [EGNZ], [P, Theorems 7.9 and 7.27] などを見よ. この基本的な結果が帰せられる人に関しては, 単位円上の直交多項式の分野では Favard, Verblunsky [V], Geronimus が挙げられ, 時系列の分野では Ramsey [Ra] が挙げられることが多いようである. ただし, 単位円上の直交多項式の分野では, $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ と γ との対応というより, $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ と (1.8) で決まる測度 (を単位円上の測度とみた) μ との対応とみる. また, μ は対称とは限らない測度で, $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ は絶対値が 1 より小の複素数列である. これは, 複素数値定常過程を考えることに対応する.

1.10 基本問題

次が, 偏相関関数に対する最も基本的な問題である.

基本問題. 自己共分散関数 $\gamma \in \Gamma$ とそれに対応する偏相関関数 $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty} \in \Pi$ について, γ あるいはそのスペクトル測度 μ の性質と $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ の性質の対応を述べる辞書を作成せよ.

例えば, Simon [S2] には, $\{\phi_{n,n}\}$ の性質から μ の性質を出すというタイプの主張などが, いろいろ述べられている. それらは, もうすぐ AMS から出版される彼の著書 [S3, S4] で, 詳しく議論されるようである. 上の基本問題を, Schrödinger 作用素 $H = -d^2/dx^2 + V$ (の離散版) のポテンシャル V と H のスペクトル測度との対応の類似と見て調べるのが, [S3, S4] の "major focus" であると, [S2] の Introduction の中で述べてある. 尚, Schrödinger 作用素と単位円上の直交多項式を結びつけるというアイデアは, Szegö に由来する. Damanik-Killip [DK] を参照せよ.

一方, 筆者や笠原 雪夫氏は, γ の情報から $\phi_{n,n}$ の $n \to \infty$ の漸近挙動を述べるというタイプの結果をいくつか示した ([I2]–[I4], [IK1, IK2]). これについては, 第 3, 4 章で触れるが, これも上の基本問題の範疇に属する.

このように, 上の基本問題に対しては, 最近になってある程度のことが分かって来ている. しかし, これに関する研究はまだまだこれからである, と言うのが正確な所であろう.

1.11 単位円上の直交多項式

1920 年頃セゲー (Szegö) により創始された単位円上の直交多項式の理論は, 純粋および応用の様々な分野に関係し, 現在も活発に研究が行われている. 上記の Barry Simon らの研究が, その一例である. この節では, 単位円上の直交多項式の枠組みを用いて Levinson–Durbin アルゴリズムを導く.

∂D を複素平面 $\mathbf{C}$ の単位円 $\{z : |z| = 1\}$ とし, D を $\mathbf{C}$ の単位開円板 $\{z : |z| < 1\}$ とする. $z \in \partial D$ は $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ と書け, これより

$$\overline{z} = e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$$

であることが分かる.

μ を ∂D 上の 0 でない有限測度とする, i.e., $0 < \mu(\partial D) < \infty$. ∂D 上の複素数値の 2 乗可積分関数の空間 $L^2(\partial D, d\mu)$ の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ノルムを $\|\cdot\|$ とする:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\partial D} f(z)\overline{g(z)} d\mu, \qquad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

定義 6. *$m, n \in \mathbf{Z}$, $m \le n$, に対し, $\{z^k : k = m, \dots, n\}$ で張られる $L^2(\partial D, d\mu)$ の閉部分空間を $L_{[m,n]}$ と書き, $L^2(\partial D, d\mu)$ から $L_{[m,n]}$ への正射影作用素を $P_{[m,n]}$ と書く.*

以下, 次を仮定する：

$$\mu \text{ の台 } \operatorname{supp} \mu \text{ は無限集合である.} \tag{1.20}$$

つまり, μ はディラック測度の有限 1 次結合ではないとする. この時, ∂D 上の関数列 $1, z, z^2, z^3, \dots$ は一次独立であることが分かる. この列にグラム–シュミット (Gram-Schmidt) の直交化を適用することにより, 単項複素多項式の列

$$\Phi_n(z) = z^n + \cdots \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で, 次のように互いに直交するものが一意に定まる:

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = 0 \qquad (n \ne m).$$

実際,

$$\Phi_0(z) = 1, \qquad \Phi_n(z) = z^n - P_{[0,n-1]} z^n \quad (n \ge 1) \tag{1.21}$$

とすればよい.

定義 7. *$n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し, 複素数 α_n を次で定める:*

$$\alpha_n := -\overline{\Phi_{n+1}(0)}. \tag{1.22}$$

実は, $\{\alpha_n\}$ は偏相関関数と実質的に同じものである (以下の (1.25) を見よ).

各 $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し, $L^2(\partial D, d\mu)$ 上の作用素

$$L^2(\partial D, d\mu) \ni f \mapsto f^* \in L^2(\partial D, d\mu)$$

を次のように定義する:

$$f^*(z) = z^n \overline{f(z)}.$$

この作用素 * は n に依存するので, この (n を明記しない) 記法はあまりよくないが, 慣習なのでここでも用いる. ∂D 上では $\bar{z} = 1/z$ であるから,

$$(f^*)^*(z) = z^n \overline{z^n \overline{f(z)}} = z^n z^{-n} f(z) = f(z)$$

となって, $(f^*)^* = f$ が分かる. また,

$$\langle f, g^* \rangle = \int_{\partial D} f(z) \overline{\{z^n \overline{g(z)}\}} d\mu = \int_{\partial D} g(z) \overline{\{z^n \overline{f(z)}\}} d\mu = \langle g, f^* \rangle = \overline{\langle f^*, g \rangle}$$

である. このことを * は**反ユニタリ (anti-unitary) 作用素**であると言う.

命題 1.11. n 次複素多項式 $Q_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ に対し, 同じ n に関する * を施すと, $Q_n^*(z) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n$ となる.

定理 1.12 (セゲーの回帰式). 次が成り立つ:

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{\alpha}_n \Phi_n^*(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1.23}$$

Proof. $\Phi_n(z)$ は単項多項式であるから, 命題 1.11 より $\Phi_n^*(0) = 1$ である. 従って, $N(z) = (\Phi_{n+1}^*(z) - \Phi_n^*(z))/z$ は n 次の多項式である. 言い換えると, $N(z) \in L_{[0,n]}$ である. $m = 0, 1, \dots, n-1$ に対し, * の反ユニタリ性, 命題 1.11 および

$$\Phi_{n+1} \perp L_{[0,n]}, \qquad \Phi_n \perp L_{[0,n-1]}$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}
\langle z^m, N(z) \rangle &= \langle z^{m+1}, \Phi_{n+1}^*(z) - \Phi_n^*(z) \rangle \\
&= \langle z^{m+1}, \Phi_{n+1}^*(z) \rangle - \langle z^{m+1}, \Phi_n^*(z) \rangle \\
&= \langle \Phi_{n+1}(z), z^{n+1-(m+1)} \rangle - \langle \Phi_n(z), z^{n-m-1} \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

であることが分かる. よって, $N(z) \perp L_{[0,n-1]}$ である. 以上のことより, ある $c \in \mathbf{C}$ があって $N(z) = -c\Phi_n(z)$ となる (後の都合でマイナスをつける). 従って,

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) - cz\Phi_n(z).$$

$n+1$ に関する両辺の * を取ると,

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{c}\Phi_n^*(z).$$

$z=0$ を代入すると, $c = -\overline{\Phi_{n+1}(0)} = \alpha_n$ となるので, こうして (1.23) が得られる. □

$n \in \{1,2,\dots\}$ に対し, $P_{[0,n-1]}z^n$ は $n-1$ 次多項式であった.

定義 8. $n = 1,2,3,\dots$ に対し, 複素係数 $\phi_{n,1}, \phi_{n,2}, \dots, \phi_{n,n}$ を次で定める:

$$P_{[0,n-1]}z^n = \phi_{n,1}z^{n-1} + \phi_{n,2}z^{n-2} + \dots + \phi_{n,n}.$$

(1.21) より次が成り立つ:

$$\Phi_n(z) = z^n - (\phi_{n,1}z^{n-1} + \phi_{n,2}z^{n-2} + \dots + \phi_{n,n}). \tag{1.24}$$

α_n の定義式 (1.22) より次が分かる:

$$\alpha_n = \overline{\phi_{n+1,n+1}} \qquad (n = 0,1,\dots). \tag{1.25}$$

セゲーの回帰式 (1.23) を係数の言葉で記述すると, 次の (1.12) と同じ形の等式が得られる:

定理 1.13. $n = 1,2,3,\dots$ に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{bmatrix} \phi_{n,1} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \phi_{n,n} \begin{bmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

次は, $\|\Phi_n\| \leftrightarrow v_n$ の対応により, (1.13) に対応する.

定理 1.14. 次が成り立つ

$$\|\Phi_{n+1}\|^2 = \|\Phi_n\|^2(1 - |\alpha_n|^2) \qquad (n = 0,1,2,\dots). \tag{1.27}$$

Proof. Φ_n^* は n 次多項式であるから, $\Phi_n^* \in L_{[0,n]}$ である. よって, $\Phi_n^* \perp \Phi_{n+1}$ である. 従って, (1.23) より

$$\|\Phi_{n+1}\|^2 + |\alpha_n|^2\|\Phi_n^*\|^2 = \|z\Phi_n\|^2$$

が成り立つ. しかし, ∂D 上では $|z| = 1$ であるから, $\|\Phi_n^*\| = \|z\Phi_n\| = \|\Phi_n\|$ である. よって, (1.27) が得られる. □

系 1.15. 次が成り立つ*:*

$$|\alpha_n| < 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1.28}$$

次のように $\gamma(\cdot)$ を定める:

$$\gamma(n) := \int_{\partial D} z^n d\mu \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

次が成り立つことは容易に分かる:

$$\langle z^n, z^m \rangle = \gamma(n-m) \qquad (n, m \in \mathbf{Z}), \tag{1.29}$$

$$\gamma(-n) = \overline{\gamma(n)} \qquad (n \in \mathbf{Z}). \tag{1.30}$$

次の結果は, それぞれ (1.10) と (1.11) に対応する.

定理 1.16. 次が成り立つ:

$$\|\Phi_1\|^2 = \gamma(0), \qquad \phi_{1,1} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}, \tag{1.31}$$

$$\phi_{n,n} = \frac{1}{\|\Phi_{n-1}\|^2} \left[\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j}\gamma(n-j) \right] \quad (n = 2, 3, \dots). \tag{1.32}$$

Proof. まず, $\|\Phi_1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \gamma(0)$ である. 次に, $P_{[0,0]}z = \phi_{1,1}$ であるから,

$$\phi_{1,1}\gamma(0) = \phi_{1,1}\langle 1, 1 \rangle = \langle P_{[0,0]}z, 1 \rangle = \langle z, P_{[0,0]}1 \rangle = \langle z, 1 \rangle = \gamma(1)$$

となり, $\phi_{1,1} = \gamma(1)/\gamma(0)$ が得られる. 最後に (1.32) を示そう. セゲーの回帰式と (1.25) より,

$$\phi_{n,n}\Phi^*_{n-1}(z) = z\Phi_{n-1}(z) - \Phi_n(z)$$

が成り立つ. よって $\Phi_n \perp \Phi^*_{n-1}$ を用いて,

$$\begin{aligned}
\phi_{n,n}\|\Phi^*_{n-1}(z)\|^2 &= \langle z\Phi_{n-1}(z) - \Phi_n(z), \Phi^*_{n-1}(z) \rangle \\
&= \langle z\Phi_{n-1}(z), \Phi^*_{n-1}(z) \rangle \\
&= \langle \Phi_{n-1}(z), z^{-1}\Phi^*_{n-1}(z) \rangle \\
&= \langle \Phi_{n-1}(z), z^{-1}(1 - \phi_{n-1,1}z - \cdots) \rangle \\
&= \langle \Phi_{n-1}(z), z^{-1} \rangle \\
&= \langle z\Phi_{n-1}(z), 1 \rangle \\
&= \langle z^n - \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} z^{n-j}, 1 \rangle \\
&= \gamma(n) - \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j}\gamma(n-j).
\end{aligned}$$

$\|\Phi^*_{n-1}(z)\| = \|\Phi_{n-1}(z)\|$ であるから, これで (1.32) が示された. □

$L_{[1,n-1]}$ の $L^2(\partial D, d\mu)$ における直交補空間 $L^{\perp}_{[1,n-1]}$ への正射影作用素を $P^{\perp}_{[1,n-1]}$ と書く, i.e.,

$$P^{\perp}_{[1,n-1]} f = f - P_{[1,n-1]} f \qquad (f \in L^2(\partial D, d\mu)).$$

定理 1.7 に対応する定理を示そう.

定理 1.17. $n \geq 2$ に対し, 次が成り立つ:

$$\phi_{n,n} = \frac{\langle P^{\perp}_{[1,n-1]} z^n, P^{\perp}_{[1,n-1]} 1 \rangle}{\|P^{\perp}_{[1,n-1]} z^n\| \cdot \|P^{\perp}_{[1,n-1]} 1\|}. \tag{1.33}$$

Proof. 定理 1.16 の証明より,

$$\phi_{n,n} = \frac{\langle \Phi_{n-1}(z), z^{-1}\Phi^*_{n-1}(z) \rangle}{\|\Phi_{n-1}(z)\|^2} = \frac{\langle z\Phi_{n-1}(z), \Phi^*_{n-1}(z) \rangle}{\|z\Phi_{n-1}(z)\| \cdot \|\Phi^*_{n-1}(z)\|}$$

が分かる. 従って,

$$z\Phi_{n-1}(z) = P^{\perp}_{[1,n-1]} z^n, \qquad \Phi^*_{n-1}(z) = P^{\perp}_{[1,n-1]} 1$$

を言えば十分である.

明らかに $z\Phi_{n-1}(z) \in L_{[1,n]}$ である. 一方, $m = 1, \ldots, n-1$ に対し,

$$\langle z\Phi_{n-1}, z^m \rangle = \langle \Phi_{n-1}, z^{m-1} \rangle = 0$$

であるから, $z\Phi_{n-1} \perp L_{[1,n-1]}$ である. よって, $z\Phi_{n-1}$ は $P^{\perp}_{[1,n-1]} z^n$ の定数倍であるが, 両式の z^n の係数は共に 1 であるから, $z\Phi_{n-1} = P^{\perp}_{[1,n-1]} z^n$ が分かる.

明らかに $\Phi^*_{n-1} \in L_{[0,n-1]}$ である. 一方, $m = 1, \ldots, n-1$ に対し,

$$\langle z^m, \Phi^*_{n-1} \rangle = \langle \Phi_{n-1}(z), z^{n-1-m} \rangle = 0$$

であるから, $\Phi^*_{n-1} \perp L_{[1,n-1]}$ である. よって, Φ^*_{n-1} は $P^{\perp}_{[1,n-1]} 1$ の定数倍であるが, 両式の定数項は共に 1 であるから, $\Phi^*_{n-1} = P^{\perp}_{[1,n-1]} 1$ が分かる. これで, 定理が証明された. □

以上の結果を定常過程の言葉に翻訳する方法について概説する. ここでは, $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ は平均 0 の複素弱定常過程とする. つまり, 複素数値確率変数列であって, 次が成り立つとする:

(1) $E[|X_n|^2] < \infty \quad (n \in \mathbf{Z})$,

(2) $E[X_n] = 0 \quad (n \in \mathbf{Z})$,

(3) $E[X_n \overline{X_m}] = \gamma(n-m)$ (つまり $n-m$ の関数).

自己共分散関数 $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ は正定値であるので, Herglotz の定理より

$$\gamma(n) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} \mu(d\lambda) \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

と書ける．定常過程は, スペクトル表示と呼ばれる次の形の表現を持つ (cf. [P, Section 5.3.3]):

$$X_n = \int_{(-\pi,\pi]} e^{in\lambda} Z(d\lambda) \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

ここで, Z は ランダム・スペクトル測度 と呼ばれるもので, 次を満たす:

$$E[Z(A)\overline{Z(B)}] = \mu(A \cap B).$$

H を $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ が $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において張る複素ヒルベルト空間とする．すると, 写像 $f \mapsto \int_{(-\pi,\pi]} f(e^{i\lambda}) Z(d\lambda)$ は, $L^2(\partial D, d\mu)$ から H へのヒルベルト空間としての同型写像になることが分かる．特に, $n \in \mathbf{Z}$ に対し, この同型写像で z^n は X_n に写像される．この同型写像により, $L^2(\partial D, d\mu)$ に関する命題が, 定常過程 $\{X_n\}$ に関する命題に翻訳される．例えば, (1.31), (1.32), (1.26), (1.27) を翻訳すると, Levinson–Durbin アルゴリズム (1.10)–(1.13) が得られる．

第2章　数値実験

2.1　長時間記憶過程の偏相関関数

1995 年頃, 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ が

$$\gamma(n) = \frac{1}{(1+|n|)^{1-2d}}, \qquad 0 < d < \frac{1}{2} \tag{2.1}$$

で具体的に与えられる定常時系列 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ に対し, その偏相関関数の漸近挙動を数値的に調べてみた．すると, 次の漸近挙動が観察された：

$$\phi_{n,n} \sim \frac{\text{const.}}{n} \qquad (n \to \infty). \tag{2.2}$$

(2.2) でおもしろいのは, n の肩の指数が d によらず 1 であることである．これは $0 < d < \frac{1}{2}$ の場合だけ起こり, $d < 0$ の場合には $\phi_{n,n}$ の減衰のオーダーは d に依存した．この $0 < d < \frac{1}{2}$ の場合は, 定常時系列 $\{X_n\}$ が $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma(n)| = \infty$ という意味で**長時間の記憶を持つ**という興味深い場合にあたる．

(2.1) の場合を含む長時間記憶モデルに対する (2.2) という現象の一般的な証明は, 次の章で与える．この章では, 上の観測を含む, 偏相関関数の漸近挙動に関するいろいろな数値実験の結果を紹介する．まず, 2.2 節では, Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程について説明する．これは, (2.2) という漸近挙動を持つ偏相関関数の形が具体的に分かる殆ど唯一の具体的な例である．2.3 節では, 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ を先に与えた上での偏相関関数 $\phi_{n,n}$ の漸近挙動に関する数値実験の結果を紹介する．2.4 節では, 逆に先に偏相関関数 $\phi_{n,n}$ を与えて, 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ の漸近挙動を数値的に調べる．これらの数値実験は, すべて Levinson–Durbin アルゴリズムを用いて行われる．

2.2　Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程

1.11 節で述べた基本問題については, もしも自己共分散関数 γ (あるいはスペクトル測度 μ) と偏相関関数 $\phi_{n,n}$ が共に具体的に分かるよい例があったならば, 状況の見通しをつけるのにも, あるいは場合によっては何らかの主張の証明にも, 役に立つことであろう. 残念ながら, そのようなよい例は殆どない. そのような中で, 唯一の例外が, この節で述べる Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程である.

差分パラメータ (differencing parameter) と呼ばれる定数 d は,

$$-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$$

を満たすとする. Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程とは, 平均 0 の実弱定常過程 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ であって, その自己共分散関数 $\gamma(n) = E[X_n X_0]$ が次で与えられるものである: ある正定数 σ に対し,

$$\gamma(n) = \sigma^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} |1 - e^{i\lambda}|^{-2d} \frac{d\lambda}{2\pi} \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

すなわち, 次のスペクトル密度 $\Delta(\lambda)$ を持つものである:

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{i\lambda}|^{-2d} \qquad (-\pi < \lambda < \pi). \tag{2.3}$$

「Fractional」は直訳すれば「分数べき」になるが, ここでは「整数でない」という意味である. ARIMA は「autoregressive integrated moving-average (自己回帰和分移動平均)」の略である. もっと一般に, $p, q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して Fractional ARIMA(p, d, q) 過程が定義できるが, それについては第 3 章で述べる. Fractional ARIMA 過程は, Granger-Joyeux [GJ] と Hosking [H] によって独立に導入された.

Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ の定義は (2.3) で尽きていて, 必要な性質はすべてここから導くことができる. しかし, Fractional ARIMA 過程の名前の由来は, $\{X_n\}$ の満たす次の分数べき確率差分方程式にあることを, 一応述べておく:

$$\nabla^d X_n = \sigma \xi_n \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

ここで, $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ は white noise で, $E[\xi_n] = 0$, $E[\xi_n \xi_m] = \delta_{nm}$ を満たす. また ∇ は, $\nabla X_m = X_m - X_{m-1}$ で定義される差分作用素である. ∇ の d 乗 ∇^d は, 形式的には二項展開

$$\nabla^d = (1 - B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{d}{j} B^j$$

を用いて定義すればよい. ただし, B は $BX_m = X_{m-1}$ で定義される後ろ向き移動作用素 (backward shift operator) である. 特に, fractional でない $d = 0$ の場合には, $\{X_n\}$ は white noise の定数倍である.

次の定理が示すように, Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程の偏相関関数は, 簡単な形で具体的に与えられる.

定理 2.1 ([H]). $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ とする. Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程の自己共分散関数 $\gamma(n)$ と偏相関関数 $\phi_{n,n}$ は, それぞれ次で与えられる:

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)^2},$$
$$\gamma(n) = \sigma^2 \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(n-d+1)} \cdot \frac{\Gamma(1-2d)\sin(\pi d)}{\pi} \qquad (n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0),$$
$$\phi_{n,n} = \frac{d}{n-d} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

特に, 偏相関関数が簡単な形 $d/(n-d)$ で特定されている所に注意せよ.

記号を用意する. 実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対し,

$$a_n \sim b_n \quad (n \to \infty)$$

とは,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

が成り立つこととする.

系 2.2. $d \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ とする. Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程の自己共分散関数 $\gamma(n)$ と偏相関関数 $\phi_{n,n}$ は, それぞれ次の漸近挙動を持つ:

$$\gamma(n) \sim \frac{1}{n^{1-2d}} \cdot \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)\sin(\pi d)}{\pi} \quad (n \to \infty), \tag{2.4}$$
$$\phi_{n,n} \sim \frac{d}{n} \quad (n \to \infty). \tag{2.5}$$

問 7. 定理 2.1 とスターリングの公式 $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-(1/2)}$ $(x \to \infty)$ を用いて, (2.4) を証明せよ.

問 8. Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程について, $\gamma(0) = 1$ となるように σ を定める. この時、次を示せ:

$$\gamma(n) = \frac{\Gamma(n+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(n-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k-1+d}{k-d} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\gamma(n) \sim \frac{1}{n^{1-2d}} \cdot \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} \quad (n \to \infty).$$

$0 < d < \frac{1}{2}$ ならば, (2.4) により Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程の自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ は,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma(n)| = \infty$$

を満たす. すなわち, $0 < d < \frac{1}{2}$ の Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程は長時間記憶を持つ. $-\frac{1}{2} < d < 0$ の場合には, (2.4) より $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma(n)| < \infty$ となり長時間記憶は持たないが, 一方, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma(n) = 0$ という変わった性質を持ち, 数学的にはおもしろいモデルである.

Levinson–Durbin アルゴリズムを用いると, 偏相関関数などに関するいろいろな数値実験, 特に漸近挙動に関するものを行うことができる. それにより, 1.10 節の基本問題の線上にあるいろいろな予想を立てることも可能である.

まず, 次の問題で Levinson–Durbin アルゴリズムのプログラムを実際に作成し, それを走らせることで bug がないかをチェックして頂きたい.

問 9. $d \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ とする.
(1) Levinson–Durbin アルゴリズムを用いて, 自己共分散関数

$$\gamma(0) = 1,$$
$$\gamma(n) = \frac{\Gamma(n+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(n-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k-1+d}{k-d} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

から偏相関関数 $\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \dots$ を計算するプログラムを作れ (問 8 参照). その結果が, $\phi_{n,n} = d/(n-d)$ と一致することを確かめよ.
(2) 逆に, Levinson–Durbin アルゴリズムを用いて, $\gamma(0) = 1$ と $\phi_{n,n} = d/(n-d)$ $(n = 1, 2, \dots)$ から, $\gamma(1), \gamma(2), \dots$ を計算するプログラムを作れ. その結果が (1) の $\gamma(\cdot)$ と一致することを確かめよ.

2.3　数値実験 (I)

この節では, 先に自己共分散関数 $\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2), \dots$ を与え, Levinson–Durbin アルゴリズムを用いて偏相関関数 $\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \phi_{3,3}, \dots$ の数値を計算することで, $n \to \infty$ での $\phi_{n,n}$ の挙動を数値的に調べる. この方向の対応する理論的な研究は, 次章以降で述べるようにある程度進んでいる.

2.3.1 ケース 1

正定数 p に対し, 次の関数 $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ を考える:

$$\gamma(n) = \frac{1}{(1+|n|)^p} \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

次の命題から, γ はスペクトル密度を持つ自己共分散関数で, 特に $\gamma \in \Gamma$ であることが分かる.

命題 2.3. $0 < p < \infty$ に対し, 次が成り立つ*:*

$$\frac{1}{(1+|n|)^p} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \Delta(\lambda) d\lambda \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

ここで, Δ は次で定義される関数である*:*

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1-r^2}{|1-re^{i\lambda}|^2} \frac{(-\log r)^{p-1}}{\Gamma(p)} dr \qquad (-\pi < \lambda < \pi).$$

問 10. 上の命題を証明せよ.

ヒント. Fubini の定理と等式 (1.9) から, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \Delta(\lambda) d\lambda &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \frac{1-r^2}{|1-re^{i\lambda}|^2} d\lambda \right\} \frac{(-\log r)^{p-1}}{\Gamma(p)} dr \\
&= \int_0^1 r^{|n|} \frac{(-\log r)^{p-1}}{\Gamma(p)} dr.
\end{aligned}$$

さらに, 変数変換 $r = e^{-t}$ により,

$$\int_0^1 r^{|n|} \frac{(-\log r)^{p-1}}{\Gamma(p)} dr = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-(1+|n|)t} t^{p-1} dt$$

が成り立つ. 以下略.

この自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ は,

$$\gamma(n) \sim n^{-p} \qquad (n \to \infty) \tag{2.6}$$

という漸近挙動を持つ簡明な例になっている. 対応する偏相関関数 $\phi_{n,n}$ の具体的な形は知られていない. しかし, 次の漸近挙動が証明できる (3.10 節の例):

(1) もし $0 < p < 1$ ならば,

$$\phi_{n,n} \sim \frac{1-p}{2n} \qquad (n \to \infty);$$

(2) もし $p = 1$ ならば

$$\phi_{n,n} \sim \frac{1}{2n \log n} \qquad (n \to \infty);$$

(3) もし $1 < p < \infty$ ならば

$$\phi_{n,n} \sim \frac{n^{-p}}{\{2\zeta(p) - 1\}} \qquad (n \to \infty).$$

ここで, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ はリーマンのゼータ関数である.

上の結果でまず目に付くのは, $p = 1$ を境に $\phi_{n,n}$ の漸近挙動の形が変わることである. 実際, $0 < p < 1$ の時は, n の指数は 1 で p によらない. この $p = 1$ は, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma(n)|$ が有限か無限かの境目であることに注意せよ. つまり, (1) は長時間記憶, (3) は短時間記憶, (2) はそれらの境界, の場合の結果にそれぞれなっている.

(1) の長時間記憶の場合に, (2.4) と (2.6) を睨んで, $p = 1 - 2d$, ただし $0 < d < \frac{1}{2}$, とおいてみよう. すると, (1) の結果は,

$$\phi_{n,n} \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty)$$

と書け, Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ の場合の結果 (2.5) と同じであることが分かる.

実は, (1)–(3) の結果は,

$$\phi_{n,n} \sim \frac{\gamma(n)}{\sum_{k=-n}^{n} \gamma(k)} \qquad (n \to \infty) \tag{2.7}$$

と, 簡単に一つにまとめて書けることが観察できる. 例えば, $1 < p < \infty$ ならば,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |k|)^p} = 2\zeta(p) - 1$$

であることに注意せよ. しかし, 何故 (2.7) のようにまとめて書けるのか, そのメカニズムは良く分からない.

以下の表 2.1–2.4 では, 上の (1) と (3) に対応する数値実験の結果を示す. 次に注意せよ:

$$\frac{1}{2\zeta(2) - 1} = \frac{1}{(\pi^2/3) - 1} \approx 0.4367$$

表 2.1: $\gamma(n) = (1+|n|)^{-(1-2d)}$ $(0 < d < 0.5)$ に対する $n\phi_{n,n}$ の値 (1)

d	n=1	n=10	n=20	n=50	n=100
0.1	0.5743	0.1785	0.1656	0.1528	0.1450
0.2	0.6598	0.2266	0.2171	0.2143	0.2114
0.3	0.7579	0.2829	0.2839	0.2876	0.2905
0.4	0.8706	0.3476	0.3576	0.3709	0.3793

表 2.2: $\gamma(n) = (1+|n|)^{-(1-2d)}$ $(0 < d < 0.5)$ に対する $n\phi_{n,n}$ の値 (2)

d	n=200	n=300	n=500	n=700	n=1000
0.1	0.1384	0.1350	0.1312	0.1289	0.1266
0.2	0.2091	0.2080	0.2067	0.2060	0.2053
0.3	0.2930	0.2942	0.2954	0.2961	0.2968
0.4	0.3857	0.3886	0.3916	0.3931	0.3945

2.3.2 ケース 2

定数 $0 < p < \infty$ に対し, 次の関数 $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ を考える:

$$\gamma(n) = \frac{1+(-1)^{|n|}}{2} \cdot \frac{1}{(1+|n|)^p} \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

次の命題から, γ はスペクトル密度を持つ自己共分散関数で, 特に $\gamma \in \Gamma$ であることが分かる.

命題 2.4. $0 < p < \infty$ に対し, 次が成り立つ:

$$\frac{1+(-1)^{|n|}}{2} \cdot \frac{1}{(1+|n|)^p} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\Delta(\lambda)d\lambda \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

ここで, Δ は次で定義される関数である:

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1-r^2}{|1-re^{i\lambda}|^2}\frac{(-\log|r|)^{p-1}}{\Gamma(p)}dr \qquad (-\pi < \lambda < \pi).$$

問 11. 上の命題を証明せよ.

表 2.3: $\gamma(n) = (1+|n|)^{-p}$ $(p>1)$ に対する $n^p\phi_{n,n}$ の値 (1)

p	n=1	n=10	n=20	n=50	n=100
1.5	0.3536	0.2134	0.2201	0.2273	0.2309
2.0	0.2500	0.2970	0.3387	0.3813	0.4028
5.0	0.0313	0.5430	0.7102	0.8355	0.8820

表 2.4: $\gamma(n) = (1+|n|)^{-p}$ $(p>1)$ に対する $n^p\phi_{n,n}$ の値 (2)

p	n=200	n=300	n=500	n=700	n=1000
1.5	0.2332	0.2342	0.2350	0.2354	0.2357
2.0	0.4167	0.4222	0.4272	0.4295	0.4314
5.0	0.9063	0.9145	0.9212	0.9240	0.9262

ヒント. Fubini の定理と等式 (1.9) から, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\Delta(\lambda)d\lambda &= \int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\frac{1-r^2}{|1-re^{i\lambda}|^2}d\lambda\right\}\frac{(-\log|r|)^{p-1}}{\Gamma(p)}dr\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} r^{|n|}\frac{(-\log|r|)^{p-1}}{\Gamma(p)}dr.\end{aligned}$$

容易に分かるように, この 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ は, 次の性質を持つ:

$$\begin{aligned}&\gamma(1) = \gamma(3) = \gamma(5) = \cdots = 0,\\ &\gamma(2n) \sim (2n)^{-p} \qquad (n\to\infty).\end{aligned}$$

数値実験によれば, 次のことが観察される:

$$\phi_{1,1} = \phi_{3,3} = \phi_{5,5} = \cdots = 0. \tag{2.8}$$

実は, 一般的に $\gamma(1) = \gamma(3) = \gamma(5) = \cdots = 0$ と

$$\phi_{2k+1,2j+1} = 0 \qquad (k\ge 0,\ 0\le j\le k)$$

が同値であることを福山 克司教授が指摘して下さった.

表 2.5 と $p=2$ の場合の

$$\frac{1}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma(k)} = \frac{1}{2\times(1^{-2}+3^{-2}+5^{-2}+\cdots)-1} = \frac{1}{(\pi^2/4)-1} \approx 0.6815$$

によれば, $p > 1$ のとき,

$$\phi_{2n,2n} \sim \frac{\gamma(2n)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)} \qquad (n \to \infty)$$

が予想される. また, 表 2.6 によれば $d = (1-p)/2 \in (0, \frac{1}{2})$ のとき,

$$\phi_{2n,2n} \sim \frac{2d}{2n} \qquad (n \to \infty)$$

が予想される. いずれの予想も,

$$\phi_{2n,2n} \sim \frac{\gamma(2n)}{\sum_{k=-2n}^{2n} \gamma(k)} \qquad (n \to \infty)$$

と書けるのは興味深い.

表 2.5: $\gamma(n) = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^{|n|}\}(1 + |n|)^{-p}$ $(p > 1)$ に対する $n^p \phi_{n,n}$ の値

p	n=200	n=400	n=600	n=1000	n=2000
1.5	0.4168	0.4183	0.4189	0.4195	0.4200
2.0	0.6573	0.6676	0.6716	0.6750	0.6779
5.0	0.9661	0.9785	0.9826	0.9860	0.9885

表 2.6: $\gamma(n) = \frac{1}{2}\{1+(-1)^{|n|}\}(1+|n|)^{-(1-2d)}$ $(0 < d < 0.5)$ に対する $n\phi_{n,n}$ の値

d	n=200	n=400	n=600	n=1000	n=2000
0.3	0.5898	0.5920	0.5932	0.5946	0.5961
0.35	0.6817	0.6866	0.6890	0.6916	0.6943
0.4	0.7768	0.7838	0.7871	0.7904	0.7937

2.3.3 ケース 3

$d \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ とする. ここでは, 次の自己共分散関数 γ を考える:

$$\gamma(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} |1 - 0.3e^{i\lambda}|^{-2} \cdot |1 - e^{i\lambda}|^{-2d} d\lambda \qquad (n \in \mathbf{Z}). \qquad (2.9)$$

これは, Fractional ARIMA$(1, d, 0)$ 過程の特別な場合である．この $\gamma(\cdot)$ は超幾何級数を用いて具体的に与えることができる ([H, Lemma 1])．この $\gamma(\cdot)$ は次の漸近挙動を持つ:

$$\gamma(n) \sim \frac{\Gamma(1-2d)\sin(\pi d)}{\pi|1-0.3|^2} n^{-(1-2d)} \qquad (n \to \infty).$$

対応する偏相関関数 $\phi_{n,n}$ の具体的な形は知られていない．しかし, $d \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ の時, 次の (2.5) と同じ漸近挙動を証明できる (定理 3.20):

$$\phi_{n,n} \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty). \tag{2.10}$$

以下の表 2.7 では, これに対応する数値実験の結果を示す.

実は, $d \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ に対する結果 (2.10) も

$$\phi_{n,n} \sim \frac{\gamma(n)}{\sum_{k=-n}^{n} \gamma(k)} \qquad (n \to \infty)$$

と書けることが分かる ([I3, Section 5] を見よ)．$-\frac{1}{2} < d < 0$ の時には, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma(k) = 0$ であるが, それでも成り立っているのは, 不思議である

表 2.7: FARIMA$(1, d, 0)$ 過程 (2.9) に対する $n\phi_{n,n}$ の値

d	n=1	n=10	n=20	n=50	n=100
-0.4	-0.048	-0.355	-0.376	-0.390	-0.395
-0.3	0.025	-0.268	-0.284	-0.293	-0.297
-0.2	0.106	-0.181	-0.190	-0.196	-0.198
-0.1	0.198	-0.091	-0.095	-0.098	-0.099
0.1	0.414	0.093	0.096	0.099	0.099
0.2	0.542	0.187	0.194	0.197	0.199
0.3	0.682	0.284	0.292	0.297	0.298
0.4	0.835	0.382	0.391	0.396	0.398

2.4　数値実験 (II)

この節では, 前節とは逆に, 先に $\phi_{1,1}, \phi_{2,2}, \phi_{3,3}, \ldots$ を与え, Levinson–Durbin アルゴリズムを用いて $\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2), \ldots$ の数値を計算し, $n \to \infty$ での $\gamma(n)$ の漸近挙動を数値的に調べる.

$|\phi_{n,n}| < 1$ を満たす任意の数列 $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ は偏相関関数と見なせるから (定理 1.8), この方向では様々な数値実験が可能である. この方向で数学的に証明されたことは, 今の所皆無と言ってよいので, それらの実験により得られた仮説がもし数値的にもっともらしければ, それらは即, 未解決の予想ということになる.

問 12. いろいろな $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ を選んで $\gamma(\cdot)$ の値を計算し, 何らかの法則性がないか調べよ. つまり, 自分の予想を立てよ.

$\gamma(n)$ が冪的な挙動をするときの前節の結果は, すべて

$$\phi_{n,n} \sim \frac{\gamma(n)}{\sum_{k=-n}^{n} \gamma(k)} \qquad (n \to \infty) \tag{2.11}$$

と表現されていた. そこで, この節でも, これを作業仮説として調べることにする. 以下, $g(\cdot)$ は, 次で定義されているとする (ただし, 右辺が存在するとき):

$$g(n) = \frac{\gamma(n)}{\phi_{n,n} \sum_{k=-n}^{n} \gamma(k)}.$$

2.4.1 ケース 1

次で定義される $\{\phi_{n,n}\} \in \Pi$ を取る:

$$\phi_{n,n} = \frac{(n^2+3)d}{(n^3+4n^2+5)} \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{2.12}$$

そして, これから得られる $\gamma(\cdot)$ について, $g(n)$ の挙動を表 2.8 に記す. これを見ると, (2.11) が成り立っているようである.

表 2.8: (2.12) に対する $g(n)$ の値

d	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500
0.2	1.0145	1.0133	1.0137	1.0136	1.0134
0.4	1.0537	1.0541	1.0566	1.0573	1.0572

2.4.2　ケース 2

次で定義される $\{\phi_{n,n}\} \in \Pi$ を取る:

$$\phi_{n,n} = 0 \quad (n = 1, \ldots, 10), \quad = \frac{1}{n^2 + 3n - 2} \quad (n = 11, 12, \ldots). \tag{2.13}$$

そして, これから得られる $\gamma(\cdot)$ について, $g(n)$ の挙動を表 2.9 に記す. これを見ると, (2.11) が成り立っているようである.

表 2.9: (2.13) に対する $g(n)$ の値

n=200	n=400	n=600	n=800	n=1000
1.0553	1.0356	1.0266	1.0214	1.0180

2.4.3　ケース 3

次で定義される $\{\phi_{n,n}\} \in \Pi$ を取る:

$$\phi_{n,n} = 0 \quad (n = 1, \ldots, 10), \quad = -0.3\frac{n+2}{(n+2)^2 + n + 8} \quad (n = 11, 12, \ldots). \tag{2.14}$$

そして, これから得られる $\gamma(\cdot)$ について, $g(n)$ の挙動を表 2.10 に記す. これを見ると, (2.11) が成り立っているようである.

表 2.10: (2.14) に対する $g(n)$ の値

n=100	n=200	n=300	n=400	n=500
1.0398	1.0177	1.0114	1.0084	1.0066

2.4.4　ケース 4

次で定義される $\{\phi_{n,n}\} \in \Pi$ を取る:

$$\phi_{n,n} = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \ldots), \quad = \frac{1}{n^3 + n + 2} \quad (n = 2, 4, 6, \ldots). \tag{2.15}$$

先ほど述べたように,

$$\gamma(1) = \gamma(3) = \gamma(5) = \cdots = 0.$$

の筈であるが, 数値実験でもこのことが確認される. これから得られる $\gamma(\cdot)$ について, $g(n)$ の挙動を表 2.11 に記す. これを見ると,

$$\phi_{2n,2n} \sim \frac{\gamma(2n)}{\sum_{k=-2n}^{2n}\gamma(k)} \qquad (n \to \infty)$$

が成り立っているようである.

表 2.11: (2.15) に対する $g(n)$ の値

n=100	n=200	n=300	n=400	n=500
1.02	1.01	1.0073	1.0054	1.0043

2.4.5 ケース 5

次で定義される $\{\phi_{n,n}\} \in \Pi$ を取る:

$$\phi_{n,n} = \frac{1}{n^3+n+2} \quad (n=1,3,5,\dots), \quad = 0 \quad (n=2,4,6,\dots). \tag{2.16}$$

これから得られる $\gamma(\cdot)$ について, $g(n)$ の挙動を表 2.12 に記す. これを見ると, (2.11) は成り立っていないように見える.

表 2.12: (2.16) に対する $g(n)$ の値

n=101	n=201	n=301	n=401	n=501
0.6658	0.6549	0.6549	0.6537	0.6529

これに関連して, 神戸大学大学院生の春名太一君は, 次のような一般的な予想をレポートとして提出して下さった: $p \geq 1$ に対し

$$\phi_{2k+1,2k+1} \sim (2k+1)^{-p} \quad \text{かつ} \quad \phi_{2k,2k} = 0 \quad (k \text{ 十分大})$$

ならば,

$$\phi_{2k+1,2k+1} \sim \frac{\gamma(2k+1)}{\sum_{j=-k}^{k}\gamma(2j)}. \tag{2.17}$$

分母の和を偶数の所だけで取るのがポイントである. (2.16) の $\phi_{n,n}$ に対し,

$$h(2k+1) = \frac{\gamma(2k+1)}{\phi_{2k+1,2k+1}\sum_{j=-k}^{k}\gamma(2j)}$$

とおいて, $h(2k+1)$ の挙動を表 2.13 に記す. これを見ると, (2.17) が成り立っているように見える.

表 2.13: (2.16) に対する $h(2k+1)$ の値

k=50	n=100	n=150	n=200	n=250
1.0242	1.0115	1.0075	1.0056	1.0044

第3章　偏相関関数の表現と漸近挙動

3.1　解析手法

第 2 章の最初に述べたように, 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ が

$$\gamma(n) = \frac{1}{(1+|n|)^{1-2d}} \tag{3.1}$$

で具体的に与えられる定常時系列 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ に対し, その偏相関関数の漸近挙動を数値的に調べると, $0 < d < \frac{1}{2}$ すなわち $0 < 1-2d < 1$ の場合, 次の現象が観察される：

$$\phi_{n,n} \sim \frac{\text{const.}}{n} \qquad (n \to \infty). \tag{3.2}$$

この章では, 偏相関関数のこのような漸近挙動を一般的な設定で数学的に厳密に示す.

偏相関関数 $\phi_{n,n}$ の解析の難しさは, 結局の所, それが有限の過去からの予測に関する量であることに由来すると言えよう．この状況は, 例えばその漸近挙動を調べることを困難にする．Durbin–Levinson アルゴリズムのような漸化式は, 第 2 章のような数値的な計算には有効であっても, 漸近挙動を数学的に証明することには, それだけでは無力である.

この章および次の章の解析の基礎となる手法を, やや一般的な形で説明する．$\{X_t\}$ を, 調べたい連続または離散時間の確率過程とする．通常は, 定常または定常増分過程とする．I を $[-t_0, t_1]$ や $(-\infty, t_1]$ や $[-t_0, \infty)$ のような $\mathbf{R}$ もしくは $\mathbf{Z}$ の閉区間とする．考察の対象である確率過程 $\{X_t\}$ に対し, H_I を $\{X_t : t \in I\}$ で張られる $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の閉部分空間とする．P_I は H_I への正射影作用素とする．我々の手法では, 有限の過去の $H_{[-t_0,t_1]}$ が, 無限の過去 $H_{(-\infty,t_1]}$ と無限の未来 $H_{[-t_0,\infty)}$ の交わりに等しいことを示すことが出発点となる．すなわち,

$$H_{[-t_0,t_1]} = H_{(-\infty,t_1]} \cap H_{[-t_0,\infty)} \tag{3.3}$$

を示す．そして $P_{[-t_0,t_1]}$ に関する問題を次の等式を用いて調べる：

$$P_{[-t_0,t_1]} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty} \left\{P_{[-t_0,\infty)}P_{(-\infty,t_1]}\right\}^n. \tag{3.4}$$

フォン・ノイマンの交代射影 (von Neumann Alternating Projections) と呼ばれる結果 (下の定理 3.6; 中野秀五郎も独立に同じ結果を得ていた) により, (3.3) と (3.4) は同値である．直感的には, $H_{(-\infty,t_1]}$ と $H_{[-t_0,\infty)}$ を平面内の原点で交わる 2 直線と思って図を描いてみると, (3.4) の意味が納得できるであろう．

この等式 (3.4) を基礎とする解析のおもしろい所は, 過去からの予測に未来も用いる点である．(3.3) は一見当たり前のようにも見えるが, 実は全然自明ではなく, また実際場合によっては正しくないこともあり, それぞれの確率過程 $\{X_t\}$ に対して証明を要する事柄である．この手法の原型が初めて用いられた [I2] では, ある広いクラスの定常時系列に対して (3.3) が示されている．その証明法は, Levinson–McKean [LM] の方法による複素解析的なものである (Dym [Dy], Seghier [Se] も見よ)．おもしろいことに, [LM], [Dy], [Se] で扱われている連続時間モデルでは, 結局, (3.3) が成り立つ為の使いやすい十分条件はまだ得られていないのに対し, [I2] で考察されている離散時間定常過程では, 上に述べた応用上ほぼ満足のいく十分条件 (定理 3.1) が得られる．この違いは, 連続の場合に出て来る複素平面 $\mathbf{C}$ はノンコンパクトなのに, 離散の場合の対応する空間であるリーマン球 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ はコンパクトであるという点に由来する (定理 3.1 の証明を見よ).

しかしながら, 連続時間の場合でも, モデルの特殊な性質を用いて (3.3) 従って (3.4) を示してこの解析手法を適用できることがある．例えば, 筆者が V. Anh, 笠原雪夫, 中野 張 (ゆみはる) 氏らと共同で行ったファイナンスのモデルの研究 [AI, AIK, INA1, INA2] では, この手法により見出されるある新生過程の明示的な表現が, 重要な役割を果たす.

等式 (3.4) のメリットを説明する．作用素 $P_{(-\infty,t_1]}$ や $P_{[-t_0,\infty)}$ は, 確率過程 $\{X_t\}$ に付随する適当な意味での AR (autoregressive) 係数および MA (moving-average) 係数を用いて簡単に表せる．これと等式 (3.4) を組み合わせると, 今度は $P_{[-t_0,t_1]}$ に関係する量, つまり有限の過去からの予測に関係する量を AR および MA 係数からなる無限級数に展開できる．こうして, それまで漸化式によってしか与えられていなかった量あるいは関数たちに対し, AR 係数および MA 係数による明示的な無限級数表示が得られる．AR 係数および MA 係数は, 自己共分散関数やスペクトル密

度の情報から直接的にその性質が詳しく分かるので (第 3.8 節の議論を見よ), このような表示により, それらの量を直接的に解析することが可能になる. 以上が, 等式 (3.4) を基礎とする解析手法のメリットである.

[I2] では, 上の手法を用いて, 有限の過去からの予測に関する平均 2 乗予測誤差の AR 係数および MA 係数による表示が求められた ((3.53) に対応する). これとタウバー型議論を用いることで, いくつかのクラスの定常時系列に対し, その偏相関関数の**絶対値** $|\phi_{n,n}|$ の漸近挙動が決定された. 特に, $0 < d < \frac{1}{2}$ の場合の (3.1) を含む長時間記憶モデルのあるクラスに対し, 次の偏相関関数の絶対値 $|\phi_{n,n}|$ の漸近挙動が示された：

$$|\phi_{n,n}| \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty). \tag{3.5}$$

従って, 絶対値の不定性を除いて, 最初に述べた観察 (3.2) は数学的に正しいことが [I2] で分かった. さらに (3.5) によれば, (3.2) で const. としたものは, 実は長時間記憶モデルにおいて重要な意味を持つパラメータ d であることも分かった.

Fractional ARIMA 過程 (autoregressive integrated moving-average process) は, 定常時系列の代表的な長時間記憶モデルである. この応用上重要なパラメトリック・モデルは, Granger–Joyeux と Hosking により 1980 年頃, 独立に, 導入された (Granger は時系列解析の業績により 2003 年度のノーベル経済学賞を受賞している). [I2] では, タウバー型の議論を行うために強い条件を課す必要があり, そのため, [I2] の結果は, Fractional ARIMA 過程 (以下, 簡単のため, FARIMA と略す) をカバーしていなかった. [I3] においては, その FARIMA に対しても, (3.4) と同じ結果を示せるように議論の整備が行われた. その証明法は, 基本的には [I2] のそれと同じで, 予測誤差の表現定理を用いる. しかし, [I3] では, 議論で必要となるタウバー型条件を確かめるのに, より hard な解析を要する. 一方, FARIMA のパラメータ d は, $-\frac{1}{2} < d < 0$ という値もとり得る. この $-\frac{1}{2} < d < 0$ の場合は, $0 < d < \frac{1}{2}$ の場合よりも取り扱いが難しくなる. しかし, 結局, 笠原雪夫氏との共著 [IK1] で $-\frac{1}{2} < d < 0$ の場合にも同じ形の (3.5) が成り立つことが示された.

[I2, I3, IK1] における偏相関関数の漸近挙動の解析は, 有限予測誤差の表現定理を経由する間接的なもので, その議論はかなり複雑である. ところが, [I4] において, 偏相関関数の解析手法に新しい発展があった. すなわち, [I4] で, 偏相関関数 $\phi_{n,n}$ 自身の AR および MA 係数による表現定理が初めて見出された. その証明は, やはり (3.3) あるいは (3.4) に基づ

く. この表現定理の意義は, 偏相関関数を直接解析することが可能になったということである. 結果として, それまでのタウバー型の議論が不要になって証明が著しく簡単化された. また, 結果自身もいろいろ改良された. とくに, 絶対値ではなく, 偏相関関数自身の漸近挙動が求められるようになった.

以下, この章では, 基本的には [I4] の方法に従いつつ, 必要に応じて [I2], [I3], [IK1], [IK2] の内容も紹介しながら, 偏相関関数の漸近挙動を調べていく.

3.2　過去と未来の交わり

$\{X_n\} = \{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ を**定常過程**とする. 第 1 章で述べたように, これは $\{X_n\}$ が, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された平均 0 の実の弱定常過程であることを意味する. $\{X_k : k \in \mathbf{Z}\}$ が $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に於いて張る実ヒルベルト空間を H とし, その内積

$$(Y_1, Y_2) := E[Y_1 Y_2]$$

とノルム

$$\|Y\| := (Y, Y)^{1/2}$$

を考える. 整数の集合 $I \subset \mathbf{Z}$ に対し, H において $\{X_k : k \in I\}$ が張る閉部分空間を H_I と記す. 特に, $m \le n$ を満たす $m \in \mathbf{Z}$ と $n \in \mathbf{Z}$ に対し, $H_{(-\infty,m]}$, $H_{[m,\infty)}$, $H_{[m,n]}$ はそれぞれ $I = \{k \in \mathbf{Z} : -\infty < k \le m\}$, $\{k \in \mathbf{Z} : m \le k < \infty\}$, $\{k \in \mathbf{Z} : m \le k \le n\}$ に対する H_I のこととする. 整数の集合 $I \subset \mathbf{Z}$ に対し, H から閉部分空間 H_I への正射影作用素を P_I と書く. また, $P_I^{\perp} := I_H - P_I$ とおく. ここで, I_H は H の恒等作用素である. つまり, $P_I^{\perp}$ は H から H_I の直交補空間 $H_I^{\perp}$ への正射影作用素である.

以下この節を通じ, 定常過程 $\{X_n\}$ は**純非決定的**であるとする. すなわち, 次が成り立つとする:

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_{(-\infty,n]} = \{0\}.$$

あるいは, 同値な条件として, $(-\pi, \pi]$ 上の正で偶の可積分関数 $\Delta(\cdot)$ で,

$$\gamma(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \Delta(\lambda) d\lambda \quad (n \in \mathbf{Z}), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |\log \Delta(\lambda)| d\lambda < \infty$$

を満たすものがあると言ってもよい ([BD, §5.7] あるいは [Ro, Chapter II] を見よ). この $\Delta(\cdot)$ は $\{X_n\}$ の**スペクトル密度**と呼ばれる.

$\{X_n\}$ の**外関数** (outer function) $h(\cdot)$ を次で定義する:

$$h(z) := \sqrt{2\pi}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\log\Delta(\lambda)d\lambda\right\} \quad (z \in \mathbf{C},\ |z|<1). \tag{3.6}$$

この関数 $h(\cdot)$ は, 実際, 単位開円板上の class 2 の Hardy 空間 H^{2+} に属する外関数である (Rudin [Ru, Definition 17.14] を見よ).

例. $r \in (-1,1)$ とする. $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ をホワイトノイズとする. すなわち $(\xi_n, \xi_m) = \delta_{nm}$ を満たす H の列である. AR(1) 方程式

$$X_n - rX_{n-1} = \xi_n,$$

の**因果的**な (causal) 解

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{n} r^{n-j}\xi_j$$

を考える (cf. [P], Section 4.1.1). 標準的な計算により次が分かる:

$$\gamma(n) = \frac{r^{|n|}}{1-r^2}, \quad \Delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|1-re^{i\lambda}|^2}, \quad h(z) = \frac{1}{1-rz}.$$

前節で述べたように, 次の結論 (3.8) が, 我々の議論の出発点となる.

定理 3.1 ([I2], Theorem 3.1). $\{X_n\}$ のスペクトル密度 $\Delta(\cdot)$ が次を満たすとする:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\Delta(\lambda)}d\lambda < \infty. \tag{3.7}$$

すると, 0 以上のすべての整数 n に対し, 次が成り立つ:

$$H_{(-\infty,0]} \cap H_{[-n,\infty)} = H_{[-n,0]}. \tag{3.8}$$

Proof. Step 1. $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ における $\{X_k : k \in \mathbf{Z}\}$ の張る複素閉線形包を $H^{\mathbf{C}}$ と記す. すると $H^{\mathbf{C}}$ は, 内積 $(Y_1, Y_2) := E[Y_1\overline{Y_2}]$ を持つ複素ヒルベルト空間になる. $H_{(-\infty,0]}$, $H_{[-n,\infty)}$, $H_{[-n,0]}$ を定義したように, $\mathbf{R}$ を $\mathbf{C}$ で置き換えて, $H^{\mathbf{C}}$ の閉部分空間 $H^{\mathbf{C}}_{(-\infty,0]}$, $H^{\mathbf{C}}_{[-n,\infty)}$, $H^{\mathbf{C}}_{[-n,0]}$ を定義する. 我々は次を証明しよう:

$$H^{\mathbf{C}}_{(-\infty,0]} \cap H^{\mathbf{C}}_{[-n,\infty)} = H^{\mathbf{C}}_{[-n,0]} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3.9}$$

実の場合の主張 (3.8) はこれより直ちに従う.

内積

$$(f,g)_L := \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\Delta(\lambda)d\lambda.$$

を持つ複素ヒルベルト空間 $L^2((-\pi,\pi],\Delta(\lambda)d\lambda)$ を L と書く. 整数の集合 $I \subset \mathbf{Z}$ に対し, $\{e^{ik\lambda} : k \in I\}$ が L において張る閉部分空間を L_I と書く. 特に $m \le n$ を満たす $m \in \mathbf{Z}$ と $n \in \mathbf{Z}$ に対し, $I = \{k \in \mathbf{Z} : -\infty < k \le m\}$, $\{k \in \mathbf{Z} : m \le k < \infty\}$, $\{k \in \mathbf{Z} : m \le k \le n\}$ に対する L_I をそれぞれ $L_{(-\infty,m]}$, $L_{[m,\infty)}$, $L_{[m,n]}$ と記す.

よく知られているように, 定常過程 $\{X_n\}$ は次の形のスペクトル表現を持つ:

$$X_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}Z(d\lambda) \qquad (n \in \mathbf{Z}). \tag{3.10}$$

ここで, Z は $E[Z(A)\overline{Z(B)}] = \int_{A\cap B}\Delta(\lambda)d\lambda$ を満たすランダム測度である (例えば [BD, §4.8] を見よ). 写像 $f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)Z(d\lambda)$ は, L から $H^{\mathbf{C}}$ へのヒルベルト空間としての同型写像になる. 整数の集合 $I \subset \mathbf{Z}$ に対し, 部分空間 L_I は $H_I^{\mathbf{C}}$ に写像される. 従って, (3.9) を示すには, 次を示せば十分である:

$$L_{(-\infty,0]} \cap L_{[-n,\infty)} = L_{[-n,0]} \quad (n = 0,1,\dots).$$

しかしながら, 包含関係 $\supset$ は自明であるので, 逆の包含関係 $\subset$ のみを示せばよい.

単位開円板 $|z| < 1$ 上の class 2 の Hardy 空間 を H^{2+} と書き, 一方, リーマン球 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ の領域 $|z| > 1$ 上の class 2 の Hardy 空間 を H^{2-} と記す. いつものように, H^{2+} や H^{2-} に属する各関数 $f(z)$ をその境界値 $f(e^{i\lambda})$ と同一視し, H^{2+} と H^{2-} を共に $L^2((-\pi,\pi],d\lambda)$ の部分空間と見なす.

H^{2+} に属する外関数 h を (3.6) で定義し, H^{2-} に属する外関数 h^* を $h^*(z) := \overline{h(1/\overline{z})}$ $(|z| > 1))$ で定義する. さらに $h_n \in H^{2+}$ を $h_n(z) := z^n h(z)$ で定義する. すると, $L_{[-n,\infty)} = e^{-in\lambda}L_{[0,\infty)}$ であることより, 次が成り立つ:

$$L_{[-n,\infty)} = \frac{1}{h_n}H^{2+}, \qquad L_{(-\infty,0]} = \frac{1}{h^*}H^{2-}$$

(Ibragimov–Rozanov [IR, II.2, Theorem 1] を見よ; Beurling の定理がここでは本質的である). よって, すべての $f(e^{i\lambda}) \in L_{(-\infty,0]} \cap L_{[-n,\infty)}$ に対

し, $g_+ \in H^{2+}$ と $g_- \in H^{2-}$ で次を満たすものが存在する:

$$f(e^{i\lambda}) = \frac{g_+(e^{i\lambda})}{h_n(e^{i\lambda})} = \frac{g_-(e^{i\lambda})}{h^*(e^{i\lambda})} \qquad \text{a.e. on } (-\pi, \pi].$$

これらの g_+ と g_- に対し, $|z| < 1$ では $f(z) := g_+(z)/h_n(z)$ とおき, $|z| > 1$ では $f(z) := g_-(z)/h^*(z)$ とおく. すると f は $|z| < 1$ 上では有理型で, その極となり得るのは原点 0 のみで, さらに, その次数は高々 n である. 一方, リーマン球の領域 $|z| > 1$ では f は正則である. 我々は次を主張する:

「関数 f は, $|z| < 1$ から $|z| > 1$ へ, 単位円 $|z| = 1$ を越えて解析接続できる」.

上の主張は, このようにして得られた関数 f がリーマン球上で有理型であることを, 従って, この関数が有理関数であることを意味する. 上に述べた特異点の記述により, f はある $a_k \in \mathbf{C}$ $(k = 1, \ldots, n)$ に対して $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k}$ の形でなければならず, 従って $f(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-ik\lambda}$ であることが分かる. よって, $f(e^{i\lambda}) \in L_{[-n,0]}$ であるが, これはまさに, 示したかった包含関係 $L_{(-\infty,0]} \cap L_{[-n,\infty)} \subset L_{[-n,0]}$ に他ならない.

Step 2. 上の主張を証明して定理の証明を完成させよう. 以下の議論は, [LM, §6c] のそれと平行して進むことを注意しておく.

$k = 1, 2, \ldots$ に対し, $A_k := \{\lambda \in (-\pi, \pi) : \sup_{1-(1/k)<r<1} |f(re^{i\lambda})| \geq k\}$ とおく. すると, $A_k \supset A_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が成り立つ. さらに,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\lambda})| d\lambda \leq \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\lambda})|^2 \Delta(\lambda) d\lambda \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(\lambda)^{-1} d\lambda \right\}^{1/2} < \infty,$$

であるから, エゴロフ (Egoroff) の定理により, $k \to \infty$ で A_k のルベーグ測度は 0 に行く.

さて, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \int_{A_k} |f(re^{i\lambda})| d\lambda &\leq r^{-n} \left\{ \int_{A_k} |g_+(re^{i\lambda})|^2 d\lambda \right\}^{1/2} \left\{ \int_{A_k} |h(re^{i\lambda})|^{-2} d\lambda \right\}^{1/2} \\ &\leq r^{-n} \|g_+\|_{2+} \left\{ \int_{A_k} |h(re^{i\lambda})|^{-2} d\lambda \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

ここで, $\|g_+\|_{2+}$ は g_+ の H^{2+}-ノルムである. 次のポアソン核を考える:

$$P_r(\lambda) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \lambda + r^2}. \tag{3.11}$$

Jensen の不等式により,

$$
\begin{aligned}
|h(re^{i\lambda})|^{-2} &= \frac{1}{2\pi}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda-t)\log\Delta(t)^{-1}dt\right\} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda-t)\Delta(t)^{-1}dt
\end{aligned}
$$

が成り立ち, 従って $k \geq 2$ に対し, 次が分かる:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{1-(1/k)<r<1}\int_{A_k}|f(re^{i\lambda})|d\lambda \\
&\leq \frac{2^n\|g_+\|_{2+}}{(2\pi)^{1/2}}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sup_{1-(1/k)<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{A_k}P_r(t-\lambda)d\lambda\right\}\Delta(t)^{-1}dt\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

$m \in \mathbf{N}$ と殆どすべての $t \in (-\pi, \pi]$ に対し, 次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{k\to\infty}\sup_{1-(1/k)<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{A_k}P_r(t-\lambda)d\lambda \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\sup_{1-(1/k)<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{A_m}P_r(t-\lambda)d\lambda = I_{A_m}(t).
\end{aligned}
$$

$m \to \infty$ とすると, 次が得られる:

$$
\lim_{k\to\infty}\sup_{1-(1/k)<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{A_k}P_r(t-\lambda)d\lambda = 0 \qquad \text{a.e. on } (-\pi,\pi).
$$

従って,

$$
\lim_{k\to\infty}\sup_{1-(1/k)<r<1}\int_{A_k}|f(re^{i\lambda})|d\lambda = 0,
$$

となり, それゆえ次が分かる:

$$
\lim_{r\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\lambda}) - f(re^{i\lambda})|d\lambda = 0.
$$

同様に, $r \downarrow 1$ の場合の類似の結果も, $g_- \in H^{2-}$ という事実から従う.

$\alpha \in (-\pi, \pi]$ を, $r \to 1$ で $f(re^{i\alpha})$ が $f(e^{i\alpha})$ に有界収束するように選ぶ. 領域 $D := \{re^{i\lambda} : \frac{1}{2} < r < 2,\ \alpha < \lambda < \alpha + 2\pi\}$ 内の $z = re^{i\lambda}$ に対し, $F(z)$ を $F(z) := \int_\Gamma f(w)dw$ で定義する. ここで, $e^{i\alpha}$ から z への積分経路 $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ は, t が 1 から r への $\gamma_1(t) := te^{i\alpha}$ と, t が α から λ への $\gamma_2(t) := re^{it}$ で定める. すると, 関数 F は $D_0 := D \setminus \{z \in D : |z| = 1\}$

で正則でかつ D で連続である．よって, 鏡映原理により F は D で正則である．D_0 で $f = F'$ であるから, f は $|z| = 1$ を越えて D で解析接続される．異なる α を選んで同じことを行えるから, 結局 f は単位円全体 $|z| = 1$ を越えて解析接続できると結論付けられる．これで定理の証明が完成した.　□

3.3　AR 係数と MA 係数

我々の解析は, 調べたい量を AR 係数と MA 係数よりなる無限級数に展開することにより行われる．そこでこの節では, [I2] の記述に従って, これらの係数を導入し, それらに関する基本的な事実を示す.

この節でも, 定常過程 $\{X_n\}$ は**純非決定的である**と仮定する．(3.6) で定義される外関数 $h(z)$ は, $|z| < 1$ で正則で零点を持たない．よって, **MA 係数** c_n を

$$h(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad |z| < 1,$$

で定義し, **AR 係数** a_n を

$$-1/h(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1$$

で定めることができる (cf. [I3, Section 2]). $\{X_n\}$ が実であることより $\Delta(\cdot)$ は偶関数であるから, $\{c_n\}$ と $\{a_n\}$ は共に実数列である．また, $c_0 > 0$ かつ $\sum_0^{\infty}(c_n)^2 < \infty$ が成り立つ．係数 c_n は, 実際, 次の $\{X_n\}$ の MA(∞) 表現に現れる係数である:

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{n} c_{n-j}\xi_j, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{3.12}$$

ここで, $\{\xi_k\}$ は次の新生過程と呼ばれるホワイトノイズである:

$$\xi_k = \epsilon_k / \|\epsilon_k\|, \quad \epsilon_k := X_k - P_{(-\infty,k-1]}X_k.$$

$\{X_k\}$ が純非決定的であるという仮定により, $\{\xi_k\}$ は H の完備正規直交基底で, すべての $n \in \mathbf{Z}$ に対し, $\{\xi_k : -\infty < k \le n\}$ の H における閉線形包は $H_{(-\infty,n]}$ に一致する ([Ro] の Chapter II を見よ).

次のように, 定理 3.1 の仮定 (3.7) は, 別の形に言い換えることができる.

命題 3.2. 次の条件は同値である:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \Delta(\lambda)^{-1} d\lambda < \infty$;

(2) $h^{-1} \in H^{2+}$;

(3) $\sum_0^\infty (a_n)^2 < \infty$.

Proof. 主張 (2)⇔(3) は, 空間 H^{2+} のよく知られた冪級数による特徴付けから従う ([Ru, Theorem 17.12] を見よ). 一方,

$$\frac{1}{h(z)} = (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} \log\{1/\Delta(\lambda)\} d\lambda\right\} \qquad (|z|<1),$$

なので, (1) と (2) は同値である ([Ru, Theorem 17.16] を見よ). □

適当な条件の下で, AR 係数 a_n は, 実際に $\{X_n\}$ に対する無限次の AR 方程式の係数であることが, 次の命題より分かる (cf. [I2, Theorem 4.4], [IK1, Proposition 2.1]).

命題 3.3. $\{X_n\}$ の AR 係数 a_n は, 次を満たすとする:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{3.13}$$

$\{\xi_k\}$ を上で定義した新生過程とする. すると, 次が成り立つ:

$$\sum_{j=-\infty}^{n} a_{n-j} X_j + \xi_n = 0, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{3.14}$$

ここで和は H において絶対収束する.

Proof. 定常過程 $\{X_n\}$ に対するスペクトル表現 (3.10) を思い出そう. 新生過程 $\{\xi_n\}$ は次の表現を持つ:

$$\xi_n := \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \frac{1}{h(e^{-i\lambda})} Z(d\lambda) \qquad (n \in \mathbf{Z}) \tag{3.15}$$

([Ro, Chapter II] を見よ). 次が成り立つ:

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} a_k X_{n-k} + \xi_n \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_m(\lambda)|^2 \Delta(\lambda) d\lambda \qquad (m \in \mathbf{N}). \tag{3.16}$$

ここで, f_m は次で定める:

$$f_m(\lambda) := \frac{1}{h(e^{-i\lambda})} + \sum_{k=0}^{m} a_k e^{-ik\lambda} \qquad (-\pi < \lambda < \pi).$$

仮定により, $h^{-1}(\cdot)$ は H^{2+} に属する. よって, 次の $L^2((-\pi,\pi],d\lambda)$ におけるフーリエ級数展開が成り立つ:

$$\frac{1}{h(e^{-i\lambda})} = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-ik\lambda}.$$

これより $f_m(\lambda) = -\sum_{m+1}^{\infty} a_k e^{-ik\lambda}$ となる. 条件 $\sum_0^{\infty}|a_k| < \infty$ により, $m\to\infty$ で $f_m(\lambda)$ は 0 に有界収束する. それゆえ (3.16) の右辺は, $m\to\infty$ で 0 に収束する. これで命題が示された. □

例. $r\in(-1,1)$ とする. 3.2 節の例と同様に, AR(1) 方程式

$$X_n = rX_{n-1} + e_n$$

の因果的な解 $X_n = \sum_{j=-\infty}^{n} r^{n-j}e_j$ を考える. ここで $\{e_n : n\in\mathbf{Z}\}$ はホワイトノイズである. すなわち, H の列で $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$ を満たすものである. まず $\xi_n = e_n$ が分かる. さらに, 等式 $h(z) = 1/(1-rz)$ を用いて, 次が得られる:

$$c_n = r^n \quad (n=0,1,\dots), \quad a_0 = -1, \quad a_1 = r, \quad a_n = 0 \quad (n=2,3,\dots).$$

3.4　Wiener タイプの予測公式

この節でも, 定常過程 $\{X_n\}$ は純非決定的であると仮定する. $\{X_n\}$ の AR 係数 a_n と MA 係数 c_n に対し, 次のようにおく:

$$b_j^m := \sum_{k=0}^{m} c_k a_{j+m-k}, \qquad m, j\in\mathbf{N}\cup\{0\}. \tag{3.17}$$

特に $b_j^0 = c_0 a_j$ である.

次の Wiener タイプ の (つまり無限の過去からの) 予測公式が成り立つ (cf. [I2, Theorem 4.4], [IK1, Proposition 2.1]).

定理 3.4. *もし, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$ ならば, $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ と $n\in\mathbf{N}$ に対し, 次が成り立つ:*

$$P_{(-\infty,-1]}X_m = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^m X_{-j}, \tag{3.18}$$

$$P_{[-n,\infty)}X_{-n-1-m} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^m X_{-n-1+j}. \tag{3.19}$$

これらの和は H において絶対収束する.

Proof. 等式

$$\left(\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) = -1 \qquad (|z|<1)$$

より $\{c_n\}$ と $\{a_n\}$ の間の次の関係式が得られる:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j c_{n-j} = -\delta_{n0} \qquad (n \geq 0). \tag{3.20}$$

$m \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ に対し $Y_m := P_{(-\infty,-1]}X_m$ とおく. すると

$$\sum_{j=-\infty}^{m} a_{m-j}X_j + \xi_m = 0$$

より, 列 $\{Y_m : m \in \mathbf{N}\}$ は次の方程式の解となる:

$$\sum_{k=0}^{m} a_{m-k}Y_k = -\sum_{j=1}^{\infty} a_{m+j}X_{-j} \qquad (m \in \mathbf{N}\cup\{0\}). \tag{3.21}$$

一方, (3.20) より,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} a_{m-k}\sum_{j=1}^{\infty} b_j^k X_{-j} &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m} a_{m-k}\sum_{i=0}^{k} c_{k-i}a_{i+j}\right)X_{-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m} a_{i+j}\sum_{k=i}^{m} a_{m-k}c_{k-i}\right)X_{-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m} a_{i+j}\sum_{p=0}^{m-i} a_{m-i-p}c_{p}\right)X_{-j} \\
&= -\sum_{j=0}^{\infty} a_{m+j}X_{-j}
\end{aligned}$$

となり, これより 列 $\{\sum_{j=0}^{\infty} b_j^m X_{-j} : m = 0,1,\ldots\}$ も (3.21) の解となる. しかし, 容易に分かるように, $a_0 \neq 0$ より (3.21) の解は一意である. 従って, (3.18) が従う. (3.19) は, (3.18) に鏡映 $X_k \mapsto X_{-k}$ と時間移動 $X_k \mapsto X_{k-n-1}$ を適用することで得られる. □

3.5 予測誤差の内積

この節でも, 定常過程 $\{X_n\}$ は**純非決定的**であるとする. $\{X_n\}$ の偏相関関数を $\phi_{n,n}$ とする. すなわち, $\phi_{1,1} = \gamma(1)/\gamma(0)$ で, さらに

$$\phi_{n,n} = \frac{(X_n - P_{[1,n-1]}X_n, X_0 - P_{[1,n-1]}X_0)}{\|X_n - P_{[1,n-1]}X_n\| \cdot \|X_0 - P_{[1,n-1]}X_0\|}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

である. 等式

$$\begin{gathered}(P^{\perp}_{[1,n-1]}X_0, P^{\perp}_{[1,n-1]}X_n) = (P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_{-n}, P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0), \\ \|P^{\perp}_{[1,n-1]}X_0\| = \|P^{\perp}_{[1,n-1]}X_n\| = \|P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0\|\end{gathered}$$

より, $\phi_{n,n}$ は次のように表される:

$$\phi_{n,n} = \frac{(P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_{-n}, P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0)}{\|P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0\|^2} \quad (n \geq 2).$$

分母 $\|P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0\|^2$ については,

$$\|P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0\|^2 = \|P^{\perp}_{(-\infty,-1]}X_0\|^2 + \|P^{\perp}_{[-n+1,-1]}P_{(-\infty,-1]}X_0\|^2$$

と (3.12) より,

$$\begin{aligned}\left\|P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0\right\|^2 - \left\|P^{\perp}_{(-\infty,-1]}X_0\right\|^2 &= \left\|P^{\perp}_{[-n+1,-1]} \sum\nolimits_{j=n}^{\infty} c_j \xi_{-j}\right\|^2 \\ &\leq \left\|\sum\nolimits_{j=n}^{\infty} c_j \xi_{-j}\right\|^2 = \sum\nolimits_{j=n}^{\infty} (c_j)^2 \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

となって

$$\|P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0\|^2 \to \|P^{\perp}_{(-\infty,-1]}X_0\|^2 = (c_0)^2 \quad (n \to \infty),$$

すなわち, 正定数 $(c_0)^2$ に収束することが分かる. 従って, 例えば, 偏相関関数 $\phi_{n,n}$ の $n \to \infty$ での漸近挙動を調べるには, 分子

$$(P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_{-n}, P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0)$$

の漸近挙動を調べれば十分である. ここでは, この予測誤差 $P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_{-n}$ と $P^{\perp}_{[-n+1,-1]}X_0$ の間の内積を考察する. 特に, 定理 3.1 を用いて, これに対するある種の無限級数展開を導く.

$n, k \in \mathbf{N}$ に対し, H の正射影作用素 P_n^k を次で定義する:

$$P_n^k := \begin{cases} P_{(-\infty,-1]}, & k = 1, 3, 5, \ldots, \\ P_{[-n,\infty)}, & k = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases} \tag{3.22}$$

列 $\{P_n^k : k = 1, 2, \ldots\}$ は, 単に部分空間 $H_{(-\infty,-1]}$ への射影 $P_{(-\infty,-1]}$ と $H_{[-n,\infty)}$ への射影 $P_{[-n,\infty)}$ を, 次のように交互に並べた列にすぎない:

$$P_{(-\infty,-1]}, P_{[-n,\infty)}, P_{(-\infty,-1]}, P_{[-n,\infty)}, \ldots.$$

次の定理は, $(P_{[-n,-1]}^{\perp} Y_1, P_{[-n,-1]}^{\perp} Y_2)$ の形の内積を, $P_{[-n,-1]}^{\perp}$ ではなく, $P_{(-\infty,-1]}$ と $P_{[-n,\infty)}$ を用いて表現したものである.

定理 3.5 ([I4]). 定常過程 $\{X_n\}$ のスペクトル密度 $\Delta(\cdot)$ に対する条件 (3.7) を仮定する. すると, $Y_1, Y_2 \in H$ と $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\left(P_{[-n,-1]}^{\perp} Y_1, P_{[-n,-1]}^{\perp} Y_2\right) &= \left(P_{(-\infty,-1]}^{\perp} Y_1, P_{(-\infty,-1]}^{\perp} Y_2\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left((P_n^{k+1})^{\perp} P_n^k \cdots P_n^1 Y_1, (P_n^{k+1})^{\perp} P_n^k \cdots P_n^1 Y_2\right).\end{aligned} \tag{3.23}$$

Proof. 部分空間 $H_{[-n,-1]}^{\perp}$ の直交分解

$$\begin{aligned} H_{[-n,-1]}^{\perp} &= H_{(-\infty,-1]}^{\perp} \oplus \left(H_{[-n,-1]}^{\perp} \cap H_{(-\infty,-1]}\right), \\ H_{[-n,-1]}^{\perp} &= H_{[-n,\infty)}^{\perp} \oplus \left(H_{[-n,-1]}^{\perp} \cap H_{[-n,\infty)}\right) \end{aligned}$$

は, 射影作用素 $P_{[-n,-1]}^{\perp}$ の次の直交分解を意味する:

$$P_{[-n,-1]}^{\perp} = P_{(-\infty,-1]}^{\perp} \oplus P_{[-n,-1]}^{\perp} P_{(-\infty,-1]}, \tag{3.24}$$

$$P_{[-n,-1]}^{\perp} = P_{[-n,\infty)}^{\perp} \oplus P_{[-n,-1]}^{\perp} P_{[-n,\infty)}. \tag{3.25}$$

(3.24) と (3.25) を繰り返し用いることにより, $m = 2, 3, \ldots$ に対し, 次を得る:

$$\begin{aligned}\left(P_{[-n,-1]}^{\perp} Y_1, P_{[-n,-1]}^{\perp} Y_2\right) &= \left(P_{(-\infty,-1]}^{\perp} Y_1, P_{(-\infty,-1]}^{\perp} Y_2\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m-1} \left((P_n^{k+1})^{\perp} P_n^k \cdots P_n^1 Y_1, (P_n^{k+1})^{\perp} P_n^k \cdots P_n^1 Y_2\right) + R_n^m.\end{aligned}$$

ここで, R_n^m は次で定義される:

$$R_n^m := \left(P_{[-n,-1]}^{\perp} P_n^m \cdots P_n^1 Y_1, P_{[-n,-1]}^{\perp} P_n^m \cdots P_n^1 Y_2\right).$$

定理 3.1 と下の定理 3.6 (フォン・ノイマンの交代射影) より

$$\operatorname*{s-lim}_{m\to\infty} P_n^m \cdots P_n^1 = P_{[-n,-1]}.$$

であるので,

$$\lim_{m\to\infty} \|P_{[-n,-1]}^{\perp} P_n^m \cdots P_n^1 Y_i\| = \|P_{[-n,-1]}^{\perp} P_{[-n,-1]} Y_i\| = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

となり, 従って $\lim_{m\to\infty} R_n^m = 0$ が分かる. これより定理が従う. □

定理 3.6 (フォン・ノイマンの交代射影). Hilbert 空間 L の閉部分空間 M, N およびその交わり $M \cap N$ への正射影作用素を, それぞれ, P_M, P_N, $P_{M\cap N}$ とする. すると, 次が成り立つ:

$$P_{M\cap N} = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \{P_N P_M\}^n.$$

この定理については, Pourahmadi [P, Section 9.6.3] を見よ.

上の定理で $Y_1 = Y_2$ と置くと, 次の系を得る.

系 3.7 ([I2], Theorem 4.1). 定常過程 $\{X_n\}$ のスペクトル密度 $\Delta(\cdot)$ に対する条件 (3.7) を仮定する. すると, $Y \in H$ と $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, 次が成り立つ:

$$\left\|P_{[-n,-1]}^{\perp} Y\right\|^2 = \left\|P_{(-\infty,-1]}^{\perp} Y\right\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|(P_n^{k+1})^{\perp} P_n^k \cdots P_n^1 Y\right\|^2. \tag{3.26}$$

上の定理 3.6 およびその系 3.7 と同様にして, 次の定理も成り立つ.

定理 3.8 ([I4]). 定常過程 $\{X_n\}$ のスペクトル密度 $\Delta(\cdot)$ に対する条件 (3.7) を仮定する. すると, $Y_1, Y_2, Y \in H$ に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}(Y_1, Y_2) = &\left(P_{(-\infty,-1]}^{\perp} Y_1, P_{(-\infty,-1]}^{\perp} Y_2\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left((P_0^{k+1})^{\perp} P_0^k \cdots P_0^1 Y_1, (P_0^{k+1})^{\perp} P_0^k \cdots P_0^1 Y_2\right),\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\|Y\|^2 = \left\|P_{(-\infty,-1]}^{\perp} Y\right\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|(P_0^{k+1})^{\perp} P_0^k \cdots P_0^1 Y\right\|^2. \tag{3.28}$$

Proof. まず, 次を示す:

$$H_{(-\infty,-1]} \cap H_{[0,\infty)} = \{0\}. \tag{3.29}$$

実際, 定理 3.1 と時間移動不変性により, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} H_{(-\infty,-1]} \cap H_{[0,\infty)} &\subset H_{(-\infty,-1]} \cap H_{[-1,\infty)} = H_{\{-1\}}, \\ H_{(-\infty,-1]} \cap H_{[0,\infty)} &\subset H_{(-\infty,0]} \cap H_{[0,\infty)} = H_{\{0\}}. \end{aligned}$$

よって,

$$H_{(-\infty,-1]} \cap H_{[0,\infty)} \subset H_{\{-1\}} \cap H_{\{0\}}$$

が得られる. しかし, $\{X_n\}$ は純非決定的と仮定されているから, X_{-1} と X_0 は線形独立である. それゆえ, $H_{\{-1\}} \cap H_{\{0\}} = \{0\}$ となり, (3.29) が従う.

さて, H の直交分解

$$\begin{aligned} H &= H_{(-\infty,-1]}^{\perp} \oplus H_{(-\infty,-1]}, \\ H &= H_{[0,\infty)}^{\perp} \oplus H_{[0,\infty)} \end{aligned}$$

は, 次の H の恒等作用素 I_H の直交分解を意味する:

$$I_H = P_{(-\infty,-1]}^{\perp} \oplus P_{(-\infty,-1]}, \tag{3.30}$$

$$I_H = P_{[0,\infty)}^{\perp} \oplus P_{[0,\infty)} \tag{3.31}$$

(3.30) と (3.31) を繰り返し用いることで, $m = 2, 3, \ldots$ に対し, 次が得られる:

$$\begin{aligned} (Y_1, Y_2) = &\big((P_0^1)^{\perp} Y_1, (P_0^1)^{\perp} Y_2\big) \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} \big((P_0^{k+1})^{\perp} P_0^k \cdots P_0^1 Y_1, (P_0^{k+1})^{\perp} P_0^k \cdots P_0^1 Y_2\big) + R_0^m. \end{aligned}$$

ここで,

$$R_0^m := \big(P_0^m \cdots P_0^1 Y_1, P_0^m \cdots P_0^1 Y_2\big)$$

とおいた. 定理 3.1 と定理 3.6 および (3.29) より,

$$\operatorname*{s-lim}_{m\to\infty} P_0^m \cdots P_0^1 = 0,$$

であるので, $\lim_{m\to\infty} R_0^m = 0$ が分かる. こうして (3.27) が従う. (3.28) は (3.27) で $Y = Y_1 = Y_2$ とおくて得られる. □

次のようにおく:

$$U_n := \begin{cases} (X_{-1}, X_0) & (n = 1), \\ \left(P^{\perp}_{[-n+1,-1]} X_{-n}, P^{\perp}_{[-n+1,-1]} X_0\right) & (n = 2, 3, \dots), \end{cases}$$

$$V_n := \begin{cases} \|X_0\|^2 & (n = 1), \\ \|P^{\perp}_{[-n+1,-1]} X_0\|^2 & (n = 2, 3, \dots). \end{cases}$$

すると, $\{X_n\}$ の偏相関関数 $\phi_{n,n}$ は, 次のように表される:

$$\phi_{n,n} = \frac{U_n}{V_n} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

(3.17) から b_j^m を思い出そう. 次の定理では, 内積 U_n とノルム V_n を, AR および MA 係数により無限級数展開する.

定理 3.9 ([I4]). AR 係数 a_n は, 条件 (3.13) を満たすとする. すると, $n = 1, 2, \dots$ に対し, 次が成り立つ:

$$U_n = (c_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} d_k(n,p) d_{k-1}(n,p), \tag{3.32}$$

$$V_n = (c_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} d_k(n,p)^2. \tag{3.33}$$

ここで, $n \in \mathbf{N}$ と $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し, $d_0(n,p) := \delta_{p0}$,

$$d_1(n,p) := \sum_{m_1=0}^{\infty} a_{n+m_1+p} c_{m_1}$$

とおき, また, $k = 2, 3, \dots$ に対し, 次のようにおく:

$$d_k(n,p) := \sum_{m_{k-1}=0}^{\infty} a_{n+m_{k-1}} \sum_{m_{k-2}=0}^{\infty} b^{m_{k-1}}_{n+m_{k-2}} \cdots \sum_{m_1=0}^{\infty} b^{m_2}_{n+m_1} \sum_{v=0}^{\infty} b^{m_1}_{n+p+v} c_v.$$

Proof. 命題 3.2 より, (3.13) は (3.7) を意味する. 従って, 定理 3.5 と 3.8 より, $n = 1, 2, \dots$ に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} U_n &= \left((P^2_{n-1})^{\perp} P^1_{n-1} X_{-n}, (P^2_{n-1})^{\perp} X_0\right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \left((P^{k+1}_{n-1})^{\perp} P^k_{n-1} \cdots P^1_{n-1} X_{-n}, (P^{k+1}_{n-1})^{\perp} P^k_{n-1} \cdots P^2_{n-1} X_0\right), \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$V_n = \|(P^1_{n-1})^{\perp} X_0\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|(P^{k+1}_{n-1})^{\perp} P^k_{n-1} \cdots P^1_{n-1} X_0\|^2. \tag{3.35}$$

$n \in \mathbf{N}$ とし, k は 2 以上の偶数であるとする. 定理 3.4 より, $n = 1, 2, \dots$ と $m = 0, 1, \dots$ に対し, 次が成り立つ:

$$P_{(-\infty,-1]} X_m = \sum_{j=0}^{\infty} b_{n+j}^m X_{-n-j} \quad (\mathrm{mod}\ H_{[-n+1,-1]} \text{ if } n \geq 2),$$

$$P_{[-n+1,\infty)} X_{-n-m} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{n+j}^m X_j \quad (\mathrm{mod}\ H_{[-n+1,-1]} \text{ if } n \geq 2).$$

よって,

$$\begin{aligned} P_{n-1}^k \cdots P_{n-1}^1 X_0 = c_0 \sum_{m_{k-1}=0}^{\infty} a_{n+m_{k-1}} \sum_{m_{k-2}=0}^{\infty} b_{n+m_{k-2}}^{m_{k-1}} \\ \cdots \sum_{m_1=0}^{\infty} b_{n+m_1}^{m_2} \sum_{m_0=0}^{\infty} b_{n+m_0}^{m_1} X_{m_0} \quad (\mathrm{mod}\ H_{[-n+1,-1]} \text{ if } n \geq 2) \end{aligned}$$

が得られる. $\{X_m\}$ は純非決定的であるから, 次の移動平均表現を持つ:

$$X_m = \sum_{j=-\infty}^{m} c_{m-j} \xi_j \quad (m \in \mathbf{Z}).$$

ここで, $\{\xi_j : j \in \mathbf{Z}\}$ は H の正規直交基底で, 次を満たすものである:

$$H_{(-\infty,m]} = H_{(-\infty,m]}(\xi) \quad (m \in \mathbf{Z}).$$

ただし, $H_{(-\infty,m]}(\xi)$ は, $\{\xi_j : -\infty < j \leq m\}$ で張られる H の部分空間である.

$$P_{(-\infty,-1]}^{\perp} X_m = \sum_{j=0}^{m} c_{m-j} \xi_j \quad (m = 0, 1, \dots)$$

であるから,

$$\begin{aligned} (P_{n-1}^{k+1})^{\perp} P_{n-1}^k \cdots P_{n-1}^1 X_0 = c_0 \sum_{m_{k-1}=0}^{\infty} a_{n+m_{k-1}} \sum_{m_{k-2}=0}^{\infty} b_{n+m_{k-2}}^{m_{k-1}} \\ \cdots \sum_{m_1=0}^{\infty} b_{n+m_1}^{m_2} \sum_{m_0=0}^{\infty} b_{n+m_0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_0} c_{m_0-j} \xi_j \end{aligned}$$

となり, それゆえ

$$\left((P_{n-1}^{k+1})^{\perp} P_{n-1}^k \cdots P_{n-1}^1 X_0, \xi_p\right) = \begin{cases} c_0 d_k(n,p) & (p = 0, 1, \dots), \\ 0 & (p = -1, -2, \dots) \end{cases}$$

が, 得られる. 同様の議論で,

$$\big(\xi_p, (P_{n-1}^{k+1})^{\perp} P_{n-1}^{k} \cdots P_{n-1}^{2} X_{-n}\big) = \begin{cases} c_0 d_{k-1}(n,p) & (p = 0, 1, \dots), \\ 0 & (p = -1, -2, \dots) \end{cases}$$

も分かる. よって, パーセバルの等式により, 次が得られる:

$$\begin{aligned}\big((P_{n-1}^{k+1})^{\perp} P_{n-1}^{k} \cdots P_{n-1}^{1} X_0, &(P_{n-1}^{k+1})^{\perp} P_{n-1}^{k} \cdots P_{n-1}^{2} X_{-n}\big) \\ &= (c_0)^2 \sum_{p=0}^{\infty} d_k(n,p) d_{k-1}(n,p),\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\|(P_{n-1}^{k+1})^{\perp} P_{n-1}^{k} \cdots P_{n-1}^{1} X_0\|^2 = (c_0)^2 \sum_{p=0}^{\infty} d_k(n,p)^2. \tag{3.37}$$

同様にして, k が奇数の場合にも, (3.36) と (3.37) が得られ, また, 次も得られる:

$$\begin{aligned}\big((P_{n-1}^{2})^{\perp} P_{n-1}^{1} X_0, (P_{n-1}^{2})^{\perp} X_{-n}\big) &= (c_0)^2 d_1(n,0) \\ &= (c_0)^2 \sum_{p=0}^{\infty} d_1(n,p) d_0(n,p),\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\|(P_{n-1}^{1})^{\perp} X_0\|^2 = (c_0)^2 = (c_0)^2 \sum_{p=0}^{\infty} d_0(n,p)^2. \tag{3.39}$$

(3.36) と (3.38) を (3.34) に代入し, (3.37) と (3.39) を (3.35) に代入すれば, 主張 (3.32) と (3.33) が従う. □

3.6　偏相関関数の表現 (I)

この節では, 主に [I4] に従い, 偏相関関数の表現定理を導く. この節でも, 定常過程 $\{X_n\}$ は**純非決定的**であるとし, その MA 係数を c_n, AR 係数を a_n とする.

応用に便利な形に (3.32) と (3.33) を変形したい. そうするために, 次の 2 種類の条件を考える.

(**B1**)　$\{X_n\}$ は純非決定的で, AR 係数 $\{a_n\}$ と MA 係数 $\{c_n\}$ はそれぞれ (3.13) と次を満たす:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty. \tag{3.40}$$

(**B2**)　$\{X_n\}$ は純非決定的で, AR 係数 $\{a_n\}$ と MA 係数 $\{c_n\}$ は (3.13) と次を満たす:

$$\sum_{v=0}^{\infty} |c_v a_{n+v}| = O(n^{-1}) \qquad (n \to \infty). \tag{3.41}$$

例えば, 任意の $d \in (-\infty, \frac{1}{2})$ に対する (3.1) の自己共分散関数を持つ定常過程の場合には, (B2) が成り立つことを 3.7 と 3.10 節で見る. また, (B1) が成り立つための必要十分条件は, $\{X_n\}$ の自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ が $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$ を満たし, かつ $\{X_n\}$ が連続で正のスペクトル密度を持つことである (cf. [IK2]).

以下, この節では, (B1) または (B2) のどちらかを仮定する.

非負数列 $\{B_n\}$ を

$$B_n := \sum_{v=0}^{\infty} |c_v a_{n+v}|, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

で定義する. $n, k, u, v \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し, $D_k(n, u, v)$ を逐次的に次で定義する:

$$\begin{cases} D_0(n, u, v) := \delta_{uv}, \\ D_{k+1}(n, u, v) := \sum_{w=0}^{\infty} B_{n+v+w} D_k(n, u, w). \end{cases}$$

例えば, 次のようになる:

$$D_3(n, u, v) = \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_2=0}^{\infty} B_{n+v+v_1} B_{n+v_1+v_2} B_{n+v_2+u}.$$

Fubini–Tonelli の定理により $D_k(n, u, v) = D_k(n, v, u)$ が成り立つ.

補題 3.10. *$k, n, v \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し, 条件 (B1) と (B2) は, それぞれ次を意味する:*

$$\sum_{u=0}^{\infty} D_k(n, u, v) < \infty, \tag{3.42}$$

$$\sum_{u=0}^{\infty} D_k(n, u, v)^2 < \infty. \tag{3.43}$$

特に, $k, n, u, v \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して, $D_k(n, u, v) < \infty$ が成り立つ.

Proof. まず (B1) を仮定する. すると, 次が成り立つ:

$$\sum\nolimits_{m=0}^{\infty} B_m \le \left\{\sum\nolimits_{u=0}^{\infty} |c_u|\right\}\left\{\sum\nolimits_{u=0}^{\infty} |a_u|\right\} < \infty.$$

これと B_m の非負性により, 例えば, 次が得られる:

$$\begin{aligned}\sum_{u=0}^{\infty} D_3(n,u,v) &= \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v_1=0}^{\infty}\sum_{v_2=0}^{\infty} B_{n+v+v_1}B_{n+v_1+v_2}B_{n+v_2+u} \\ &\le \left\{\sum\nolimits_{m=0}^{\infty} B_m\right\}^3 < \infty.\end{aligned}$$

一般の場合の (3.42) も同様にして示される.

次に, (B2) を仮定して, 帰納法により (3.43) を示す. (3.41) により, ある正の定数 K があって, 次が成り立つ:

$$B_n \le \frac{K}{(n+1)} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

これより, (3.43) は $k = 1$ に対して成立する. 次に, $k = j$ に対して (3.43) が成り立つと仮定する. 次が成り立つ:

$$D_{k+1}(n,u,v) \le K \sum\nolimits_{w=0}^{\infty} \frac{1}{n+v+w} D_k(n,u,w). \tag{3.44}$$

ここで, 作用素 T を

$$(Tu)_m := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u_i}{m+i+1} \qquad (u = (u_i) \in l^2)$$

で定義すると, T は l^2 から l^2 への有界線形作用素である (Hardy *et al.* [HLP, Chapter IX] を見よ). よって, 不等式 (3.44) は, $k = j+1$ に対して (3.43) が成り立つことを意味する. □

$\{c_n\} \in l^2$ であるから, 条件 (3.13) より,

$$\sum_{v=0}^{\infty} |c_v a_{n+v}| < \infty \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

が成り立つ. よって, 次のようにおくことができる:

$$\beta(n) := \sum_{v=0}^{\infty} c_v a_{v+n} \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3.45}$$

この $\beta(\cdot)$ は, 本節のみならず, 次節以降でも頻繁に現れる.

$d_k(n,p)$ を定理 3.9 の通りとする.

定理 3.11 ([I4]). 条件 (B1) または (B2) のどちらかを仮定する．すると，$n \in \mathbf{N}$ と $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
d_1(n,p) &= \beta(n+p),\\
d_2(n,p) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \beta(m_1+n)\beta(m_1+n+p),
\end{aligned}
$$

であり，また，$k = 3, 4, \ldots$ に対して次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
d_k(n,p) = &\sum_{m_{k-1}=0}^{\infty} \beta(m_{k-1}+n) \sum_{m_{k-2}=0}^{\infty} \beta(m_{k-1}+m_{k-2}+n)\\
&\cdots \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta(m_3+m_2+n) \sum_{m_1=0}^{\infty} \beta(m_2+m_1+n)\beta(m_1+n+p).
\end{aligned}
$$

これらの和は，絶対収束する．

Proof. 補題 3.10 により，Fubini–Tonelli の定理を用いて和の順序を交換することができ，定理は得られる ([I2, Theorem 4.6] の証明を参照せよ)． □

命題 3.12. 条件 (B1) または (B2) のどちらかを仮定する．すると，$i, j \in \mathbf{N}$ に対して次が成り立つ:

$$
\sum_{p=0}^{\infty} d_i(n,p)d_j(n,p) = d_{i+j}(n,0) \qquad (n = 1, 2, \ldots).
$$

Proof. 簡単のため，$i = j = 4$ の場合だけを示す．一般の場合も，同様にして証明することができる．定理 3.11 により，$n = 1, 2, \ldots$ と $p = 0, 1, \ldots$ に対して，次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
d_4(n,p) = &\sum_{m_1=0}^{\infty} \beta(m_1+n) \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta(m_1+m_2+n)\\
&\sum_{m_3=0}^{\infty} \beta(m_2+m_3+n)\beta(m_3+p+n).
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

補題 3.10 により Fubini の定理を用いて和の順序を交換し，次を得る:

$$
\begin{aligned}
d_4(n,p) = &\sum_{m_3=0}^{\infty} \beta(m_3+p+n) \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta(m_2+m_3+n)\\
&\sum_{m_1=0}^{\infty} \beta(m_1+m_2+n)\beta(m_1+n).
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

(3.46) の (m_1, m_2, m_3) を (m_7, m_6, m_5) に置き換えると,

$$\begin{aligned} d_4(n,p) = \sum_{m_7=0}^{\infty} \beta(m_7+n) \sum_{m_6=0}^{\infty} \beta(m_6+m_7+n) \\ \sum_{m_5=0}^{\infty} \beta(m_5+m_6+n)\beta(p+m_5+n) \end{aligned} \tag{3.48}$$

が得られる. (3.47) と (3.48) と Fubini の定理により,

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{\infty} d_4(n,p)d_4(n,p) = \sum_{m_4=0}^{\infty} d_4(n,m_4)d_4(n,m_4) \\ &= \sum_{m_4=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m_7=0}^{\infty} \beta(m_7+n) \sum_{m_6=0}^{\infty} \beta(m_6+m_7+n) \right. \\ &\qquad\qquad \left. \sum_{m_5=0}^{\infty} \beta(m_5+m_6+n)\beta(m_4+m_5+n) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{m_3=0}^{\infty} \beta(m_3+m_4+n) \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta(m_2+m_3+n) \right. \\ &\qquad\qquad \left. \sum_{m_1=0}^{\infty} \beta(m_1+m_2+n)\beta(m_1+n) \right\} \end{aligned}$$

となり, これはさらに次に等しい:

$$\begin{aligned} &\sum_{m_7=0}^{\infty} \beta(m_7+n) \sum_{m_6=0}^{\infty} \beta(m_6+m_7+n) \sum_{m_5=0}^{\infty} \beta(m_5+m_6+n) \\ &\quad \sum_{m_4=0}^{\infty} \beta(m_4+m_5+n) \sum_{m_3=0}^{\infty} \beta(m_3+m_4+n) \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta(m_2+m_3+n) \\ &\qquad \sum_{m_1=0}^{\infty} \beta(m_1+m_2+n)\beta(m_1+n) \\ &= d_8(n,0). \end{aligned}$$

こうして, $i = j = 4$ の場合の結果が従う. □

$k, n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$d_k(n) := d_k(n,0)$$

とおく. 定理 3.11 により, (B1) または (B2) の仮定のもとでは,

$$d_1(n) = \beta(n), \tag{3.49}$$

$$d_2(n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \beta(m_1+n)\beta(m_1+n), \tag{3.50}$$

であり, さらに, $k = 3, 4, \ldots$ に対しては,

$$\begin{aligned} d_k(n) = &\sum_{m_{k-1}=0}^{\infty} \beta(m_{k-1}+n) \sum_{m_{k-2}=0}^{\infty} \beta(m_{k-1}+m_{k-2}+n) \\ &\cdots \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta(m_3+m_2+n) \sum_{m_1=0}^{\infty} \beta(m_2+m_1+n)\beta(m_1+n). \end{aligned} \tag{3.51}$$

である.

予測誤差の内積 U_n とノルム V_n を思い出そう. 定理 3.9 と命題 3.12 から直ちに, 次の U_n, V_n および偏相関関数 $\phi_{n,n}$ に対する最終的な表現定理が得られる.

定理 3.13 ([I4]). 条件 (B1) または (B2) のどちらかを仮定する. すると, $n = 1, 2, \ldots$ に対して, 次が成り立つ:

$$U_n = (c_0)^2 \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} d_{2k-1}(n), \tag{3.52}$$

$$V_n = (c_0)^2 \left\{ 1 + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} d_{2k}(n) \right\}, \tag{3.53}$$

$$\phi_{n,n} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} d_{2k-1}(n)}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k}(n)}. \tag{3.54}$$

次の定理は, この表現定理が $\phi_{n,n}$ の漸近挙動の解析に有効であることを示唆する.

定理 3.14 ([I4]). 条件 (B1) または (B2) のどちらかを仮定する. すると, 次が成り立つ:

$$\phi_{n,n} \sim \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k-1}(n) \quad (n \to \infty).$$

Proof. $\lim_{n\to\infty} V_n = (c_0)^2$ と定理 3.13 から, 直ちに従う. □

3.7　長時間記憶モデル

この節では, [I4] に従い, 長時間記憶モデルの偏相関関数の漸近挙動を調べる.

以下, この講義ノートを通じて, $\mathcal{R}_0$ は無限遠における **slowly varying** (緩変動) の関数の全体を表すものとする. すなわち, $\mathcal{R}_0$ の元 $\ell(\cdot)$ は, 無限遠のある近傍 $[A,\infty)$ で定義された正の可測な関数であって, すべての $\lambda>0$ に対し,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)}=1$$

を満たすものである ([BGT] の Chapter 1 を見よ). 例えば, 正定数や $\log x$ は, slowly varying な関数である.

我々は, 長時間記憶モデルの設定として, 次の条件を考える:

(**L**)　定常過程 $\{X_n\}$ は純非決定的で, ある $d\in(0,\frac{1}{2})$ と $\ell(\cdot)\in\mathcal{R}_0$ に対して, $\{X_n\}$ の MA 係数 $\{c_n\}$ と AR 係数 $\{a_n\}$ はそれぞれ次を満たす:

$$c_n\sim n^{-(1-d)}\left\{\frac{\ell(n)}{B(d,1-2d)}\right\}^{1/2}\qquad(n\to\infty),\tag{3.55}$$

$$a_n\sim n^{-(1+d)}\left\{\frac{\ell(n)}{B(d,1-2d)}\right\}^{-1/2}\frac{d\sin(\pi d)}{\pi}\qquad(n\to\infty).\tag{3.56}$$

後に出てくる補題 3.21 と等式

$$\gamma(n)=\sum_{0}^{\infty}c_v c_{|n|+v}\qquad(n\in\mathbf{Z})\tag{3.57}$$

(これは, (3.12) より出る) により, (3.55) は次を意味する:

$$\gamma(n)\sim n^{2d-1}\ell(n)\qquad(n\to\infty).\tag{3.58}$$

$0<1-2d<1$ であるから, これは

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\gamma(n)|=\infty$$

を意味する. この最後の性質を持つ定常過程は, **長時間記憶**を持つと呼ばれる (cf. [BD, Section 13.2]). 従って, 条件 (L) を満たす定常過程 $\{X_n\}$ は長時間記憶を持つ. (3.55) と (3.56) を同時に仮定するというのは, 一見,

恣意的に見えるかもしれないが, 後に出てくる定理 3.22 等により, 次節で述べる条件 (C1), (C2), (A1) の下で, (3.55), (3.56), (3.58) の三つは, 互いに同値であり, 特に (L) と (3.58) は同値であることが分かる. さらに, 長時間記憶過程の代表的なモデルである $0 < d < \frac{1}{2}$ の場合の Fractional ARIMA(p, d, q) も, ある定数関数 ℓ について (L) を満たす (Kokoszka–Taqqu [KT, Corollary 3.1]).

$\beta(n)$ の定義 (3.45) を思い出そう.

命題 3.15. $d \in (0, \frac{1}{2})$ と $\ell \in \mathcal{R}_0$ に対して, 条件 (L) を仮定する.

(1) 次が成り立つ:

$$\beta(n) \sim \frac{\sin(\pi d)}{\pi} n^{-1} \qquad (n \to \infty).$$

(2) 条件 (B2) が成り立つ. より正確には, 次が成り立つ:

$$\sum_{v=0}^{\infty} |c_v a_{n+v}| \sim \frac{\sin(\pi d)}{\pi} n^{-1} \qquad (n \to \infty).$$

(3) $s \geq 0$ と $u \geq 0$ に対して, 次が成り立つ:

$$\beta([ns] + [nu] + n) \sim \frac{\sin(\pi d)}{\pi(s + u + 1)} n^{-1} \qquad (n \to \infty).$$

(4) 各 $r \in (1, \infty)$ に対して, $N_1 \in \mathbf{N}$ で次を満たすものが存在する:

$$|\beta([ns] + [nu] + n)| \leq \frac{r \sin(\pi d)}{\pi(s + u + 1)} n^{-1} \quad (s \geq 0,\ u \geq 0,\ n \geq N_1). \tag{3.59}$$

Proof. (1) と (2) は補題 3.21 から従う. $[ns] + [nu] + n \sim n(s + u + 1)$ であるから, (3) は (1) より従う. $r \in (1, \infty)$ とする. $n/([ns] + [nu] + n)$ は, $s \geq 0$ と $u \geq 0$ について一様に $1/(s + u + 1)$ 行くから (cf. [BGT, Theorem 1.5.2]), $N_2 \in \mathbf{N}$ を選んで, 次が成り立つようにできる:

$$\frac{1}{([ns] + [nu] + n)} \leq \frac{r^{1/2}}{n(s + u + 1)} \qquad (s \geq 0,\ u \geq 0,\ n \geq N_2).$$

一方, (1) により, $N_3 \in \mathbf{N}$ を選んで, 次が成り立つようにできる:

$$|\beta(n)| \leq \frac{r^{1/2} \sin(\pi d)}{\pi n} \qquad (n \geq N_3).$$

$N_1 := \max(N_2, N_3)$ とおくと, $s \geq 0$, $u \geq 0$, $n \geq N_1$ に対して, 次が分かる:

$$|\beta([ns]+[nu]+n)| \leq \frac{r^{1/2}\sin(\pi d)}{\pi([ns]+[nu]+n)} \leq \frac{r\sin(\pi d)}{\pi(s+u+1)} n^{-1}.$$

よって, (4) が従う. □

$d_k(n)$ を (3.49)–(3.51) から思い出そう. $k = 1, 2, \ldots$ に対し,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds_1}{(s_1+1)(s_1+1)} = \frac{1}{\pi^2},$$

とおき, また $k = 3, 4, \ldots$ に対し, λ_k は

$$\frac{1}{\pi^k}\int_0^\infty ds_{k-1}\cdots\int_0^\infty ds_1 \frac{1}{(s_{k-1}+1)}\left\{\prod_{m=1}^{k-2}\frac{1}{(s_{m+1}+s_m+1)}\right\}\frac{1}{(s_1+1)}$$

を表す.

命題 3.16. $d \in (0, \frac{1}{2})$ と $\ell \in \mathcal{R}_0$ に対して, 条件 (L) を仮定する.

(1) $r \in (1, \infty)$ と (3.59) を満たす $N_1 \in \mathbf{N}$ に対し,

$$|d_k(n)| \leq n^{-1}\{r\sin(\pi d)\}^k \lambda_k \qquad (u \geq 0,\ k \in \mathbf{N},\ n \geq N_1). \quad (3.60)$$

(2) $k \in \mathbf{N}$ と $u \geq 0$ に対し,

$$d_k(n) \sim n^{-1}\{\sin(\pi d)\}^k \lambda_k \qquad (n \to \infty). \quad (3.61)$$

Proof. $k \geq 3$ とする. $d_k(n)$ を次のように表す:

$$\begin{aligned} d_k(n) &= \int_0^\infty ds_{k-1}\cdots\int_0^\infty ds_1 \beta([s_{k-1}]+n) \\ &\quad \times \left\{\prod_{m=1}^{k-2}\beta([s_{m+1}]+[s_m]+n)\right\} \times \beta([s_1]+n+[nu]) \\ &= n^{k-1}\int_0^\infty ds_{k-1}\cdots\int_0^\infty ds_1 \beta([ns_{k-1}]+n) \\ &\quad \times \left\{\prod_{m=1}^{k-2}\beta([ns_{m+1}]+[ns_m]+n)\right\} \times \beta([ns_1]+n). \end{aligned}$$

これに, 命題 3.15 とルベーグの収束定理を適用すると, (3.60) と (3.61) が得られる. $k = 1, 2$ の場合の証明も同様である. □

命題 3.17. $k = 1, 2, \ldots$ に対して, 次の不等式が成り立つ*:*

$$\lambda_k \leq \frac{1}{\pi^2}. \tag{3.62}$$

Proof. $f(x) := 1/(1+x)$ とおき, また $L^2((0,\infty), du)$ の有界線形作用素 T を次で定義する:

$$Tg(u) := \int_0^\infty \frac{1}{u+v} g(v) dv.$$

Hilbert の定理 (cf. [HLP, Theorems 316 and 317]) により, T の作用素ノルム $\|T\|$ は, π に等しい. よって, $L^2((0,\infty), du)$ の内積を $(\cdot, \cdot)$ とすると,

$$\lambda_k \leq \pi^{-k}(f, H^{k-2} f) \leq \pi^{-2}$$

となり, 補題が得られる. □

条件 (L) を満たす長時間記憶過程の偏相関関数の漸近挙動を与えよう.

定理 3.18 ([I4]). $d \in (0, \frac{1}{2})$ と $\ell \in \mathcal{R}_0$ に対して, 定常過程 $\{X_n\}$ は条件 (L) を満たすと仮定する. すると, $\{X_n\}$ の偏相関関数 $\phi_{n,n}$ は, 次の漸近挙動を持つ:

$$\phi_{n,n} \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty).$$

Proof. r を次が成り立つように選ぶ:

$$0 < r \sin(\pi q) < 1.$$

命題 3.17 により,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2k-1} \{r \sin(\pi d)\}^{2k-1} < \infty$$

が分かり, 従って, 命題 3.16 とルベーグの収束定理により次が分かる:

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k-1}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2k-1} \sin^{2k-1}(\pi d). \tag{3.63}$$

よって, 定理 3.14 と次の補題 3.19 により, 定理が得られる. □

補題 3.19. $|x| < 1$ に対して, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x^{2k-1} = \pi^{-1} \arcsin x$ が成り立つ.

Proof. $0 < d < \frac{1}{2}$ に対し, $\{Y_n : n \in \mathbf{Z}\}$ を Fractional ARIMA$(0, d, 0)$ 過程で, $E[(Y_0)^2] = \Gamma(1-2d)/\Gamma^2(1-d)$ を満たすものとする. $\{Y_n\}$ の MA 係数, AR 係数 および 偏相関関数を, それぞれ, $\{c'_n\}$, $\{a'_n\}$, $\phi'_{n,n}$ と記す. すると, $n = 0, 1, \ldots$ に対して,

$$c'_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(n+1)\Gamma(d)}, \qquad a'_n = \frac{\Gamma(n-d)d}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-d)}$$

が成り立つ ([BD, Section 13.2] を見よ). $d'_k(n)$ も同様に定める. すると, $\{Y_n\}$ も (L) を満たすから, (3.63) により

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{\infty} d'_{2k-1}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2k-1}\{\sin(\pi d)\}^{2k-1}.$$

となる. しかしながら, $\phi'_{n,n} = d/(n-d)$ であるから, 定理 3.14 より,

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{\infty} d'_{2k-1}(n) = \lim_{n\to\infty} n\phi'_{n,n} = d$$

が得られる. 組合わせると, $\sum_1^\infty \lambda_k \sin^{2k-1}(\pi d) = d$ を得る. $0 < x < 1$ に対して, $\pi^{-1} \arcsin x$ を d に代入して (さらに解析接続を用いれば) 補題が得られる. □

$d \in (-1/2, 1/2)$ と $p, q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し, 定常過程 $\{X_n\}$ のスペクトル密度 $\Delta(\cdot)$ が,

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})|^2} |1 - e^{i\lambda}|^{-2d}, \qquad -\pi \le \lambda \le \pi$$

の形のとき, $\{X_n\}$ は **Fractional ARIMA**(p, d, q) **過程** と呼ばれる. 但し, $\phi(z)$ と $\theta(z)$ はそれぞれ次数が p, q の実多項式で, 共通零点を持たず, また $\phi(z)$ と $\theta(z)$ のどちらも閉円板 $\{z \in \mathbf{C} : |z| \le 1\}$ に零点を持たないとする.

次の結果が成り立つ.

定理 3.20 ([I3, IK1, I4]). $p, q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $d \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ とする. $\{X_n\}$ を Fractional ARIMA (p, d, q) 過程とし, その偏相関関数を $\phi_{n,n}$ とする. すると, 次がなりたつ:

$$\phi_{n,n} \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty).$$

もし $0 < d < \frac{1}{2}$ ならば, Fractional ARIMA (p, d, q) 過程 $\{X_n\}$ は, ある定数関数 $\ell(\cdot)$ に関して条件 (L) を満たす ([KT] の Corollary 3.1 を見よ). 従って, $0 < d < \frac{1}{2}$ の場合の上の定理の主張は, 定理 3.18 より直ちに従う. $-\frac{1}{2} < d < 0$ の場合の証明は, [I4] を見よ.

3.8　漸近関係

この節でも, $\{X_n\}$ は純非決定的な定常過程とする. この節の目的は, $\{X_n\}$ の自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$, スペクトル密度 $\Delta(\cdot)$, MA 係数列 $\{c_n\}$ そして AR 係数列 $\{a_n\}$ の漸近挙動の間の関係を調べることである. この節の議論は, [I2] による.

以下, 次のような条件を必要に応じて考える:

$$\text{すべての } n \geq 0 \text{ に対し } c_n \geq 0; \tag{C1}$$

$$\{c_n\} \text{ は最終的に単調に減少して } 0 \text{ に行く}; \tag{C2}$$

$$\{a_n\} \text{ は最終的に単調に減少して } 0 \text{ に行く}; \tag{A1}$$

$\{X_n\}$ のスペクトル密度 $\Delta(\cdot)$ は偶関数であるから, 次が成り立つ:

$$\gamma(n) = 2\int_0^{\pi} \Delta(\lambda)\cos(n\lambda)d\lambda \qquad (n \in \mathbf{Z}),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = (2\pi)^{1/2}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda)\log\Delta(\lambda)d\lambda\right\} \quad (-1 < r < 1)$$

(ここで $P_r(\lambda)$ は (3.11) で定義されるポアソン核である).

もし MA 係数列 $\{c_n\}$ が (C1) と (C2) を満たすならば, (3.57) より列 $\{\gamma(n)\}_0^{\infty}$ は最終的に減少して 0 に行き, それゆえフーリエ級数

$$\frac{1}{2\pi}\gamma(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma(n)\cos(n\lambda) \tag{3.64}$$

は, $(-\pi, \pi)\setminus\{0\}$ 上の連続関数に収束する (Zygmund [Z, Chapter I, (2.6)] を見よ). さらに, ルベーグの定理 ([Z, Chapter III, (3.9)]) により, このフーリエ級数は $\Delta(\lambda)$ と殆ど至る所一致する. よって, 以下, 我々は $\Delta(\lambda)$ と (3.64) のフーリエ級数を同一視する.

$\mathcal{R}_0$ は slowly varying の関数全体を表すのであった. $\ell \in \mathcal{R}_0$ とし, 十分大きな B を取って, $\ell(\cdot)$ が $[B, \infty)$ で局所有界になるようにする ([BGT, Corollary 1.4.2] を見よ). $\int^{\infty} \ell(s)ds/s = \infty$ とは $\int_B^{\infty} \ell(s)ds/s = \infty$ を意味するものとする．この場合, 別の slowly varying な関数 $\tilde{\ell}$ を次で定義する:

$$\tilde{\ell}(x) := \int_B^x \frac{\ell(s)}{s} ds \qquad (x \geq B) \tag{3.65}$$

([BGT, Section 1.5.6] を見よ). $\int^{\infty} \ell(s)ds/s = \infty$ を仮定したので, $\tilde{\ell}(x)$ の $x \to \infty$ での漸近挙動は, B の取り方によらない．

境界の場合を扱う時のために, Π-variation の概念を説明する．$\ell \in \mathcal{R}_0$ に対し, Π_ℓ は, 無限遠のある近傍 $[A, \infty)$ で定義された実可測関数 g で次を満たすもの全体のクラスとする: ある $c \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\lim_{x \to \infty} \{g(\lambda x) - g(x)\}/\ell(x) = c \log \lambda \quad \text{for all } \lambda > 0.$$

定数 $c \in \mathbf{R}$ は, g の ℓ-指数と呼ばれる ([BGT, Chapter 3] を見よ).

よく用いられる次の補題を用意しておこう．

補題 3.21. 実数 p と q は $q < 1 < p + q$ を満たし, また $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{R}_0$ とする．実数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は, それぞれ $n \to \infty$ で, $a_n \sim n^{-p}\ell_1(n)$ と $b_n \sim n^{-q}\ell_2(n)$ という漸近挙動を持つとする．$n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し, $u_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} b_k$ とおく．すると, 次が成り立つ:

$$u_n \sim n^{-(p+q-1)} \ell_1(t) \ell_2(t) B(p + q - 1, 1 - q) \qquad (n \to \infty).$$

ここで, $B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数である．

Proof. 関数 f と g を,

$$f(t) := a_{[t]}, \quad g(t) := b_{[t]} \quad (t \geq 0)$$

で定義する．すると, $f(t) \sim t^{-p}\ell_1(t)$ かつ $g(t) \sim t^{-q}\ell_2(t)$ であり,

$$u_n = \int_0^{\infty} f(n + s) g(s) ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成り立つ．$\delta(i)$ $(i = 1, 2, 3)$ を, $\max(0, q) < \delta(1) < 1$, $\delta(2) < p$, $\delta(3) < q$, かつ $1 < \delta(2) + \delta(3)$ が成り立つように取る．そして, $F_1(u) = u^p f(u)$, $G_1(u) = u^{\delta(1)} g(u)$, $F_2(u) = u^{\delta(2)} f(u)$, $G_2(u) = u^{\delta(3)} g(u)$ とおく．すると, G_1 は $[0, \infty)$ 上, 局所有界である．さて, $u_n/\{nf(n)g(n)\} = C(n) + D(n)$

である. ここで, 次の様においた:

$$C(t)=\int_0^1 \frac{F_1(t(u+1))}{F_1(t)}\cdot\frac{G_1(tu)}{G_1(t)}\cdot\frac{1}{(u+1)^p u^{\delta(1)}}du,$$
$$D(t)=\int_1^\infty \frac{F_2(t(u+1))}{F_2(t)}\cdot\frac{G_2(tu)}{G_2(t)}\cdot\frac{1}{(u+1)^{\delta(2)} u^{\delta(3)}}du.$$

[BGT, Theorem 1.5.2] により, $C(n)$ で $n\to\infty$ とすると, $F_1(n(u+1))/F_1(n)$ は 1 に, $G_1(nu)/G_1(n)$ は $u^{\delta(1)-q}$ に, それぞれ $u\in(0,1)$ について一様に収束する. それゆえ, $C(n)$ は $\int_0^1(u+1)^{-p}u^{-q}du$ に収束する. 同様に, [BGT, Theorem 1.5.2] により, $D(n)$ は $\int_1^\infty(u+1)^{-p}u^{-q}du$ に収束する. よって, 次を得る:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{tf(t)g(t)}=\int_0^\infty\frac{1}{(u+1)^p u^q}du=B(p+q-1,1-q).$$

補題は, これより従う. □

我々は, $\ell\in\mathcal{R}_0$ と $-\infty<d<\frac{1}{2}$ に対し, 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ の次のような漸近挙動の特徴付けに興味がある:

$$\gamma(n)\sim n^{2d-1}\ell(n)\qquad(n\to\infty). \tag{3.66}$$

以下の三つの定理は, それぞれ, 長時間記憶, 境界の場合, 中間的記憶 ([BD, p. 520]) に対する結果である.

定理 3.22 ([I2]). $\ell\in\mathcal{R}_0$, $0<d<\frac{1}{2}$ とする. (C1) と (C2) を仮定する. すると, (3.66) と次の (**??**), (3.67) の三つの条件は互いに同値である:

$$\begin{aligned}&\Delta(\lambda)\sim\lambda^{-2d}\ell(1/\lambda)\cdot\frac{1}{2\Gamma(1-2d)\sin(\pi d)}\qquad(\lambda\to 0+),\\ &c_n\sim n^{-(1-d)}\left\{\frac{\ell(n)}{B(d,1-2d)}\right\}^{1/2}\qquad(n\to\infty).\end{aligned} \tag{3.67}$$

さらに, (A1) を仮定すると, これらの各々は次を意味する:

$$a_n\sim n^{-(1+d)}\left\{\frac{\ell(n)}{B(d,1-2d)}\right\}^{-1/2}\frac{d\sin(\pi d)}{\pi}\qquad(n\to\infty). \tag{3.68}$$

定理 3.23 ([I2]). $d=0$ とし, また $\ell\in\mathcal{R}_0$ は $\int^\infty\ell(s)ds/s=\infty$ を満たすとする. (C1) と (C2) を仮定する. すると, (3.66) は次と同値である:

$$\Delta(1/\cdot)\in\Pi_\ell \text{ で } \ell\text{-指数が } \pi^{-1}. \tag{3.69}$$

どちらも次を意味する:

$$c_n \sim n^{-1}\ell(n)\{2\tilde{\ell}(n)\}^{-1/2} \qquad (n \to \infty). \tag{3.70}$$

もし, さらに, (A1) を仮定すると, これらは次を意味する:

$$a_n \sim n^{-1}\ell(n)\{2\tilde{\ell}(n)\}^{-3/2} \qquad (n \to \infty). \tag{3.71}$$

定理 3.24 ([I2]). $-\infty < d \le 0$, $\ell \in \mathcal{R}_0$ とする. さらに, $d = 0$ の時は $\int^{\infty} \ell(s)ds/s < \infty$ を仮定する. また, (C1) と (C2) も仮定する. すると, (3.66) は次と同値である*:*

$$c_n \sim \frac{n^{-(1-2d)}\ell(n)}{\{\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma(k)\}^{1/2}} \qquad (n \to \infty). \tag{3.72}$$

さらに (A1) を仮定すると, どちらも次を意味する*:*

$$a_n \sim \frac{n^{-(1-2d)}\ell(n)}{\{\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma(k)\}^{3/2}} \qquad (n \to \infty). \tag{3.73}$$

上の三つの定理を証明するために, $\{c_n\}$ の漸近挙動を $\{a_n\}$ のそれと結びつける次の補題をまず示す.

補題 3.25. $\ell \in \mathcal{R}_0$ とする. $\{u_n\}_0^{\infty}$ と $\{v_n\}_0^{\infty}$ は共に最終的に減少して 0 に行く実数列で, 次の関係式を満たすとする*:*

$$\left(\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} u_n z^n\right)\left(\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} v_n z^n\right) = -1 \qquad (|z| < 1). \tag{3.74}$$

(1) $0 < d < 1$ とする. $\sum_0^{\infty} u_n = \infty$ か $\sum_0^{\infty} v_n = 0$ のいずれかを仮定する. すると, 次は同値である*:*

$$u_n \sim n^{-(1-d)}\ell(n) \qquad (n \to \infty), \tag{3.75}$$

$$v_n \sim \frac{n^{-(d+1)}}{\ell(n)} \cdot \frac{d\sin(\pi d)}{\pi} \qquad (n \to \infty). \tag{3.76}$$

(2) $\int^{\infty} \ell(s)ds/s = \infty$ を仮定する. $\sum_0^{\infty} u_n = \infty$ または $\sum_0^{\infty} v_n = 0$ のいずれかを仮定する. すると, 次は同値である*:*

$$u_n \sim n^{-1}\ell(n) \qquad (n \to \infty), \tag{3.77}$$

$$v_n \sim n^{-1}\frac{\ell(n)}{\tilde{\ell}(n)^2} \qquad (n \to \infty). \tag{3.78}$$

(3) $1 \le p < \infty$ とする. $\sum_0^\infty u_n$ は有限で 0 でないと仮定する. すると, 次は同値である:

$$u_n \sim n^{-p}\ell(n) \qquad (n \to \infty), \tag{3.79}$$

$$v_n \sim \frac{n^{-p}\ell(n)}{(\sum_0^\infty u_k)^2} \qquad (n \to \infty). \tag{3.80}$$

Proof. (1) 仮定により, $\sum_0^\infty u_n = \infty$ と $\sum_0^\infty v_n = 0$ は同値である. $n \ge 0$ に対して $w_n := \sum_{k=n+1}^\infty v_k$ とおく. すると

$$\sum_{n=0}^\infty v_n z^n = (z-1)\sum_{n=0}^\infty w_n z^n$$

となり, それゆえ次が成り立つ:

$$(1-z)\left(\sum\nolimits_{n=1}^\infty u_n z^n\right)\left(\sum\nolimits_{n=1}^\infty w_n z^n\right) = 1 \qquad (|z|<1). \tag{3.81}$$

単調密度定理 ([BGT, §1.7]) により, (3.76) と次は同値である:

$$w_n \sim \frac{n^{-d}}{\ell(n)} \cdot \frac{\sin(\pi d)}{\pi} \qquad (n \to \infty).$$

一方, 後者は, 冪級数に対する Karamata のタウバー型定理 ([BGT, Corollary 1.7.3]) により, 次と同値である:

$$\sum_{n=0}^\infty w_n s^n \sim \frac{1}{(1-s)^{1-d}\ell(1/(1-s))\Gamma(d)} \qquad (s \uparrow 1).$$

(3.81) により, これは次と同値である:

$$\sum_{n=0}^\infty u_n s^n \sim (1-s)^{-d}\ell(1/(1-s))\Gamma(d) \qquad (s \uparrow 1).$$

そして, 後者は再び [BGT, Corollary 1.7.3] により, (3.75) と同値である.

(2) $x \ge 0$ に対しては $U(x) := \sum_{n=0}^{[x]} u_n$ とおき, $x < 0$ に対しては $U(x) := 0$ とおく. ここで, $[\cdot]$ は整数部分を表す. $\hat{U}$ を U の Laplace-Stieltjes 変換とする:

$$\hat{U}(x) := \int_{[0,\infty)} e^{-tx} dU(t) = \sum_{n=0}^\infty u_n e^{-nx} \qquad (x > 0).$$

同様に, $x \geq 0$ に対して $V(x) := \sum_{n=0}^{[x]} v_n$ とおき, また $x > 0$ に対して $\hat{V}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} v_n e^{-nx}$ とおく.

まず, (3.77) を仮定する．すると de Haan の定理 ([I1, Theorems 2.3 and 2.4]) により $\hat{U}(1/\cdot) \in \Pi_\ell$ で ℓ-指数 が 1 である．一方, $x \to \infty$ で $U(x) \sim \tilde{\ell}(x)$ であるから, Karamata の定理 ([BGT, Theorem 1.7.1]) により, $x \to \infty$ で $\hat{U}(1/x) \sim \tilde{\ell}(x)$ となる．$\ell_1(x) := \ell(x)/\tilde{\ell}(x)^2$ とおく．すると, (3.74) により, $\lambda > 0$ に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{V}(1/\lambda x) - \hat{V}(1/x)}{\ell_1(x)} &= \frac{\hat{U}(1/\lambda x) - \hat{U}(1/x)}{\ell(x)} \cdot \frac{\tilde{\ell}(\lambda x)}{\hat{U}(1/\lambda x)} \cdot \frac{\tilde{\ell}(x)}{\hat{U}(1/x)} \cdot \frac{\tilde{\ell}(x)}{\tilde{\ell}(\lambda x)} \\ &\to \log \lambda \qquad (x \to \infty).\end{aligned}$$

よって, $\hat{V}(1/\cdot) \in \Pi_{\ell_1}$ で ℓ_1-指数 1 であることが分かる．これは, de Haan の定理により, (3.78) を意味する．

次に, (3.78) を仮定する．w_n を (1) と同じとする．上と同じように, $x \geq 0$ に対して $W(x) = \sum_{n=0}^{[x]} w_n$ と書き, $x > 0$ に対して $\hat{W}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n e^{-nx}$ とする.

$$w_n \sim \int_n^\infty \ell_1(t) dt/t = 1/\tilde{\ell}(n) \qquad (n \to \infty)$$

であるから, $x \to \infty$ で $W(x) \sim x/\ell(x)$ が分かる．Karamata の定理により, $x \to \infty$ で $\hat{W}(1/x) \sim x/\tilde{\ell}(x)$ となり, それゆえ (3.81) により, $x \to \infty$ で $\hat{V}(1/x) \sim 1/\tilde{\ell}(x)$ となる．一方, (3.78) は $\hat{V}(1/\cdot) \in \Pi_{\ell_1}$ で ℓ_1-指数が 1 であることを意味する．それゆえ, 上の議論と同様にして, $\hat{U}(1/\cdot) \in \Pi_\ell$ で ℓ-指数が 1 であることが従い, それゆえ (3.77) が得られる.

(3) $\sum_0^\infty v_n$ もまた有限で 0 でないから, 対称性により (3.79) が (3.80) を意味することさえ言えばよい．$x > 0$ に対して $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{-nx}$ とおく．すると, (3.74) より, 次を得る:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n e^{-nx} = -1/f(x) \qquad (x > 0).$$

上を x について $r := [p]$ 回微分することにより, 次を得る:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n n^r e^{-nx} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} u_n n^r e^{-nx}}{f(x)^2} + \frac{F_r(x)}{f(x)^{r+1}}.$$

ここで, F_r は $\{f^{(m)} : m = 0, 1, \ldots, r-1\}$ の多項式である. $r - p > -1$ であり,

$$u_n n^r \sim n^{r-p}\ell(n) \qquad (n \to \infty)$$

であるから, 次が従う:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n n^r e^{-nx} \sim x^{p-r-1}\ell(1/x)\Gamma(r-p+1) \qquad (x \to 0+).$$

一方, 任意の $\epsilon > 0$ と $0 \le m \le r-1$ に対し,

$$x^{\epsilon} f^{(m)}(x) \to 0 \qquad (x \to 0+)$$

であり, それゆえ, 次が成り立つ:

$$F_r(x)/\left\{x^{p-r-1}\ell(1/x)\right\} \to 0 \qquad (x \to 0+).$$

従って,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n n^r e^{-nx} \sim x^{p-r-1}\ell(1/x)\frac{\Gamma(r-p+1)}{(\sum_0^{\infty} u_k)^2} \qquad (x \to 0+).$$

列 $\{\log(n^r v_n)\}$ は slowly increasing ([BGT, §1.7.6]) であるから, Karamata のタウバー型定理により,

$$v_n n^r \sim n^{r-p}\ell(n) \qquad (n \to \infty)$$

となる. これで (3.80) が示された. □

補題 3.26. $\ell \in \mathcal{R}_0$, $p \in \mathbf{R}$ とする. f を $\mathbf{R}$ 上の正かつ偶の可測関数で, $\{\log f(\xi)\}/(1+\xi^2)$ が $\mathbf{R}$ 上で可積分なものとする. $\xi \to 0+$ で $f(\xi) \sim \xi^p l(1/\xi)$ と仮定する. すると, 次が成り立つ:

$$\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+\xi^2}\log f(\xi)d\xi\right\} \sim y^p l(1/y) \qquad (y \to 0+).$$

Proof. 次のようにおく:

$$L(x) = x^p f(1/x) \qquad (x > 0).$$

すると, L は slowly varying で $\{\log L(1/|\xi|)\}/(1+\xi^2)$ は $\mathbf{R}$ 上で可積分である. slowly varying 関数の表現定理 ([BGT, Theorem 1.3.1]) により,

$$\log L(x) = \eta(x) + \int_a^x \epsilon(u)du/u \qquad (x \ge a) \tag{3.82}$$

が, ある $a>0$ に対して成り立つ. ここで, $\eta(x)$, $\epsilon(x)$ は, $[a,\infty)$ 上で有界かつ可測であり, $x\to\infty$ で $\eta(x)\to c\in\mathbf{R}$, $\epsilon(x)\to 0$ である. $(0,a)$ 上で $\eta(x)=\log L(x)$, $\epsilon(x)\equiv 0$ とおくと, (3.82) が $x>0$ で成り立つ. ϵ は再び $(0,\infty)$ 上で有界だが, η はそうとは限らない. η については, 次の評価が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\eta(1/|\xi|)|}{1+\xi^2}d\xi$$
$$\leq 2\sup_{x\geq a}|\eta(x)|\cdot\int_0^{1/a}\frac{1}{1+\xi^2}d\xi+2\int_{1/a}^{\infty}\frac{|\log L(1/\xi)|}{1+\xi^2}d\xi<\infty.$$

$y>0$ に対し, 変数変換 $t=\xi/y$, $s=yu$ と等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+\xi^2}\log|\xi|d\xi=\log y,$$

を用いると, 次に導かれる:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+\xi^2}\log f(\xi)d\xi-\log f(y)=\mathrm{I}_1(y)+\mathrm{I}_2(y). \tag{3.83}$$

ここで, 次のようにおいた:

$$\mathrm{I}_1(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+\xi^2}\eta(1/|\xi|)d\xi-\eta(1/y),$$
$$\mathrm{I}_2(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\left\{\int_1^{1/|t|}\epsilon(s/y)ds/s\right\}dt.$$

$\mathrm{I}_1(y)$ と $\mathrm{I}_2(y)$ は, 共に $y\to 0+$ で 0 に行く. 実際, $\eta(1/|\xi|)/(1+\xi^2)$ は $\mathbf{R}$ 上で可積分で, $\xi\to 0$ で $\eta(1/|\xi|)\to c$ であるから, ポアソン積分のよく知られた性質により, $y\to 0+$ で $\mathrm{I}_1(y)\to 0$ である. I_2 に関しては, ルベーグの収束定理により, $y\to 0+$ で $\mathrm{I}_2(y)\to 0$ である. なぜなら, 次が成り立つから:

$$\left|(1+t^2)^{-1}\int_1^{1/|t|}\epsilon(s/y)ds/s\right|\leq\sup_{x>0}|\epsilon(x)|\cdot\frac{|\log|t||}{1+t^2}.$$

よって, (3.83) の左辺は, $y\to 0+$ で 0 に行く. それゆえ,

$$\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+\xi^2}\log f(\xi)d\xi\right\}\sim f(y)\sim y^p l(1/y)\qquad(y\to 0+)$$

となり, 定理が従う. □ □

定理 3.22 の証明. 主張 (3.66)⇔(??) はフーリエ・コサイン級数に対する Abel-Tauber 型定理 ([BGT, Corollary 4.10.2]) から従う. 補題 3.21 により, (3.67) は (3.66) を意味する.

$$f(t) := \Delta(2\arctan t), \qquad x(r) := \frac{1-r}{1+r} \tag{3.84}$$

とおく. すると, 変数変換 $\lambda = 2\arctan t$ により, 次が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log f(t)|}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\log \Delta(\lambda)|\, d\lambda < \infty, \tag{3.85}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda)\log\Delta(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x(r)}{x(r)^2+t^2}\log f(t)dt \qquad (-1<r<1). \tag{3.86}$$

(??) は

$$f(t) \sim t^{-2d}\ell(1/t)\cdot\frac{1}{2^{2d+1}\Gamma(1-2d)\sin(\pi d)} \qquad (t\to 0+)$$

を意味するから, 補題 3.26 より次が従う:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n &= (2\pi)^{1/2}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x(r)}{x(r)^2+t^2}\log f(t)dt\right\}\\ &\sim \{2\pi f(x(r))\}^{1/2}\\ &\sim (1-r)^{-d}\ell(1/(1-r))^{1/2}\left\{\frac{\pi}{\Gamma(1-2d)\sin(\pi d)}\right\}^{1/2} \qquad (r\uparrow 1).\end{aligned}$$

よって, (3.67) が [BGT, Corollary 1.7.3] から得られる. 最後に, 補題 3.25(1) より主張 (3.67)⇒(3.68) が分かる. □

補題 3.27. c を正定数とし, ℓ を slowly varying の関数で $\int^{\infty}\ell(s)ds/s=\infty$ を満たすものとする. $\mathbf{R}$ 上の正で可測な偶関数 g で

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log g(t)|}{1+t^2}dt<\infty$$

を満たすものに対して,

$$K(x) := \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+t^2}\log g(t)dt\right\} \qquad (x>0)$$

とおく. すると, $g\in\Pi_\ell$ で ℓ-指数が c ならば, $K\in\Pi_{\ell_1}$ で ℓ_1-指数は $\sqrt{c}/2$ となる. ここで, $\ell_1(\cdot)$ は $\ell_1(t) := \ell(t)/\tilde{\ell}(t)^{1/2}$ で定義される.

Proof. de Haan の定理 ([BGT, Theorem 4.4]) により, 次が成り立つ:

$$g(t) \sim c\tilde{\ell}(t) \qquad (t \to \infty) \tag{3.87}$$

([BGT, p. 164] の議論を見よ).

$$K(1/x) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+t^2}\log g(1/t)dt\right\} \qquad (x > 0)$$

であるから, 補題 3.26 より次が従う:

$$K(x) \sim \{c\tilde{\ell}(x)\}^{1/2} \qquad (x \to \infty). \tag{3.88}$$

$K(x) = \exp A(x)$ に注意せよ. ここで,

$$A(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\log g(tx)dt \qquad (x > 0).$$

$\lambda > 1$ とする. すると, 平均値の定理により,

$$K(\lambda x) - K(x) = \{A(\lambda x) - A(x)\}\exp B_\lambda(x)$$

となる. ここで, $B_\lambda(x)$ は $A(\lambda x)$ と $A(x)$ の間にある. (3.88) により, $K(\lambda x)/\tilde{\ell}(x)^{1/2}$ と $K(x)/\tilde{\ell}(x)^{1/2}$ は, 共に $x \to \infty$ で $\sqrt{c}$ に行くから, 次が分かる:

$$\exp B_\lambda(x) \sim \{c\tilde{\ell}(x)\}^{1/2} \qquad (x \to \infty). \tag{3.89}$$

再び平均値の定理により, 次が得られる:

$$\log g(\lambda xt) - \log g(xt) = \{g(\lambda xt) - g(xt)\}/k_\lambda(x,t).$$

ここで, $k_\lambda(x,t)$ は $g(\lambda xt)$ と $g(xt)$ の間にある. (3.87) により, $g(x)/g(\lambda xt)$ と $g(x)/g(xt)$ は, 共に $x \to \infty$ で 1 に行く. それゆえ, 次が成り立つ:

$$g(x)/k_\lambda(x,t) \to 1 \qquad (x \to \infty) \quad \text{for all } t > 0. \tag{3.90}$$

Potter-タイプの評価 ([BGT, Theorems 1.5.6 and 3.8.6]) により, 正の定数 D と M で次を満たすものがあることに注意せよ:

$$\begin{aligned}
|g(\lambda x) - g(x)|/\ell(x) &\le D\lambda \qquad (x \ge M),\\
\ell(y)/\ell(x) &\le D\max\left((y/x)^{1/4}, (y/x)^{-1/4}\right) \qquad (x \ge M,\ y \ge M),\\
g(x)/g(y) &\le D\max\left((y/x)^{1/4}, (y/x)^{-1/4}\right) \qquad (x \ge M,\ y \ge M).
\end{aligned}$$

さて, 次が成り立つ:

$$\frac{A(\lambda x)-A(x)}{\ell(x)/\tilde{\ell}(x)}=\mathrm{I}(x)-\mathrm{II}(x)+\mathrm{III}(x).$$

ここで,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(x)&:=\frac{\tilde{\ell}(x)}{\pi\ell(x)}\int_0^M\frac{x}{x^2+u^2}\log g(\lambda u)du,\\ \mathrm{II}(x)&:=\frac{\tilde{\ell}(x)}{\pi\ell(x)}\int_0^M\frac{x}{x^2+u^2}\log g(u)du,\\ \mathrm{III}(x)&:=\frac{\tilde{\ell}(x)}{\pi g(x)}\int_0^\infty F_\lambda(x,t)dt\end{aligned}$$

であり, また

$$F_\lambda(x,t):=I_{(M/x,\infty)}(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{\{g(\lambda xt)-g(xt)\}}{\ell(xt)}\cdot\frac{\ell(xt)}{\ell(x)}\cdot\frac{g(x)}{k_\lambda(x,t)}$$

である. (3.90) により, $F_\lambda(x,t)$ は, すべての $t>0$ に対し $x\to\infty$ で $c(1+t^2)^{-1}\log\lambda$ に行く. 一方, $x\geq M$ に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}I_{(M/x,\infty)}(t)\frac{g(x)}{k_\lambda(x,t)}&\leq I_{(M/x,\infty)}(t)\max\left(\frac{g(x)}{g(\lambda xt)},\frac{g(x)}{g(xt)}\right)\\ &\leq D\lambda^{1/4}\max(t^{1/4},t^{-1/4}).\end{aligned}$$

それゆえ, $x\geq M$ と $t>0$ に対し, 次が成り立つ:

$$|F_\lambda(x,t)|\leq D^3\lambda^{5/4}\frac{\max(t^{1/2},t^{-1/2})}{1+t^2}.$$

よって, ルベーグの収束定理により, 次を得る:

$$\mathrm{III}(x)\to\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt\cdot\log\lambda=\frac{\log}{2}\lambda\qquad(x\to\infty).$$

$\mathrm{I}(x)$ に関しては,

$$|\mathrm{I}(x)|\leq\frac{\tilde{\ell}(x)}{\pi x\ell(x)}\int_0^M|\log g(\lambda t)|dt\to 0\qquad(x\to\infty)$$

である. 同様に, $x\to\infty$ で $\mathrm{II}(x)\to 0$ である. よって,

$$\frac{A(\lambda x)-A(x)}{\ell(x)/\tilde{\ell}(x)}\to\frac{\log\lambda}{2}\qquad(x\to\infty).$$

これと (3.89) を組み合わせて, 次を得る:

$$\frac{K(\lambda x)-K(x)}{\ell(x)/\tilde{\ell}(x)^{1/2}} \to \frac{\sqrt{c}}{2}\log\lambda \qquad (x\to\infty).$$

これで, 補題が示された. □

定理 3.23 の証明. [I1, Theorem 1.3] により, (3.66) と (3.69) は同値である. f を (3.84) で定義し, g を $g(t) := f(1/t)$ で定義する. すると, (3.85) と (3.86) により, 次が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log g(t)|}{1+t^2}dt<\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n = (2\pi)^{1/2}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+t^2}\log g(t)dt\right\} \quad (x>1).$$

(3.69) より, $g\in\Pi_\ell$ で ℓ-指数は π^{-1} である ([I1, Proposition 2.7] を見よ). それゆえ, Lemma 3.27 と [I1, Proposition 2.6] より $\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{-n/x}\in\Pi_{\ell_1}$ で ℓ_1-指数 $1/\sqrt{2}$ である. ただし, $\ell_1(x) := \ell(x)/\{\tilde{\ell}(x)\}^{1/2}$ とおいた. よって, de Haan のタウバー型定理 (cf. [I1, Theorems 2.3 and 2.4]) より, (3.70) を得る. 証明を完成するために, 十分大きな C に対し, 次が成り立つことに注意する:

$$\int_C^x \frac{\ell(s)}{\{2\tilde{\ell}(s)\}^{1/2}s}ds = \{2\tilde{\ell}(t)\}^{1/2}-\{2\tilde{\ell}(C)\}^{1/2}\sim\{2\tilde{\ell}(x)\}^{1/2} \quad (x\to\infty).$$

こうして, 補題 3.25 (2) より, (3.70) は (3.71) を意味する. □

定理 3.24 の証明. (3.57) より, 次が成り立つ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma(n) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{n+m}c_m - \sum_{m=0}^{\infty}(c_m)^2 = \left(\sum_{m=0}^{\infty}c_m\right)^2.$$

$n\to\infty$ の時 $\gamma(n)\sim c_n(\sum_{m=0}^{\infty}c_m)$ であり, それゆえ (3.66) と (3.72) は同値である. 一方, 補題 3.25 (3) より, (3.72) は (3.73) を意味する. □

3.9 鏡映正値性

この節では, 鏡映正値性を持つ定常過程を考察する. これは, 完全単調な自己共分散関数を持つ定常過程である. (3.1) の自己共分散関数を持つものが, その典型である. このクラスの定常過程は, 関係する関数や級数がよい積分表現を持つという利点を持つ. 実際, 以下で, これらの定常過程の MA 係数 $\{c_n\}$ と AR 係数 $\{a_n\}$ がそのような積分表現を持つことを示す. これらの積分表現により, 条件 (C1), (C2), (A1) が成り立つことが直ちに分かる. このクラスの定常過程は, 最初, 岡部 [O] によって短時間記憶の場合に調べられた. この節では, [I2] の議論に従い, 長時間記憶の場合も含むクラスを考察する.

まず, いくつかの予備的な結果を証明しよう. 以下, $\int_0^1$ は $\int_{[0,1)}$ を意味するとする. 次の様におく:

$$\Sigma := \{\sigma : \sigma \text{ is a nonzero finite Borel measure on } [0,1)\}.$$

$\sigma \in \Sigma$ に対し, 次を定義する:

$$\Delta_\sigma(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\int_0^1 P_r(\lambda)\sigma(dr) \qquad (-\pi < \lambda < \pi).$$

ここで, $P_r(\lambda)$ は, (3.11) で定義されるポアソン核である. 関数 $\Delta_\sigma(\cdot)$ は $(-\pi, \pi)$ 上で正かつ可積分である. 次が成り立つ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\Delta_\sigma(\lambda)d\lambda = \int_0^1 r^{|n|}\sigma(dr) \qquad (n \in \mathbf{Z}). \tag{3.91}$$

ここで, 右辺において $0^0 = 1$ と約束する.

$[0,1)$ 上の有限ボレル測度 μ に対し, 次のようにおく:

$$F_\mu(z) := \int_0^1 \frac{1}{1-rz}\mu(dr) \qquad (z \in \mathbf{C},\ |z| < 1),$$
$$F_\mu(e^{i\lambda}) := \int_0^1 \frac{1}{1-re^{i\lambda}}\mu(dr) \qquad (-\pi < \lambda < \pi).$$

N は, $[0,1)$ 上のゼロでないボレル測度で次を満たすものの全体とする:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-rs}\nu(dr)\nu(ds) < \infty.$$

もし $\nu \in N$ ならば, ν は有限測度である. すなわち, $\nu \in \Sigma$ である. $\nu \in N$ に対し, $\sigma = S(\nu) \in \Sigma$ を次で定義する:

$$\sigma(dr) := \left\{ \int_0^1 \frac{1}{1-rs} \nu(ds) \right\} \nu(dr).$$

すると, 次が成り立つ:

$$|F_\nu(e^{i\lambda})|^2 = 2\pi \Delta_\sigma(\lambda) \qquad (-\pi < \lambda < \pi). \tag{3.92}$$

実際, それは次より分かる:

$$\frac{1-(r+s)\cos\lambda + rs}{|1-re^{i\lambda}|^2 \cdot |1-se^{i\lambda}|^2} = \frac{1}{2(1-rs)} \left\{ P_r(\lambda) + P_s(\lambda) \right\}.$$

特に, $\int_{-\pi}^{\pi} |F_\nu(e^{i\lambda})|^2 d\lambda = 2\pi\sigma([0,1))$ であり, それゆえ $\nu \in N$ ならば $F_\nu(e^{i\lambda}) \in L^2(-\pi,\pi)$ である. さらに, $|z| < 1$ で $F_\nu(z)$ の実部は正であるから, $F_\nu(z)$ は H^{2+} に属する外関数である. それゆえ, $\log|F_\nu(e^{i\lambda})|$ は $(-\pi,\pi)$ 上で可積分で, 次が成り立つ:

$$F_\nu(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} \log|F_\nu(e^{i\lambda})| d\lambda \right\} \qquad (|z|<1) \tag{3.93}$$

(Duren [Du, Chapter 3, Exercise 1] と [Ru, Theorem 17.16] を見よ). もし $\sigma = S(\nu)$ ならば, (3.92) と (3.93) より, $\log\Delta(\cdot)$ もまた $(-\pi,\pi)$ 上で可積分で次が成り立つ:

$$F_\nu(z) = (2\pi)^{1/2} \exp\left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} \log|\Delta_\sigma(\lambda)| d\lambda \right\} \quad (z \in \mathbf{C},\ |z|<1). \tag{3.94}$$

定理 3.28. S は N から Σ への 1 対 1 かつ onto の写像である.

Proof. Step 1. 簡単のため, $[0,1)$ 上の測度 σ は, 次の形の時, *simple* と言うことにする: ある $n \in \mathbf{N}$ について,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} s_k \delta_{r_k}.$$

ただし, $s_k \in (0,\infty)$ $(k = 1,\cdots,n)$ かつ $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < 1$ である. この Step では, σ が simple ならば, やはり simple な測度 ν で $\sigma = S(\nu)$ を満たすものが存在することを示す.

上の形の simple な測度 σ に対し, 次数 $2n-2$ の多項式 $f(z)$ を次で定義する:

$$f(z) := \sum_{k=1}^{n} \{1-(r_k)^2\} s_k \prod_{m \neq k} (1-r_m z)(z-r_m).$$

すると, $f(r_k)f(r_{k+1}) < 0$ $(k=1,\dots,n-1)$ であるので, 各 $k=1,\dots,n-1$ に対し, $f(z)$ は零点, それを q_k とおく, を (r_k, r_{k+1}) に持つ. さらに, $f(1/z) = z^{-2n+2} f(z)$ であるので, $1/q_k$ $(k=1,\dots,n-1)$ もまた $f(z)$ の零点である. よって, $f(z)$ は次の形でなければならない: ある正定数 c に対して,

$$f(z) = c \prod_{k=1}^{n-1} (1-q_k z)(z-q_k).$$

ここで, 有理関数 $F(z)$ を次で定義する:

$$F(z) := \sqrt{c} \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(1-q_k z)}{\prod_{k=1}^{n}(1-r_k z)}.$$

すると,

$$F(z)F(1/z) = cz \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(1-q_k z)(z-q_k)}{\prod_{k=1}^{n}(1-r_k z)(z-r_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\{1-(r_k)^2\} s_k}{(1-r_k z)(1-r_k z^{-1})}$$

であり, それゆえ, 次が成り立つ:

$$|F(e^{i\lambda})|^2 = \lim_{t \to 1-} F(te^{i\lambda}) F(1/te^{i\lambda}) = 2\pi \Delta_\sigma(\lambda). \tag{3.95}$$

一方, $F(z)$ は次の部分分数分解を持つ:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{u} \frac{m_k}{1-r_k z}.$$

ここで, $m_k \in (0,\infty)$ $(k=1,\dots,n)$ である. $\nu := \sum_{k=1}^{n} m_k \delta_{r_k}$ とおくと, $F(z) = F_\nu(z)$ が成り立ち, それゆえ (3.92) と (3.95) により, $\sigma' := S(\nu)$ に対し $\Delta_\sigma(\lambda) = \Delta_{\sigma'}(\lambda)$ が成り立つ. (3.91) により, これはすべての $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し, $\int_0^1 t^n \sigma(dt) = \int_0^1 t^n \sigma'(dt)$ を意味する. よって, $\sigma = \sigma' = S(\nu)$ となる.

Step 2. $\sigma \in \Sigma$ に対し, simple な測度の列 σ_n で $[0,1]$ 上 σ_n が σ に弱収束するものを取る. ここで, σ と σ_n は, $\sigma(\{1\}) = \sigma_n(\{1\}) = 0$ により, $[0,1]$ 上の測度とみなす. Step 1 によれば, simple な測度 ν_n で $S(\nu_n) = \sigma_n$

を満たすものがある. (3.91), (3.94) および Jensen の不等式により, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\nu_n([0,1)) &= F_\nu(0)\\ &= (2\pi)^{1/2}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|\Delta_{\sigma_n}(\lambda)|d\lambda\right\} \le \sqrt{2\pi\sigma_n([0,1))}.\end{aligned}$$

よって, Helly の選出定理により, 整数列 $n' \to \infty$ で $\nu_{n'}$ が $[0,1]$ 上である有限測度, それを ν とする, に弱収束するものがある. (3.92) により, 次が成り立つ:

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{1-re^{i\lambda}}\nu_{n'}(dr)\right|^2 = \int_0^1 P_r(\lambda)\sigma_{n'}(dr) \qquad (-\pi < \lambda < \pi).$$

$n' \to \infty$ とすると, $\lambda \neq 0$ に対しては被積分関数が共に $[0,1]$ 上で有界かつ連続であることにより, 次が成り立つ:

$$\left|\int_{[0,1]} \frac{1}{1-re^{i\lambda}}\nu(dr)\right|^2 = 2\pi\Delta_\sigma(\lambda) \qquad (-\pi < \lambda < \pi,\ \lambda \neq 0).$$

左辺の積分の絶対値は, 下から次で評価される:

$$\left|\mathrm{Im}\int_{[0,1]} \frac{1}{1-re^{i\lambda}}\nu(dr)\right| \ge \frac{|\sin\lambda|}{2(1-\cos\lambda)}\nu(\{1\}).$$

$\Delta_\sigma \in L^1(-\pi,\pi)$ であるから, これは $\nu(\{1\}) = 0$ を意味する.

$$\sigma'(dr) := \left\{\int_0^1 \frac{1}{1-rs}\nu(ds)\right\}\nu(dr)$$

とおく. すると,

$$\Delta_\sigma(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 P_r(\lambda)\sigma'(dr)$$

であり, それゆえ Step 1 と同様に, $\int_0^1 t^n\sigma(dt) = \int_0^1 t^n\sigma'(dt)$ がすべての $n \ge 0$ について成り立つ. 結果として, ν は N に属し, $\sigma = \sigma' = S(\nu)$ が成り立つ. よって, S は onto である.

S が 1 対 1 であることを示すことが残っている. (3.94) により, F_ν は σ により一意に決まることが分かる. $F_\nu(z)$ は ν を一意に決めるので, S は 1 対 1 であることが分かる. □

定理 3.29. 各 $\nu \in N$ に対し, $b_1 \in (0,\infty)$, $b_2 \in [0,\infty)$ および $[0,1)$ 上の (ゼロかもしれない) 有限ボレル測度 ρ よりなる三つ組み (b_1, b_2, ρ) で, 次を満たすものが一意に存在する:

$$F_\nu(z)\left\{b_1(1-z)+b_2(1+z)+(1-z^2)F_\rho(z)\right\}=1 \qquad (z \in \mathbf{C},\ |z|<1). \tag{3.96}$$

証明は省略する. [I2, Theorem 7.2] を見よ.

定常過程の話に戻る. $\sigma \in \Sigma$ に対し, $\gamma(n) := \int_0^1 t^{|n|}\sigma(dt)$ $(n \in \mathbf{Z})$ で定義される関数 $\gamma(\cdot)$ は, (3.91) により正定値であり, それゆえ, スペクトル密度 Δ_σ を持つある定常過程の自己共分散関数である. かくして, 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ を持つ定常過程 $\{X_n\}$ に対して, 次の性質の定義に至る:

$$\text{ある } \sigma \in \Sigma \text{ に対して, } \gamma(n) = \int_0^1 t^{|n|}\sigma(dt) \quad (n \in \mathbf{Z}). \tag{RP}$$

$\{X_n\}$ に対するこの性質 (RP) は, **鏡映正値性** (reflection positivity) と呼ばれる. $\sigma \in \Sigma$ に対して, $\log \Delta_\sigma(\cdot)$ は $(-\pi,\pi)$ 上で可積分であるから, この定常過程は純非決定的であることになる.

性質 (RP) が, 3.8 節の条件 (C1), (C2), (A1) を意味することを証明しよう.

定理 3.30. $\{X_n\}$ は, 鏡映正値性 (RP) を持つ定常過程とする. すると, $[0,1)$ 上の二つの有限ボレル測度 ν と ρ で, 次を満たすものがある:

$$c_n = \int_0^1 r^n \nu(dr) \qquad (n = 0,1,\ldots), \tag{3.97}$$

$$a_n = \int_0^1 r^{n-2}(1-r^2)\rho(dr) \qquad (n = 2,3,\ldots). \tag{3.98}$$

特に, $\{X_n\}$ は (C1), (C2) および (A1) を満たす.

Proof. σ を鏡映正値性 (RP) に現れる測度とする. $\nu := S^{-1}(\sigma) \in N$ とおく. すると, (3.94) により, $\{X_n\}$ の外関数 $h(z)$ は, $F_\nu(z)$ で与えられる. それゆえ, $\{X_n\}$ の MA 係数 c_n は, この ν に対する (3.97) により与えられる. (b_1, b_2, ρ) を, (3.96) で決定される三つ組みとする. すると, $z \in \mathbf{C}$ に対し, 次が成り立つ:

$$-1/h(z) = -1/F_\nu(z) = -b_1(1-z) - b_2(1+z) - (1-z^2)F_\rho(z).$$

よって, この ρ に対し (3.98) が成り立つ. □

3.10 正則変動自己共分散モデル

この節でも, $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ は純非決定的な定常過程とする. $\{X_n\}$ の AR 係数, MA 係数, 偏相関関数をそれぞれ a_n, c_n, $\phi_{n,n}$ とする. 3.8 節の条件 (C1), (C2), (A1) を思い出そう. この節の目的は, 次の定理を証明することである.

定理 3.31 ([I4]). $-\infty < d < \frac{1}{2}$, $\ell \in \mathcal{R}_0$ とする. 条件 (C1), (C2), (A1) と次を仮定する:

$$\gamma(n) \sim n^{2d-1}\ell(n) \qquad (n \to \infty). \tag{3.99}$$

すると, $\phi_{n,n}$ の漸近挙動は次で与えられる:

$$\phi_{n,n} \sim \frac{\gamma(n)}{\sum_{k=-n}^{n}\gamma(k)} \qquad (n \to \infty). \tag{3.100}$$

言い換えると, 次が成り立つ:

(1) もし $0 < d < \frac{1}{2}$ ならば,

$$\phi_{n,n} \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty). \tag{3.101}$$

(2) もし $d = 0$ かつ $\int^{\infty} \ell(s)ds/s = \infty$ ならば,

$$\phi_{n,n} \sim n^{-1}\frac{\ell(n)}{2\tilde{\ell}(n)} \qquad (n \to \infty). \tag{3.102}$$

(3) もし $d = 0$ かつ $\int^{\infty} \ell(s)ds/s < \infty$ あるいは $-\infty < d < 0$ ならば,

$$\phi_{n,n} \sim \frac{n^{2d-1}\ell(n)}{\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma(k)} \qquad (n \to \infty). \tag{3.103}$$

(3.99) は, 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ の無限遠での漸近挙動が, 負の指数の正則変動 (cf. [BGT]) であるという仮定である.

我々は, 実際には, (3.100) を直接証明するのではなく, (3.101)–(3.103) を別々に示す. 結果として得られる (3.101)–(3.103) が, (3.100) の形に一つにまとめられることを見るのは容易である. しかし, なぜそうであるのかは, 実はよく分からない. さらに, $d \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ の Fractional

ARIMA 過程に対する定理 3.20 も, (3.100) の形に書くことができることを注意しておく ([I3, Section 5] を見よ).

上の定理を証明するために, 少し準備を行う. 以下, 条件 (C1), (C2), (A1) を仮定する. (C1) と (A1) により, 条件 (3.13) が成り立つことを注意しておく ([I2, Proposition 4.3]).

次の補題は, [BGT, Proposition 1.5.9a] から直ちに従う.

補題 3.32. *$\ell \in \mathcal{R}_0$ とする. もし $\int^\infty \ell(s)ds/s = \infty$ ならば, $n \to \infty$ で $\ell(n)/\tilde{\ell}(n)$ は 0 に行く. もし $\int^\infty \ell(s)ds/s < \infty$ ならば, $n \to \infty$ で $\ell(n)$ は 0 に行く.*

命題 3.33. *$\ell \in \mathcal{R}_0$, $-\infty < d \le 0$ とする. (3.99) を仮定する.*

(1) もし $d = 0$ かつ $\int^\infty \ell(s)ds/s = \infty$ ならば,

$$c_n \sim n^{-1}\ell(n)\{2\tilde{\ell}(n)\}^{-1/2} \qquad (n \to \infty), \tag{3.104}$$

$$a_n \sim n^{-1}\ell(n)\{2\tilde{\ell}(n)\}^{-3/2} \qquad (n \to \infty), \tag{3.105}$$

$$\beta(n) \sim n^{-1}\ell(n)\{2\tilde{\ell}(n)\}^{-1} \qquad (n \to \infty). \tag{3.106}$$

(2) もし $d = 0$ かつ $\int^\infty \ell(s)ds/s < \infty$ あるいは $-\infty < d < 0$ ならば,

$$c_n \sim n^{2d-1}\ell(n)\left\{\sum\nolimits_{-\infty}^{\infty} \gamma(k)\right\}^{-1/2} \qquad (n \to \infty), \tag{3.107}$$

$$a_n \sim n^{2d-1}\ell(n)\left\{\sum\nolimits_{-\infty}^{\infty} \gamma(k)\right\}^{-3/2} \qquad (n \to \infty), \tag{3.108}$$

$$\beta(n) \sim n^{2d-1}\ell(n)\left\{\sum\nolimits_{-\infty}^{\infty} \gamma(k)\right\}^{-1} \qquad (n \to \infty). \tag{3.109}$$

Proof. 主張 (3.104) と (3.105) は, 定理 3.23 より従う. これらを用いて, (3.106) を得る ([I2, (6.19)] を見よ). 主張 (3.107) と (3.108) は, 定理 3.24 から出る. また, これらより, (3.109) が得られる ([I2, Theorem 6.7] の証明を見よ). □

命題 3.34. *$\ell \in \mathcal{R}_0$, $-\infty < d \le 0$ とする. (3.99) を仮定する.*

(1) 各 $R \in (1, \infty)$ に対して, $N \in \mathbf{N}$ で次を満たすものが存在する:

$$\left| \frac{\beta([ns] + [nu] + n)}{\beta(n)} \right| \le \frac{R}{(s + u + 1)} \quad (s \ge 0,\ u \ge 0,\ n \ge N). \tag{3.110}$$

(2) 各 $r \in (0,1)$ に対して, $N \in \mathbf{N}$ で次を満たすものが存在する:

$$|\beta([ns]+[nu]+n)| \le \frac{r}{\pi(s+u+1)} n^{-1} \quad (s \ge 0,\ u \ge 0,\ n \ge N). \tag{3.111}$$

Proof. 命題 3.33 と [BGT, Theorem 1.5.2] により,

$$\beta([ns]+[nu]+n)/\beta(n) \to (s+u+1)^{2d-1} \qquad (n \to \infty)$$

が, $s \ge 0$ と $u \ge 0$ について一様に成り立つ.

$$(s+u+1)^{2d-1} \le (s+u+1)^{-1}$$

より, (1) が従う. 補題 3.32 と命題 3.33 により,

$$\lim_{n\to\infty} n\beta(n) = 0 \tag{3.112}$$

が成り立つ. これと (1) より (2) が得られる. □

定数 λ_k を 3.7 節から思い出そう.

命題 3.35. $\ell \in \mathcal{R}_0$, $-\infty < d \le 0$ とする. (3.99) を仮定する.

(1) $r \in (0,1)$, $R \in (1,\infty)$ とし, $N \in \mathbf{N}$ は (3.110) と (3.111) を満たすようにとる. すると, 次が成り立つ:

$$\left|\frac{d_k(n)}{\beta(n)}\right| \le \pi R r^{k-1} \lambda_k \qquad (k \in \mathbf{N},\ n \ge N).$$

(2) $k \ge 2$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_k(n)}{\beta(n)} = 0.$$

Proof. $k \ge 3$ とする ($k=1,2$ の場合も同様). (C1) と (A1) と (3.112) より, 3.6 節の条件 (B2) が成り立つ. よって, 定理 3.11 により, 次のように書ける:

$$\begin{aligned}\frac{d_k(n)}{\beta(n)} &= \int_0^\infty ds_{k-1} \cdots \int_0^\infty ds_1 \frac{\beta([ns_{k-1}]+n)}{\beta(n)} \\ &\quad \times \left\{ \prod_{m=1}^{k-2} n\beta([ns_{m+1}]+[ns_m]+n) \right\} \times n\beta([ns_1]+n).\end{aligned}$$

これを用いて, 我々は (1) を (3.110) と (3.111) から得る. さらに, (2) も (3.112) とルベーグの収束定理から得る. □

定理 3.31 の証明. 最初に, $0 < d < \frac{1}{2}$ を仮定する. すると, 定理 3.22 により, 3.7 節の条件 (L) が成り立つ. よって, (3.101) は, 定理 3.18 より直ちに従う.

次に, $-\infty < d \leq 0$ とする. $\beta(n) > 0$ となるような十分大きな n に対し, 次のように書く:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} d_{2k-1}(n)}{\beta(n)} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1}(n)}{\beta(n)}.$$

命題 3.35 とルベーグの収束定理により,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1}(n)}{\beta(n)} = 0$$

となるから,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} d_{2k-1}(n)}{\beta(n)} = 1$$

が分かる. 従って, 定理 3.13 により,

$$\phi_{n,n} \sim \beta(n) \qquad (n \to \infty)$$

が分かる. よって, (2) と (3) は, (3.106) と (3.109) からそれぞれ従う. □

例. $-\infty < d < \frac{1}{2}$ とし, $\{X_n\}$ は 自己共分散関数

$$\gamma(n) = \frac{1}{(1+|n|)^{1-2d}}$$

を持つ定常過程とする. すると, 等式

$$\frac{1}{(1+|n|)^{1-2d}} = \int_0^1 t^{|n|} \frac{(-\log t)^{-2d}}{\Gamma(1-2d)} dt \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

より $\{X_n\}$ は鏡映正値性 (RP) を持つ. 従って, 定理 3.30 より, 条件 (C1), (C2), (A1) を満たす. $\phi_{n,n}$ を $\{X_n\}$ の偏相関関数とする. 定理 3.31 を $\{X_n\}$ に適用すると, 次の $\phi_{n,n}$ の漸近挙動が分かる:

(1) もし $0 < d < \frac{1}{2}$ ならば,

$$\phi_{n,n} \sim \frac{d}{n} \qquad (n \to \infty);$$

(2) もし $d=0$ ならば,

$$\phi_{n,n} \sim \frac{1}{2n\log n} \qquad (n \to \infty);$$

(3) もし $-\infty < d < 0$ ならば,

$$\phi_{n,n} \sim \frac{n^{2d-1}}{\{2\zeta(1-2d)-1\}} \qquad (n \to \infty).$$

ここで, $\zeta(s)$ は Riemann のゼータ関数である.

第4章　有限予測係数の無限級数展開

4.1　有限予測係数

前章と同じように, この章でも, 定常過程とは, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された平均 0 の実弱定常過程を意味するものとする.

定常過程 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ に対する有限の過去からの予測に関して, その有限予測係数 $\phi_{n,j}$ は次で定義される:

$$P_{[-n,-1]}X_0 = \sum_{j=1}^{n} \phi_{n,j} X_{-j}.$$

ここで, 前章までと同様に, $n \in \mathbf{N}$ に対して, $X_{-n}, \ldots, X_{-1}$ が $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において張る閉部分空間を $H_{[-n,-1]}$ とし, $P_{[-n,-1]}$ を $H_{[-n,-1]}$ への正射影作用素とする. この有限予測係数 $\phi_{n,j}$ は, $\{X_n\}$ の予測理論では基本的な量である.

笠原 雪夫氏と私は, [IK2] において, 有限予測係数 $\phi_{n,j}$ に対して, AR および MA 係数による無限級数表現を導いた. その証明には, やはり (3.4) あるいは (3.3) を用いる. この $\phi_{n,j}$ に対する表現定理はなかなか有用である. 例えば, 我々は [IK2] において, これを応用して (1) $n \to \infty$ での $\phi_{n,j} - \phi_j \to 0$ の収束の rate, (2) 短時間モデルに対する Baxter の不等式の簡明な証明, (3) Baxter の不等式の長時間モデルへの拡張, (4) 偏相関関数の新しい表現定理, などを示した.

この章では, [IK2] に従いつつ, 上に述べた有限予測係数 $\phi_{n,j}$ の無限級数表現とその応用を紹介する. 4.2 節と 4.3 節では, (3.4) から出発して, $\phi_{n,j}$ の表現定理 (定理 4.4) が得られる様子を紹介する. 4.4 節では, $\phi_{n,j}$ の表現定理を応用して得られる結果のうち, $n \to \infty$ での $\phi_{n,j} - \phi_j$ の挙動に関するものを紹介する. 最後の, 4.5 節では, $\phi_{n,j}$ の表現定理を応用して得られる偏相関関数の別の表現定理を紹介する.

4.2　近似スキームの収束

この節でも, 定常過程 $\{X_n\}$ は**純非決定的である**と仮定する.

$Y \in H$ とする. $n \in \mathbf{N}$ に対し, $P_{[-n,-1]}Y$ は, 観測データ $X_{-n}, \ldots, X_{-1}$ が与えられたもとでの Y の最良線形予測子である. 純非決定性の仮定より, $X_{-n}, \ldots, X_{-1}$ は線形独立であるから, 予測子 $P_{[-n,-1]}Y$ を次の形に一意に表すことができる:

$$P_{[-n,-1]}Y = \sum_{j=1}^{n} \phi_{n,j}(Y) X_{-j}.$$

この節では, 実係数 $\phi_{n,j}(Y)$ を計算するための近似スキームの収束性を証明する.

前章と同じく, $n, k \in \mathbf{N}$ に対し, 正射影作用素 P_n^k を次で定義する:

$$P_n^k := \begin{cases} P_{(-\infty,-1]}, & k = 1, 3, 5, \ldots, \\ P_{[-n,\infty)}, & k = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases} \tag{4.1}$$

$\{P_n^k : k = 1, 2, \ldots\}$ は, 単に, 部分空間 $H_{(-\infty,-1]}$ への射影と $H_{[-n,\infty)}$ への射影を交互に並べた列に他ならない.

補題 4.1. *Y を H の任意の元とする. すると, $n, k \in \mathbf{N}$ に対し, 実係数 $\phi_{n,1}^k(Y), \ldots, \phi_{n,n}^k(Y)$ および k が奇数の場合には元 $Z_n^k \in H_{(-\infty,-n-1]}$, k が偶数の場合には元 $Z_n^k \in H_{[0,\infty)}$ で, 次を満たすものが一意に存在する:*

$$P_n^k P_n^{k-1} \cdots P_n^1 Y = \sum_{j=1}^{n} \phi_{n,j}^k(Y) X_{-j} + Z_n^k.$$

Proof. k は奇数であると仮定する. [P] の Lemma 6.1 (Regression Lemma) により, 次が成り立つ:

$$H_{(-\infty,-1]} = H_{(-\infty,-n-1]} + H_{[-n,-1]} \qquad (\text{直和}) \tag{4.2}$$

([P] の Theorem 6.3 の証明を見よ). $X_{-n}, \ldots, X_{-1}$ は線形独立で

$$P_n^k P_n^{k-1} \cdots P_n^1 Y \in H_{(-\infty,-1]}$$

であるから, k が奇数の場合の補題が従う. k が偶数の場合も同様に証明される. □

「$k \to \infty$ の時 $\phi_{n,j}^{k}(Y)$ は $\phi_{n,j}(Y)$ に収束するか?」という問題を考えたい. 次の定理は, 純非決定的な $\{X_n\}$ でスペクトル密度 $\Delta(\cdot)$ が (3.7) を満たすものに対して, この問題の答えが YES であることを主張する.

定理 4.2 ([IK2]). $n \in \mathbf{N}$ で $j = 1, \dots, n$ とする. 次を仮定する:

$$\{X_n\} \text{ は純非決定的で (3.7) を満たす.} \tag{4.3}$$

すると, すべての $Y \in H$ に対し, $\phi_{n,j}(Y) = \lim_{k\to\infty} \phi_{n,j}^{k}(Y)$ が成り立つ.

Proof. 定理 3.1 により, 仮定 (4.3) は次を意味する:

$$H_{(-\infty,-1]} \cap H_{[-n,\infty)} = H_{[-n,-1]} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

これと定理 3.6 (フォン・ノイマンの交代射影) により, 次が成り立つ:

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{m\to\infty} P_n^k P_n^{k-1} \cdots P_n^1 = P_{[-n,-1]} \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{4.4}$$

次のようにおく:

$$\epsilon_k := X_k - P_{(-\infty,k-1]} X_k \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

すると補題 4.1 より次が分かる:

$$(P_n^{2k+1} P_n^{2k} \cdots P_n^1 Y, \epsilon_{-1}) = \phi_{n,1}^{2k+1}(Y) \cdot \|\epsilon_{-1}\|^2.$$

(4.4) より, $k \to \infty$ で, 左側は $(P_{[-n,-1]} Y, \epsilon_{-1})$ に行く. よって, $a_{n,1} := \lim_{k\to\infty} \phi_{n,1}^{2k+1}(Y)$ が存在する. 同様にして,

$$(P_n^{2k+1} P_n^{2k} \cdots P_n^1 Y, \epsilon_{-2}) = \phi_{n,2}^{2k+1}(Y) \cdot \|\epsilon_{-2}\|^2 + \phi_{n,1}^{2k+1}(Y) \cdot (X_{-1}, \epsilon_{-2})$$

において $k \to \infty$ とすることで $a_{n,2} := \lim_{k\to\infty} \phi_{n,2}^{2k+1}(Y)$ の存在が分かる. この議論を繰り返すことで, すべての $j = 1, \dots, n$ に対して $a_{n,j} := \lim_{k\to\infty} \phi_{n,j}^{2k+1}(Y)$ の存在が分かる. よって $Z_n := \lim_{k\to\infty} Z_n^{2k+1}$ が H において存在し, 次が成り立つ:

$$Z_n = P_{[-n,-1]} Y - \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{n,j} X_{-j}.$$

右側は $H_{[-n,-1]}$ に属するから, Z_n もそうである. さらに $k \geq 1$ に対し Z_n^{2k+1} は閉部分空間 $H_{(-\infty,-n-1]}$ に属するから, $Z_n \in H_{(-\infty,-n-1]}$ である. よって $Z_n \in H_{[-n,-1]} \cap H_{(-\infty,-n-1]}$ となるが, (4.2) により, これは $Z_n = 0$ を意味する. こうして $P_{[-n,-1]} Y = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} X_{-j}$ となる. 一意性により, $\phi_{n,j}(Y) = a_{n,j} = \lim_{k\to\infty} \phi_{n,j}^{2k+1}(Y)$ が得られる. 同様に $\phi_{n,j}(Y) = \lim_{k\to\infty} \phi_{n,j}^{2k}(Y)$ も得る. こうして定理が従う. □

4.3　有限予測係数の無限級数表現

この節では, 有限予測係数 $\phi_{n,j}$ の無限級数表示を導く. $\{X_n\}$ は, 純非決定的な定常過程とする.

$n \in \mathbf{N}$ と $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し, $(m+1)$-ステップ先の予測子 $P_{[-n,-1]}X_m$ は, 次の形に一意的に表される:

$$P_{[-n,-1]}X_m = \sum_{j=1}^{n} \phi_{n,j}^{m} X_{-j}. \tag{4.5}$$

我々は, 実係数 $\phi_{n,j}^{m}$ の表現に興味がある. この係数 $\phi_{n,j}^{m}$ を $(m+1)$-**ステップ有限予測係数**と呼ぶ. 1-ステップ $m=0$ の場合, $\phi_{n,j}^{0} = \phi_{n,j}$ であることに注意せよ.

前章と同じく, 次のようにおく:

$$b_j^m := \sum_{k=0}^{m} c_k a_{j+m-k}, \qquad m, j \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

特に $b_j^0 = c_0 a_j$ である.

$n \in \mathbf{N}$ と $m, j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し, $b_k^m(n,j)$ を逐次的に次のように定める:

$$\begin{cases} b_1^m(n,j) = b_j^m, \\ b_{k+1}^m(n,j) = \sum_{m_1=0}^{\infty} b_{n+1+m_1}^m b_k^{m_1}(n,j), \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{4.6}$$

下にある定理 4.3 の証明から, 条件 (3.13) の下で, (4.6) に現れる和も絶対収束することが分かる.

$m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbf{N}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し, 次のようにおく:

$$g_k^m(n,j) := \begin{cases} b_k^m(n,j), & k = 1, 3, \ldots, \\ b_k^m(n, n+1-j), & k = 2, 4, \ldots. \end{cases}$$

次の定理は, (4.5) の $(m+1)$-ステップ有限予測係数 $\phi_{n,j}^{m}$ を, MA および AR 係数により明示的に表す表現式を与える.

定理 4.3 ([IK2]). $\{X_n\}$ の AR 係数 a_n は, (3.13) を満たすとする. すると, $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \ldots, n$ に対し $\phi_{n,j}^{m} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^m(n,j)$ が成り立つ. すなわち,

$$P_{[-n,-1]}X_m = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g_k^m(n,j) \right\} X_{-j}.$$

Proof. 正射影作用素 P_n^k の定義 (4.1) を思い出そう. (3.18) より次が成り立つ:

$$P_n^1 X_m = \sum\nolimits_{j=1}^{n} g_1^m(n,j) X_{-j} + \sum\nolimits_{m_1=0}^{\infty} b_{n+1+m_1}^m X_{-n-1-m_1}.$$

これと (3.19) より, 次が従う:

$$\begin{aligned} P_n^2 P_n^1 X_m &= \sum_{j=1}^{n} g_1^m(n,j) X_{-j} + \sum_{m_1=0}^{\infty} b_{n+1+m_1}^m \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{m_1} X_{-n-1+j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \{g_1^m(n,j) + g_2^m(n,j)\} X_{-j} + \sum_{m_1=0}^{\infty} b_{n+1+m_1}^m \sum_{m_2=0}^{\infty} b_{n+1+m_2}^{m_1} X_{m_2}. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} P_n^3 P_n^2 P_n^1 X_m &= \sum_{j=1}^{n} \{g_1^m(n,j) + g_2^m(n,j)\} X_{-j} \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{\infty} b_{n+1+m_1}^m \sum_{m_2=0}^{\infty} b_{n+1+m_2}^{m_1} \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{m_2} X_{-j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \{g_1^m(n,j) + g_2^m(n,j) + g_3^m(n,j)\} X_{-j} \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{\infty} b_{n+1+m_1}^m \sum_{m_2=0}^{\infty} b_{n+1+m_2}^{m_1} \sum_{m_3=0}^{\infty} b_{n+1+m_3}^{m_2} X_{-n-1-m_3}. \end{aligned}$$

この議論を繰り返すことで, $Y = X_m$ の場合の補題 4.1 の $\phi_{n,j}^k(X_m)$ は, 次のように与えられることが分かる: $\phi_{n,j}^k(X_m) = \sum_{l=1}^{k} g_l^m(n,j)$. 条件 (3.13) は $\sum_0^\infty (a_n)^2 < \infty$ を意味するので, (3.7) が, 命題 3.2 より成り立つ. よって, 欲しい主張は定理 4.2 より従う. □

問 13. $r \in (-1,1)$ とする. 3.3 節の例と同様に, AR(1) 方程式 $X_n = rX_{n-1} + \xi_n$ の解 $X_n = \sum_{j=-\infty}^{n} r^{n-j}\xi_j$ を考える. ここで, $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ はホワイトノイズ, すなわち, $(\xi_n, \xi_m) = \delta_{nm}$ を満たす H の列である. 次が成り立っていた:

$$c_n = r^n \quad (n \geq 0), \quad a_0 = -1, \quad a_1 = r, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 2).$$

定理 4.3 を用いて, 1-step 予測係数 $\phi_{n,k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ を計算し, 第 1 章の問 5 の結果と比較せよ.

定理 4.3 より, 1-step 先の予測の予測係数 $\phi_{n,j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ に対して, AR 係数 a_n および MA 係数 c_n よりなる無限級数展開が得られている. しかし, 実際の応用では, 和の順序を交換するなどして使いやすい形に書き換えておく必要がある. そのような結果を証明抜きでのべる. そのために, 3.6 節の条件 (B1) と (B2) という 2 種類の条件を考える. 等式

$$\gamma(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{|n|+k} c_k, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

より, (B1) は次を意味する:

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} |\gamma(n)| \le \left(\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} |c_k|\right)^2 < \infty.$$

これより, (B1) の下で $\{X_n\}$ は短時間記憶を持つことが分かる. 一方, 命題 3.15 より, 長時間記憶のための 3.7 節の条件 (L) は, (B2) を意味する.

以下, この節では, 条件 (B1) または (B2) のいずれかを仮定する. 前章と同じく, $\beta(n)$ を次で定義する:

$$\beta(n) := \sum_{v=0}^{\infty} c_v a_{v+n}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

やはり前章と同じように, $n, j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し,

$$d_1(n,j) = \beta(n+j), \qquad d_2(n,j) = \sum_{v_1=0}^{\infty} \beta(n+j+v_1)\beta(n+v_1)$$

とし, また, $k = 3, 4, \ldots$ に対して,

$$\begin{aligned} d_k(n,j) = \sum_{v_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{v_{k-1}=0}^{\infty} & \beta(n+j+v_{k-1})\beta(n+v_{k-1}+v_{k-2}) \\ & \cdots \beta(n+v_2+v_1)\beta(n+v_1) \end{aligned}$$

とおく. これらの和は絶対収束する. また, 次のようにおく:

$$\begin{cases} b_1(n,v) = c_0 a_v, \qquad v \ge 0, \\ b_k(n,v) = c_0 \displaystyle\sum_{u=0}^{\infty} a_{v+u} d_{k-1}(n+1,u), \qquad k \ge 2,\ v \ge 0. \end{cases}$$

右辺の和は絶対収束する．$n \in \mathbf{N}$ と $j = 1, 2, \dots, n$ に対し，$g_k(n,j)$ を次のように定義する：

$$g_k(n,j) = \begin{cases} b_k(n,j), & k = 1, 3, \dots, \\ b_k(n, n+1-j), & k = 2, 4, \dots. \end{cases}$$

次の定理が，1-ステップ有限予測係数 $\phi_{n,j}$ に対する AR および MA 係数により成る無限級数展開の最終的な形である．

定理 4.4 ([IK2]). (B1) または (B2) を仮定する．すると，$n \in \mathbf{N}$ と $j = 1, \dots, n$ に対し，$\phi_{n,j} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(n,j)$ が成り立つ．

証明は，[IK2] を見よ．

問 14. $r \in (-1, 1)$ とする．AR(1) 方程式 $X_n = rX_{n-1} + \xi_n$ の解 $X_n = \sum_{j=-\infty}^{n} r^{n-j}\xi_j$ を考える．ただし，$\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ はホワイトノイズである，i.e., $(\xi_n, \xi_m) = \delta_{nm}$．次が成り立っていた：

$$c_n = r^n \quad (n \geq 0), \quad a_0 = -1, \quad a_1 = r, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 2).$$

定理 4.4 を用いて，1-step 予測係数 $\phi_{n,k}$ $(k = 1, \dots, n)$ を計算し，第 1 章の問 5 および前節の問の結果と比較せよ．

4.4　応用

この節でも，$\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ は純非決定的な定常過程とする．$\{X_n\}$ の AR 係数と MA 係数をそれぞれ a_n, c_n とする．

以下，条件 (3.13) を仮定する．すると，定理 3.4 により次の Wiener-タイプの予測公式が成り立つ：

$$P_{(-\infty,-1]}X_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j X_{-j}.$$

ただし，

$$\phi_j = c_0 a_j, \qquad j \in \mathbf{N}$$

である．ϕ_j を **無限予測係数**と呼ぶことにする．次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{n,j} = \phi_j, \qquad j \in \mathbf{N}$$

([P, Theorem 7.14] を見よ). 次に注意しよう:

$$\phi_j = g_1(n, j), \qquad n \in \mathbf{N},\ j = 1, \ldots, n.$$

すなわち, ϕ_j は, 定理 4.4 の無限級数展開 $\phi_{n,j} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(n, j)$ の第一項である. 従って,

$$\phi_{n,j} - \phi_j = \sum_{k=2}^{\infty} g_k(n, j)$$

が成り立つ. これは, $n \to \infty$ において $\phi_{n,j}$ がどのように ϕ_j に近づくかというタイプの問題の解析手段として, 定理 4.4 が有用であることを示唆している. 実際, そのようなタイプのいくつかの結果が, [IK2] において得られている. それらを紹介しよう.

3.7 節の条件 (L) を思い出そう.

定理 4.5 ([IK2]). (L) を仮定する. すると, ある正数 M があって, 次の不等式がすべての $n \in \mathbf{N}$ で成立する:

$$\sum_{j=1}^{n} |\phi_{n,j} - \phi_j| \le M \sum_{k=n+1}^{\infty} |\phi_k|. \tag{4.7}$$

上の (4.7) は, 条件 (B1) の場合の短時間記憶モデルに対する本来の Baxter の不等式 ([Ba, Theorem 2.2] で $\lambda = 0$ の場合) と同じ形をしている ([P, Section 6.6.2] も参照せよ).

上の定理 4.5 は, 予測係数のノルム収束に関する結果である. 次は, j ごとの収束の rate に関する結果である.

定理 4.6 ([IK2]). (L) を仮定する. すると, 各 $j \in \mathbf{N}$ に対し次が成り立つ:

$$\lim_{n \to \infty} n \{\phi_{n,j} - \phi_j\} = d^2 \sum_{u=j}^{\infty} \phi_u.$$

最後に 中間的記憶モデルのための次の条件を考える:

(**M**)　定常過程 $\{X_n\}$ は, (C1), (C2), (A1) 及びある $p \in (1, \infty)$ と $\ell \in \mathcal{R}_0$ について, 次を満たす:

$$\gamma(n) \sim n^{-p} \ell(n) \qquad (n \to \infty).$$

例えば, $\gamma(n) = 1/(1 + |n|)^p$ $(p > 1)$ ならば, (M) が成り立つ. (M) の下, 正数 D を $D := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)$ で定義する.

定理 4.7 ([IK2]). (M) を仮定する．すると，各 $j \in \mathbf{N}$ に対し次が成り立つ:

$$\phi_{n,j} - \phi_j \sim n^{-(2p-1)} \ell(n)^2 \frac{1}{2p-1} \left\{ D^{-5/2} c_0 + D^{-2} \sum\nolimits_{u=j}^{\infty} \phi_u \right\}, \quad n \to \infty.$$

この定理 4.7 は，[P, Theorem 7.23] の反例を与えている．

定理 4.4 に基づく上の結果の証明は，[IK2] を見よ．

4.5 偏相関関数の表現 (II)

$n = j$ の $\phi_{n,j}$ は，偏相関関数 $\phi_{n,n}$ であるから，定理 4.4 は偏相関関数の無限級数表示という結果も含んでいる．しかし，この表現は $\phi_{n,n}$ の $n \to \infty$ の挙動を調べるなどの応用には適していない．しかし，定理 4.4 から出発して，最終的に Levinson–Durbin アルゴリズムのうちの等式

$$\phi_{n+1,j} = \phi_{n,j} - \phi_{n+1,n+1} \phi_{n,n+1-j},$$

を用いることで，偏相関関数の別の無限級数表現を与えることができる．その結果を紹介する．

$\beta(n)$ の定義を思い出そう．3.6 節の条件 (B1) または (B2) を満たす定常過程 $\{X_n\}$ と $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し，$\alpha_1(n) := \beta(n)$ とおき，また $k = 3, 5, \dots$ に対し，

$$\alpha_k(n) := \sum_{v_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{v_{k-1}=0}^{\infty} \beta(n+v_1)\beta(n+1+v_1+v_2) \\ \cdots \beta(n+1+v_{k-2}+v_{k-1})\beta(n+1+v_{k-1}).$$

とおく．条件 (B1) または (B2) により，これらの級数は絶対収束することを示すことが出来る．$\alpha_k(n)$ と 3.6 節の $d_k(n)$ の違いに注意せよ．

定理 4.8 ([IK2]). (B1) または (B2) を仮定する．すると，次が成り立つ:

$$\phi_{n,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1}(n) \qquad (n = 2, 3, \dots). \tag{4.8}$$

(3.54) と比較すると，分数の形でないだけ，(4.8) の方が簡明な形である．

[IK2] では，定理 4.8 を応用して，次の二つの結果を証明している．

定理 4.9 ([IK2]). $p > 1$ とし, $\{X_n\}$ は純非決定的定常過程で, (3.40) と次を満たすとする:

$$a_n = O(n^{-p}) \qquad (n \to \infty).$$

すると, 偏相関関数 $\phi_{n,n}$ も, 次を満たす:

$$\phi_{n,n} = O(n^{-p}) \qquad (n \to \infty).$$

定理 4.10 ([IK2]). $p, q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $0 < d < \frac{1}{2}$ とする. Fractional ARIMA 過程 (p, d, q) の偏相関関数 $\phi_{n,n}$ は, 次を満たす:

$$n\alpha(n) = d + O(n^{-d}), \qquad n \to \infty.$$

以上の結果の証明は, [IK2] を見よ.

関連図書

[AI] V. Anh and A. Inoue, Financial markets with memory I: Dynamic models, *Stochastic Anal. Appl.* To appear.

[AIK] V. Anh, A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization, *Stochastic Anal. Appl.* To appear.

[Ba] G. Baxter, An asymptotic result for the finite predictor. *Math. Scand.* **10** (1962), 137–144.

[BGT] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, Regular Variation, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1989.

[BD] P. J. Brockwell and R. A. Davis, Time Series : Theory and Methods, 2nd ed., Springer, New York, 1991.

[DK] D. Damanik and R. Killip, Half-line Schrödinger operators with no bound states, *Acta. Math.*, **193** (2004), 37–72.

[DKS] D. Damanik, R. Killip and B. Simon, Necessary and sufficient conditions in the spectral theory of Jacobi matrices and Schrödinger operators, *International Mathematical Research Notices* (2004), No. 22, 1087–1097.

[Du] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, New York, 1970.

[Dy] H. Dym, A problem in trigonometric approximation theory, *Illinois J. Math.* **22** (1978), 402–403.

[EGNZ] T. Erdelyi, J. Geronimo, P. Nevai, and J. Zhang, A simple proof of “Favard’s Theorem” on the unit circle , *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* **29** (1991), 41–46.

http://www.math.tamu.edu/ terdelyi/papers-online/favard.pdf

[GI] B. L. Golinskii and I. A. Ibragimov, On Szegö's limit theorem, *Math. USSR-Izv.* **5** (1971), 421–444.

[GN] L. Golinskii and P. Neval, Szegö's difference equations, transfer matrices and orthogonal polynomials on the unit circle, *Commun. Math. Phys.* **223** (2001), 223–259.

[GJ] C. W. Granger and R. Joyeux, An introduction to long-memory time series models and fractional differencing, *J. Time Series Analysis* **1** (1980), 15–29.

[H] J. R. M. Hosking, Fractional differencing, *Biometrika* **68** (1981), 165–176.

[HLP] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, Inequalities, 2nd edn, Cambridge University Press, 1952.

[IR] I. A. Ibragimov and Y. A. Rozanov, Gaussian random processes, Springer-Verlag, New York, 1978.

[I1] A. Inoue, Abel-Tauber theorems for Fourier-Stieltjes coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **211** (1997), 460–480.

[I2] A. Inoue, Asymptotics for the partial autocorrelation function of a stationary process, *J. Anal. Math.* **81** (2000), 65–109.

[I3] A. Inoue, Asymptotic behavior for partial autocorrelation functions of fractional ARIMA processes. *Ann. Appl. Probab.* **12** (2002), 1471–1491.

[I4] A. Inoue, What does the partial autocorrelation function look like for large lags? Submitted.

http://www.math.hokudai.ac.jp/˜inoue/

[INA1] A. Inoue, Y. Nakano and V. Anh, Linear filtering of systems with memory Submitted. http://www.math.hokudai.ac.jp/˜inoue/

[INA2] A. Inoue, Y. Nakano and V. Anh, Binary market models with memory. Submitted. http://www.math.hokudai.ac.jp/˜inoue/

[IK1] A. Inoue and Y. Kasahara, Partial autocorrelation functions of the fractional ARIMA processes with negative degree of differencing, *J. Multivariate Anal.* **89** (2004), 135–147.

[IK2] A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications. Submitted.

http://www.math.hokudai.ac.jp/˜inoue/

[KT] Kokoszka, P. S. and Taqqu, M. S. (1995). Fractional ARIMA with stable innovations. *Stochastic Processes Appl.* **60** 19–47.

[LM] N. Levinson and H. P. McKean, Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, *Acta Math.* **112** (1964), 98–143.

[O] Y. Okabe, On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (I), *Hokkaido Math. J.* **16** (1987), 315–341.

[P] M. Pourahmadi, Foundations of Time Series Anaylis and Prediction Theory, Wiley-Interscience, New York, 2001.

[Ra] F. L. Ramsey, Characterization of the partial autocorrelation function, *Ann. of Statist.* **2** (1974), 1296–1301.

[Ro] Y. A. Rozanov, Stationary random processes, Holden-Day, San Francisco, 1967.

[Ru] W. Rudin, Real and complex analysis, 3rd edn, McGraw-Hill, New York, 1987.

[Se] A. Seghier, Prediction d'un processus stationnaire du second ordre de covariance connue sur un intervalle fini, *Illinois J. Math.* **22** (1978), 389–401.

[S1] B. Simon, The Golinskii-Ibragimov method and a theorem of Damanik and Killip, *International Mathematical Research Notices* (2003), No. 36, 1973–1986.

[S2] B. Simon, Orthogonal polynomials on the unit circle: New results, *International Mathematical Research Notices* (2004), No. 53, 2837–2880.

[S3] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory, AMS Colloquium Series, American Mathematical Society, 2005.

[S4] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 2: Spectral Theory, AMS Colloquium Series, American Mathematical Society, 2005.

[Sz] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, 3rd ed., AMS Colloquium Series, American Mathematical Society,1967.

[V] S. Verblunsky, On positive harmonic functions (second part), *Proc. London Math. Soc.* **40** (1936), 290–320.

[Z] A. Zygmund, Trigonometric series, 2nd edn, Cambridge Univ. Press, 1959.