馬場良和氏訳 A.A. マルコフの論文
「互いに依存する確率変数への大数の法則の拡張」(1906)
「従属試行の注目すべき連鎖に対する考察」(1907)
の翻訳について.

2008.7.4 河野　敬雄

故丸山儀四郎さんの遺品のひとつであるマルコフ選集 1 冊が私の手元に送られてきたのはどの様な経緯であったか記憶が定かでない. マルコフ過程で名前は有名であるが, そのもとになった原論文はどれであろうかとちょっと眺めてみた記憶はある. しかし, ロシア語の読めない私には詳しいことは分からなかった. その後, 忙しさに取り紛れて失念していたが, 大学改革の関係で他分野の文献に接する機会も増えた. そこで痛感したのであるが, 微分・積分は, 計算技術はともかく, 他分野の人にも理解が困難という印象はない. ところが, こと確率論については数学以外の分野ではコルモゴロフは全く人気がない. コルモゴロフの公理からいわゆるボレル・カンテリの第一レンマは容易に証明できる. しかし, 各段階での確率はゼロではないにも関わらず, 必ずいずれかの時刻以降はその事象は起こらない, ということは直観的にはなかなか納得いかないようである. 数学における確率論の発展史は如何に直観を廃して公理的に推論するか, 直観が如何に間違いを導くか, という反省の歴史でもあった. しかしながら, 文系ながら一番数学を用いると言われている経済学の分野でも, たとえばノーベル経済学賞の受賞者である R.J. オーマンですら直観優先でコルモゴロフ流の確率論ではないのである（そのために確率変数と確率分布が十分には分離されて理解されていないことに起因する誤りを犯しているのではないか, と考えられる）.　 これまた大学改革の影響で, わたしは進化ゲームにも興味を持つようになった. 動物の進化の系統樹を眺めていて面白いのは, 一時期全盛を誇った動物（たとえば恐竜）もいずれは絶滅し, 代わって全盛期を迎えるのは, 当時はまったくマイナーな日陰の存在であった動物が急速に進化してあらたな覇者になるということである. 何百万年たっても現在のチンパンジーがヒトに進化するわけではない.　 さて, ここからが私の言いたいことである. 学問発展の歴史についても動物の系統樹と同様のことが言えるのではないだろうか, ということである. もしも新しいテーマが脚光を浴びて登場するとしても必ずやそ

の大本はかってはマイナーな分野, 定理として人々に無視されていた小さな事実が出発点になっているはずである. 決して現在華やかにもて囃されている分野がそのまま発展をし続けるわけではない.　確率論において, 独立確率変数列は, 例えば硬貨投げのようにそれと明示的に数学的に定義しなくても直観的考察によって相当に高度な数学的定理を導くことはできる. しかし, 独立性の仮定を除いて無条件にするともう直観では考察できないし, 定理らしいものも何も得られない. では, 独立確率変数列に対するのと類似の定理が成り立つ程度に独立性の仮定を緩めるにはどうすればよいであろうか. このように考えた途端に, では確率変数列を正確に定義するにはどうすればよいのかが問題となる. コルモゴロフよりはるか以前にこのような問題に取り組んだマルコフはやはり確率論の先駆的研究者として高く評価されてしかるべきであると思うのである. すでに欧米で先端分野である, という評価が固まってから研究を始めるのではなく, 自らその出発点になる研究を地道に始めるとなるとどうしても前述したような理由で歴史的文献に親しむ必要がある. その点我が国においては言葉の問題もあり, 不要不急の論文に暇な時にさっと目を通してアイディアを得る, という点で大きなハンディーがあるように思われる. 確率論に関心のある多くの研究者がこの機会に「古典」に親しんで頂ければ幸いである.　最後に, お忙しい中私のわがままを受け入れていただき, 労をいとわずマルコフの論文を翻訳して頂いた, 先輩でもあり京大大学院同期でもある馬場良和氏に衷心から感謝申し上げたい.

互いに依存する確率変数への大数の法則の拡張[1]

大数の法則は, チェビシェフ[2]によって, 確率変数の和とそれらの期待値の和との差の 2 乗の期待値を考察することから導入された. この法則によれば, いくらでも 1 に近い確率で, なんらかの確率変数の平均値は, これらの変数がたくさんあれば, それらの期待値の平均値とわずかしか違わないと主張できる. チェビシェフの考察から容易にわかることだが, 証明された大数の法則は, 確率変数の和とそれらの期待値の和との差の 2 乗の期待値が, 変数の個数 n を限りなく大きくして行くとき, n の 2 乗よりゆっくり増加するならば (つまり, この期待値の n^2 に対する比が 0 に収束するならば) 成り立つのである.

そのことを導くのにチェビシェフは, 独立な確率変数というもっとも簡単で, それ故に興味ある場合に限定して考えた. このもっとも簡単な場合には, チェビシェフが証明したように, n が限りなく増大するさいに (登場する確率変数の 2 乗の期待値が有界であって, 限りなく増加しないならば), 上記の 2 乗の期待値が n と同程度で増加するのである.

もちろん, チェビシェフの条件は, 独立な場合に限ったとしても, 大数の法則を証明するのには, すべての条件を使い切っていない. しかしながら, この法則が成り立つための必要かつ十分な条件を探求することはしないで, チェビシェフの結果が, 確率変数が互いに独立でないという, かなり一般的な場合に拡張できることを示すにとどめる.

§１. 最初に, 確率変数が増加するさいに, それ以外のものの期待値を減少させるという場合を考察しよう. [3] 確率変数列

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

を考え, それらの期待値は

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

とする. 簡単さのために

$$x_l - a_l = z_l$$

[1]カザン大学物理・数学会出版, 第 2 部 15-4, 1906, 135-156
[2]P.L. チェビシェフ選集第１巻
[3]訳者注：このことの正確な意味は以下の記述でわかる.

と置こう. 2 乗

$$(z_1+z_2+\cdots+z_n)^2$$

の期待値を考察するために, これを展開して「和の期待値は, それらの期待値の和である」を用いる.

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_m^2+2z_1z_2+2z_1z_3+\cdots+2z_{n-1}z_n.$$

独立な場合には, 積 z_lz_k の期待値はすべて 0 であり, $(z_1+z_2+\cdots+z_n)^2$ の期待値は, z_1, z_2,..., z_n の 2 乗の期待値の和になった, しかし, 今の場合には, 各 z_lz_k の期待値は負になり,

$$E(z_1+z_2+\cdots+z_n)^2<\sum_{k=1}^n Ez_k^2$$

となる. [4] このことを証明するために,

$$z_l', z_l'', \ldots, z_l^{(\omega)}$$

を, z_l の取るすべての可能な値を増加する順序に並べたものとし, 対応する確率を

$$p_l', p_l'', \ldots, p_l^{(\omega)}$$

とする. そして,

$$z_l=z_l', z_l'', \ldots, z_l^{(\omega)}$$

のときの z_k の期待値を,

$$a_k', a_k'', \ldots, a_k^{(\omega)}$$

とする. このとき, 積 z_lz_k の期待値は, 和

$$p_l'z_l'a_k'+p_l''z_l''a_k''+\cdots+p_l^{(\omega)}z_l^{(\omega)}a_k^{(\omega)}$$

の形で書ける. しかし, z_l, z_k の期待値は 0 であり, これらは和

$$p_l'z_l'+p_l''z_l''+\cdots+p_l^{(\omega)}z_l^{(\omega)},$$
$$p_l'a_k'+p_l''a_k''+\cdots+p_l^{(\omega)}a_k^{(\omega)}$$

[4]訳者注：原論文では, 期待値の記号 E は用いられていなくて, 代わりに英語ならば, M.E.(=Mathematical Expectation) が使われている.

の形で書ける. 今の場合, 仮定によって

$$a'_k > a''_k > \cdots > a_k^{(\omega)}$$

であるから, よく知られたチェビシェフの不等式[5] によって,

$$\sum p_l^{(i)} z_l^{(i)} a_k^{(i)} < \sum p_l^{(i)} z_l^{(i)} \sum p_l^{(i)} a_k^{(i)} = 0$$

となる. [6] したがって今の場合, z_n^2 の期待値が有限で, n について有界ならば大数の法則が成り立つ. z_k の期待値が, すべての k について, 和

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}$$

が増加するときに減少するならば, 容易に不等式

$$E(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^2 < \sum_{k=1}^{n} E z_k^2$$

が成り立ち, 大数の法則が成り立つ. そのためには, 恒等式

$$(z_1+z_2+\cdots+z_n)^2 = z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2+2z_1z_2+2(z_1+z_2)z_3+2(z_1+z_2+z_3)z_4+\cdots$$

を用いればよい.

たとえば, 和

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

を, つぼの中から n 個の球を, 次の条件 1, 2, 3 を満たすように取り出した白球の数とする.

1. つぼの中の白球の数は最初 $2a$ 個で, 他の球は $2b$ 個である.
2. 取り出した球は元に戻さない.
3. つぼの中に $a + b$ 個が残っているときには, つぼに a 個の白球と b 個の他の球を追加する.

---

[5]「一つの積分の別な積分による近似的表現について」, P.L. チェビシェフ選集第 2 巻 716-719, Korkine 「チェビシェフ氏の定理について」Comptes Rendus,96 巻

[6]訳者注：この不等式の宮本宗実氏による証明を, この訳文の最後に載せた.

大数の法則により, 今の場合, つぼの中のすべての球に対する白球の比が不変で $\dfrac{a}{a+b}$ ならば, よく知られた場合とまったく同様に, 1 にいいくらでも近い確率で, 取り出されたすべての球の個数に対する出現した白球の個数の比は, 十分たくさんの球を取り出せば, $\dfrac{a}{a+b}$ にいくらでも近い値になると主張できる.

§2. 繰り返すが, 必要条件は考えず, ここでは十分条件のみを与え, チェビシェフの結果が拡張できるような場合の一つを考えよう. すなわち, 確率変数

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

相互の間隔の開きが増加するさい, その影響が急速に減少するような場合である.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

は, 以下のように引き続く n 回の試行において, なんらかの事象 A が実現する回数をあらわす. その試行は, 毎回の試行における事象 A の確率が, 直前の試行で A が起これば p' であり, そうでない場合には, つまり直前の試行の結果 A が起こらなければ p'' であるようなものである. また, 試行全体の結果が決まらないままならば, それはただ一つの数 p に等しい. [7]

こうした場合の考察を始めるために,

$$1 - p = q, \quad 1 - p' = q', \quad 1 - p'' = q''$$

とおき, p, p', p'' が簡単な関係

$$p = pp' + qp''$$

で結ばれていることに注意しよう. [8] そして, このことから三つの数のうち, 与えられた二つの数から, 三つ目のものが容易に求まる：

$$p = \frac{p''}{1 - p' + p''}, \quad p' = 1 + p'' - \frac{p''}{p}, \quad p'' = p\frac{1 - p'}{1 - p}.$$

数 x_l, x_k は, それぞれ試行において事象 A が l 番目, k 番目における実現と対応し, 0 か 1 である. このとき,

$$a_l = a_k = p$$

[7]訳者注：それまでの経過に関係なく, ある時点で—どの時点でも—A が起こる確率が p ということで, 任意の n にたいして $p = P(x_n = 1)$ ということである.

[8]訳者注：$p = P(x_n = 1/x_{n-1} = 1) + P(x_n = 1/x_{n-1} = 0)$.

である. また,

$$x_l x_k - a_k x_k - a_k x_l + a_k a_l$$

に等しい $z_l z_k$ の期待値は,

$$Ex_l x_k - p^2$$

になることも容易にわかるだろう. 積 $x_l x_k$ の期待値は, l 番目と k 番目に事象 A が起こる確率に等しいが, それらは, 今度は確率の積の法則によって, l 番目の試行で事象 A が起こる確率 p と, l 番目で事象 A が起こったことがわかったときに, k 番目の試行で A が起こる確率 R_k^l との積である.

こうして, 等式

$$Ez_l z_k = p(R_k^l - p)$$

を得るが, この値 R_k^l を求めなければならない. これは, 容易にわかるように差 $k - l$ にしか関係しないから, より簡単にあらわせる

$$R_{k-l}$$

を求めればよい. $k - l = 1$ のときには, 仮定から

$$R_1 = p'$$

であるから, 順次

$$R_2 = R_1 p' + (1 - R_1)p'' = p'p' + q'p'',$$
$$R_3 = R_2 p' + (1 - R_2)p'',$$
$$\cdots\cdots$$
$$R_{m+1} = R_m p' + (1 - R_m)p'' = p'' + (p' - p'')R_m$$

を求めることができる. 方程式

$$R_{m+1} = p'' + (p' - p'')R_m$$

は, 容易に解けて,

$$R_m = p + C(p' - p'')^m$$

を得るが, 定数 C は条件 $R_1 = p'$ から決まる. こうして,

$$Ez_l z_k = pq(p' - p'')^{k-l}$$

であり, これから

$$E(z_1+z_2+\cdots+z_{k-1})z_k = pq\bigl(p'-p''+(p'-p'')^2+\cdots+(p'-p'')^{k-1}\bigr)$$

を得る. これから, $p'<p''$ のときには, 積

$$(z_1+z_2+\cdots+z_{k-1})z_k$$

の期待値は負であり,

$$E(z_1+z_2+\cdots+z_{k-1})z_k < npq$$

である. $p'>p''$ ならば,

$$(z_1+z_2+\cdots+z_{k-1})z_k$$

の期待値は

$$\frac{pq(p'-p'')}{1-p'+p''}$$

より小さい. したがって,

$$E(z_1+z_2+\cdots+z_n)^2 < npq\Bigl(1+\frac{2(p'-p'')}{1-p'+p''}\Bigr) < \frac{npq(1+p'-p'')}{1-p'+p''}$$

である.

この不等式から, 今の場合には大数の法則が成り立つことが容易にわかる.

この法則から, 試行の回数が十分多ければ事象 A の起こる回数の, 全体の試行回数に対する比と p との差が, 任意に与えられた値より小さくなる確率は, いくらでも 1 に近くなることがわかる.

§3. 前節の積 $z_l z_k$ の期待値の表現は, これから取り組み, これからの基本となる一般的な式からも導ける. これ以降の節では, 最初の k 回の試行で, 事象 A が m 回起こる確率を $P_{m,k}$ であらわそう.

$$P_{m,k} = V_{m,k} + U_{m,k}$$

と置くことができる. ここで, $U_{m,k}$ と $V_{m,k}$ は次の条件下での $P_{m,k}$ と同じものである.

(1) $U_{m,k}$ は最後の試行で A が起こらないとき,

(2) $V_{m,k}$ は最後の試行で A が起こるとき,

である. この三つの量に関連して, さらに数 ξ の三つの関数[9]

$$\Phi_k = U_{0,k} + U_{1,k}\xi + U_{2,k}\xi^2 + \cdots + U_{k-1,k}\xi^{k-1}$$
$$\Psi_k = V_{1,k}\xi + U_{2,k}\xi^2 + \cdots + V_{k,k}\xi^k$$
$$\Omega_k = P_{0,k} + P_{1,k}\xi + P_{2,k}\xi^2 + \cdots + P_{k,k}\xi^k = \Psi k + \Phi k$$

を導入しよう. 関数 Ω_k は, より簡単に以下の t のべき級数の t^k の係数として定まることを示そう. そのために, 確率の和と積の定理を用いての二つの等式

$$U_{m,k} = q'V_{m,k-1} + q''U_{m,k-1}$$
$$V_{m,k} = p'V_{m-1,k-1} + p''U_{m-1,k-1}$$

を用いる. これらの関数を Φ_k と Ψ_k に適用すれば, 二つの等式

$$\Phi_k = q'\Psi_{k-1} + q''\Phi_{k-1}$$
$$\Psi_k = p'\xi\Psi_{k-1} + p''\xi\Phi_{k-1}$$

を得る. これから二つの関数 Φ と Ψ の一方を消去すれば,

$$\Phi_{k+1} - (p'\xi + q'')\Phi_k + (p' - p'')\xi\Phi_{k-1} = 0$$
$$\Psi_{k+1} - (p'\xi + q'')\Psi_k + (p' - p'')\xi\Psi_{k-1} = 0$$

を得る.

$$\Omega_k = \Phi_k + \Psi_k$$

だから

$$\Omega_{k+1} - (p'\xi + q'')\Omega_k + (p' - p'')\xi\Omega_{k-1} = 0$$

でなければならない. これから Ω_k は分数

$$\frac{A + Bt}{1 - (p'\xi + q'')t + (p' - p'')\xi t^2}$$

を t のべき級数で展開したときの t^k の係数であることがわかる. ここで, A と B は, t に関係しない. A と B を決定するためには, 二つの k の値 $k = 1, 2$ での Ω_k を決定することが残っている.

$$\Omega_1 = q + p\xi,$$
$$\Omega_2 = qq'' + (qp'' + pq')\xi + pp'\xi^2$$

[9]訳者注：これらの関数の母関数である.

であることが容易にわかる. また,

$$\Omega_0 = 1$$

である. この分数を t のべき級数に展開し, 最初の 2 項のみを見れば,

$$A + (B + p'\xi + q'')t = \Omega_0 + \Omega_1 t = 1 + (q + p\xi)t$$

である. これから

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= (p - p')\xi + q - q'' \end{aligned}$$

を得るが, これから容易に

$$B = (p'' - p')(q\xi + p)$$

の形にできる. こうして, 最終的に

$$\frac{1 + (p'' - p')(q\xi + p)t}{1 - (p'\xi + q'')t + (p' - p'')\xi t^2} = \Omega_0 + \Omega_1 t + \Omega_2 t^2 + \cdots$$

を得る. この式は, 今後の研究[10] の基礎になる. とくに, これから容易に今までの結果が導けるが, ここではそれをしないことにする.

§4. 事柄を明快にするために, 大数の法則が当てはまらない, もう一つの例を考える.

§1 でのように, 和

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

は, つぼの中から, 次のような新しい条件のもとで順番に抜き出された n 個の球のうちの白球の個数としよう：

1) つぼのなかの白球の個数は, 初めは a 個であり, 残りの b 個は別な色である.

2) つぼから取り出された球は, 同じ色の別な球一つを加えて元に戻す.

この場合, 和

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}$$

[10] 私の 1907 年の論文「従属的な試行という注目すべき場合の研究」を参照.

の増加が, x_k の期待値を増加させる. したがって, 積

$$(z_1 + z_2 + \cdots + z_{k-1})z_k$$

の期待値は正になる.

$$(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^2$$

の期待値は, 和

$$\sum_{m=0}^{n}\Big(m - n\frac{a}{a+b}\Big)^2 P_{m,n}^{a,b}$$

によってあらわされることに注意して, この期待値を求めよう. ここで, $P_{m,n}^{a,b}$ は取り出した n 個の球のうちで m 個が白球である確率であり, それは容易に

$$P_{m,n}^{a,b} = \frac{1 \cdot 2 \cdots \ \cdots n \cdot a(a+1)\cdots(a+m-1)b(b+1)\cdots(b+n-m-1)}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-m)(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n-1)}$$

と書けることがわかる. この式から, つぎの簡単な等式

$$mP_{m,n}^{a,b} = \frac{na}{a+b}P_{m-1,n-1}^{a+1,b}$$
$$m(m-1)P_{m,n}^{a,b} = \frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}P_{m-2,n-2}^{a+2,b}$$

が導ける. これらから

$$\sum_{m=0}^{n} mP_{m,n}^{a,b} = \frac{na}{a+b}$$
$$\sum_{m=0}^{n} m(m-1)P_{m,n}^{a,b} = \frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$

を得る. この最後の等式と, 明かな等式

$$\sum_{m=0}^{n} P_{m,n}^{a,b} = 1$$

から, 求める和

$$\sum_{m=0}^{n}\Big(m - n\frac{a}{a+b}\Big)P_{m,n}^{a,b}$$

を計算できる. そのために, これを三つに分解する:

$$\sum_{m=0}^{n} m(m-1)P_{m,n}^{a,b} - \Big(\frac{2na}{a+b} - 1\Big)\sum_{m=0}^{n} mP_{m,n}^{a,b} + n^2\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^2 P_{m,n}^{a,b}\sum_{m=0}^{n} P_{m,n}^{a,b}.$$

あとは, 簡単な計算で

$$\sum_{m=0}^{n}\Big(m - n\frac{a}{a+b}\Big)P_{m,n}^{a,b} = \frac{nab(n+a+b)}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

を得る. この結果から, 今の場合には大数の法則が適用できないことがわかる. したがって, 十分小さな ε にたいして, 不等式

$$-\varepsilon \leqq \frac{m}{n} - \frac{a}{a+b} \leqq +\varepsilon$$

の成り立つ確率は, n がいくら大きくても 1 に近くならないだろう. そのことを証明しよう. この不等式が成り立たない確率を β であらわす. そして

$$\xi = \Big(\frac{m}{n} - \frac{a}{a+b}\Big)^2$$

は,

$$\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^2 \quad と \quad \Big(\frac{b}{a+b}\Big)^2$$

の大きい方より大きくなることはない. このとき, 上で求めた式から, 容易に不等式

$$\xi\beta > \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} - \xi^2$$

を得る. これから,

$$\xi < \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}$$

ならば, β はいくらでも小さくなるようにはできない. この例では, 数 m のもっとも起こりそうな値 μ は, 簡単な不等式

$$(a-1)n - b + 1 \leqq (a+b-2)\mu$$
$$(a-1)n + a - 1 \leqq (a+b-2)\mu$$

で決めることができる. そして, 比 $\dfrac{\mu}{n}$ は, n を無限に大きくしていくときに, 極限値

$$\frac{a}{a+1} \quad ではなく \quad \frac{a-1}{a+b-2}$$

をもつ. しかし, もちろん n が大きいときに, 比 $\dfrac{m}{n}$ が $\dfrac{a-1}{a+b-2}$ にいくらでも近くなるとは決して考えてはいけない. というのは, $\Big(\dfrac{m}{n} - g\Big)^2$ は $g = \dfrac{a}{a+b}$

のときに最小値をとり, この最小値は, 上で求めた式からわかるように n が無限大に行くとき, 0 でない極限値 $\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ をもつからである.

$$a = b = 1$$

という簡単な場合には, すべての

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

にたいして, 同一の確率 $\dfrac{1}{n+1}$ になるから, 大数の法則は成り立たない.

1907 年 1 月 16 日

§ 5. §2 の結果には, かなりの一般性を与えることができる. つまり, なんらかの事象が起こる回数の代わりに, 連鎖のなかのある一つがある値をとるときに, その次のものがそれに先行するものと独立になるようなものの和, を考えるのである.

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots$$

を, すべての k にたいして, x_k がわかったときに, x_{k+1} が

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$$

と独立になるようなものの無限系列とする. さらに, この系列のとる値は, 数の集合

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

からとるものとする. そして,

$$p_{\alpha,\alpha}, p_{\alpha,\beta}, p_{\alpha,\gamma}, \ldots,$$

$$p_{\beta,\alpha}, p_{\beta,\beta}, p_{\beta,\gamma}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

は, x_k の値がわかったとき, x_{k+1} が定まった値をとる確率で, p の添え字の最初は x_k の値で, 次が x_{k+1} の値である. たとえば,

$$x_k = \beta$$

のとき,

$$x_{k+1} = \gamma$$

となる確率が $p_{\beta,\gamma}$ である.

こうした確率は, 記号や考察を複雑にしないために, k によらないとする.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

が定まっていないときに, x_k が値

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

をとる確率を, それぞれ

$$p_\alpha^{(k)}, p_\beta^{(k)}, p_\gamma^{(k)}, \ldots$$

とする. 確率

$$\begin{gathered} p_{\alpha,\alpha}, p_{\alpha,\beta}, p_{\alpha,\gamma}, \ldots, \\ p_{\beta,\alpha}, p_{\beta,\beta}, p_{\beta,\gamma}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

は, もちろん正とする. ほかに, これらは等式

$$\begin{gathered} p_{\alpha,\alpha} + p_{\alpha,\beta} + p_{\alpha,\gamma} + \cdots = 1 \\ p_{\beta,\alpha} + p_{\beta,\beta} + p_{\beta,\gamma} + \cdots = 1 \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

を満たさなければならない. それ以外の制限はない.

$$p_\alpha^{(k)}, p_\beta^{(k)}, p_\gamma^{(k)}, \ldots$$

にかんしても,

$$p_\alpha^{(k)} + p_\beta^{(k)} + p_\gamma^{(k)} + \cdots = 1$$

は当然成り立つが, それらが k によらないとしてはいけない. しかし,

$$p'_\alpha, p'_\beta, p'_\gamma, \ldots$$

については, すべての値

$$p_\alpha^{(k)}, p_\beta^{(k)}, p_\gamma^{(k)}, \dots$$

を順に, 簡単な等式

$$\begin{aligned} p_\alpha^{(k+1)} &= p_{\alpha,\alpha} p_\alpha^{(k)} + p_{\beta,\alpha} p_\beta^{(k)} + \cdots, \\ p_\beta^{(k+1)} &= p_{\alpha,\beta} p_\alpha^{(k)} + p_{\beta,\beta} p_\beta^{(k)} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

を用いて計算できる.

$$x_1, x_2, \dots x_k, \dots$$

が定まっていないときに, 今まで通り記号

$$a_k$$

であらわされるさまざまな値をとる x_k の期待値の計算に戻ろう. 記号

$$A_\alpha^{(i)}, A_\beta^{(i)}, A_\gamma^{(i)}, \dots$$

は,

$$x_k = \alpha, x_k = \beta, x_k = \gamma, \dots$$

のときの

$$x_{k+i}$$

の期待値をあらわす. これらについては, 容易に示せる以下の等式が成りたつ.

$$\begin{aligned} a_k &= p_\alpha^{(k)} \alpha + p_\beta^{(k)} \beta + p_\gamma^{(k)} \gamma + \cdots, \\ a_{k+i} &= p_\alpha^{(k)} A_\alpha^{(i)} + p_\beta^{(k)} A_\beta^{(i)} + p_\gamma^{(k)} A_\gamma^{(i)} + \cdots, \\ A_\alpha^{(i)} &= p_{\alpha,\alpha} A_\alpha^{(i-1)} + p_{\alpha,\beta} A_\beta^{(i-1)} + p_{\alpha,\gamma} A_\gamma^{(i-1)} + \cdots, \\ A_\beta^{(i)} &= p_{\beta,\alpha} A_\alpha^{(i-1)} + p_{\beta,\beta} A_\beta^{(i-1)} + p_{\beta,\gamma} A_\gamma^{(i-1)} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

こうした等式を用いて, すべての

$$a_{k+i}, A_\alpha^{(i)}, A_\beta^{(i)}, A_\gamma^{(i)}, \dots$$

が, i を無限大にとばしたときに, 同一の極限値をもつことを示そう. そのために, まず, a_{k+i} が

$$A_\alpha^{(i)}, A_\beta^{(i)}, A_\gamma^{(i)}, \ldots$$

の最大値と最小値の間にあることに注意する. そしてこれらは,

$$A_\alpha^{(i-1)}, A_\beta^{(i-1)}, A_\gamma^{(i-1)}, \ldots$$

の最大値と最小値の間にある. つぎに差

$$A_\alpha^{(i)} - A_\beta^{(i)}$$

を考えると, 同じ式から

$$A_\alpha^{(i)} - A_\beta^{(i)} = (p_{\alpha,\alpha} - p_{\beta,\alpha})A_\alpha^{(i-1)} + (p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\beta})A_\beta^{(i-1)} + \cdots$$

を得る. そして

$$(p_{\alpha,\alpha} - p_{\beta,\alpha}) + (p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\beta}) + \cdots = 0$$

だから,

$$p_{\alpha,\alpha} - p_{\beta,\alpha}, p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\beta}, \ldots$$

のなかで, 正のものを選び, 負のものは符号を変えれば同一の和をもつ二つの正の集合を得る. また, これらの和は 1 より小さい. なぜなら, 一つの和は

$$p_{\alpha,\alpha}, p_{\alpha,\beta}, p_{\alpha,\gamma}, \cdots$$

より小さく, もう一つは

$$p_{\beta,\alpha}, p_{\beta,\beta}, p_{\beta,\gamma}, \cdots$$

より小さいからである. したがって,

$$A_\alpha^{(i-1)}, A_\beta^{(i-1)}, A_\gamma^{(i-1)}, \ldots$$

の一つを最大値で置き換え, 他のものを最小値で置き換えて

$$\Delta^{(i-1)}$$

を

$$A_\alpha^{(i-1)}, A_\beta^{(i-1)}, A_\gamma^{(i-1)}, \ldots$$

のなかの最大値と最小値との差とすれば, 不等式

$$|A_\alpha^{(i)} - A_\beta^{(i)}| < h\Delta^{(i-1)}$$

を得る. ここで, h は

$$p_{\alpha,\alpha} - p_{\beta,\alpha}, p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\beta}, \ldots$$

のなかでの正の項の和であり, 1 より小さい. 任意の系列

$$A_\alpha^{(i)}, A_\beta^{(i)}, A_\gamma^{(i)}, \ldots$$

の差についても, まったく類似の結論を導くことができる. したがって,

$$A_\alpha^{(i)} - A_\beta^{(i)}$$

のかわりに,

$$A_\alpha^{(i)}, A_\beta^{(i)}, A_\gamma^{(i)}, \ldots$$

のなかの最大値と最小値との差 $\Delta^{(i)}$ を考えれば, 不等式

$$\Delta^{(i)} < H\Delta^{(i-1)}$$

が成り立つことがわかる. ここで, H は 0 と 1 との間のなんらかの定数である. この不等式から, $\Delta^{(i)}$ が i を無限大にしたときに 0 に収束することがわかる. したがって, i を無限に大きくして行ったとき,

$$a_{k+i}, A_\alpha^{(i)}, A_\beta^{(i)}, A_\gamma^{(i)}, \ldots$$

は, すべて同一の極限値に近づくことがわかる. このことから, これらは $\Delta^{(i)}$ より小さく, また

$$\Delta^{(i)} < CH^i$$

であることがわかる. ここで, C と H は定数で

$$0 < H < 1$$

である. つぎに 2 乗和

$$(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \cdots + x_n - a_n)^2$$

の期待値を考えると,

$$x_k - a_k = z_k$$

と置いて, §2 でのようにこの和を分解する. そうすると, まったく同様な仕方で不等式

$$Ez_k(z_1 + z_2 + \cdots + z_{k-1}) < D(H + H^2 + \cdots + H^{k-1})$$
$$E(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \cdots + x_n - a_n)^2 < Gn$$

を得る. ここで, D と G は定数である. 他方では,

$$(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \cdots + x_n - a_n)^2$$

の期待値を

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - na)^2$$

の期待値と比較して, これらの 2 乗和の期待値の差が

$$(a_1 - a + a_2 - a + \cdots + a_n - na)^2$$

に等しいことがわかる. ここで,

$$a = \lim_{i \to \infty} a_{k+i}$$

である. そしてこれは, n を無限に大きくして行くとき, 有限の値である. したがって, n を無限に大きくしていくとき,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right)^2$$

の期待値は 0 に収束しなければならない. これは, 今の場合に大数の法則が成り立っていることを示している. これは, 正の数 ε と η がいくら小さくても, 不等式

$$-\varepsilon < \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a < \varepsilon$$

が成り立つ確率は, n を十分大きくすれば $1 - \eta$ より大きくなる. こうして, 変数の独立性は, 大数の法則が成り立つための必要条件ではない.

1907 年 3 月 25 日

チェビシェフの不等式の証明(宮本宗実氏による)

一般に二つの数列が

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n, \quad b_1 > b_2 > \cdots > b_n$$

を満たしているとき, 確率分布 p_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ と任意の j, k に対して

$$(a_j - a_k)(b_j - b_k) < 0$$

であるから, この両辺に $p_j p_k$ をかけて j, k について加えると

$$\sum_{j,k} p_j p_k (aj - a_k)(bj - b_k) = 2 \sum_j p_k a_k b_k - 2 \sum_j p_j a_j \sum_k p_k a_k < 0$$

これから,

$$\sum_k p_k a_k b_k < \sum_k p_k a_k \sum_k p_k b_k$$

となる. 原文の場合には, ここでの $a_j = z_l^{(j)}$, $b_j = a_k^{(j)}$ であり, $j = 1, 2, \ldots, \omega$ である.

従属試行の注目すべき連鎖に対する考察

A.A. マルコフ

帝国科学アカデミー報告 — 1907 (Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg)

（1907 年 2 月 14 日の物理—数学部会での報告）

この研究で行った従属試行の場合は, 大数の法則の従属確率変数への拡張の一つの例として, 私が最初に行ったものである. [11]. これは, チェビシェフが従属変数に対する「平均値について」で行った研究に基づいている. [12]

この法則の一般化に対して, 和の 2 乗という知られている場合のみに必要な考察を行うというチェビシェフの方法を用いた.

同一の和のさまざまなベキ乗を考察して, われわれの場合には, チェビシェフが「確率に関する二つの定理について」[13]で求めたのと同じ極限公式が成り立ち, 確率の極限が, 知られている積分の形で求まる[14]ことを確信した.

こうして, この研究は, 私の知る限りでは, 従属変数が独立変数のときのように, その数を限りなく増やして行くとき, よく知られたラプラスの積分[15]が, 定められた範囲での和の極限の確率となる, 最初の例となった.

もちろん, 結論に至ったすべての計算を述べることはしない. しかし, 経験的方法で導かれたと言える私の結論の証明の正当性は述べる.

§１. 連続した試行に対して, 以下の条件を満たすように, なんらかの事象 E が生起する回数についての問題を考える：

１）この試行における事象 E の起こる確率は, その結果が不明のあいだは, 同一の値 p である.

２）引き続く試行の結果が不確定であって, 直前の試行で事象 E が起こるならば, 事象 E の確率は, それまでの試行の結果がどうであろうと, ２番目の値

[11]「互いに依存する確率変数への大数の法則の拡張」, カザン大学物理・数学会出版, 第 2 部 15 巻第 4 号 135-156, 1906

[12]P.L. チェビシェフ選集第 1 巻 688-694

[13]チェビシェフ選集第 2 巻 481-492

[14]チェビシェフの論文「積分の極限について」第１章と第２章, そして私の博士論文「ある代数的連分数についての補遺」と「方程式 $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=0$ の解について」Bulletin de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg, 第 9 巻第 5 号を参照

[15]訳注：正規分布の積分のこと

p_1 である.

3）最後に, 引き続く試行の結果が不確定であって, 直前の試行で事象 E が起こらなければ, それまでの試行の結果がどうであろうと, 事象 E の確率は３番目の値 p_2 である.

以上のことは, 直前の試行の結果を知ったとき, 試行は直前の試行のみと関係し, それ以前の試行とは無関係である, ということである.

事象 E と共に, それとは反対の事象 F を考える. その確率は, 対応する条件において

$$1-p,\ 1-p_1,\ 1-p_2,$$

に等しいが, これらを簡単に

$$q,\ q_1,\ q_2,$$

で表す.

こうした記号を用いることによって, 計算やその結果がいちじるしく簡単になる. 結論は事象 E と事象 F については同様なので, 結論の式は p と q に関して対称になる.

数 p, p_1, p_2 に関しては, それらが, 関係

$$p = pp_1 + qp_2 \tag{1}$$

で結ばれているので, それらのうちの二つだけが任意に選べる. この関係式は, 事象 E の確率が, 各試行ごとに, 直前の試行の可能な結果によって定まっているから容易に得られる.

六つの数

$$p,\ p_1,\ p_2,\ q,\ q_1,\ q_2$$

において

$$\delta = p_1 - p_2 \tag{2}$$

を定義すれば,

$$p,\ q,\ \delta$$

の三つで関係づけられる.

関係 (1) は等式

$$q = 1-p,\ q_1 = 1-p_1,\ q_2 = 1-p_2 \tag{3}$$

によって簡単な式

$$\begin{cases} p_1 = p + \delta q, & q_1 = q - \delta q \\ p_2 = p - \delta q, & q_2 = q + \delta q \end{cases} \tag{4}$$

で表せる.

当初の問題に戻って, まず, n 回に試行において事象 E が起こった回数がある数になる確率に関するさまざまな関数を考察しよう.

そのために, 次の記号を導入しよう.

$$P_{m,k}$$

を, 事象 E が最初の k 回の試行のうち m 回出現する確率とする. さらに, 追加の条件として, $P_{m,k}$ のうち

$$P^o_{m,k} \quad と\ P'_{m,k}$$

を, 事象 E が k 番目の試行で起こらない確率と, 起こる確率とする. したがって,

$$P_{m,k} = P^o_{m,k} + P'_{m,k} \tag{5}$$

となる.

$$\varphi_k = \sum P^0_{m,k}\xi^m, \psi_k = \sum P'_{m,k}\xi^m, \omega_k = \sum P_{m,k}\xi^m \tag{6}$$

を, 変数 ξ の三つの関数としよう. これらは, 等式 (5) によって簡単な式

$$\omega_k = \varphi_k + \psi_k \tag{7}$$

で結ばれている.

この記号を用いると, k 番目から $k+1$ 番目の試行に移るとき, 確率の加法定理と乗法定理によって, 次の式を得ることができる.

$$\begin{cases} P^o_{m,k+1} = q_1 P'_{m,k} + q_2 P^o_{m,k} \\ P'_{m,k+1} = p_1 P'_{m-1,k} + p_2 P^o_{m-1,k}, \end{cases} \tag{8}$$

これから

$$\begin{cases} \varphi_{k+1} = q_1\psi_k + q_2\varphi_k \\ \psi_{k+1} = p_1\xi\psi_k + p_2\xi\varphi_k \end{cases} \tag{9}$$

を得る.

そして, 方程式 (9) から関数 φ または ψ の一つを除いてこれら二つの関数に対して, 容易にまったく同じ方程式を得られる.

$$\begin{cases} \varphi_{k+2} - (p_1\xi + q_2)\varphi_{k+1} + (p_1 - p_2)\xi\varphi_k = 0, \\ \psi_{k+2} - (p_1\xi + q_2)\psi_{k+1} + (p_1 - p_2)\xi\psi_k = 0 \end{cases}$$

これらを加えて

$$\omega_{k+2} - (p_1\xi + q_2)\omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\xi\omega_k = 0 \tag{10}$$

を得る.

したがって, 新しい任意の変数 t を用いて

$$\Omega(\xi, t) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \omega_3 t^3 + \dots \tag{11}$$

を導入し, ω_0 を等式

$$\omega_2 - (p_1\xi + q_2)\omega_1 + (p_1 - p_2)\xi\omega_0 = 0 \tag{12}$$

で定義すれば,

$$\Omega(\xi, t) = \frac{L_0 + L_1 t}{1 - (p_1\xi + q_2)t + (p_1 - p_2)\xi t^2}$$
$$L_0 = \omega_0,\ L_1 = \omega_1 - (p_1\xi + q_2)\omega_0$$

となる. 他方では,

$$\omega_1 = p\xi + q,\ \omega_2 = pp_1\xi^2 + (pq_1 + qp_2)\xi + qq_2$$

であるから, 方程式 (12) から

$$\omega_0 = 1,$$

これから

$$L_0 = 1,\ L_1 = (p - p_1)\xi + q - q_2$$

となる.

これらを $\Omega(\xi, t)$ を表現する式に代入し, (4) 式に注意すれば

$$\Omega(\xi, t) = \frac{1 - \delta(q\xi + p)t}{1 - tp\xi + q + \delta(q\xi + p)t + \delta\xi t^2} \tag{13}$$

を得る. これは, 関数 ω_n を定めるのに役立つだろう.

§ 2. $\Omega(\xi,t)$ を表す (13) 式は n 回の試行における事象 E の出現回数の期待値をさまざまな次数に対して求めるのに役立つ.

別な言い方をすれば, n 回の試行における事象 E の出現回数を m で表すとき (13) 式を, さまざまな k に対する和

$$\sum m^k P_{m,n}$$

の計算に使える. そして, こうした和から次に

$$\sum (m-pn)^k \ P_{m,n}$$

の和に移ろう. これは, 差 $m-pn$ の数学的期待値を表す. ここで, pn は m の数学的期待値である.

その目的のために, まず積

$$m(m-1) \ \cdots \ (m-i+1)$$

の数学的期待値が, 導関数

$$\frac{d^i \omega_n}{d\xi^i}$$

$\xi = 1$ のときの値に等しいことに注意しよう. したがって, 導関数

$$\frac{d^i \Omega(\xi,t)}{d\xi^i}$$

の $\xi = 1$ のときの値としてして, 任意の t での展開の係数が定まる.

この導関数を微分して $\xi = 1$ とすれば,

$$\left\{ \frac{d^i \Omega(\xi,t)}{d\xi^i} \right\}_{\xi=1} = \frac{1 \cdot 2 \ \cdot \ i \ pt^i}{(1-t)^2} \left\{ \frac{p}{1-t} + \frac{\delta q}{1-\delta t} \right\} \tag{14}$$

を得る.

これから, 小さな i のときには, かなり簡単な結果を得る.

$$i = 1, \ 2, \ 3, \ 4$$

として,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(m) = np,\\
&\mathrm{E}\big(m(m-1)\big) = n(n-1)p^2 + 2pq\delta\big(n-1+(n-2)\delta+(n-3)\delta^2+\ \ldots\big),\\
&\mathrm{E}\big(m(m-1)(m-2)\big)\\
&\quad = n(n-1)(n-2)p^3 + 6p^2q\delta\big((n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)\delta+\ \ldots\big)\\
&\qquad + 6pq^2\delta^2\big(n-2+2(n-3)\delta+3(n-4)\delta^2\ \ldots\big),\\
&\mathrm{E}\big(m(m-1)(m-2)(m-3)\big)\\
&\quad = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4\\
&\qquad + 12p^3q\delta\big((n-1)(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)\delta+\ \ldots\big)\\
&\qquad + 36p^2q^2\delta^2\big((n-2)(n-3)+2(n-3)(n-4)\delta+\ \ldots\big)\\
&\qquad + 24pq^3\delta^3\big(n-3+3(n-3)(n-4)\delta+6(n-5)\delta^2\ \ldots\big).
\end{aligned}
$$

式 (14) から, もちろん, 積

$$m(m-1)\ldots(m-i+1)$$

の数学的期待値の一般的表現を容易に得られる. しかし, われわれの目的のためには, この表現すべてを書き表す必要はなくて, その一部分の項だけを抜き出して考察することが重要である. それが結果のために重要な役割を果たすのである.

t の関数

$$\left\{\frac{d^i\Omega(\xi,t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1}$$

の中の t^n の係数を求める必要がある. 式 (14) によって, それは積

$$\frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-j)}{1\cdot\ 2\cdots\ j}\cdot\frac{1\cdot 2\ \cdots\ i\ p^{i-j}\ (\delta q)^j t^i}{(1-t)^{i-j+1}(1-\delta t)^j}$$

に分解される.

分数

$$\frac{t^i}{(1-t)^{i-j+1}(1-\delta t)^j}$$

を t の昇ベキの順に展開すれば, この級数における t^n の係数は和

$$\frac{(n-j)(n-j-1)\ \cdots\ (n-i+1)}{1\cdot 2\ \cdots\ (i-j)} + j\delta\frac{(n-j-1)(n-j-2)\ \cdots\ (n-i)}{1\cdot 2\ \cdots\ (i-j))}$$

$$+\frac{j((j+1)}{1\cdot 2}\delta^2\frac{n-j-2)(n-j-3)\ \cdots\ (n-i-1)}{1\cdot 2\ \cdots\ (i-j)}+\ \cdots,$$

として求まる. これは, 0 になる項で終わらなければならない. 0 になるいくつかの項を付け加えて, 結果を変えることなく, ベキ $n-j$ までの項まで続ける. 考えている和は $n-j$ 個の項から成っているからである.

そしてこれらの項を考察して, 次の形の積

$$(n-j-\lambda)(n-j-\lambda-1)\ \cdots\ (n-i-\lambda+1)$$

に注意する. これは, n 個のベキ (0 乗から n 乗までの) の 多項式へと導く.

このことから, すべての和は

$$C_0 n^{i-j}+C_1 n^{i-j-1}+C_2 n^{i-j-2}+\ \cdots\ C_{i-j} \tag{15}$$

の形の多項式に表せる. この係数は, δ の無限級数の最初の $n-j$ 個の項の和として表せ, n とは無関係である.

$\delta^2<1$ のときには, これらの級数は一致しなければならない. δ^2 の他の値は, われわれの目的のためには除外される. なぜなら, それらは確率の限界 0 と 1 から出てしまうからである.

すべての係数

$$C_0, C_1, C_2,\ \ldots$$

から, 研究の主要な目的のためには, 最初のものだけが重要である. そのためには, 仮の式

$$1\cdot 2\ \cdots\ (i-j)C_0=(1-\delta)^{-j} \tag{16}$$

を設定する. ここでは, よく知られた $(1-\delta)^{-j}$ の無限級数の代わりに, 最初の $n-j$ 個の項を取らねばならない.

n が限りなく増大するとき, 式 (16) から容易に C_0 が近づいて行く極限値を求められる.

こうして, 考察している積

$$m(m-1)\cdots(m-i+1)$$

の数学的期待値は n 個の正のベキを持った多項式として表せる.

この多項式の係数は, δ のベキ級数ーベキが $n-1$ より大きい項は除くーから求められ, n とは無関係である. したがって, δ のベキが $n-1$ 以下の項だけが残っていることになる.

それとともに, 積

$$m(m-1)\cdots(m-i+1)$$

の数学的期待値を表す多項式が, p と q のベキが正のものだけを含み, すべての項での p, q のベキの和が i であり, p のベキは n のベキより小さくない, ということが容易にわかる.

最後に, そこから n のベキが p のベキより小さい項を除き, 残った n と p のベキが等しい部分を, 記号

$$[(m,i)]_0$$

で表せば, ここで計算したことから式[16]

$$\begin{aligned}[(m,i)]_0 = (np)^i + i(i-1)\frac{\delta q}{1-\delta}(np)^{i-1} + \frac{i(i-1)^2(i-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^2(np)^{i-2} + \cdots \\ + \frac{i(i-1)^2(i-2)^2\cdots(i-j+1)^2(i-j)}{1\cdot 2\cdots \mathrm{j}}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^j(np)^{i-j} + \cdots \qquad (17)\end{aligned}$$

を得る. ここでの右辺は δ のベキ級数に展開でき, そこでは δ のベキが $n-1$ より大きくない項だけにならなければならない, ということを思い出そう.

得られた結果は, さまざまな数 m のベキ乗の数学的期待値を求めるのに使われる. そのためには, ベキ m を, すでに考察した以下の式による積によって表せばよい.

$$\begin{aligned}m^i = m(m-1)\cdots(m-i+1) + A_{1,i}m(m-1)\cdots(m-i+2) + \cdots \\ + A_{j,i}m(m-1)\cdots(m-i+j+1) + \cdots \end{aligned}\qquad (18)$$

ここでの係数

$$A_{1,i}, A_{2,i}, \ldots, A_{i-1,1}$$

は m には無関係であり, それらの値によって完全に決定される. [17]

[16] 等式 $p+q=1$ は考慮に入れない. このことを考慮に入れると, 式 (17) において q のすべてのベキを 1 にしなければならない.

[17] 同じ係数 $A_{j,i}$ が式

$$\frac{d^i f(e^x)}{dx^i} = e^{xi}f^{(i)}(e^x) + A_{1,i}e^{(i-1)x}f^{(i-1)}(e^x) + A_{2,i}e^{(i-2)x}f^{(i-2)}(e^x) + \cdots$$

に出てくる.

係数 $A_{j,i}$ の計算には等式

$$A_{1,i} = \frac{i(i-1)}{2},\ A_{j,j} = 0,\ A_{j,i+1} = A_{j,i} + (i-j+1)A_{j-1,i} \tag{19}$$

を用いなければならない. これから順番に

$A_{1,2} = 1$

$A_{1,3} = 3,\ A_{2,3} = 1$

$A_{1,4} = 6,\ A_{2,4} = 7,\ A_{3,4} = 1$

$A_{1,5} = 10,\ A_{2,5} = 25,\ A_{3,5} = 15,\ A_{4,5} = 1$

$A_{1,6} = 15,\ A_{2,6} = 65,\ A_{3,6} = 90,\ A_{4,6} = 31,\ A_{5,6} = 1$

$A_{1,7} = 21,\ A_{2,7} = 140,\ A_{3,7} = 350,\ A_{4,7} = 301,\ A_{5,7} = 63,\ A_{6,7} = 1$

$A_{1,8} = 28,\ A_{2,8} = 266,\ A_{3,8} = 1050,\ A_{4,8} = 1701,\ A_{5,8} = 966,\ A_{6,8} = 127,\ A_{7,8} = 1$

$\cdots\cdots\cdots$ を得る.

等式 (19) から, 容易に

$$A_{i,j} = \frac{i(i-1)\cdots(i-j)}{2\cdot 4\cdots 2j}\left(i^{j-1} + \alpha i^{j-2} + \beta i^{j-3} + \cdots\right) \tag{20}$$

の形の式が成り立つことがわかる. ここで, $\alpha, \beta, \ldots$ は i には依らない.

式 (20) によって, 式 (18) には登場しない $A_{j,i}$ の値を決めることができる. すなわち, 値が式 (20) によって 0 である

$$A_{j,0}, A_{j,2}, A_{j,2}, \ldots, A_{j,j-1}, A_{j,j}$$

を導入することが重要である.

式 (18) によって,

$$m(m-1)\cdots(m-i+1)$$

の形の積に関係して, 以下のようにベキ m^i の数学的期待値を求めることができる.

ベキ m^i の数学的期待値は, n 次の多項式の数学的期待値として表すことができる.

この多項式の係数は, δ のベキ級数から求めることができ, これは数 n とは無関係である. そこでは, δ のベキは, $n-1$ より大きいものは削除されている.

この多項式では, 数 p と q のベキは正で, それらの和が i より大きくなく, p のベキが n のベキより小さくないようなものである.

最後に, そこから n のベキが p のベキより小さい項を除き, 残った n と p のベキが等しい部分を, 記号

$$[m^i]_0,$$

で表すと, 式 (17) と (18) から

$$\begin{aligned}
[m^i]_0 = (np)^i &+ A_{1,i}(np)^{i-1} + A_{2,i}(np)^{i-2} + \cdots \\
&+ \left\{ i(i-1)(np)^{i-1} + A_{1,i}(i-1)(i-2)(np)^{i-2} + \cdots \right\} \frac{\delta q}{1-\delta} \\
&+ \cdots \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{i(i-1)^2 \cdots (i-j+1)^2 (i-j)}{1 \cdot 2 \cdots j} (np)^{i-j} \\ + A_{1,i} \dfrac{(i-1)(i-2)^2 \cdots (i-j)^2 (i-j-1)}{1 \cdot 2 \cdots j} (np)^{i-j-1} \\ + \cdots \end{array} \right\} \\
&\qquad \times \left(\frac{\delta q}{1-\delta} \right)^j \\
&+ \cdots
\end{aligned} \tag{21}$$

となるが, この式 (21) は, もちろん (17) の条件と同じ意味を持つ.

§ 3. ここで話題を変えて, 差

$$m - pn$$

のさまざまなベキ乗の数学的期待値の考察に移ろう.

式

$$(m-np)^k = m^k - km^{k-1}pn + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} m^{k-2}(pn)^2 + \cdots \tag{22}$$

によって, 前の節でのことを用いることができる.

こうして,

$$(m-pn)^k$$

の数学的期待値が多項式

$$R_k^{(k)} n^k + R_{k-1}^{(k)} n^{k-1} + \cdots + R_i^{(k)} n^i + \cdots \tag{23}$$

の形に表せることが容易にわかる. ここで, 係数

$$R_k^{(k)}, R_{k-1}^{(k)}, \ldots, R_i^{(k)}, \ldots$$

は, p, q, δ の整関数で, δ のベキ級数から求まり, それは n とは無関係であって, δ のベキが $n-1$ より大きい項を除いたものである.

それとともに, 今までの計算から関数 $R_i^{(k)}$ は因数 p^i を含み, この関数における項では p と q の指数の和が k より大きくないことがわかる.

$(m-pn)^k$ の数学的期待値の多項式 (23) の形での表現への方法では, 定まった計算を辿った.

それ以上の形を求めるためには, 表現 (23) のすべての係数が, 変わらないでいることが必要である. もしも, 係数が δ のベキ級数（n とは無関係で δ のベキが $n-1$ より大きいものを除いた）から求まるという今までの条件を保ちながら, 他の方法を用いるとしても.

事象 E の生起数と同時に事象 F の生起数を考察することによって, 式 (23) での $(m-pn)^k$ の数学的期待値の表現による別な方向に移ろう.

E から F への移行を行うには, ただ m の代わりに $n-m$ をとり, 式 (4) によって, p を q に, そして逆に q を p に置き換えればよい.

こうして, 差

$$m-pn$$

と共に差

$$n-m-qn$$

を得る. これは $m-pn$ と符号 $\pm$ が違うだけである. なぜなら, これらの和が 0 だからである.

したがって, これらの差の偶数のベキ乗は同一であり, 奇数のベキ乗では符号が異なる.

これから, k が偶数ならば, ここで求めた

$$(m-pn)^k$$

のベキ乗の数学的期待値の表現は, p, q を入れ替えても変更なしに使える. k が奇数のときには, この表現の符号を替えるだけでよい.

計算の方法を替えても表現式 (23) は影響されないという注意によって, p, q の入れ替えにさいして, 関数 $R_i^{(k)}$ は, k が偶数ならば変更なく, 奇数ならば符号を替えるだけでよい, ということがわかる.

したがって, 関数 $R_i^{(k)}$ において因数 p^i があれば, この関数は因数 q^i を明白な形で, または, 等式 $p+q=1$ にもとづくものによる形で, 含まねばならないということがわかる.

したがって, 関数 $R_i^{(k)}$ が 0 にならないのならば, それは p と q のベキの和が $2i$ より小さくない項を含まねばならない.

$R_i(k)$ が 0 にならないとすると, 証明されたことから $R_i^{(k)}$ は, p と q のベキの和が k より大きくなければ,

$$2i \leqq k \tag{24}$$

でなければならない.

不等式 (24) からわかることは, (23) においては

$$(m-pn)^k$$

の数学的期待値に対しては, そのベキは $\dfrac{k}{2}$ を越えるが, n ではないだろう. したがって, 奇数の $k=2l-1$ では,

$$R_{2l-1}^{(2l-1)} = R_{2l-2}^{(2l-1)} = \cdots = R_l^{(2l-1)} = 0$$

でなければならないし, 偶数の $k=2l$ では

$$R_{2l}^{(2l)} = R_{2l-1}^{(2l)} = \cdots = R_{l+1}^{(2l)} = 0$$

でなければならない. これから,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big(\frac{m-np}{\sqrt{n}}\Big)^{2l-1} = 0, \tag{25}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big(\frac{m-np}{\sqrt{n}}\Big)^{2l} = \lim_{n\to\infty} R_l^{(2l)}. \tag{26}$$

この $R_l^{(2l)}$ は今までの議論から次のような和の形で表せる.

$$a_0p^l + a_1p^lq + a_2p^lq^2 + \cdots + a_{l-1}p^lq^{l-1} + a_lp^lq^l$$

$$+b_0p^{l+1} + b_1p^{l+1}q + b_2p^{l+1}q^2 + \cdots + b_{l-1}p^{l+1}q^{l-1} + \cdots$$

ここで, 係数は p, q には依らない.

この和の１行目

$$a_0p^l + a_1p^lq + a_2p^lq^2 + \cdots + a_{l-1}p^lq^{l-1} + a_lp^lq^l$$

は容易に決定でき, それを用いてこれが p と q の入れ替えによっても変わらないことがわかる.

実際, 因数

$$(1-p)^l, (1-p)^{l-1}, \cdots 1-p, 1$$

を付け加えて, 和

$$a_0p^l + a_1p^lq + a_2p^lq^2 + \cdots + a_{l-1}p^lq^{l-1} + a_lp^lq^l$$

から,

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_l)p^lq^l$$

に等しい和

$$S = a_0p^l(1-p)^l + a_1p^l(1-p)^{l-1}q + \cdots + a_lp^lq^l \tag{27}$$

を得る. これも p, q には依らない.

したがって p と q を入れ替えても差

$$R_l^{2l}$$

は変わらない. またこの差のなかに p^{l+1} が入っているので, それはその中に q^{l+1} が明白な形で, または $p+q=1$ に起因する形で入っているとすれば, それは p と q のベキの和が $2l$ を越えないことから不可能である.

したがって,

$$R_l^{(2l)} - S = 0$$

であるから, 式

$$R_l^{(2l)} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_l)p^lq^l \tag{28}$$

を得る. 和

$$a_0p^l + a_1p^lq + a_2p^lq^2 + \cdots + a_lp^lq^l$$

が,

$$(m-pn)^{2l}$$

の数学的期待値において, n と p が同一のベキになっている項のみを残せば, 得られる表現において n^l の係数の役割を演ずることを思いだそう.

この新しい式を記号

$$[(m-pn)^{2l}]_0$$

で表し, 前の節での記号を用いれば,

$$[(m-pn)^{2l}]_0 = [m^{2l}]_0 - \frac{2l}{1}pn[m^{2l-1}]_0 + \frac{2l(2l-1)}{1\cdot 2}[m^{2l-2}]_0 - \cdots$$

となる.

それから

$$a_0p^l + a_1p^lq + a_2p^lq^2; \cdots + a_lp^lq^l$$

の求める係数を得るためには, 表現

$$[m^{2l}]_0, [m^{2l-1}]_0, [m^{2l-2}]_0, \cdots$$

を導入することだけが残っている. そしてこれらは, 式 (21) を与え, l 乗のなかに n が入っている項を集めればよいことになる.

こうして,

$$a_0, a_1, \ldots, a_l$$

が定まった. すなわち, 次の一般式を容易に求められる.

$$\begin{aligned}
a_j : \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) = {} & \frac{(l+j)(l+j-1)^2\cdots(l+1)^2l}{j!}A_{l-j,2l} \\
& - \frac{2l}{1}\frac{(l+j-1)(l+j-2)^2\cdots l^2(l-2)}{j!} \\
& + \frac{2l(2l-1)}{1\cdot 2}\frac{(l+j-2)(l+j-3)^2\cdots 8l-1)^2(l-2)}{j!}A_{l-j,2l-2} \\
& - \cdots \\
& \pm \frac{2l(2l-1)\cdots(l+2)}{(l-1)!}\frac{j+1)j^2(j-1)^2\cdots 2^2\cdot 1}{j!}A_{l-j,l+1}
\end{aligned}$$

これから, 式 (20) を考慮して, 次を得る[18]：

$$
\begin{aligned}
a_j &= \Delta_{x=0}^{2l}\frac{(x+j-l)(x+j-l-1)^2\cdots(x-l+1)^2(x-l)}{j!}A_{l-j,x}\Big(\frac{\delta}{1-\delta}\Big)^j \\
&= \Delta^{2l}\frac{x^{2l}}{j!2\cdot4\cdots2(l-j)}\Big(\frac{\delta}{1-\delta}\Big)^j \\
&= \frac{l(l-1)\cdots(l-j+1)}{j!}1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)\Big(\frac{2\delta}{1-\delta}\Big)^j
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
a_0+a_1+a_2+\cdots+a_l = 1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)\Big(1+\frac{2\delta}{1-\delta}\Big). \tag{29}
$$

この式は, もちろん, (16) と同様に条件つきの意味をもつ. δ の無限ベキ級数は, 有限級数に置き換えられなければならない.

式 (29) によって, n が無限に大きくなるとき, 和

$$
a_0+a_1+a_2+\cdots+a_l
$$

が近づいて行く極限値を得られる. 式 (28) の注意によって,

$$
\lim_{n\to\infty}R_l^{(2l)} = 1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)\Big(\frac{1+\delta}{1-\delta}pq\Big)^l
$$

を得る. したがって,

$$
\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\Big(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\Big)^{2l} = 1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)\Big(\frac{1+\delta}{1-\delta}pq\Big)^l \tag{30}
$$

こうして,

$$
\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\Big(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\Big)^{2l-1} = 0
$$

であり, また

$$
\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\Big(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\Big)^{2l} = 1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)\Big(\frac{1+\delta}{1-\delta}pq\Big)^l
$$

である. したがって, 以上で述べたことより, 不等式

$$
np+t_1\sqrt{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}n} < m < np+t_2\sqrt{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}n}
$$

18

$$
\Delta_{x=0}^{k}f(x) = f(k)-\frac{k}{1}f(k-1)+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}f(k-2)-\cdots\pm f(0)
$$

の成り立つ確率は, n が限りなく大きくなるとき,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\ dt$$

に収束しなければならない. ここで, n は試行回数, m は事象 E が起こる回数であり,

$$p, q, t_1, t_2, \delta$$

は変化させないものとする.

§ 4 . 以上で考察した問題から, 重要な一般化ができるということに, アカデミー会員 A.M. リャプノフが私の注意を向けさせた.

すなわち, 別な条件を置くと, 各試行における事象 E の確率が不確定で, 同一の値ではなく, 試行の順番に依存するという問題を設定することができる.

このことに従って, 以下の計算において, 引き続く試行における E の確率を表す新しい量

$$p', p'', \ldots, p^{(n)} \ldots$$

を導入すると, (1) とともに, 方程式

$$p^{(n)} = p_1 p^{(n-1)} + p_2(1 - p^{(n-1)}) \tag{31}$$

を得る. これは, われわれの記号では式

$$p^{(n)} = p + (p' - p)\delta^{n-1} \tag{32}$$

になる.

こうした問題の一般化においては, p はたんに, n を無限大としたときの $p^{(n)}$ の極限値である.

そのとき, 容易にわかるが, 以前用いたすべての記号を用いることができる. すなわち, その係数が n 回の試行において事象 E が定まった回数だけ出現する確率に等しいような関数 ω_n に対して, 以前の 2 階の方程式

$$\omega_{k+2} - (p_1\xi + q_2)\omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\xi\omega_k = 0.$$

が成り立つことがわかる.

関数 $\Omega(\xi, t)$ について言えば, 一般化された問題に対しては, それは以前に得たものと分子が異なるだけである. 新しい分子を得るには, 以前の ω_1 での $p\xi + q$ の代わりに $p'\xi + q'$ とすればよい.

こうして, 一般化された問題における関数 $\Omega(\xi, t)$ の解に対しては, 次の式によって定義される関数

$$\Delta(\xi, t) = \frac{(p' - p)(\xi - 1)t}{1 - [p\xi + q + \delta(q\xi + p)]t + \delta\xi t^2} \tag{33}$$

を付け加えればよい.

関数 $\Omega(\xi, t)$ の増加とともに, すでに考察した対応する数学的期待値が増加することが容易にわかる. こうした増加は, 数学的期待値と同様の式で決まるから, 関数 $\Omega(\xi, t)$ を $\Delta(\xi, t)$ の増加に替えなければならない.

まず, 積

$$m(m-1)\cdots(m-i+1)$$

の数学的期待値の増加は, t のベキ級数の t^n の係数の $\xi = 1$ における導関数

$$\frac{d^i\Delta(\xi, t)}{d\xi^i}$$

の値によって決まる. 式 (33) によって,

$$\left[\frac{d^i\Delta(\xi, t)}{d\xi^i}\right]_{\xi=1} = \frac{i!(p' - p)t^i}{(1-t)(1-\delta t)}\left[\frac{p}{1-t} + \frac{\delta q}{1-\delta t}\right]^{i-1} \tag{34}$$

を得る.

これから, 積

$$m(m-1)\cdots(m-i+1)$$

の数学的期待値の増加は, 数学的期待値自身と同様に, 共通因数 $p' - p$ を分離することによって n のベキの多項式の形で表すことができることが容易にわかる. また, この多項式において p の次数は n より小さくなく, p と q の次数の和は $i - 1$ に等しいことがわかる.

したがって,

$$(m - pn)^k$$

の数学的期待値においても, 明らかに因数 $p' - p$ が出て来なければならないし, それを分離したとき, すべての項における p のベキは, n より小さくなく, p, q のベキの和が $k - 1$ より大きくないようになっていなければならない.

他方では, 事象 E から事象 F に替わることによって, 同時に

$$p \text{ は } q \text{ に}, q \text{ は } p \text{ に}, \quad p' \text{は } q' = 1 - p'$$

になり, また, 数学的期待値

$$\mathrm{E}(m - pn)^k$$

の増加は, 変化なしか, 符号が替わるだけとなることがわかる.

このことから, 以前と同様の議論で,

$$(m - pn)^k$$

の数学的期待値の増加は, その $n^{k/2}$ との比が, n が限りなく大きくなったとき極限値 0 を持つというような項のみを含むことが容易にわかる.

したがって, アカデミー会員 A.M. リアプノフによって示された一般化された問題は, n を限りなく大きくしていったときの数学的期待値

$$\left(\frac{m - pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l-1} \text{ と } \left(\frac{m - pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l}$$

の極限として以上で得たものと変わらない. したがって, 事象 E の出現回数の確率の極限が, 示された限界内にあるという, 以上のことは変更されることはない.

訳者あとがき—二つの論文のロシア語原論文について

二つの論文はいずれも1917年のロシア革命より10年も前に書かれたものであるが, 最初の1906年のもの(1)は, マルコフの『数論と確率論の論文選集』ソ連科学アカデミー1951年刊に入っていたので, 革命後の新しい「正字法」に変更されていたが, その１年後に書かれた(2)は革命前の古い字体である. (2)は大体判読できる程度のものだったが, 誤りがなかったとは言えない. なお, (1)の最後には Independence は大数の法則の成立の必要条件にならない. との丸山儀四郎先生による書き込みがあった.

(1) Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга

(2) Исследавание замечателаго случая зависимых испытаний （ロシア帝国科学アカデミー報告 1907, 61-80)

河野敬雄氏にはこの２つの論文だけでなく，関連文献のコピーをいろいろ送っていただいた．また,「チェビシェフの不等式」の証明についても，氏がまず考えられ，それを別な観点から宮本宗実氏が改良されたものである．また，神戸大の講義録のシリーズにこの翻訳を入れることについては神戸大の福山克司氏にはいろいろ配慮をしていただいた．これらの諸氏に感謝したい．