§0. 確率変数の御利益—序にかえて—

著者が2003年に本講義録No.13([30])として「ゲーム理論アラカルト — 確率論の立場から —」を発表してから7年余りが経過した．その序文で私の立場を次のように述べた.（以下ではこの講義録を「以前の講義録」と表現する）

「今までゲーム理論について他分野の人がいろいろ書いておられるのであるが, 数学者特に確率論を専攻する者としてもう少し別の表現, つまり確率変数を表に出した定式化もあり得るのではないか, という思いを抱き続けていたところであった.」「著者は確率論を専門とする数学者であり, ゲーム理論の専門家ではない. しかし, ゲーム理論に登場する混合戦略とは数学的には確率変数に他ならず, その場合の「期待効用」とは確率論でいう確率変数の平均に他ならない. とするならば, ゲーム理論をコルモゴロフ流の公理的確率論の立場から完全に定式化して解釈することも可能ではないか (サヴェジ流の主観確率からの解釈ではなく) , と考えたのが本講義録の基本的立場である.」

この立場は今でも変わらない．ただ残念なことに「以前の講義録」で扱った初等的なゲーム理論の範囲では強いて確率変数で表さなくても「確率とは分布のことである」，と理解してもたいした支障はおこらないケースが大部分であった．つまり確率変数の御利益が誰の目にも明らか，というわけではなかった．今回は以前から気にかかっていた2005年度ノーベル経済学賞受賞者R.J.Aumann([5], [7])の論文を読み直し，確率変数で定式化をし直した結果，彼とは異なる結論を得た(Kôno([31], [32])ので，不完備情報ゲーム，展開形ゲーム等ゲーム理論の周辺の話題と合わせて確率変数で定式化し直した結果を本講義録に再度纏めてみようと思い立った次第である．

なお，確率変数ではなく，情報構造で表現したAumannの結果との違いは定式化が異なるのだから結果が異なるのは当然だと思うか否かは読者の判断に委ねたい．少なくとも確率変数で表現したあとの確率計算は有限加法性のみを用いる極めて初等的確率計算であって直感的推論や誤解の入り込む余地はない．信じない者に御利益がないのは当然とはいえ，悪貨が良貨を駆逐する，ということがあってはなるまい．ゲーム理論の教科書でしばしば用いられている「情報構造」という言葉は多分に直感的にケースバイケースに用いられていて厳密な数学用語ではない．これに反して「確率構造」とは考察している確率変数によって決定される結合分布を指しており，数学的に厳密に取り扱うことが出来る．本講義録で扱うゲーム理論は「タイプ」や「シグナル」といった多くの補助的パラメータ空間を導入する必要がある．通常のゲーム理論の教科書ではすべて直感的説明と分布で表わされているのであるが，直感的説明では見逃されている確率構造が実は暗黙の内に仮定されている（仮定しなくてはいけない），ということが確率変数で表わしてみることによって明らかにされるのである[1]．

ところで，混合戦略を確率変数で表わすアイディアは，実は2003年当時私は知らなかったが，皮肉なことにAumann自身によって早くから提案されているのである[2]．さら

[1]たとえば，§5 不完備情報ゲームの項 (55頁) を参照されたい.

[2]Aumann(1964 [4], p.633)“ now we propose to use the random variable itself.”

に彼は本講義録でも扱う相関均衡 (correlated equilibrium) に関する 1974 年の論文 ([5]) に於いても，

"it is best to view a randomized strategy as a random variable whith values in the pure strategy space, rather than as a distribution over pure strategies."

と述べている．まさしく本講義録の基本的立場は彼の視点に追随するものなのである．であるにもかかわらず，何故に著者の研究 (Kôno [31], [32]) と彼のそれとは結果が異なるのであろうか（本文 §4 (18 頁) を参照されたい）．彼のいう random variable とは何を意味するのであろうか．ハタと気になって確率に関する彼の引用文献を見ると，Savage, L.J.(1954) "The Foundations of Statistics," があげてあるのである[3]．ここにおいて初めて我々数学者の多くが信じて採用しているコルモゴロフ流の公理的確率論と彼の「確率論」は異なるのではないか，ということに気づいたのである．数学者としての多くの確率論研究者にとっては信じ難いことかもしれないが，確率とは何か？ということに関する哲学談義はいまだに営々として続いており，科学哲学者 D. ギリースによると[4] コルモゴロフ流の公理的確率論を信じているのはもっぱら数学者だけのようなのである．彼によると

> 確率の理論には数学的側面と，その哲学的基礎付けを行おうとする側面がある．両者のコントラストは著しい．数学についてはほとんど完全と言える合意や同意がなされているのに対して，哲学に関しては非常に広範にわたる考え方の違いがあるからである．本書で後にのべる数人の例外を除いては，確率学者は，みな数学理論について同じ公理体系を認めており，何を定理とするかについて合意している．とはいえ，20 世紀においては確率の数学的計算について，少なくとも四つの異なる解釈[5]が展開され，今日でもそれぞれの信奉者がいる状態である．(「確率の哲学理論」9 頁)

我が国において，伊藤清先生が最初の著書[6] の序の中で「"確率とはルベーグ測度である" この言葉ほど確率の数学的本質を衝いたものはない」と喝破されたのは 1944 年のことである．確率を数学的に厳密に基礎づけたのはコルモゴロフの有名な論文[7](1933) であるから，数学で学位を得ている Aumann が確率論の基礎付けについての知識がなかったとは思われない．実際，彼の 1964 年の論文 ([4]) では P.R. Halmos の "Measure

[3]以後彼は確率関係の文献として絶えず Savege のこのテキストブックのみを挙げている．また他のゲーム理論の論文でも Savage のこの本しか引用されていない．

[4]D. Gillies; Philosophical Theories of Probability (2000)「確率の哲学理論」中山智香子訳．日本経済評論社 (2004)

[5]注：四つの解釈とは，論理説，主観説，頻度説，傾向説である．

[6]「確率論の基礎 」岩波書店, 1944.(現代数学叢書).

[7]Kolmogoroff, A.N. "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" Berlin, 1933. 「確率論の基礎概念 (第 2 版)」根本伸司訳．東京図書 (1975) は 1974 年発行の第 2 版からの翻訳である．なお，コルモゴロフ自身は「確率とは何か」ということに関して深い洞察をしていたように思われる．詳しくは前述の Gillies ないしシェイファー・ウォフク ([72]) を参照されたい．特にシェイファ・ウォフクによるゲーム理論的確率の基礎付けは今後どのように発展するか注目する必要がある．

Theory," Van Nostrand, 1950. という本を引用している．ただ，この本は当時の測度論の教科書としては良い本であるが，確率論特に確率過程の議論をするにはあまりよい参考文献とは言えないように思われる．mixed strategy とは純戦略集合上の確率測度のことである[8]から，純戦略の集合が非可算集合の場合は面倒な可測性の問題が生じる．彼の論文ではその可測性が議論されているのであるから，参考とすべき教科書としてはすでに当時出版され確率論および確率過程論の標準的教科書となっていた J.L. Doob の "Stochastic Processes," Wiley, 1953. を参考にすべきではなかったのであろうか．ここまで書き進んでふと気になり，彼のさらに以前の論文 (1963, [3]) を調べてみて驚いた．この論文にはちゃんと Doob の教科書と M Loève の Probability Theory (1960) が引用されていたのである．これらの教科書は当時，確率論の勉強を始める際の標準的教科書であったし，現在でもコルモゴロフ流の確率論のすべての教科書の基礎にある文献である．しかし，Aumann はどうも特に Doob の連続濃度のパラメーターを持つ確率過程の定式化に納得しなかったように思われる．1964 年から 1974 年の間に「確率とは何か」ということについて Aumann の認識にどのような "回心" が行われたのであろうか．彼は後年 (2005) ノーベル経済学賞を貰うことになるだけに気になるところである．ハーグリーブズ・ヒープとヤニス・ファロファキスの本 (1995 [25], 35 頁) には,

> 確率評価を純粋に主観的なものと見なすことによって実際にゲーム理論はますますサベッジ (1954) に依存するようになってきている．しかし，このようなゲーム理論の (「なんでもありうる」といった) 空虚な命題への変質は,道具主義的合理性の仮定に共有知識としての合理性の仮定を付け加えることによって防ぐことができると期待されている．共有知識としての合理性の仮定は，他の人の行動についての人々の主観的確信に対していくつかの制約を加えている．

とあるようにオーマンの "回心" はその後のゲーム理論の発展を大きく歪めたと思われてならない[9]．このようなゲーム理論の隘路から脱出する方法は，主観的確率と言えども公理的確率論の枠組みで数学的に厳密に定式化した後に，含意については主観的に自由に解釈すればよい，というのが本講義録の立場である．実際，ハーグリーブズ・ヒープとヤニス・ファロファキスは一方では (同書 289 頁) 進化論的安定性 (ESS) とナッシュ均衡戦略の項で「ナッシュ均衡概念は，主流派ゲーム理論の伝統的アプローチが仮定している共有知識合理性の含意として導き出されるのではない，ということである.」と指摘しているように人間が考える合理性や共有知識の仮定がゲーム理論にとって必要不可欠な

[8]本講義録では純戦略集合に値を取る確率変数と考える．確率分布であることから出発すると互いに独立な場合しか扱えないが，確率変数から出発すると独立性は仮定せずに定式化できる．詳しくは本講義録 §2 (6 頁) を読まれたい.

[9]サベージ流の主観確率と共有知識に関する泥沼の議論については，たとえば，ハーグリーブズ・ヒープとヤニス・ファロファキスの本 [25],109 頁-112 頁，2.7.3. 「ナッシュ均衡混合戦略：オーマンの弁護」の節を参照されたい．もし，あなたが不眠症に悩まされているならば Aumann-Brandenburger (1995) ([8]) あるいは Mertens-Zamir(1985)([42]) を一読してみることをお勧めする.

概念ではないことが明白になった．メイナード・スミス ([40]) によって動物行動学に導入されたESS概念の成功は，社会科学にゲーム理論を適用する場合のこのような人間的バイアスから解放しゲーム理論を自然科学に則した理論に引き戻す契機になるのではないだろうか．なお，メイナード・スミスはこの功績によって2001年度第17回基礎科学部門の京都賞を受賞した．共有知識の概念を数理モデルで表そうとしたAumannの無謀な試みはゲーム理論に計り知れない害毒を流したと思えてならない．私見によれば，共有知識の問題はゲーム理論だけの問題というより，社会科学全般（或いはヒト，もっと一般に動物の認識とコミュニケーション可能性）の問題ではないだろうか．ハーグリーブズ・ヒープとヤニス・ファロファキスの本 (1995 [25], 331 頁) には「結局，先のいくつかの章における重要な論点の一つは，ゲーム理論家は人々は共通の歴史を持たない限り，確信の収束を期待するべきではない，ということである.」と述べているが，ゲーム理論家に限ったことではないであろう．

ところで，いくつかのゲーム理論の教科書で問題にされている共有知識（common knowledge）の問題は論じている著者によって微妙に異なることに気がついた．まず，もともとのノイマン・モルゲンシュテルンの本 ([84]) では相手がどこまでゲームのルールを理解しているか？，というようなことは問題にしていない．ましてや，公表している自分の選択肢の中で実は使えない手があることをもしや相手が知っているのではなかろうか，などということはまったく考えていない．しかし，その後のゲーム理論家たちは，実際問題として徐々にこの問題に関心を持ちだしたように思われる．

Luce-Raiffa(1957 [38], p.49 3.6. Rationality and Knowledge) にはゲーム理論における 8 番目の仮定として

> viii. Each player is fully cognizant of the game in extensive form, i.e. he is fully aware of the rules of the game and the utility functions of each of the players.

があげられている．この仮定が現実にはあり得ないことは例えば囲碁将棋のことを考えてみればわかる．しかし，それを仮定するのが観念としての合理性であり，数学理論として当然の仮定である．なお，彼の場合，“knowledge” であって “common knowledge” ではないことに注意したい．つまり，彼の場合，哲学的議論とは無縁の理論としての仮定なのである．ここまでは数学者から見れば至極当たり前の前提である．ところが，後にしきりに議論されるようになる “common knowledge” はどうやら Aumann の次の論文 (1976 [6], p.1236) が最初のように思われる．この論文の冒頭にいきなり

> Two people, 1 and 2, are said to have common knowledge of an event E if both know it, 1 knows that 2 knows it, 2 knows that 1 knows is, 1 knows that 2 knows that 1 knows it, and so on.

と後に問題にされる概念が明確に述べられている．ここで an event E の中には「相手

が合理的であること」や「相手の信念」も含まれる[10].

コルモゴロフ以降の確率論の数学分野における発展は，直感的に理解されていた「確率」を厳密に公理から証明し，その確かな定理を基礎にしたより深い直観に支えられてより深い定理を証明する，という学問的探究の繰り返しによって発展してきた．たとえば今日強マルコフ性と言われている性質はマルコフ性から導かれると信じられていた．この直感は離散確率過程については正しかったが連続係数の確率過程については正しくなかった．逆にいえば，確率に関する言明では如何に直観的に明らかに感じられ，多くの人が正しいと信じていてもそれが公理から厳密に導出されない限り疑ってかかるべきである，ということでもある．直感的に正しいと専門家の間で信じられてきた事実が，結果的に正しいことが厳密に証明されたとしてもそれは次なる飛躍のための理論的基礎になるのであるから決して無意味な成果ではないはずである，という確率論学者の常識はゲーム理論の分野ではどうやら常識ではないらしい．

以上，確率論研究者の立場から少々ゲーム理論をかじってみて，分布で表現してあるところをすべて確率変数で表現すればもっと理論がすっきりと見通しがよくなるのではないか，という単純にして素朴な動機からゲーム理論のいくつかの教科書や入手可能な論文を眺めている内にゲーム理論に就いて感じたことを少々余計なこととは思いつつ，ついでに多少批判的なことも含めて書き連ねてみた．しかし，私はハーグリーブズ・ヒープとヤニス・ファロファキスの本 (1995 [25],368 頁) が

> ゲーム理論は実際に，国家のような社会的選択のための機関の起源と範囲についての，自由主義的政治理論，を検討することを可能にする．この文脈において，ゲーム理論が遭遇すると考えられた問題は，どのような社会においてもそれが自由主義的個人主義という用語に於いて考えられるならば，直面せざるをえないものである，という時宜を得た警告である，と考えることができるだろう[11].

と述べているように，ゲーム理論が現実には存在しない合理的人間や無限の共有知識を仮定した上での理論であるにしても，現実の人間社会が客観的普遍的合理性基準からどの程度に乖離しているかを共通認識として理解しようとする努力は人類共通の利益になると信じて疑わない．

本講義録では意図的に少々筆を滑らせたところがある．講義録はレフェリー付きの学術誌とは自ずから役割が違ってよいのではなかろうか，と考えた末のことである．筆者が院生のころは，伊藤清先生を始め現在確率論史に名前が残るような業績を挙げられている先輩の研究者とセミナーが終った後もいつもの喫茶店（各分野のセミナー毎に行き

[10] この概念は Aumann とは独立に Lewis, D 1969, Convention: A Philosophical Study. Combridge. Harvard University Press　にもあるようであり，basic idea は Shelling, T. 1960: The Strategy of Conflict. Harvard University Press にまで遡るらしい．Fudenberg-Tirole([15], p.543) を参照されたい．

[11] この本の日本語訳については，どこまで原文を正しく反映しているか一抹の不安を覚えるのであるが筆者の語学力でそれを確認することはできなかった．

つけの喫茶店は決まっていた．たとえば，M教授を指導者とする偏微分方程式のグループは別の喫茶店であった）に行き夜遅くまでセミナーの続きの話しから関連する話，学問一般の話しから学界，はては政治経済の話題に各種の裏話やゴシップの類までありとあらゆることを話題にしてコミュニケーションを楽しんだ．それが若い院生にとってとてもよい刺激となり，研究者としての素養になったという思いがある．ゴシップの類もそれはそれで研究者，大学人としてしてはならないことを若い院生に自覚させる反面教師の意味はあった．しかし，今日のように個人情報保護の意識が徹底してくると，ゴシップまがいのことを話題にすることは逆に憚られる雰囲気ではなかろうか．同時に時代の流れとともに，特に国立大学の法人化後は，教授も院生も忙しくなり，セミナーが終ると全員そそくさと次のスケジュールをこなすために早々に散ってゆくようになって，本講義録で時々取り上げるようなことも話題にする場所がなくなった[12]．そのために本講義録では，多少冗長ではあっても可能な限り文献と根拠，例あるいは関連する話題を多く取りあげるようにしたつもりである．読者はあくまで自己責任で自らチェックしながら取捨選択して読んでほしい．

最後になったが，本講義録は畏友福山克司氏にお願いして実現の運びとなったものであり，彼の協力と理解なしには本講義録は出版出来なかった．彼の御尽力と御配慮に衷心から感謝申し上げたい[13]．

2011 年 1 月 10 日　　河野　敬雄

e-mail: konon @ z06math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

[12]三回生の時の K 教授の講義は午前中 3 時間ぶっ通しの講義であったせいもあり，11 時頃になると毎回有名な数学者に係るいろいろな小話をされた．数学の講義内容の方は殆ど記憶にないが，小話のいくつかは極めて印象深く今でも覚えている．

[13]本講義録の一部の研究については，科研費基盤研究 (C) 課題番号:21592735(代表者：松原みゆき) の助成を受けた．

目次

§1. ゲーム理論雑感

本講義録はゲーム理論の教科書ではないから，ゲーム理論の入門書の 1 冊や 2 冊はあらかじめ読んでいる読者を想定している．しかし，著者のゲーム理論に対する考え方や用語を解説するために必要最小限度の解説をしておく．

ゲーム理論は多くの教科書でフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンによる有名な本 (1944, [84]) をその起源とみなしている．確かに，公理，定義，定理，証明といった数学の論理形式をきちんと踏んで書かれたゲーム理論の本としては最初ではないだろうか．ヒープとファロファキスの本 ([25],4 頁) ではただ単に

> ゲーム理論が誕生したのは，おそらくジョン・フォン・ノイマンとオスカー・モルゲンシュテルンによる「ゲーム理論と経済行動」が出版されたときといえるだろう（初版は 1944 年，第 2 版と第 3 版は，それぞれ 1947 年と 1953 年に出版された）．

と言っている[14]．ただし，すべての有名な理論についてもいえることであるが，どのような偉大な理論も無からいきなり生じることはない．必ず先行研究は存在する．ゲーム理論についてはノイマン自身の 1928 年 ([82]) と 1937 年 ([83]) の論文でゼロサムゲームに対する minimax theorem はすでに得られている．また，Luce-Raiffa([38], p.2, §1.2 Historical Backgrounds) によると，

> “although recently Frechet has raised a question of priority by suggesting that several papers by Borel(1953) in the early 20’ really laid the foundations of game theory.”

と述べている．現在では Borel([9],[10]) の論文がゲーム理論の教科書で引用されること

[14] なお，Luce-Raiffa([38], p.3 脚注) によると，The original edition of *Theory of Games and Economic Behavior* appeared in 1944, but the revised edition of 1947 is the more standard reference and it includes the first statement of the theory of utility. とある．しかし，私が調べた限りでは，日本語版（1953 年出版の第 3 版に基づいている）にある彼らの第 2 版 (1947) の序文には「いくつかの細かい点を除けば，第１版とまったく同じである.」とあり，本文に基本的変更はないと思われる．附録にある効用についての公理的考察等は「こまかいこと」(The second edition differs from the first in some minor respects only.) だったのかもしれない．かつ，1944 年の初版の原著を見ても Section 3 で utility については相当詳しく論じられており，“ the theory of utility” が 1947 年の第 2 版から，と思うのは誤解である．第 1 版で別の所に発表すると予告してあった効用関数に関する公理の証明が第 2 版に附録として採録されている，というのが事実である．Preface to Second Edition には “The second edition differs from the first in some minor respects only. We have carried out as complete an elimination of misprints as possible, and wish to thank several readers who have helped us in that respect. We have added an Appendix containing an axiomatic derivation of numerical utility. This subject was discussed in considerable detail, but in the main qualitatively, in Section 3. A publication of this proof in a periodical was promised in the forst edition, but we found it more convenient to add it as an Appendix. ”とあるから，基本的には附録が附け加わっただけである．公理の証明が未発表だった，という事実だけで発表年代を遅らせるのは如何かと思われる．Luce-Raiffa の書き方だと効用関数の理論は 1947 版で初めて登場した，と読んでしまう恐れがないだろうか.

はない[15].「一将功成りて万骨枯る」，という現象は学問の世界でも言えることである．特にノーベル賞が貰える分野についてはその感を強くする．たとえ本当の理由が女性をめぐる三角関係であったとしても数学がノーベル賞の対象にならなかったことは数学の正常な発展のためには良いことであったと思われてならない．

ゲーム理論はまず大別すると非協力ゲーム (non-cooperative game) と協力ゲーム (co-operative game, characteristic function game) とに分けられるが，必ずしも排他的な分類ではない．非協力ゲームをベースにした協力ゲーム，非協力ゲームの交渉問題（ナッシュプログラム）等を協力ゲームの範疇だと考えることはできる．本講義録で考察する相関均衡は非協力ゲームにプレーヤー間の協力関係を導入した概念と考えることもできる．Luce-Raiffa([38], p.89) は協力-非協力ゲームの分類を排反的に考えているようであるが[16]，限定的に情報交換をするゲームも論じられてはいる．そのようなゲームも筆者はあくまで非協力ゲームの枠内の議論だと考えている．非協力ゲームはさらに標準形ゲー

[15]ゲーム理論成立前後の歴史については鈴木編「ゲーム理論の展開」(1973,[76]) の第１章「ゲーム理論の成立まで」に詳しい．もっとも，旧約聖書のくじから説き起こし，有名なパスカル-フェルマーの往復書簡にまで言及していることについては些か首をかしげざるを得ない．彼らが論じている「偶然ゲーム」は「偶然」「不確実性」の理論である確率論の歴史にはふさわしいとしても「ゲーム理論」の古典としてはむしろ「孫子」の兵法書やマキァヴェリの『君主論』あるいはクラウゼヴィッツの『戦争論』にゲーム理論の萌芽を見る方がよいのではあるまいか．確かに彼等は確率論の発展には何ら寄与していないがゲーム理論の真髄は確率や期待値を評価することではないのである．以前の講義録の序文において筆者がすでに指摘したように，確率論の example としてしばしば登場する「硬貨投げ」とゲーム理論のもっとも簡単な例でかつ，日本で日常的に普及している「じゃんけん」とは原理的に異なるのである．なお,「じゃんけん」が今日我が国で利用されているような形で知られるようになったのは意外と新しく 19 世紀後半だそうであり，かつ興味深いことに「じゃんけん」は世界的にはあまり知られていないそうである．このあたりにも近代ゲーム理論が今ひとつ人々に受け入れられない潜在的理由があるのかもしれない．なお，鈴木 (1999, [78]) にもノイマン・モルゲンシュテルン以降のゲーム理論の発展の歴史についてのかなり詳しい記述と年代ごとのおもな論文一覧があり参考になる．ただ，彼のゲーム理論に関する多くの参考書に就いて言えることであるが，印象として彼の本は辞書的に事実を客観的に確認するにはよい参考書であるが，どうも問題意識に欠如している恨みがある．自分の論文のネタを探すには向かない本である．たとえば Luce-Raiffa(1957, [38]) の本に就いて彼は「当時 (1950 年代後半) のゲーム理論についてその意味を考察したもので，ゲーム理論の古典の１つになっています.... この本で提起された様々な問題はその後の，多くの人々によって検討され，新しい道を拓く基になっています」と極めて客観的に正しいと思われる記述があるが，どのような問題がどう検討されたのか彼自身の問題意識からの記述はない．もっとも彼はレベルの高い一般雑誌にもゲーム理論を応用して時事問題を論じた文章を発表しているからゲーム理論を我が国へ導入したパイオニアとして大いに活躍されたと思うのであるが，残念ながらゲーム理論が日本の日常生活には勿論のこと指導者，インテリ層にすら充分浸透しているとは言い難い．ゲーム理論と密接に関連すると思われる数々の単語，たとえば「駆け引き」,「値踏み」あるいは「足元を見る」といった表現はいづれもゲーム理論的には極めて意味のある重要な含意があるにもかかわらず，すべてネガティブな行動原理とみなされるような日本社会の方に原因の一端があるのではなかろうか．一方,「相手の立場にたって考える」ことは極めてポジティブな意味で語られるが，自分の立場をわきまえることが出来ないようではまともなゲーム理論を合理的に発想することは出来ない．最近の日本政府の外交感覚を眺めていると絶望的にゲーム理論の素養に欠けていても政治家になれることがわかる．長い年月外敵の侵略を受けたことのない平和な島国ではゲーム理論に必要な合理性は適応戦略としてむしろ有害だったのかもしれない．

[16]By *cooperative game* is meant a game in which the players have complete freedom of preplay communication to make joint *binding* agreements. In a *non-cooperative game* absolutely no preplay communication is permitted between the players.

ム (normal form game)（戦略形ゲーム (strategic form game) ともいう）と展開形ゲーム (extensive form game) とに分けられる[17]．ノイマン．モルゲンシュテルンの有名なゲーム理論の本 (1944, [84]) はどちらかというと協力ゲームの記述に多くの頁をさき[18]，非協力ゲームではゼロサムゲームに焦点を当てているように思われる．実際，数学的にはすべての標準形ゲームはダミーのプレーヤーを一人付け加えることによってゼロサムゲームに帰着できる．従って，想像するにノイマンはゼロサムゲームの数学的構造を明らかにすれば標準形ゲームの問題はすべて解決されたことになる，と考えたのではないだろうか[19]．

しかしながら，社会科学に標準形ゲームを適用した場合，ダミープレーヤーの役割を現実的に解釈することは難しい[20]．有名な囚人のジレンマゲームをプレーヤー3人によるゼロサムゲームに書き直してみると最初に設定した2人のプレーヤーの心理的葛藤や社会的含意は全くけし飛んでしまう．その後のゲーム理論の発展はもっぱら非協力，非ゼロサムゲームの方向であった．その際に重要な概念が Nash(1951, [55]) によって導入されたナッシュ均衡戦略の概念であり，本講義録でも中心的に議論する．当時ノイマンはすでに十分有名な数学者であり，一方のナッシュは同じ研究所の大学院生にすぎなかった[21]．しかしながら，ゲーム理論誕生50年目の節目の年である1994年にノーベル経済学賞が初めてゲーム理論の研究者，Harsanyi, Selten, Nash の3人に与えられたがそれは非協力ゲーム理論に関する業績に対してであった．

現在では多くのゲーム理論の教科書で展開形ゲームよりも標準形ゲームをより基本的ゲームであると認識しているように思われる．しかし，当初ゲームといえばチェスや囲碁

---

[17]ギボンズの教科書 ([16]) では標準形ゲームを静学ゲーム，展開形ゲームを動学ゲームとも呼んでいる．展開形ゲームはプレーをする順序つまり時間を陽に表現することができるためと思われる．本講義録では標準形ゲーム，展開形ゲーム，静学ゲーム，動学ゲームといった分類は意識しないで，ゲーム理論の最も単純で基本形と思われる標準形ゲームに基づいて，場合に依ってはそれを一般化して（たとえばベイジアンゲームがそうである）可能な限り確率変数を用いた定式化によってゲーム理論を統一的に扱いたいと考えている．

[18]岡田章氏（今井晴雄・岡田章編「ゲーム理論の新展開」(2002, [28], 212 頁) によると，ノイマン・モルゲンシュテルンの大著 ([84]) ではおよそ 2/3(400 頁) は提携形の n 人協力ゲームの分析に費やされている，とのことである．鈴木光男氏の初期の解説本 (1973, [76]) はすべて特性関数形の協力ゲームの解説に費やされている．

[19]第2章 5.2.1. ゲームを分類するときの重要な視点は，次のとおりである．(ゲームの終了時に）全プレーヤーが取得する利得の総和がつねに0であるか，あるいはそうでないか？(中略）われわれは主として零和ゲームの理論を構築するが，逆にこの理論の助けをかりれば，どのような限定もつけずにあらゆるゲームを扱うことが可能となる．もっと正確にいうと，一般 n 人ゲームは（それゆえとくに和の変動する n 人ゲームも）零和 $n+1$ 人ゲームに帰着されることが示せるのである．1巻74頁（文庫版1巻133頁-134頁）．

[20]ノイマン・モルゲンシュテルン自身は彼らのゲーム理論を社会学にも応用したいという気持ちは持っていたのではなかろうか．第1版の序文の始めに「本書は，ゲームの数学的理論の詳しい説明とその種々な適用を示したものである．(中略）経済学的問題や社会学的問題のなかで，ゲームの理論の視角から接近するのが最良であるような問題への適用である.」と述べているからである．

[21]両者はプリンストン高等数学研究所において顔を合わせている．Nash の1950年の論文 (The Bargaining Prpblem, Econometrica, 18) には von Neumann 教授と Morgenstern 教授の assistance に対して謝辞を述べている．なお，ナッシュは純粋数学者としてもすぐれた業績をあげている．

将棋，トランプゲームを想定していたせいか，展開形ゲームを基本と考え，標準形ゲームはやむを得ず簡略化したゲームだ，という感覚もあったように思われる．Luce-Raiffa(1957 [38], p.55）は

> The remainder of the chapter was devoted to the normal form of a game, which is a radical conceptual simplification of the extensive form.

と述べているからである[22]．ところが，自明な展開形ゲームに物語を付けると如何にも尤もらしいゲームだと思いこんでしまう．特に完全情報の展開形ゲームは相手がどのような選択肢を選ぶべきかが確定的に決まってしまうにも拘わらずあれこれ思い悩むのはゲームの大前提に含まれない心理的要素を持ち込むからであって，数学的構造とは無関係である．本講義録においてもまず，標準形ゲームの考察から始める．

ところで，数学的概念としての標準形ゲームと展開形ゲームの関係であるが，もし，数学的構造まで含めて完全に同形，つまり一対一対応があれば少なくとも数学的には一方のみを考察すればよいことになる．ところが，多くの教科書で数学的構造まで込めた対応関係についてあまり厳密な考察がなされていない．たとえば，クレプスの本（[35], 23 頁）では，

> どのような展開形ゲームについても，それに対応して，１つの戦略形ゲームが考えられる．その戦略形ゲームでは，実行すべき「戦略」を同時に選択する複数のプレーヤーが想定される．他方，一般に，ある与えられた戦略形ゲームに対しては，いくつかの異なった展開形ゲームを対応させることができる．

と述べるにとどまっている．さらに彼の本の 120 頁の脚注では

> 展開形ゲームはそれに対応する戦略形ゲームと同じになるのでしょうか．もしいま述べた議論について，なんらかの意味があるとすれば，この疑問に対してはノーという方が，意味がありそうです．コールバーグ-マーテンス (Kohlberg and Mertens, 1986 [29]) は，この疑問に対して答えがイエスのはずであることを雄弁に論じており,...

[22]日本ではじゃんけんゲームを一回のみ行って何かを決めれば明らかに a normal form game を行ったことになるが，欧米ではこのようなときに coin tossing で決める（このことはすでに以前の講義録の §1 で述べた）ようであるから，彼らは標準形ゲームに対してリアリティが持てなかったのかもしれない．それに対して展開形ゲームの場合は確かにリアリティーはあるのであるが，それだけにかえってプレーをしている間に本来ゲーム理論が最初に想定していない様々な感情を判断の根拠にして様々な矛盾，心理的葛藤を表す様々な物語（chain store paradox([68]), ムカデゲーム (centipede game([]Ro3),,, 等）を作り，如何にももっともらしく説明するのであるが，数学的考察を混乱させる危険性がある．数学的には，よりシンプルな場合に数学的構造をきっちりと定式化，研究してからより複雑な方向に拡張して行くのが定石である．数学的概念，構造をあいまいにしたまま社会学への適用に深入りするとどうも肝心の数学的構造を無視してしまう．囚人のジレンマゲームはゲームの構造自体は自明なゲームであることは誰にでもわかる．むしろ，何が問題なのか，とすら思うであろう．Shubik(1970, [73]) は論文の最後で次のように述べている．The paradox of the Prisoner's Dilemma will never be solved – or has already been solved-because it does not exist.

と述べている．岡田章氏の本（[58],70 頁) には展開形ゲームの純戦略と利得から戦略形ゲームが定義できること（展開形ゲームの標準化 normalization という）が述べられているが，相互関係についてははっきりとは述べてない．彼は展開形ゲームのナッシュ均衡戦略の定義を行動戦略を用いて定式化し，混合戦略によるナッシュ均衡戦略との同値性は Khun の定理 (1953 [36]) を用いて証明されるとしている．ただし，この定理が成立するのは展開形ゲームが完全記憶 (perfect recall) という性質を持っている場合だけで，通常のゲーム理論の教科書では展開形ゲームのナッシュ均衡戦略は標準形ゲームに直した時の混合戦略によるナッシュ均衡で定義している．従って，ナッシュ均衡を定義するという目的に限定すれば展開形ゲームを標準形ゲームとして取り扱うことは同値であり，従ってナッシュ均衡戦略の存在も保証される．しかし，実際の計算では展開形ゲームのナッシュ均衡戦略を求めるためには混合戦略から出発するよりも行動戦略から出発する方が直感的にもわかり易いし自然な感じがする．しかしながらもともとナッシュ均衡概念にはプレーヤーの手番の順序関係は反映されていない．従って，プレーヤーの手番の順序を陽に表現している展開形ゲームの均衡概念として本当にナッシュ均衡が相応しいのかは議論の余地がある．従来からナッシュ均衡の精緻化として考えられている多くの概念は標準形ゲームにおいても定義することが出来るからそのような精緻化は必ずしも展開形ゲームにふさわしいとは思われない．展開形ゲームの場合はプレーヤーの手番の時間順序を反映した均衡概念の考察が応用上の観点からも必要である[23]．その意味で展開形ゲームをわざわざ標準形に書き直すメリットはないと言わねばならない．

展開形ゲームを標準形ゲームに直すことの現在知られている唯一のメリットは，展開形ゲームのナッシュ均衡戦略の存在証明が標準形ゲームのそれに帰着出来ることである．それ以外のメリットは殆どなくてむしろ有害であるとさえ思われる．展開形ゲームの社会学的含意はその表現の仕方，特にプレーする順番に極めて強く依存しており，それを標準形のような同時手番のゲームに直してしまうと本来の含意が完全に失われてしまう．

逆に，標準形ゲームを展開形ゲームで表現することは自明に出来るが，本来プレーする順序関係がない同時プレーである標準形ゲームを図の上で順序関係が現れる展開形ゲームに直すメリットは理論的にも感覚的にも何もない．なお，本講義録 §4 (18 頁) で扱う内生的相関均衡を議論する標準形ゲームは展開形ゲームで表現することは出来ないことを注意しておく．

いずれにしろ，標準形ゲーム，展開形ゲームという分類は排反的ではない（96 頁の §7 で定義する本質的展開形ゲームと標準形ゲームは互いに排反的である)．どちらで表現する方が直感的によりわかりやすいか，という違いはある．特に,「自然」による選択は別として，プレーヤーによるプレーに時間差があり，後手のプレーヤーの選択が先手

[23]サブゲーム完全性の概念は確かに展開形ゲーム特有の概念である．しかし，教科書に挙げてある例を見ると，もっと単純に先手が自分にとって有利な戦略を優先的に選択すればそれがサブゲーム完全均衡になっている例か，実際には実現しない範囲の選択について議論しているばかりである．

の選択に依存するようなゲームのみが真に展開形ゲームで表現する価値があるように思われる (このような展開形ゲームを §7 では本質的展開形ゲームと定義した)．数式展開をして計算可能な定式化をしようとするならば，できるだけ直感を排して論理的展開が可能な形に定式化することが望ましいことは明らかである．そのためのひとつの方法として本講義録においては確率変数に基く定式化あるいは表現を試みているのである．

§2. 標準形ゲーム

本講義録ではもっぱら 2 人ゲームを考える．形式的に n 人ゲームに拡張することは容易であるからである．しかし，展開形ゲームの場合は形式的にも応用上も含意する内容が $n = 2$ の場合と $n \geq 3$ の場合は相当に異なるので注意が必要である．以下本講義録では主体的に意思決定を行う二人のプレーヤーをプレーヤー 1，プレーヤー 2 と呼ぶことにする．それぞれのプレーヤーについて同様に扱う時はプレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ のように表わす．

次に必要なゲーム理論の概念は**戦略**である．プレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ の戦略とはプレーを行う際にプレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ が主体的に選ぶことが出来る選択肢のことである．選択可能な選択肢の全体を**純戦略セット**と呼ぶことにし，$\Theta_n\,(n = 1, 2)$ で表わす[24]．後述 (9 頁，定義 3-1) する混合戦略と区別するときには Θ_n の各要素をプレーヤー n の**純戦略**と呼ぶ．本講義録においては有限個の純戦略しか考えない[25]．各々のプレーヤーが夫々純戦略を選択すると，利得と呼ばれる一つの結果 (outcome) が伴う．各々のプレーヤーにとってその利得は実数値で表されると仮定し，各プレーヤーの**利得関数** (pay-off function) と呼び，$u_n(\theta_1,\, \theta_2)\,;\, \theta_1 \in \Theta_1,\, \theta_2 \in \Theta_2,\, (n = 1, 2)$ で表す．つまり $\Theta_1 \times \Theta_2$ 上で定義された実数値関数である[26]．

[24] §7(96 頁) の展開形ゲームの純粋戦略とはイメージが異なるから注意が必要である．ここでは標準形のゲーム理論を念頭においた説明をしている．

[25] Θ_n が可算集合の場合，確率論的には有限集合の定式化がそのまま使えるが位相的性質が異なる（コンパクト集合でなくなる）．連続集合の場合は測度論的に可測性等の面倒な議論が必要であるが，位相的性質例えばコンパクト距離空間を仮定すると本講義録の定理はそのまま成立する場合が多い．本講義録では最小限の数学的知識で理解可能であることを目指したので，扱う集合は原則として有限集合に限定した．

[26] 囲碁・将棋あるいはトランプのようないわゆるゲーム遊びのように，結果が勝ち負けで表される場合は勝ちに数字 1，負けに 0 を対応させればプレーヤーの利得を実数値で表現することができる．しかし，ゲーム理論を社会科学に適用する場合，たとえば心理学に適用する場合のようにある戦略を選択する動機が精神的満足を得ることが目的であるような場合は得られる結果を数値で表すことは不可能である．しかしながら，このような状況においても好き嫌いのような選好 (preference) さえ分かっていれば選好を数値の大小関係で表現することによってゲーム理論に乗せることはできる．その場合，利得関数の数値そのものにはさしたる意味はなく，その大小関係のみが意味を持つ．つまり順序集合に値を持つ利得関数であればよい．しかし，各個人の選好基準が異なる場合はプレーヤー 1 とプレーヤー 2 の利得を比較することは原則として出来ない．個人の感情，心理状態に強く依存する選好がどこまで数学的意味で客観合理性を備えているかについて，心理学の方面では種々議論があるようであるが，本講義録では立ち入らない．自然科学のような意味で検証できるとは思われない．実際，心理学実験では数学的合理性を満たさない例が種々知られている．個人合理性は作業仮説として公理的に扱い，得られた結果について社会学的含意を考える方が生産的と思われる．

まとめ：標準形ゲームに必要な記号．以下，有限集合 S の要素の数を $|S|$ で表す．

(1) N：プレーヤーの集合，以下，特に断らない限り $|N| = 2$ (two player game) とする．

(2) $\Theta_n\,;\, n \in N$：プレーヤー n の純戦略の全体（有限集合，純戦略セットと呼ぶ），

(3) $u_n(\theta_1, \theta_2)$：プレーヤー $n \in N$ の利得（あるいは効用）関数（$\Theta_1 \times \Theta_2$ 上で定義された実数値関数）．

これらの概念が一組準備されている時，**標準形ゲーム** (a normal form game)

$$\Gamma :=^{27} (N, \{\Theta_n\}, \{u_n\}\,;\, n \in N)$$

と記すことにする．なお，$(u_1(\theta_1, \theta_2), u_2(\theta_1, \theta_2))\,;\, \theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2$ は $|\Theta_1| \times |\Theta_2|$ 次の行列として表現できるから，以下行列表記が出てきたらこのプレーヤー 1 とプレーヤー 2 の利得関数だと思って頂きたい．行列による表記は $|N| = 2$ ということを強く用いている[28]．従って，$|N| \geq 3$ の場合の利得関数の表記についてはその都度工夫する必要がある．

プレーの原則

さて，人はどのような方針に基づいてゲームをするのであろうか．いわゆるゲーム遊びの場合はゲームに勝つことを目指してプレーを行う[29]，通常のゲーム遊びと違って勝ち負けを競わないいわば駆け引きのようなゲームはどのような原則に従って行われると考えられるだろうか．数学的に定式化されたゲーム理論においては，利得（効用）は実数値で表され，人々はより大きな値の利得を求めて最善を尽くしてプレーをする，と考える（仮定する）．もうひとつ見落としてならないのはランダムネス（確率）との関係である．今，利得 a が得られる選択肢と利得 b が得られる選択肢を確率 p と 確率 $1-p$ で選ぶとするとき，得られる利得は $pa + (1-p)b$ であると考えるのは如何にももっともらしいが，利得が単なる選好を表している場合は選好を足して 2 で割るようなことができるのか，という批判はあり得る．また，混合戦略に対する利得は期待値である[30]，という仮定を置かないと数学的に解析できないことは事実であるが，一回きりのゲームにおいて混合戦略に対する期待値とは何を意味するのか，という深刻な問題はあるが，今はちょっと忘れる．これらのことを前提にして，人々は自分にとってよりましな結果を

[27] $A := B$ は A の定義式，つまり，B（内容が既知）を記号 A で表す，ということ．

[28] 選択肢の集合が有限であるような二人標準形ゲームをマトリックスゲームと呼ぶことがある．ゼロサムゲームや対称ゲームのようにプレーヤー 2 の利得関数がプレーヤー 1 の利得関数から決まる場合は通常のマトリックスで表現出来る．一般には行列の成分はプレーヤー 1 と 2 の利得をペアで表わしておけばよい．本講義録でも以下そのように表示する．

[29] 接待麻雀のように相手に勝たせることを目的にプレーする場合もあるが，その場合は利得関数の表現を変えれば定式化は可能である．もっともその場合，言うまでもなくゲーム本来の面白さ，楽しさは失われるであろう．

[30] これをノイマン・モルゲンシュテルン効用という．ノイマン・モルゲンシュテルン ([84]) は公理的に定式化している．多くのゲーム理論の教科書では暗黙の前提となっているようである．高度な数学の専門書や逆に応用数学の教科書で実数の公理を詳しく議論することはないように，最近のゲーム理論の本に於いても「効用」の測定可能性や公理的定義についてはあまり議論されていないように思われる．

得ようとしてゲームを行うと考える[31]．ここで,「よりましな」，とは期待値の意味での効用がより大きい方を人は選択することを意味し，ゲーム理論の大前提なのである．

ゲーム理論はこのように個人の利己主義を前提にするせいかどうも一般社会では評判が良くないように思われる[32]．一般社会が自己犠牲の精神や慈善に満ちた社会であるとは到底思われないが，露骨に個人的利己主義，個人合理性を前面に持ち出すと否定的反応をする人が多いようだ．しかし，誤解しないでほしいのであるが，利他主義や互恵的利己主義をゲーム理論に取り入れることは可能であり，多くの研究成果が得られている．また，身勝手な個人の集団からどうやって社会秩序が生まれるか（社会学ではホッブス問題としてよく知られている）をゲーム理論の視点から考察することも可能である[33]．なお，ゲーム理論の前提となる合理的選択は同時に相手に対しても同様の合理性と同じ知識（共有知識，common knowledge）を要求する．このようにゲーム理論は考え始めると無限に自己遡及する仮定が含まれていることになる．実際，相手がゲームのルールを知っていて合理的に判断する人間であるということを仮定しておかなければ自分の選択が合理的であるかどうかは保証されない．これらのことに関しては序ですでに批判的に解説した．ゲーム理論に関する多少とも哲学的議論については Luce-Raiffa (1957, [38]), Kreps(1990, [35]), Heap-Varoufakis (1995, [25]) を参照されたい[34]．一方，メイナード・スミスに始まる進化ゲーム理論は利得を遺伝子が子孫を残す数という極めて客観的観察可能な量で測り，結果として生き残れる戦略をよい戦略と考えることにより，合理性や共有知識を一切仮定することなくゲーム理論を数学的に展開することを可能にした．つまり，Aumann を始めとする共有知識に関する底なし沼の論議は数学的ゲーム理論とは無縁なのである．

§3. 確率変数で表現した Nash 均衡の定義

標準形ゲーム：$\Gamma = (N, \{\Theta_n\}, \{u_n\}\,;\, n \in N)$ が与えられたとき，何を議論するのであろうか．ノイマン・モルゲンシュテルンはゼロサムゲームを主に扱ったために，行動原

---

[31]合理的人間の仮定．人間はそんなに合理的でも利己的でもない，というゲーム理論に対する批判が集中している問題点の一つである．

[32]人はそんなに利己的ではない，と主張する人も民族意識あるいは国家の利害となるととたんに極めて感情的に自民族あるいは自国家中心主義に変身する人が多い．国家間の問題こそ冷静にして合理的な利己主義に基づくゲーム理論を受け入れるべきであろう．

[33]たとえば，やさしい入門書として大浦宏邦「人間行動に潜むジレンマ：自分勝手はやめられない？」化学同人 (2007)，あるいは「秩序問題と社会的ジレンマ 」(単行本) 盛山 和夫, 海野 道郎 編ハーベスト社 (1991) を参照されたい．

[34]Gilboa-Schemidler(1988), [17]) には “Common knowledge is the more revolutionary axiom, which is essentially a meta-axiom. Originally indtroduced into game theory in Aumann(1976), it may be phrased as: The axioms of logic, the axioms of game theory, the behavioristic axioms and the game itself - are all common knowledge.”(p.215) Meta-axiom とは何を意味するのかよくわからないが，数学の分野で云えば，数学基礎論と他の個別分野の違いであろうか．数学の個別分野の研究で数学基礎論から議論しなくてはいけない分野は多くないように思われる．ゲーム理論とて例外ではないと筆者には思えてならない．

理として「最悪の事態を想定してその中でベストを尽くす[35]」という基準をたて，この基準を満たす選択肢が存在するか，という問題を立てた．ゼロサムゲームの場合，混合戦略（純戦略をある確率分布に従ってランダムに選ぶ）の範囲でかつ純戦略の空間が有限集合ならば必ず存在する，という定理をノイマン（[82]) が証明した．彼はダミーのプレーヤーを一人付け加えることによってすべての標準形ゲームはゼロサムゲームに帰着されるから，これで充分であると考えたのかもしれないが，応用する上で存在しない仮想のプレーヤーを付け加えたのでは意味をなさないことが多い．つまり，ゼロサムゲームの方を一般化する方に意味があったのである．合理的なプレーヤーにとっては（おそらくノイマン自身にとっても）自明な選択肢しか存在しない，面白くもなんともないゲームである囚人のジレンマと呼ばれているゲームが 1950 年頃考案され，ゲーム理論のその後の発展に多大な貢献をしたことを考えるとノイマン・モルゲンシュテルン自身によるゲーム理論の限界は明らかである[36]．ゼロサムゲームの場合は自分にとって最悪の利得は相手にとっては最善の手であるが，一般のゲームにするとそのようなわけには行かない．そのために登場したのがナッシュによるナッシュ均衡概念である[37]．ナッシュの提唱した行動原理は,「相手が手を変えない限り自分の方が手を変えても得にならない」という戦略は何か，という基準である．この基準はゼロサムゲームの場合はミニマックス原理と一致し，非協力ゲーム一般に拡張することが出来る極めて強力な概念である．この場合，選択肢の空間がコンパクト距離空間で混合戦略の範囲まで考えると必ずナッシュ均衡戦略は存在することが証明できる[38]．本講義録においてもナッシュ均衡概念ないしそのヴァリエーションを定式化し，具体例を求めることを基本方針としている．

ここで改めて混合戦略を定義する．

定義 3-1． プレーヤー $n\,(n=1,2)$ の一つの**戦略** X_n とは，純戦略セット Θ_n に値を取る確率変数[39]のことである．特に，ある $\theta_n \in \Theta_n$ に対して $P(X_n=\theta_n)=1$ が成り立っているときは**純戦略**と云って区別する．この場合，**混合戦略**とは分布が単位分布でない分布を持つ確率変数に対して言うことになる．

---

[35]いわゆるミニマックス原理，英語表記では MaxMin となるのでマックスミニ原理，という言い方もするようである．

[36]囚人のジレンマ誕生の経緯についてはパウンドストーン ([61]) に詳しい．なお，1953 年に出版されたノイマン・モルゲンシュテルンの第三版の序文に 1944 年以降の彼らのゲーム理論における主要な発展が述べてあり，Nash の有名な 1951 年の論文も紹介してあるが囚人のジレンに関する言及はない．思うに，彼らが理論化のモデルとして物理学を念頭に置いたことがそもそもの間違いの元ではなかろうか．彼らの本の 1.2.3. 節（第１巻５頁，文庫版第１巻 35 頁）に「われわれが経済学に適用しようとしている考え方を明かにするために，物理学からいくつかの例証をあげてきたが，今後もそのようにするつもりである.」とある．

[37]Myerson(2007 年ノーベル経済学賞受賞者３人の中の一人) はナッシュ均衡概念の導入はＤＮＡの発見にも匹敵する２０世紀の成果だ (1999 [54], p.1067)，と述べているが少々オーバーだと思う．経済学が書き改められたわけではないからである．

[38]以前の講義録 §5 を参照されたい．

[39]確率変数とは予め設定した抽象確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された可測関数のことである．

なお，ここで念押しのために確認しておくが，我々は確率変数の組によって定まる確率構造だけを問題にしているのであって，確率変数あるいはそれが定義されている確率空間そのものを問題にしているわけではない．従って，確率変数 X_1, X_2 に対して，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $P(X_1 = \theta) = P(X_2 = \theta)$ が成り立っているときは，この二つの確率変数 X_1 と X_2 を同一視する，つまり，同じ分布を持つ確率変数は同一視する．しかし，これはあくまで二つの確率変数 X_1 と X_2 のそれぞれの分布しか問題にしていない場合である．同時に二つの確率変数を問題にしたらどうか．この場合，確率分布とは $P(X_1 = \theta_1, X_2 = \theta_2)$[40]が問題になる（同時分布あるいは結合分布という）．この場合，別の二つの確率変数 Y_1, Y_2 で任意の θ_1, θ_2 に対して $P(X_1 = \theta_1) = P(Y_1 = \theta_1), P(X_2 = \theta_2) = P(Y_2 = \theta_2)$ は成り立つと仮定しても，$P(X_1 = \theta_1, X_2 = \theta_2) = P(Y_1 = \theta_1, Y_2 = \theta_2)$ が成り立つとは限らない．つまり，確率論の言葉で表現すると，周辺分布が一致しても結合分布まで等しいとは限らない，ということである．しかし，二つの確率変数しか問題にしていない場合は，結合分布まで一致していれば同じ確率構造を持つとして同一視する．しかし，第三の確率変数も考慮した場合は,... 以下，同様．確率変数で表現する，ということはこのような確率構造に関する理解を前提にしていることを忘れてはならない．ただ単に分布を確率変数に置き換えているわけではない．

ここで確率変数と言っても本講義録では，有限集合に値を取る場合で，従ってその分布はいわゆる離散分布を持つ場合しか扱わないから測度論特有の可測性に関する面倒な注意はまったく必要ない．ただし，確率変数が定義されている抽象確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$[41]はどのような離散分布も実現できるくらいに十分大きいことは大前提として仮定しておく[42]．なお，しばしば有限集合上の確率分布を「確率ベクトル」と表現している文献を見かけるがこの表現は望ましくない．理由は，確率空間とベクトル空間はほとんど関係がないからである，本講義録の定式化を可算無限あるいは連続無限集合の場合に拡張することは確率論の教科書を丁寧に参照すればさして困難ではない．その際，無限次元ベクトル空間の知識は必要ない[43]．

ここで，通常のゲーム理論の教科書のように混合戦略を純戦略空間上の確率分布で表現しては何故いけないのかを説明しておく．ここのところを理解してもらわないと次節以降の定式化の意味が理解してもらえない．

プレーヤー n の一つの戦略，すなわち Θ_n に値を取る確率変数を $X_n\,(n = 1, 2)$ とす

[40] $(X_1 = \theta_1, X_2 = \theta_2)$ は $(X_1 = \theta_1)$ かつ $(X_2 = \theta_2)$ の省略形である．

[41] 確率空間の公理については確率論の教科書を参照されたい．Ω を sample space, $\mathcal{F}$ は Ω の部分集合からなる σ-代数（その要素を事象という），$A \in \mathcal{F}$ に対して $P(A)$ は事象 A の確率を表す．X が有限集合 M に値を取る確率変数であるとは $\forall m \in M$ に対して $\{\omega \in \Omega;\, X(\omega) = m\} \in \mathcal{F}$ を満たすことである．

[42] コルモゴロフの公理を満たす，というだけではたとえば Ω として集合 $\{0, 1\}$(2 つの要素のみからなる集合) を選んでしまうと，この確率空間上で定義されるすべての確率変数の分布は $p_1 + p_2 = 1$ を満たす離散分布しか表現できない．それでは困る．Kôno(2008 [31]) p.108 で “The sample space can be assumed to be rich enough, if necessary” と書いたのはこの意味である．レフェリーが理解したかどうかは定かでないが.

[43] 本講義録の確率論は大学教養課程で教える確率・統計学の講義範囲内で理解できるはずである．

る．ここで，確率変数を二つ同時に考えたことに注意してほしい．つまり，$\Theta_1\times\Theta_2$ に値を取る確率変数 (X_1, X_2) を考えたのである．よく知られているように，$\Theta_1\times\Theta_2$ に値を取る確率変数に対して $\Theta_1\times\Theta_2$ 上の確率 $P(X_1=\theta_1, X_2=\theta_2)$ [44]が一意に定まる．もちろん，Θ_n に値を取る確率変数 X_n に対しては Θ_n 上の分布 $P(X_n=\theta_n):=p_n(\theta_n)$ も一意に定義される．これらの分布を周辺分布という．$P(X_1=\theta_1, X_2=\theta_2):=p(\theta_1, \theta_2)\,;\,(\theta_1, \theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2$ は確率変数 X_1 と X_2 の同時分布（あるいは結合分布）という．これらの分布の関係は，確率の初等的計算によって容易に次のように求めることができる．

$$p_1(\theta_1)=P(X_1=\theta_1)=\sum_{\theta_2\in\Theta_2}P(X_1=\theta_1, X_2=\theta_2)=\sum_{\theta_2\in\Theta_2}p(\theta_1, \theta_2).$$

$p_2(\theta_2)$ についても同様である．ここで大切なことは周辺分布 $p_1(\theta_1)\,;\,\theta_1\in\Theta_1$ と $p_2(\theta_2)\,;\,\theta_2\in\Theta_2$ だけでは同時分布 $p(\theta_1, \theta_2)\,;\,(\theta_1, \theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2$ は一意に決めることが出来ない，ということである．最も簡単な例をあげる．$\Theta_1=\Theta_2=\{1, 2\}$ とする（２点のみからなる集合）．このとき，それぞれの周辺分布は

$$P(X_1=1)=p_1(1),\ P(X_1=2)=p_1(2)=1-p_1(1)$$

と

$$P(X_2=1)=p_2(1),\ P(X_2=2)=p_2(2)=1-p_2(1)$$

であるから，パラメーターは２個で十分である．しかし，同時分布 $p(\theta_1, \theta_2)$ の方は非負の数で，かつ確率であるという条件

$$p(1, 1)+p(1, 2)+p(2, 1)+p(2, 2)=1$$

しか拘束条件がないから，パラメーターは３個必要であるからパラメーター２個で決定することは一般には出来ない．しかし，二つの確率変数 X_1, X_2 の間に何らかの確率論的条件を課せば周辺分布から同時分布を決定することができる．そのひとつの条件がよく知られた独立性である．

以上縷々述べているが，分布という概念と確率変数が等しいわけではないことが理解されたであろうか．もちろん，分布についての議論も必要であるから記号を準備しておく．

定義 3-2. 有限集合 M[45]に値を取る二つの確率変数 X, Y[46] が分布に関して**同等**（$X\approx Y$ で表わす）であるとは，X および Y によって定義されるそれぞれの M 上の分

[44] ここで，$P(X_1=\theta_1, X_2=\theta_2)$　は正しくは $P(\omega\in\Omega\,;\,\{X_1(\omega)=\theta_1\}\cap\{X_2(\omega)=\theta_2\})$ のことであるが，確率論の習慣によって簡略に表記した．なお，$X(\omega)$ を確率変数 X の実現値という．ランダムに選ぶと云っても，一旦選んでしまえばそれはある定まった値なのである．微積分の講義でよく，関数 $f(x)$ という言い方をするが本当は正しくない．$f(x)$ とは関数 f に対して独立変数 x を与えた時の関数 f がとる値のことである．確率の正しい表現と確率論をよく理解しておかないと分布でしか表現されていないゲーム理論の教科書を正しく理解することは出来ない．

[45] 可測空間であればどんな空間でもよい．

[46] 確率変数の定義されている抽象確率空間が異なっていてもよい．

布が等しいときをいう．つまり，$\forall$[47]$m \in M,\ P(X=m)=P(Y=m)$ が成り立つことである[48]．$P(X=Y)=1 \Longrightarrow X \approx Y$ であるが，逆は真ではないからくれぐれも注意してほしい．

定義 3-3.　有限または可算集合 Θ_k[49]; $k \in N$ ($|N|=n,\ n=2,3,\ldots,<+\infty$) に値を取る確率変数の族 $\{X_k\,;\,k \in N\}$ が**独立**であるとは，$\forall k \in N,\ \forall \theta_k \in \Theta_k$ に対して

$$P(X_1=\theta_1,\ldots,X_n=\theta_n)=P(X_1=\theta_1)\times\cdots\times P(X_n=\theta_n)$$

が成り立つことである[50]．

注意 3-1.：この条件式は全体で $|\Theta_1|\times\cdots\times|\Theta_n|$ 個あるが，これ等全部は過剰な条件で実際にはもっと少ない個数の条件でよい．たとえば，$n=2,\ \Theta_1=\Theta_2=\{1,\,2\}$ の場合はただ一つの条件式

$$P(X_1=1,\,X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1)$$

のみでよい[51]

すなわち，確率変数 X_1 と X_2 が独立であることを仮定すると，同時分布は周辺分布から関係式 $p(\theta_1,\,\theta_2)=p_1(\theta_1)p_2(\theta_2)$ によって決まることがわかる．ほとんどすべてのゲーム理論の教科書[52]では各プレーヤーの混合戦略をそれぞれの確率分布で表しているから暗黙のうちに独立性を仮定していることになる．つまり，次節以降で議論するようにこの独立性の仮定をはずそうとするときに分布で混合戦略を表現していると独立性の仮定をはずすことができないのである．以上の事実を念頭に置くと，次節以降で各プレーヤーが独立に混合戦略を選ぶという仮定を外すことを含めて混合戦略一般を議論するために混合戦略は必ず確率変数で表現する方が理解しやすい，もっと踏み込んで云うならば，確率変数を用いて理解しなければならない，ということが理解されたであろう．そのためにいくつかの記号，概念を定義しておく．

---

[47]記号 $\forall$ は「すべての (for all)」，あるいは「任意の (for any)」と読む．ちなみに,「存在する (exist)」は記号 $\exists$ で表す．

[48]M が可測空間の場合は m の代わりに任意の可測集合に値を取る事象の確率が等しい，という条件となる．

[49]一般に可測空間でよい．ただし，一点を取る確率はゼロである可能性があるから条件式は任意の可測集合に値を取る確率について成り立つ必要がある．

[50]二つの確率変数の独立性の定義を一般に n 個の確率変数の独立性の定義に拡張する場合，うっかり間違えやすい（教科書でさえ間違っているものがある）ので一般的定義を与えておいた．よくある間違いは任意の二つの確率変数が独立である，とするもの（ベクトル空間の直交性との混同）と n 個の事象 $A_k\,;\,k=1,\cdots,n$ の独立性を $P(A_1\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\times\cdots\times P(A_n)$ で定義するものである（$n=2$ の場合のみ正しい）．事象の独立性は，この事象の上では 1, 外では 0 の値を対応させるいわゆる定義関数（確率変数である）で定義式を書き直して見ると間違いに気がつくであろう．

[51]確率論に慣れていない読者は自分で計算して定義 3-3 の関係式が成り立つことを確認されたい．

[52]本講義録を除く．

記号：

$\mathcal{R}(M) :=$ 有限集合 M に値を取る確率変数の全体[53].

$M = \Theta_1 \times \Theta_2$ のとき $\mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素は $\Theta_n\,(n = 1,2)$ に値を取る確率変数 $X_n\,(n = 1,2)$ のペア $(X_1,\, X_2)$ で表される．つまり，$\mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2) = \mathcal{R}(\Theta_1) \times \mathcal{R}(\Theta_2)$ である．

$\mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2) := \{(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)\,;\, X_1$ と X_2 は独立 $\}$

$\mathcal{P}(M) :=$ 有限集合 M 上の確率分布の全体．すなわち，

$$\{p(m)\}_{m\in M} \in \mathcal{P}(M) \Longleftrightarrow \text{(i) } \forall m \in M,\ p(m) \geq 0,\ \text{(ii)} \sum_{m\in M} p(m) = 1.$$

確率論でよく知られているように，M に値を取る確率変数 X に対して，$\{p(m) = P(X = m)\}_{m\in M}$ は $\mathcal{P}(M)$ の要素となる．この分布を確率変数 X の**分布**といい，μ_X で表すことにする．注意すべきことは，M に値を取る二つの確率変数 X, Y に対して $P(X = Y) = 1$ ならば明らかに $\mu_X = \mu_Y$ であるが，逆は必ずしも真ではないことである．本講義録でしつこく分布で定式化せず確率変数を用いる根拠の一つがこの事実である．分布で表現してしまうとそのことだけで大幅に数学的前提を規定してしまうのである．

X, Y の同時分布 $\mu_{X,Y}$ に対して X の分布 μ_X を $\mu_{X,Y}$ の（X に関する）**周辺分布** (marginal distribution) という（Y についても同様，二つ以上の確率変数族に対しても同様）．先に注意したように $\mu_{X,Y}$ を与えれば μ_X と μ_Y は決まるが，逆に μ_X と μ_Y を与えても $\mu_{X,Y}$ は決まらない．

$\mathcal{P}(M)$ は線形空間ではないが，その部分集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ に対して凸包 A^{cvh} が定義できることに注意する．

まず，$\mathcal{P}(M)$ の中の二つの要素 σ_1, σ_2 を考える．実数 t such that[54] $0 \leq t \leq 1$ に対して $\sigma_t(m) := t\sigma_1(m) + (1-t)\sigma_2(m)$ とおくと明らかに $\{\sigma_t(m)\}_{m\in M}$ は M 上の分布つまり，$\mathcal{P}(M)$ の要素である．一般に，$\mathcal{P}(M)$ の有限部分集合[55]$\mathcal{P}_0 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ に対して，$\mathcal{P}(M)$ の部分集合 $\mathcal{P}_0^{cvh} := \{\sum_{k=1}^n t_k\sigma_k\,;\, \forall t_k \geq 0 \text{ such that } \sum_{k=1}^n t_k = 1\}$ を $\mathcal{P}_0$ の凸包 (convex hull) を呼ぶ．

最後に一言注意しておく．考える確率変数が定義されている抽象確率空間には自由性があり，すべての結論がこの抽象確率空間に依存するように思われるかもしれないが，我々が関心を持つのはその分布であるから，考察する確率変数の族から決まる同時分布（確率構造という）が一致するような確率変数の族（定義されている抽象確率空間は異なっていても良い）は同一視する．従って，本講義録で述べる定理，補題等の命題はある確率変数の族に対して正しければ同じ確率構造を持つすべての確率変数の族に対して

[53]確率変数が定義される抽象確率空間 $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ は予めひとつ固定しておく．

[54]“A such that B” は数学の慣用句.「ある性質や条件 B を満たしている A 」，と読む.

[55]もっと一般に無限集合でよい.

も正しい[56].

定義 3-4. $\mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素 (X_1, X_2) を**戦略プロファイル**と呼ぶ.

このとき，プレーヤー n の期待利得 $\overline{u}_n(X_1, X_2)$ は

$$\overline{u}_n(X_1, X_2) = E[u_n(X_1, X_2)]$$

と表わされる[57]．ここで $E[\,\cdots\,]$ は実数値確率変数の平均を表わす慣用記号.

定義 3-5. 標準形ゲーム：$\Gamma = (N, \{\Theta_n\}, \{u_n(\theta)\}\,;\, n = 1, 2)$ において，すべての戦略プロファイル (X_1, X_2) を $\mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素に制限したゲームを**非協力ゲーム**と呼ぶ.

以上の準備をしておくと通常の標準形ゲームとそのナッシュ均衡戦略は次のように一気に定義できる.

定義 3-6. 戦略プロファイル $(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が次の２条件を満たすとき，非協力ゲーム Γ の**ナッシュ均衡戦略** (Nash equilibrium) であるという.

(i) $\forall X_1 \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ such that $(X_1, X_2^*) \in \mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2)$,

$$\overline{u}_1(X_1^*, X_2^*) \geq \overline{u}_1(X_1, X_2^*),$$

(ii) $\forall X_2 \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ such that $(X_1^*, X_2) \in \mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2)$.

$$\overline{u}_2(X_1^*, X_2^*) \geq \overline{u}_2(X_1^*, X_2).$$

この定義 3-6 の形式の均衡概念の定義はこのあと繰り返し登場するからよく理解してほしい．つまり，本講義録に於ける均衡概念の定式化はすべて本質的に定義 3-6 と同様で，唯一の違いは戦略プロファイルをどのような空間に制限するか，という違いだけなのである.

さて，確率変数でナッシュ均衡を定義すると数学的にはすっきりするが，具体的にチェック出来る計算法を示す必要がある．それが次の補題である．通常のゲーム理論の教科書ではこの補題 3-1 がナッシュ均衡戦略の定義式となっている．証明は自明である．つまり，単に確率変数で表してある定義 3-6 の条件式を分布で書き換えただけである.

補題 3-1. $X_1^* \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ の分布を $\{x_1^*(\theta_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}$，$X_2^* \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ の分布を $\{x_2^*(\theta_2)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}$ とするとき，$(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は次の２条件が成り立つことである.

[56]確率変数の取る値の空間や考察している確率変数の個数が非可算集合の場合，この注意は必ずしも正しくない．しかし，本講義録では常に有限集合しか扱わないからその心配はない.

[57]初期のゲーム理論の教科書ではノイマンーモルゲンシュテルン効用と呼んでいるようである.

(i) $\forall\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\in\mathcal{P}(\Theta_1)$,

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}u_1(\theta_1,\,\theta_2)(x_1^*(\theta_1)-x(\theta_1))x_2^*(\theta_2)\geq 0,$$

(ii) $\forall\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\in\mathcal{P}(\Theta_2)$,

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}u_2(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)(x_2^*(\theta_2)-x_2(\theta_2))\geq 0.$$

ゲーム理論における各プレーヤーは自分の期待利得を最大化しようとしてベストをつくすわけであるから，相手の戦略を想定した場合にその戦略を所与として自分の期待利得を最大にする戦略は何か，と考えるのは自然なことである．このときの戦略をその相手の戦略に対する**最適応答戦略**（best response strategy）という．最適応答戦略とナッシュ均衡戦略との関係はよく知られた次の補題で示される[58]．

補題 3-2. $X_1^*\in\mathcal{R}(\Theta_1)$ の分布を $\{x_1^*(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}$，$X_2^*\in\mathcal{R}(\Theta_2)$ の分布を $\{x_2^*(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}$ とする．

$$\Theta_1(X_2^*):=\{\theta_1\in\Theta_1\,;\,\max_{i\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}u_1(i,\,\theta_2)x_2^*(\theta_2)=\sum_{\theta_2\in\Theta_2}u_1(\theta_1,\,\theta_2)x_2^*(\theta_2)\},$$
$$\Theta_2(X_1^*):=\{\theta_2\in\Theta_2\,;\,\max_{j\in\Theta_2}\sum_{\theta_1\in\Theta_1}u_2(\theta_1,\,j)x_1^*(\theta_1)=\sum_{\theta_1\in\Theta_1}u_2(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)\}\quad \text{とおく．}$$

このとき，$(X_1^*,\,X_2^*)\in\mathcal{R}_{ind}(\Theta_1\times\Theta_2)$ がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は次の２条件が成り立つことである．

$$\text{(i) } \{\theta_1\in\Theta_1\,;\,x_1^*(\theta_1)>0\}\subset\Theta_1(X_2^*),$$
$$\text{(ii) } \{\theta_2\in\Theta_2\,;\,x_2^*(\theta_2)>0\}\subset\Theta_2(X_1^*).$$

左辺の集合は測度論の分野で分布の台 (support) と呼ばれている集合である．この補題によれば，たとえば $\{x_1^*(\theta_1)\}$ が混合戦略の場合，つまり $|\Theta_1(x_2^*)|\geq 2$ の場合，プレーヤー 1 は $\Theta_1(X_2^*)$ に台を持つ任意の純戦略や混合戦略を採用しても，定義から容易にわかるように $\{x_1^*(\theta_1)\}$ と同じ期待利得をもたらすから，何も苦労して均衡戦略を選ぶ必要はない．しかし，プレーヤー 2 が，プレーヤー 1 は $\{x_1^*(\theta_1)\}$ を取らないと見抜いてしまうと，その瞬間に $\{x_2^*(\theta_2)\}$ とは別のよりよい戦略を見つけて手を変える可能性が生じる．均衡を維持するためには合理的に考え抜き，かつ，相手の戦略を日頃から注視しておかなくてはいけない，というコストはかかるのである[59]．

[58]たとえば，Osborne and Rubinstein (1994, [59] p.33, Lemma 33.2)，以前の講義録の定理 5.4(24 頁)

[59]じゃんけんゲームの場合，相手に自分の手を予想させないためにランダムに手をだす必要があるが，ランダムにどの手を選ぶかは結構難しい問題である．面倒だからいつもパーを出すことに決めておくとこの情報を知らない相手にはよいが，そのうちに彼は初回必ずパーを出す，という情報が相手に知られてしまい必ず負けてしまう．現実の戦争のような場合は生死にかかわる．同じように見える平和戦略も攻撃能力のない平和戦略と，反撃攻撃能力のある平和戦略では相手の選択に決定的違いを生じさせる．ナッシュ均衡戦略を合理的に実現させるためにはコストがかかることを実際上は考慮すべきであろう．もちろん，人間は何処まで合理的に行動するか，について本講義録で答えを出すつもりはない．

証明．まず，補題 3-2 の (i) が成り立っていると仮定する．$\Theta_1(X_2^*)$ の定義と分布の性質から容易にわかるように，任意の $\theta_1' \in \Theta_1$ に対して

$$\begin{aligned}\max_{i\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(i,\,\theta_2)x_2^*(\theta_2) &= \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)x_2^*(\theta_2)\\ &\geq \sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1',\,\theta_2)x_2^*(\theta_2)\end{aligned}$$

が成り立つから，最後の不等式の両辺に $\{x_1(\theta_1')\}_{\theta_1'\in\Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ の要素 $x_1(\theta_1')$ を掛けて θ_1' について足し合わせる．$\sum_{\theta_1'\in\Theta_1} x_1(\theta') = 1$ だから，補題 3-1 の (i) が得られる．(ii) についても同様である．

逆に，$x_1^*(i_0) > 0$ かつ $i_0 \notin \Theta_1(X_2^*)$ を満たす $i_0 \in \Theta_1$ が存在したと仮定する．$\Theta_1(X_2^*)$ の定義から

$$\max_{i\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(i,\,\theta_2)x_2^*(\theta_2)) > \sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(i_0,\,\theta_2)x_2^*(\theta_2)$$

だから，$\Theta_1(X_2^*)$ に台を持つ任意の分布 $\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)x_2^*(\theta_2) &= \sum_{\theta_1\in\Theta_1,\theta_1\neq i_0}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)x_2^*(\theta_2)\\ &\quad + \sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(i_0,\,\theta_2)x_1^*(i_0)x_2^*(\theta_2)\\ &< \max_{i\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(i,\,\theta_2)x_2^*(\theta_2)\\ &= \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2)x_1(\theta_1)x_2^*(\theta_2)\end{aligned}$$

が成り立つ．かつ，台が異なることから $\{x_1^*(\theta_1)\} \neq \{x_1(\theta_1)\}$ であるから，これは補題 3-1 の条件 (i) が満たされないことを意味する．よって，$(X_1^*,\,X_2^*) \in \mathcal{R}_{ind}(\Theta_1\times\Theta_2)$ はナッシュ均衡戦略ではない．以上の考察によって補題 3-1 の (i) と補題 3-2 の (i) の同値性が証明された．(ii) についても同様である．(証明終り)

なお，補題 3-1 は別の表現も可能である．

補題 3-1'. $X_1^* \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ の分布を $\{x_1^*(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}$，$X_2^* \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ の分布を $\{x_2^*(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}$ とするとき，$(X_1^*,\,X_2^*) \in \mathcal{R}_{ind}(\Theta_1\times\Theta_2)$ がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである．

$$\text{(i) } \forall i\in\Theta_1,\ \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)x_2^*(\theta_2) \geq \sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(i,\,\theta_2)x_2^*(\theta_2)$$

が成り立つ．

$$\text{(ii) } \forall j\in\Theta_2,\ \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_2(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)x_2^*(\theta_2) \geq \sum_{\theta_1\in\Theta_1} u_2(\theta_1,\,j)x_1^*(\theta_1)$$

が成り立つ．

実際，補題 3-1 (i) に於いて，$i \in \Theta_1$ 毎に $x_1(i) = 1$ となる $\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ を選んでやれば補題 3-1' の (i) が得られる．逆に補題 3-1' に於いて，(i) の両辺に $\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ の要素 $x_1(\theta_1)$ を掛けて θ_1 について足し合わせれば補題 3-1 の (i) の不等式が得られる．(ii) についても同様である．

補題 3-2 についても別の表現が可能である．

補題 3-2'. $X_1^* \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ の分布を $\{x_1^*(\theta_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}$，$X_2^* \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ の分布を $\{x_2^*(\theta_2)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}$ とするとき，$(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである．

$$\text{(i) } \forall i \in \Theta_1, \forall \theta_1 \text{ such that } x_1^*(\theta_1) > 0, \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_1(\theta_1, \theta_2) x_2^*(\theta_2) \geq \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_1(i, \theta_2) x_2^*(\theta_2)$$

が成り立つ．

$$\text{(ii) } \forall j \in \Theta_2, \forall \theta_2 \text{ such that } x_2^*(\theta_2) > 0, \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} u_2(\theta_1, \theta_2) x_1^*(\theta_1) \geq \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} u_2(\theta_1, j) x_1^*(\theta_1)$$

が成り立つ．

実際，補題 3-2' (i) に於いて，$i = \theta_1$ such that $x_1^*(\theta_1) > 0$ を選べば不等号は等号でなくてはいけないことが分かる．それ以外の $i \in \Theta_1$ に対しては不等号（等号を含む）が成り立つわけであるから，補題 3-2 の (i) と同値であることが容易にわかる．(ii) についても同様である．

数学的には実質的に同じ内容でも表現の仕方が違えば違った含意，イメージが生れる．さらなる発展，拡張を考えるときどの表現ならば一般化できるかはケースバイケースであるが，とにかく多様な表現をしておくことが大切である．次の補題は実質的には補題 3-2 を書き直したものであるが，Myerson(1978 [46], Proposition 1) はこの補題を拡張して彼のいう proper equilibrium の概念を得ている．

補題 3-2". $X_1^* \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ の分布を $\{x_1^*(\theta_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}$，$X_2^* \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ の分布を $\{x_2^*(\theta_2)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}$ とするとき，$(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである．

$$\text{(i) } \exists (i, j) \in \Theta_1 \times \Theta_1 \text{ such that } \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_1(i, \theta_2) x_2^*(\theta_2) < \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_1(j, \theta_2) x_2^*(\theta_2) \Longrightarrow x_1^*(i) = 0$$

が成り立つ．

$$\text{(ii) } \exists (i, j) \in \Theta_2 \times \Theta_2 \text{ such that } \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} u_2(\theta_1, i) x_1^*(\theta_1) < \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} u_2(\theta_1, j) x_1^*(\theta_1) \Longrightarrow x_2^*(i) = 0$$

が成り立つ．

注意 3-2. 実は Moulin-Vial(1978 [45], p.203), Aumann(1987 [7], Proposition 2.3) の相関均衡の定義（あるいは Myserson 等の incentive compatibility の定義 (その定義ははっきりしている) はこの補題 3-1' や補題 3-2' の表現を同時分布に対して形式的に拡張したのではないかと推察される．少なくともよく似ている．

補題 3-1' あるいは補題 3-2' の条件式は独立性を暗黙のうちに強く利用しているから，独立性を仮定しないで結合分布のままで表現して一般の場合のナッシュ均衡戦略の定義にすることは形式的にはともかく，どうも確率論的意味が不明確であるように思われる．

ナッシュ均衡戦略の概念を，X_1^* と X_2^* の独立性の仮定を課さないで定義しようと試みる時，定義 3-6，補題 3-1, 3-1', 3-2，3-2', 3-2" の中でどの表現に着目して一般化するかは思案のしどころである．筋の悪い一般化を試みても成功しない．多くの先行研究はあくまで分布による表現に拘ったのが間違いの元である．というのは前述したように (X_1^*, X_2^*) の同時分布は周辺分布だけでは決定出来ないからである．つまり，定義 3-6 のように確率変数で表現しておくと，次節以降で示すように，ごく自然に独立性の仮定を外すことができるのである．

本節の内容は通常の非協力ゲームのナッシュ均衡戦略を単に確率変数を用いて定式化し直しただけである．しかしながら，次節のいわゆる内生的相関均衡をナッシュ均衡のごく自然な拡張として確率変数を用いて定義してみるとみごとに Aumann(1974 [5], 1987 [7])) と異なる定理が得られるのである．さらに，本講義録における外生的相関均衡を分布で表現してみると結果的に Rosenthal(1974, [62]) の定義と形式上同一であることがわかり (§4. 32 頁を参照されたい)，なおかつ Aumann(1974, [5]) に挙げてある主要な例について，彼の論文では求めていないすべての外生的相関均衡を求めることが出来るのである (26 頁を参照されたい).

§4. 2 種類の異なる相関均衡 (correlated equilibrium) の確率変数による再定式化[60]

§4-1. 内生的相関均衡 (endogenous correlated equilibruim)

非協力ゲームの枠組みでは，各プレーヤーは原則として相手も自分と同様に合理的でかつ自分の利益のみを最大化する戦略とは何か，ということを相手とのコミュニケーションなしに互いに独立に追及するという「個人合理性」を仮定するのが大前提である．しかしながら，プレーヤー間で何らかの意味でのコミュニケーションまたは協力関係を定式化することによって完全な個人合理性の仮定の下でのナッシュ均衡によって得られる期待利得よりも双方共によりよい期待利得が得られる[61]均衡を定式化する試みはゲー

[60] この節と次節は私の原著論文 ([31],[32]) の内容を一般読者向けに書き直したものである．

[61] パレート改善である，という．ホリエモンがよく口にしていた Win-Win の関係というのはパレート

ム理論が誕生した初期の段階からあった．たとえば Luce-Raiffa(1957, [38] p.91, p.94) では予めある種の約束をしておく（明日雨ならば中止，晴れならば決行，という具合に），というアイディアを述べている．この場合，約束を破ってもかえって損をする．しかし，数学的に定式化したのは Aumann(1974, [5]) が最初と思われる．ただ，この論文での相関均衡の概念は本講義録の次節で定義する外生的相関均衡の方で，本節で定義する内生的相関均衡の方は彼の 1987 年 ([7]) の論文で定義されている相関均衡に対応していると筆者は考えている（同じではない，アイディアが類似している，という意味である）．というのも彼は 1974 年の論文の定義と 1987 年の論文の定義は同値であると主張し，その後のゲーム理論の教科書でも一貫して（証明付きで）そうなっているからである[62]．本講義録の立場は一貫していて，前節で定義した古典的ナッシュ均衡戦略の定義（定義 3-6, 14 頁）を拡張してゆくことで，いわばコミュニケーションのあるナッシュ均衡，とも云うべき新しい均衡概念を自然な形で定義してゆくというものである．Luce-Raiffa のアイディアを定式化すると次節で導入する外生的相関均衡の概念が得られるのであるが，数学的な流れとして先に内生的相関均衡の方を導入する．ただ，この概念の具体的適用場面のイメージは難しく，Fudenberg-Tirole(1991, [15], p.58–p.59) でも一言 “the players receive “endogenous” correlated signals”(p.58–p.59) と述べているだけである．

数学的には単純明快で，前節における定義 3-6 の独立性を単純に外すだけのことである．Vanderschraaf (1995, [79], p.68) には折角，“The endogenous correlated equilibrium concept generalizes the Nash equilibrium concept simply by dropping the assumptions that the actions of each player’s opponents are probabilistically independent and ...” と述べているにもかかわらず結果的に我々の定式化とは異なる定義を与えている．

前置きが長くなったが，内生的相関均衡の概念は Vanderschraaf が主張するように単純に独立性の仮定を取れば次のように定義できる．

定義 4-1. 標準形ゲーム：$\Gamma := (N, \{\Theta_n\}, \{u_n(\theta)\}, n = 1, 2)$ において，すべての戦略プロファイル $(X_1, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素を取り得る場合，**内生的相関が許された非協力ゲーム**と呼ぶ[63]．

内生的相関が許された非協力ゲームのナッシュ均衡概念として内生的相関均衡が次のようにごく自然に定義できる．

改善となる戦略を互いに意識することではないだろうか．ただし，相互の利害関係に依っては裏切る方が個人的にはより高い利得が得られる可能性もあり，相手が裏切るかもしれない，というリスクの存在を否定するものではない．有名な囚人のジレンマゲームでも互いに協力しあう方が得くという Win-Win の関係は存在するが，にも拘わらず合理的に考えれば裏切られる可能性の方が高い．

[62] ごく最近発行された教科書（H.Gintis(2009, [18], p.135-p.139.) においても踏襲されているからゲーム理論のスタンダードな定理だと思われる．

[63] 非協力ゲーム，と呼ぶことに多少違和感を感じるかもしれないが，本講義録では特性関数型の提携ゲームのみを協力ゲームと呼ぶことにしたので，あくまである条件のもとでの非協力ゲームである，という考え方をする．

定義 4-2. 戦略プロファイル $(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が次の 2 条件を満たすとき，**内生的相関均衡** (endogenous correlated equilibrium) であるという．

(i) $\forall X_1 \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ such that $(X_1, X_2^*) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$,

$$E[u_1(X_1^*, X_2^*)] \geq E[u_1(X_1, X_2^*)],$$

(ii) $\forall X_2 \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ such that $(X_1^*, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$.

$$E[u_2(X_1^*, X_2^*)] \geq E[u_2(X_1^*, X_2)].$$

定義 3-6 と見比べてみれば分かるように，定義 4-2 は定義 3-6 に於ける $\mathcal{R}_{ind}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ を $\mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ に書き換えただけである．$\mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ は一番広い空間であるから，定義の中で改めて such that という必要はないのであるが，定義 3-6 との対比をはっきりさせるためにあえてそのままにしておいた．なお，定義 3-6 で定まる通常のナッシュ均衡戦略は必ずしも定義 4-2 でいうナッシュ均衡戦略にはならないことに注意されたい．実際，後の定理 4-1 で示すように，二つのナッシュ均衡概念の間には包含関係がないのみならず，定義 4-2 の意味のナッシュ均衡戦略は必ずしも存在するとは限らない[64]．先行研究のすべてのナッシュ均衡の拡張概念は通常のナッシュ均衡を含んでいるから定義 4-2 のナッシュ均衡戦略は一見自然にみえるかも知れないが先行研究には見当たらないオリジナルな定義である．

さて，定義 3-6 のナッシュ均衡戦略の具体的求め方として補題 3-1, 3-1’, 3-2, 3-2’ を得たように，定義 4-2 を分布で書き換えると次のような補題が得られる．ただ，注意すべきことは定義 3-6 では独立性を仮定していたから周辺分布さえ決めればよく周辺分布による同値な表現も容易であったが，定義 4-2 では周辺分布だけでは確率構造が決定出来ない上，(X_1^*, X_2^*), (X_1, X_2^*), (X_1^*, X_2) の分布をどのように表現するかが問題である．ここで，条件付き確率と簡単な確率の計算練習をしておく．

[64]経済学者はどうも「均衡」は常に存在しなければならない，という信念ないしトラウマを持っているような気がしてならない．従って，存在しない場合がある均衡概念は均衡とは認めない可能性がある．たとえば本講義録でも考察する ESS (66 頁) はナッシュ均衡より強い概念であるが，そのために必ずしも存在するとは限らない．進化経済学という学会は存在するが，ESS 概念はあまり経済学では定着していないように私は感じている．思うに存在証明にこだわるのは数学の一面を意識し過ぎているからではないだろうか．確かに存在しないものを議論しても仕方がない．しかし，存在しない場合がある，ということはむしろ応用上も意味がある．へたな経済学のモデルでは均衡が存在しないかもしれない，となれば積極的に個別に存在証明を与えることに積極的意味がある．一般論から均衡の存在が保証されているとそのモデルに実際上の意義があるかどうかをチェックする手掛かりが一つ失われたことになる．もうひとつ経済学者のこだわり，あるいはトラウマではないかと思われることに，解の一意性にこだわる，ということがある．これも数学の一側面で「存在と一意性」の証明が重要な場合はもちろんある．しかし，一意でなくてはならない，一意でない解は意味がない，ということを数学者が言っているわけではない．実際，非線形の微分方程式は解の存在や一意性が一般には証明されず，逆に反例が存在する場合が多々あるが，むしろ一意性が成り立たないケースの方に非線形問題の重要性と応用上も面白い例があるのではないのだろうか．

定義 4-3. 事象 B[65] が与えられたときの，事象 A の**条件付き確率** $P(A/B)$ を次の式で定義する．

$$P(A/B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

ただし，$P(B) = 0$ の場合は定義しないか，または便宜上 $P(A/B) = 0$ と約束する．

以下では次のような簡略記号を用いる：有限集合 M に値を取る確率変数 X, Y に対して，

$(X = m) := \{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) = m\},\ m \in M,$[66]
$(X = k, Y = m) := (X = k) \cap (Y = m),\ k, m \in M.$[67]

さて，条件付き確率の定義から

$$\begin{aligned} P(X = \theta_1, Y = \theta_2) &= P(X = \theta_1 / Y = \theta_2) P(Y = \theta_2) \\ &= P(Y = \theta_2 / X = \theta_1) P(X = \theta_1) \end{aligned} \tag{1}$$

と表される．つまり，同時分布は X の周辺分布と条件付き確率，または Y の周辺分布と条件付き確率のどちらを用いても表現することが出来ることに注意してほしい．

さて，定義 4-2 を分布を用いて書き直すために，まず次のように記号を定める．

$x_1^*(\theta_1) := P(X_1^* = \theta_1),\ x_2^*(\theta_2) := P(X_2^* = \theta_2),$
$x_1^*(\theta_1/\theta_2) := P(X_1^* = \theta_1 / X_2^* = \theta_2)$ ただし，$x_2^*(\theta_2) > 0$ のとき，$(:= 0\ \ x_2^*(\theta_2) = 0$ のとき，$)$
$x_2^*(\theta_2/\theta_1) := P(X_2^* = \theta_2 / X_1^* = \theta_1)$ ただし，$x_1^*(\theta_1) > 0$ のとき，$(:= 0\ \ x_1^*(\theta_1) = 0$ のとき，$)$
$x_1(\theta_1/\theta_2) := P(X_1 = \theta_1 / X_2^* = \theta_2)$ ただし，$x_2^*(\theta_2) > 0$ のとき，$(:= 0\ \ x_2^*(\theta_2) = 0$ のとき，$)$
$x_2(\theta_2/\theta_1) := P(X_2 = \theta_2 / X_1^* = \theta_1)$ ただし，$x_1^*(\theta_1) > 0$ のとき．$(:= 0\ \ x_1^*(\theta_1) = 0$ のとき．$)$

条件付き確率の関係式 (1) より

$$P(X_1^* = \theta_1,\, X_2^* = \theta_2) = x_1^*(\theta_1/\theta_2) x_2^*(\theta_2) = x_2^*(\theta_2/\theta_1) x_1^*(\theta_1),$$

かつ，$x_2^*(\theta_2) > 0$ のとき $\{x_1^*(\theta_1/\theta_2)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}$ は Θ_1 上の分布つまり，$\mathcal{P}(\Theta_1)$ の要素であり，$x_1^*(\theta_1) > 0$ のとき $\{x_2^*(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}$ は Θ_2 上の分布つまり，$\mathcal{P}(\Theta_2)$ の要素であることに注意．$\{x_1(\theta_1/\theta_2)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}$，$\{x_2(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}$ についても全く同様である[68]．

以上の準備をしておくと定義 4-2 は次のように分布を使って表現できる．

---

[65]所与の抽象確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とするとき，$\mathcal{F}$ の要素を事象という．
[66]確率変数 X は Ω から M への写像であるから，右辺は通常の数学記号である．右辺が事象，つまり $\mathcal{F}$ の要素であることは X が確率変数であるという定義と同値である．
[67]右辺が事象となるのは $\mathcal{F}$ の公理から従う．
[68]確率論についての説明が少々くどいが，確率論に慣れていない読者を想定しているためである．

補題 4-1. $(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が内生的相関均衡であるための必要十分条件は (X_1^*, X_2^*) の結合分布が次の条件を満たすことである．

(i) 任意の $\theta_2 \in \Theta_2$, $\{x_1(\theta_1/\theta_2)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して，

$$\sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_1(\theta_1, \theta_2) x_1^*(\theta_1/\theta_2) x_2^*(\theta_2) \geq \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_1(\theta_1, \theta_2) x_1(\theta_1/\theta_2) x_2^*(\theta_2)$$

が成り立つ．

(ii) 任意の $\theta_1 \in \Theta_1$, $\{x_2(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2 \in \Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して，

$$\sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_2(\theta_1, \theta_2) x_2^*(\theta_2/\theta_1) x_1^*(\theta_1) \geq \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_2(\theta_1, \theta_2) x_2(\theta_2/\theta_1) x_1^*(\theta_1)$$

が成り立つ．

ここで，補題 4-1 の条件式をよくよく眺めてみると，たとえば，(i) については θ_2 毎に自由に Θ_1 上の分布を選べるのであるから，不等式は θ_2 についての和に対してではなく，個別の θ_2 に対して成り立たなくてはいけないことが分かる．従って，より簡単な次の補題が得られる．

補題 4-2. $(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が内生的相関均衡であるための必要十分条件は (X_1^*, X_2^*) の結合分布が次の条件を満たすことである．

(i) $x_2^*(\theta_2) > 0$ であるような $\theta_2 \in \Theta_2$ に対して，

$$\forall \{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1), \quad \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} u_1(\theta_1, \theta_2) x_1^*(\theta_1/\theta_2) \geq \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} u_1(\theta_1, \theta_2) x_1(\theta_1)$$

が成り立つ．

(ii) $x_1^*(\theta_1) > 0$ であるような $\theta_1 \in \Theta_1$ に対して，

$$\forall \{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2 \in \Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2), \quad \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_2(\theta_1, \theta_2) x_2^*(\theta_2/\theta_1) \geq \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_2(\theta_1, \theta_2) x_2(\theta_2)$$

が成り立つ．

以上の準備の下で次の定理が証明できる．

定理 4-1.

$$\begin{aligned} U_1(\theta_2) &:= \{\theta_1 \in \Theta_1 \,;\, \max_{i \in \Theta_1} u_1(i, \theta_2) = u_1(\theta_1, \theta_2)\}, \\ U_2(\theta_1) &:= \{\theta_2 \in \Theta_2 \,;\, \max_{j \in \Theta_2} u_2(\theta_1, j) = u_2(\theta_1, \theta_2)\}, \\ \Theta_{pureNash} &:= \{(\theta_1, \theta_2) \,;\, \theta_1 \in U_1(\theta_2) \iff \theta_2 \in U_2(\theta_1)\}. \end{aligned}$$

とおく．定義を丁寧に書き直してみるとわかるように，集合 $\Theta_{pureNash}$ は非協力ゲームの純戦略でナッシュ均衡戦略となっている戦略プロファイルの全体である．さらに，内生的相関均衡となっている戦略プロファイル (X_1^*, X_2^*) の結合分布全体の集合を $\mathcal{D}_{endNash}(\Theta_1\times\Theta_2)$ とおく．ことのき，

$$\mathcal{D}_{endNash}(\Theta_1 \times \Theta_2) = \mathcal{P}(\Theta_{pureNash})(= \Theta_{pureNash}^{cvh})$$

が成り立つ．

系. 非協力ゲームの純戦略プロファイルの範囲でナッシュ均衡戦略が存在しないとき，内生的相関均衡は存在しない．

定理 4-1 と系の証明. まず． 任意の $\{p(\theta_1, \theta_2)\}_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_{pureNash})$ を考える．定義から $\{(\theta_1, \theta_2)\,;\, p(\theta_1, \theta_2) > 0\} \subset \Theta_{pureNash}$ であることに注意する．

ここで，$x_2^*(\theta_2) := \sum_{\theta_1\in\Theta_1} p(\theta_1, \theta_2)$，$x_1^*(\theta_1/\theta_2) := p(\theta_1, \theta_2)/x_2^*(\theta_2)$ if $x_2^*(\theta_2) > 0$, otherwise $x_1^*(\theta_1/\theta_2) := 0$ とおく．$\Theta_{pureNash}$ の定義から分かるように

$$\forall\theta_1,\ \max_{i\in\Theta_1} u_1(i, \theta_2) \geq u_1(\theta_1, \theta_2) \tag{2}$$

が成り立っている．

$x_2^*(\theta_2) > 0$ なる θ_2 に対して $\sum_{k\in U_1(\theta_2)} x_1^*(k/\theta_2) = 1$ だから，$U_1(\theta_2)$ と $\Theta_{pureNash}$ の定義から, $x_2^*(\theta_2) > 0$ なる θ_2 に対して，等式

$$\begin{aligned}
\max_{i\in\Theta_1} u_1(i, \theta_2) &= \sum_{\theta_1\in U_1(\theta_2)} (\max_{i\in U_{1j}} u_1(i, \theta_2))x_1^*(\theta_1/\theta_2) \\
&= \sum_{\theta_1\in U_1(\theta_2)} u_1(\theta_1, \theta_2)x_1^*(\theta_1/\theta_2) \\
&= \sum_{\theta_1\in\Theta_1} u_1(\theta_1, \theta_2)x_1^*(\theta_1/\theta_2).
\end{aligned} \tag{3}$$

が得られる．不等式 (2) と等式 (3) より，すべての $i \in \Theta_1$ に対して

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1} u_1(\theta_1, \theta_2)x_1^*(\theta_1/\theta_2) \geq u_1(i, \theta_2) \tag{4}$$

を得る．ここで，任意の $\{x_1(i)\}_{i\in\Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ をとり，不等式 (4) の両辺に非負の数 $x_1(i)$ を掛けて i について足し合わせる．$\sum_{i\in\Theta_1} x_1(i) = 1$ だから，結局（記号を整えて）

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1} u_1(\theta_1, \theta_2)x_1^*(\theta_1/\theta_2) \geq \sum_{\theta_1\in\Theta_1} u_1(\theta_1, \theta_2)x_1(\theta_1).$$

この不等式は補題 4-2 の (i) である．(ii) についても同様である．従って，

$$\{p(\theta_1,\,\theta_2)\}_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2}\in\mathcal{P}(\Theta_{pureNash})$$

は，ある内生的相関均衡となっている戦略プロファイル $(X_1^*,\,X_2^*)$ の結合分布である．

逆の方向を証明する．戦略プロファイル $(X_1^*,\,X_2^*)$ の結合分布を $\{p^*(\theta_1,\,\theta_2)\}_{\theta_1\in\Theta_1,\,\theta_2\in\Theta_2}$ とし，$\mathcal{P}(\Theta_{pureNash})$ の要素ではないと仮定する．
$x_1^*(\theta_1):=\sum_{\theta_2}p(\theta_1,\,\theta_2)$, $x_2^*(\theta_2):=\sum_{\theta_1}p(\theta_1,\,\theta_2)$, $x_1^*(\theta_1/\theta_2):=p^*(\theta_1,\,\theta_2)/x_2^*(\theta_2)$, $x_2^*(\theta_2/\theta_1):=p^*(\theta_1,\,\theta_2)/x_1^*(\theta_1)$ とおく．

仮定から，$\theta_{10}\in\Theta_1$, $\theta_{20}\in\Theta_2$ が存在して $p(\theta_{10},\,\theta_{20})>0$ かつ，$(\theta_{10},\,\theta_{20})\notin\Theta_{pureNash}$ である．つまり，$x_1^*(\theta_{10})>0$ と $x_2^*(\theta_{20})>0$ であって，且つ $\theta_{10}\notin U_1(\theta_{20})$ または $\theta_{20}\notin U_2(\theta_{10})$ である．

最初に $\theta_{10}\notin U_1(\theta_{20})$ を仮定しよう．$U_1(\theta_{20})$ の定義から

$$\max_{i\in\Theta_1}u_1(i,\,\theta_{20})>u_1(\theta_{10},\,\theta_{20}) \tag{5}$$

だから，

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}u_1(\theta_1,\,\theta_{20})x_1^*(\theta_1/\theta_{20})<\sum_{\theta_1\in\Theta_1,\,\theta_1\neq\theta_{10}}u_1(\theta_1,\,\theta_{20})x_1^*(\theta_1/\theta_{20})+\max_{i\in\Theta_1}u_1(i,\,\theta_{20})x_1^*(\theta_{10}/\theta_{20}). \tag{6}$$

ここで，$\max_{i\in\Theta_1}u_1(i,\,\theta_{20})=u_1(\theta_{11},\,\theta_{20})$ となる θ_{11} を選ぶ（有限集合しか考えていないから max は常に存在する．このあたりを無限集合の場合に拡張するときは仮定が必要である）．Θ_1 上の新しい分布 $\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}$ を次のように定義する．

$x_1(\theta_{11}):=x_1^*(\theta_{11}/\theta_{20})+x_1^*(\theta_{10}/\theta_{20})$, $x_1(\theta_{10}):=0$, $x_1(\theta_1):=x_1^*(\theta_1/\theta_{20})\,;\,\theta_1\neq\theta_{10},\,\theta_{11}$.

不等式 (6) から明らかなように

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}u_1(\theta_1,\,\theta_{20})x_1^*(\theta_1/\theta_{20})<\sum_{\theta_1\in\Theta_1}u_1(\theta_1,\,\theta_{20})x_1(\theta_1)$$

が成り立つから，補題 4-2 の (i) が満たされない，つまり，$(X_1^*,\,X_2^*)$ は内生的相関均衡ではない．

次に $\theta_{20}\notin U_2(\theta_{10})$ を仮定しよう．$U_2(\theta_{10})$ の定義から，

$$\max_{j\in\Theta_2}u_2(\theta_{10},\,j)>u_2(\theta_{10},\,\theta_{20}) \tag{7}$$

だから，

$$\sum_{\theta_2\in\Theta_2}u_2(\theta_{10},\,\theta_2)x_2^*(\theta_2/\theta_{10})<\sum_{\theta_2\in\Theta_2,\,\theta_2\neq\theta_{20}}u_2(\theta_{10},\,\theta_2)x_2^*(\theta_2/\theta_{10})+\max_{j\in\Theta_2}u_2(\theta_{10},\,j)x_2^*(\theta_{20}/\theta_{10}). \tag{8}$$

ここで，$\max_{j\in\Theta_2}u_2(\theta_{10},\,j)=u_2(\theta_{10},\,\theta_{21})$ となる θ_{21} を選ぶ．Θ_2 上の新しい分布 $\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}$ を次のように定義する．

$x_2(\theta_{21}) := x_2^*(\theta_{21}/\theta_{10}) + x_2^*(\theta_{20}/\theta_{10}),\ x_2(\theta_{20}) := 0,\ x_2(\theta_2) := x_2^*(\theta_2/\theta_{10})\,;\ \theta_2 \neq \theta_{20},\ \theta_{21}$. 不等式 (8) から明らかなように

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1} u_2(\theta_{10},\, \theta_2)x_2^*(\theta_2/\theta_{10}) < \sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_2(\theta_{10},\, \theta_2)x_2(\theta_2)$$

が成り立つから，補題 4-2 の (ii) が満たされない，つまり，$(X_1^*,\, X_2^*)$ は内生的相関均衡ではない．

以上の論証は $\Theta_{pureNash}$ が空集合の場合も正しいから系も同時に証明されている．(証明終り)

♠ **Examples.**

（例 4-1.）Fudenberg-Tirole のテキストブック ([15], p.54) にある example について，我々の意味の内生的相関均衡を求めてみる．選択肢の集合は最も簡単な２点集合である．すなわち，$\Theta_1 = \Theta_2 = \{1,\, 2\}$ とする．カッコ内の数値は左側がプレーヤー１の利得，右側がプレーヤー２の利得を表す．

プレーヤー 2

プレーヤー 1		1	2
	1	(5, 1)	(0, 0)
	2	(4, 4)	(1, 5)

Table 4-1

この非協力ゲームのナッシュ均衡戦略は３つあり，$\Theta_1 \times \Theta_2$ 上の分布で表わすと

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

である．ここで，2×2 行列 (p_{ij}) は $p_{ij} := P(X_1^* = i,\, X_2^* = j)$ （$(X_1^*,\, X_2^*)$ はナッシュ均衡戦略）を表す．非協力ゲームでは X_1^* と X_2^* が独立だから通常の教科書では X_1^* と X_2^* の各周辺分布で表現するのが一般的である，しかし，相関均衡概念ではこの独立性がないから分布は必ず結合分布で表現しなくてはいけない．そのために非協力ゲームの場合も意図的に結合分布で表現した．たとえば σ_3 は $P(X_1^* = i) = 1/2,\, i = 1, 2$, $P(X_2^* = j) = 1/2,\, j = 1, 2$ と書くのが普通である．

結合分布を見た時にそれが周辺分布の積で表されるかどうか（独立であるかどうか）については，線形代数の知識から次の命題が容易に証明できる．

注意 4-1. $X \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ と $Y \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ が独立であるための必要十分条件は結合分布 $\{p_{ij} := P(X = i,\, Y = j)\}_{i\in\Theta_1, j\in\Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が作る行列 (p_{ij}) のランク (rank) が 1 となることである．特に 2×2 行列の場合（$|\Theta_1| = |\Theta_2| = 2$ の場合）は行列式がゼロで

あることと同値である．

一方，ナッシュ均衡戦略ではない内生的相関均衡の結合分布の全体は定理 4-1 によって次のように表される．

$$\{\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1-z \end{pmatrix} = z\sigma_1 + (1-z)\sigma_2\,;\ 0 < z < 1\}.$$

注意 4-1 から分かるように $0 < z < 1$ の場合，行列式はゼロではないからナッシュ均衡戦略ではない．この場合，プレーヤー 1 の期待利得は $4z + 1$, プレーヤー 2 の期待利得は $5 - 4z$ である．$P(X_1^* = 1,\, X_2^* = 1) = z$ は確率というより両者の配分割合，と理解した方がよい．両者が等しいのはもちろん，$z = 1/2$ の場合であるが，それが最善である，という内生的理由はない．この例を男女の争いゲームとみた場合，z は男性と女性の力関係で決まると考えることができるかもしれない．次節で導入する仲介者のいる外生的相関均衡の場合は仲介者がこの値を決める，と考えることができる．

（例 4-2.）二人のプレーヤーがパーかグーを出し，手が一致すればプレーヤー 1 の勝ち，一致しなければプレーヤー 2 の勝ちとなる次のような典型的なゼロサムゲームを考える．

プレーヤー 2

プレーヤー 1		1	2
	1	(1, −1)	(−1, 1)
	2	(−1, 1)	(1, −1)

Table 4-2

容易に分かるように，このゲームには純戦略の範囲ではナッシュ均衡戦略は存在しない．従って，定理 4-1 からこのゲームの内生的相関均衡は存在しない．直感的にも明らかなように，このゲームのようなゼロサムゲームにおいては事前の如何なる談合，話し合いでも妥協点が見いだせるわけがない．次節で導入する仲介者のいる外生的相関均衡の場合は，結局仲介は不成立で通常のナッシュ均衡戦略しかあり得ないということがわかる．

§4-2. 代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡 (exogenous correlated equilibrium)

「以前の講義録」の§7.「内輪付き合いをするタカ・ハトゲーム」(45 頁-49 頁) において Aumann の論文 ([5], [7]) を引用し，タカ・ハトゲームに彼のいう相関均衡を適用した計算結果を示している．その際，実際のイメージと彼の相関均衡のイメージが合わないことを指摘した．今回あらためて相関均衡を確率変数を用いて定式化してみて，そこで引用

した相関均衡の定義はこれから定式化する相関均衡とは異なることが判明した．従って，どちらの定式化がより適切であるか，という問題でもある．しかし，実は彼の相関均衡の定義は2種類あって (Aumann 1974, [5] と 1987, [7])，それらの定義が同値であることを主張している ([7])．その結果はFudenberg-Tirole (1991) のテキストでも踏襲されているが残念ながら原論文同様に証明は数学的に見て厳密とは言えない．本講義録では前節で定義した内生的相関均衡と本節で定義する外生的相関均衡を導入する (Kôno, [31], [32]) が，それぞれ Aumann の 1974 年の論文と 1987 年の論文でいう correlated equilibrium に見掛け上対応していて，それらは同値でないことが証明される．従って，Aumann 以降多くの人々が採用している相関均衡の定義と本講義録の定義とどちらが適切な定義であるのかはもっと真剣に検討されてよいと思うのである．結果としていずれかの定義が不適切ないし間違いであるにせよ，自らの頭で納得しないまま権威を信じる態度からは学問の進展は望めないであろう．なお，Aumann 以降の相関均衡の定義は，Rosenthal (1974, [62]) を除いてほとんど Aumann の定義を踏襲している．それらの関係についてはkôno([31]) の§7 を参照されたい．

なお，内生的相関均衡の項ですでに指摘したように，本節で取り上げる外生的相関均衡のアイディアは Luce-Raiffa(1957, [38] p.91, p.94) にまでさかのぼることができるが，数学的に定式化したのは Aumann(1974, [5]) が最初と思われる．

例を示す．

（例 4-3.）両性の争いと呼ばれている次のような二人非協力ゲームを考える．

プレーヤー 2

プレーヤー 1		1	2
	1	(2, 1)	(0, 0)
	2	(0, 0)	(1, 2)

Table 4-3

この例の非協力ゲームナッシュ均衡戦略は3つあり，例 1 と同様に結合分布で表わすと

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 2/9 & 4/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

であり，期待利得はそれぞれ $(2,1)$, $(1,2)$, $(2/3,2/3)$ である．外部の助けやあ・うんの呼吸なしにこれら3つのナッシュ均衡戦略の中からどうやってひとつを選ぶのが合理的であろうか．相手の選択肢が確定的に分からない以上は混合ナッシュ均衡戦略を選ぶべきではないだろうか[69]．ナッシュ均衡の精緻化 (refinement) という発想は複数のナッシュ

[69] クレプスの本 ([35], 33 頁）には,「特に，問題となっているゲームに複数のナッシュ均衡戦略が存在する場合は，どうでしょうか．この問題に対しては，十分に満足のいく答えはありません．言い換えれば，経済学においてゲーム理論を使うすべての分析家を満足させるような答えを示すことはできません．実際，ゲーム理論の経済学への応用に関する論争の多くは，この問題点をめぐって展開されています.」とある．同書の5章「ゲーム理論の諸問題」で種々議論されていることも参考になる．

均衡戦略の中でどのナッシュ均衡戦略がより合理的 (reasonable) であるかを問うものである．§7（96 頁) で登場する完全ベイジアン均衡はそのひとつである．これに対して Luce-Raiffa(1957, [38], pp.115-116) はこの例のゲームに対して次のように提案している．

Recall that if this game is repeated in time, it is reasonable for the players to alternate, in phase, between their first and second strategies. This yields $(2,1)$ and $(1,2)$ as alternate payoffs, and the average payoff per trial is $(3/2, 3/2)$. This expected payoff cannot be achieved in a single trial if the players randomize without any preplay communication; however, if they can communicate, then they can achieve the singe trial expectaion of $(3/2, 3/2)$ by tossing a fair coin to decide whether to choose (1,1) or $(2,2)$. Thus, by correlating their mixed strategies, which is possible with preplay communication, the players are able to enlarge their potential payoff set in this game.

ただし，Aumann の論文には Luce-Raiffa が引用されていない．すなわち，コインを投げて表が出たら，二人とも選択肢 1 を選び，裏が出たら選択肢 2 を選ぶことを予め約束しておく．コインの代わりに晴れならば 1 を，雨ならば 2 を選択する，と約束しておいてもよい．このとき，明らかにお互いの期待利得は等しく 3/2 であり，混合戦略の 2/3 よりずっとマシである．もちろん，これは通常の非協力ゲームでは実現できない．ただし，ここでも約束を破るメリット（インセンティブ）は二人とも持たないことに注意しておく．非協力ゲーム理論では約束を破った方が自己利益に適うときは，約束を破ることを躊躇しない，という個人合理性を大前提にして論理を組み立てていることを忘れないでほしい．

このように外部の助けを借りてよりマシな期待利得が得られるような均衡概念として外生的均衡概念を導入する．Luce-Raiffa にしても Aumann にしても無機質的な補助の道具 (random device) を用いているが社会学への応用を考えて本節では代理人ないし仲介者が各プレーヤーにアドバイスをする，というイメージで説明する．数学的定式化は一通りで，後者は前者の特別な場合なのであるが，イメージが多少異なるので 2 種類のゲームとして分けて説明する．

§4-2-1. 代理人を持つ非協力ゲーム

まず，標準形ゲーム

$$\Gamma = (N, \{\Theta_n\}, \{u_n(\theta)\}\,;\, n \in N)$$

を考える．以下の定式化は $|N| \geq 3$ の場合にも容易に拡張することが出来きるから二人ゲーム ($|N| = 2$) の場合に限定して説明する．基本的アイディアは各プレーヤーが代理人に依頼して，代理人同士がある種の話し合いを持ち，それから各プレーヤーは独立に自分の代理人のアドバイスに基づいて戦略を決定する，というものである[70]．

[70] Fudenberg-Tirole (1991 [15], p.53) では “Now consider players who may engage in preplay discussion, but then go off to isolated rooms to choose their strategies.” と説明している．ただし，我々は preplay discussion は代理人が行うと考える．

記号：

Λ_n: プレーヤー $n\,(n=1,2)$ の代理人のための選択肢の集合．空でない有限集合とする．実状に合わせて決める，つまり，理論上は任意に選べる．

Z_n: Λ_n に値を取る確率変数．プレーヤー n の代理人が選択する．プレーヤー n へのアドバイスと考える．

$\mathcal{R}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$: $\Lambda_n \times \Lambda_2$ に値を取る確率変数の全体.

さて，代理人 1, 2 が選ぶ確率変数 Z_1, Z_2 を所与として，プレーヤー 1, 2 が選ぶ確率変数 X_1, X_2 に関する確率構造に対して次の仮定をおく．

仮定 (A-1): $(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ は Z_1, Z_2 に関して条件付き独立である[71]．すなわち，任意の $\theta_1 \in \Theta_1$, $\theta_2 \in \Theta_2$ と $\lambda_1 \in \Lambda_1$, $\lambda_2 \in \Lambda_2$ such that $P(Z_1=\lambda_1,\, Z_2=\lambda_2) > 0$ に対して

$$P(X_1=\theta_1,\, X_2=\theta_2/Z_1=\lambda_1,\, Z_2=\lambda_2) = P(X_1=\theta_1/Z_1=\lambda_1,\, Z_2=\lambda_2)P(X_2=\theta_2/Z_1=\lambda_1,\, Z_2=\lambda_2)$$

が成り立つ.

仮定 (A-2): プレーヤー $n\,(n=1,2)$ の戦略は彼/彼女の代理人のアドバイスのみを参考にして決める．すなわち，任意の $\theta_1 \in \Theta_1$, $\theta_2 \in \Theta_2$ と $\lambda_1 \in \Lambda_1$, $\lambda_2 \in \Lambda_2$ such that $P(Z_1=\lambda_1,\, Z_2=\lambda_2) > 0$ に対して

(i) $P(X_1=\theta_1/Z_1=\lambda_1\, Z_2=\lambda_2) = P(X_1=\theta_1/Z_1=\lambda_1)$,

(ii) $P(X_2=\theta_2/Z_1=\lambda_1\, Z_2=\lambda_2) = P(X_2=\theta_2/Z_2=\lambda_2)$.

記号：

$$\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2) :=$$

$$\{(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2) : (X_1,\, X_2)\ \text{such that 仮定 (A-1), 仮定 (A-2) (i),(ii) を満たす}\}.$$

以上のように準備をすると代理人を持つ非協力ゲームが次のように定義できる．ただし，各プレーヤーの代理人の選択 Z_1, Z_2 は所与とする．Z_1, Z_2 をそれぞれの代理人のアドバイスと呼ぶことにする．

定義 4-4. 標準形ゲーム：$\Gamma = (N,\, \{\Theta_n\},\, \{u_n(\theta)\}\,;\, n=1,2)$ のすべての戦略プロファイル $(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素が $\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素に制限されているとき，Γ を**代理人を持つ非協力ゲーム**と呼ぶ.

ナッシュ均衡概念は次のように自然に拡張できる.

[71]独立性と条件付き独立性は独立な概念である．つまり，一方から他方は導かれないことに注意.

定義 4-5. 戦略プロファイル $(X_1^*,\, X_2^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が次の 2 条件を満たすとき，代理人を持つ非協力ゲームの**外生的相関均衡** (exogenous correlated equilibrium with agents) である，という．

(i) $\forall X_1 \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ such that $(X_1,\, X_2^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$,

$$E[u_1(X_1^*,\, X_2^*)] \geq E[u_1(X_1,\, X_2^*)],$$

(ii) $\forall X_2 \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ such that $(X_1^*,\, X_2) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$.

$$E[u_2(X_1^*,\, X_2^*)] \geq E[u_2(X_1^*,\, X_2)].$$

さて，定義 4-5 を分布を用いて書き直してみよう．そのためにはまず，$(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ を結合分布で特徴づけなくてはいけない．$(Z_1,\, Z_2) \in \mathcal{R}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$ が予め与えられているから，$(X_1,\, X_2)$ の結合分布 $p(\theta_1,\, \theta_2) := P(X_1 = \theta_1,\, X_2 = \theta_2)$ は 4 つの確率変数 $(X_1,\, X_2,\, Z_1,\, Z_2)$ の確率構造から，仮定 (A-1),(A-2),(i),(ii) を用いて次のような簡単な確率計算によって定められる．ただし，$z(\lambda_1, \lambda_2) := P(Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2)$ とおく．

$$\begin{aligned}
p(\theta_1,\, \theta_2) &= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} P(X_1 = \theta_1,\, X_2 = \theta_2,\, Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2) \\
&= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} P(X_1 = \theta_1,\, X_2 = \theta_2 / Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) \\
&\quad \text{ここで仮定 (A-1) を使って} \\
&= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} P(X_1 = \theta_1 / Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2) P(X_2 = \theta_2 / Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) \\
&\quad \text{さらに仮定 (A-2) を使って} \\
&= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} P(X_1 = \theta_1 / Z_1 = \lambda_1) P(X_2 = \theta_2 / Z_2 = \lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) \\
&= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} x_1(\theta_1/\lambda_1) x_2(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2).
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで，$x_1(\theta_1/\lambda_1) := P(X_1 = \theta_1/Z_1 = \lambda_1)$ ，$x_2(\theta_2/\lambda_2) := P(X_2 = \theta_2/Z_2 = \lambda_2)$ とおいた．

この式を見ればわかる通り，$(X_1,\, X_2)$ の結合分布 $p(\theta_1,\, \theta_2)$ は Θ_1 上の分布の族 $(\{x_1(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)\,;\, \lambda_1 \in \Lambda_1)$ と Θ_2 上の分布の族 $(\{x_2(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2 \in \Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)\,;\, \lambda_2 \in \Lambda_2)$ によってそれぞれ独立に決定されることがわかる．従って，$(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ に対して，$X_1,\, X_2$ の分布をそれぞれ

$$X_1 \approx (\{x_1(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}\,;\, \lambda_1 \in \Lambda_1), \quad X_2 \approx (\{x_2(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}\,;\, \lambda_2 \in \Lambda_2)$$

で表わす．

本節の仮定 (A-1),(A-2) は本講義録で繰り返し登場するから，戦略を確率変数ではなく，仮定 (A-1),(A-2) の下で分布 $(\{x_n(\theta_n/\lambda_n)\}_{\theta_n\in\Theta_n}\,;\,\lambda_n\in\Lambda_n)$, $(n=1,2)$ で表わしたとき，プレーヤー n の**行動戦略** と呼ぶことにする．自分のタイプにかかわらず同じ戦略を取る場合，**一括戦略** (pooling strategy)，タイプ毎に異なる戦略を選ぶ場合に，**分離戦略** (separating strategy) と呼んで区別することがある．

なお，展開形ゲームで通常使われている「行動戦略」と数学的には同じ意味であるから，そこで登場する「行動戦略」と対比して理解してほしい．ただし，展開形ゲームにおいては，まず行動戦略を最初に定義し，各行動戦略において，あるひとつの選択肢を確率 1 を選ぶときの行動戦略の全体を純粋戦略と呼び，純粋戦略の全体集合上の確率分布を混合戦略と呼ぶため，本講義録の純戦略や混合行動戦略（71 頁）とは異なってくる．戦略概念はゲーム理論では基本概念のひとつであるが著者によって微妙に定義が異なる場合があるので注意してほしい．§7 (96 頁) でも解説するのでそちらも参照してほしい．なお，§7 でも解説するつもりであるが，本節のゲームを展開形ゲームで表現することのメリットはまったくない．本節の非協力ゲームを展開形ゲームで表現しても私のいうところの本質的展開形ゲームとはならないからである．

補題 4-3. $(X_1^*,\,X_2^*)\in\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1\times\Theta_2)$ が代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡であるための必要十分条件は，X_1^* の分布 $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\,;\,\lambda_1\in\Lambda_1)$ と X_2^* の分布 $(\{x_2^*(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\,\lambda_2\in\Lambda_2)$ が次の条件を満たすことである．

(i) 任意の $(\{x_1(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\in\mathcal{P}(\Theta_1),\,\lambda_1\in\Lambda_1)$ に対して，

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}u_1(\theta_1,\,\theta_2)(x_1^*(\theta_1/\lambda_1)-x_1(\theta_1/\lambda_1))x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2)\geq 0$$

が成り立つ．

(ii) 任意の $(\{x_2(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\in\mathcal{P}(\Theta_2),\,\lambda_2\in\Lambda_2)$ に対して，

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}u_2(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1(x_2^*(\theta_2/\lambda_2)-x_2(\theta_2/\lambda_2))z(\lambda_1,\lambda_2)\geq 0$$

が成り立つ．

補題 4-3 は定義 4-5 を単に分布の言葉で書き換えただけである．しかし，任意に選べる分布の族 $(\{x_1(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\;;\;\lambda_1\in\Lambda_1)$, $(\{x_2(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\;;\;\lambda_2\in\Lambda_2)$ はそれぞれ λ_1, λ_2 毎に自由に選べるのであるから，上記の不等式は (i) については各 λ_1 毎に，(ii) については各 λ_2 毎に成り立たなくてはいけない．すなわち，次の補題が成り立つ．

補題 4-3'. $(X_1^*,\,X_2^*)\in\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1\times\Theta_2)$ が代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡であるための必要十分条件は，X_1^* の分布 $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\,;\,\lambda_1\in\Lambda_1)$ と X_2^* の分

布 $(\{x_2^*(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\,\lambda_2\in\Lambda_2)$ が次の条件を満たすことである.

(i) 任意の $\lambda_1\in\Lambda_1$ と 任意の $\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\in\mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して,

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}u_1(\theta_1,\,\theta_2)(x_1^*(\theta_1/\lambda_1)-x_1(\theta_1))x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2)\geq 0$$

が成り立つ.

(ii) 任意の $\lambda_2\in\Lambda_2$ と 任意の $\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\in\mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して,

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}u_2(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)(x_2^*(\theta_2/\lambda_2)-x_2(\theta_2))z(\lambda_1,\lambda_2)\geq 0$$

が成り立つ.

注意 4-2. 補題 4-3' は実は, Rosenthal(1974 [62], p.119) の "correlated equilibrium" の定義式と一致している. 尤も彼は我々の仮定 (A-1),(A-2) を陽には述べていないから, 何が戦略なのかよくわからない. 彼の記号との対応関係を説明しておく. Rosenthal は まず, プレーヤー 1 の分割 $\{C_i\}$ と プレーヤー 2 の分割 $\{D_i\}$ を考え, 各分割上の分布をそれぞれ $\overline{x}^i/C_i$, $\overline{y}^j/D_j$ とおいている. 我々の記号とは

$$C_s=\{Z_1=s\}\,;\,s=1,\ldots,k\,;\,D_t=\{Z_2=t\}\,;\,t=1,\ldots,\ell,$$

$$\begin{aligned}(\overline{x}^1/C_1,\ldots,\overline{x}^k/C_k)&\Longleftrightarrow(\{x_1(\theta_1/1)\}_{\theta_1\in\Theta_1},\ldots,\{x_1(\theta_1/k)\}_{\theta_1\in\Theta_1}),\\(\overline{y}^1/D_1,\ldots,\overline{y}^\ell/D_\ell)&\Longleftrightarrow(\{x_2(\theta_2/1)\}_{\theta_2\in\Theta_2},\ldots,\{x_2(\theta_2/\ell)\}_{\theta_2\in\Theta_2}),\end{aligned}$$

のように対応していると考えると補題 4-3' は彼の言う 'correlated equilibrium" の定義式である.

代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡全体を特徴づけることは難しいが少なくとも次の定理は成り立つ.

定理 4-2. 代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡 $(X_1^*,\,X_2^*)\in\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1\times\Theta_2)$ の結合分布の全体を $\mathcal{D}_{Z_1,Z_2,exoNash}(\Theta_1\times\Theta_2)$, 代理人を持たない通常の非協力ゲームと考えた時のナッシュ均衡戦略の結合分布の全体を $\mathcal{D}_{Nash}(\Theta_1\times\Theta_2)$ とするとき, 包含関係

$$\mathcal{D}_{Nash}(\Theta_1\times\Theta_2)\subset\mathcal{D}_{Z_1,Z_2,exoNash}(\Theta_1\times\Theta_2)$$

が成り立つ.

注意 4-3. 実は, Rosenthal(1974 [62], p.119) も我々の定理 4-2 と同様のことを主張しているように見えるのであるが, どうも本質的なところで概念が異なるように思われ

る．それは，彼が “ordinary Nash equilibria are correlated equilibria with trivial partitions”(p.119) と述べているからである．この文章から判断すると彼のいう “correlated equilibrium” は分割を所与としてはいないようである．彼の主張は，通常のナッシュ均衡戦略を $(\overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*)$ としたとき，$\overline{x}_1^* = \overline{x}^i/C_i\,(i=1,\dots,k)$, $\overline{x}_2^* = \overline{y}^j/D_j\,(j=1,\dots,\ell)$ とおけば彼の意味の “correlated equilibrium” となるから，そのように解釈すれば彼の主張は定理 4-2 と同値である．Aumann の定義についても言えることであるが，相関均衡の定義式において，適当な（情報）分割が存在して○○の不等式を満たす，というような理解の仕方をすべきではない．与えられた（情報）分割に対して相関均衡が定義されるのである．

定理 4-2 の証明. 補題 4-3’ において，$\forall\lambda_1 \in \Lambda_1,\, x_1^*(\theta_1/\lambda_1) =: x_1^*(\theta_1)$, $\forall\lambda_2 \in \Lambda_2,\, x_2^*(\theta_2/\lambda_2) =: x_2^*(\theta_2)$(いずれも一括戦略) となる場合を考えると，$\sum_{\lambda_1,\lambda_2} z(\lambda_1,\lambda_2) = 1$ だから，補題 4-3’ の (i) と (ii) は次のような不等式が成り立つことを意味する．

(i) すべての $\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)x_2^*(\theta_2) \geq \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2)x_1(\theta_1)x_2^*(\theta_2)$$

が成り立つ．

(i1) すべての $\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_2(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)x_2^*(\theta_2) \geq \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_2(\theta_1,\,\theta_2)x_1^*(\theta_1)x_2(\theta_2)$$

が成り立つ．

ところが，上記の二つの条件はまさに $\{x_1^*(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ と $\{x_2^*(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件である．つまり，通常のナッシュ均衡戦略はパラメーターに無関係に同じ分布を対応させる一括戦略と考えれば常に代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡と看做すことが出来るのである.（証明終り）

この場合，Rosenthal が主張するように，Z_1, Z_2 の方を自明な確率変数と考える必要はないのである．もちろん，Z_1, Z_2 を自明と考える（$\Lambda_1 = \Lambda_2$ を一点集合とする）と，ゲームそのものが普通の非協力ゲームとなってしまうことは明かである．つまり，代理人は何も新たな情報をもたらさず役に立たない，ということである．

代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡を具体的に求めるためには，通常のナッシュ均衡戦略のところで知られている補題 3-2 (15 頁) に対応する次の補題が有効である．特に選択肢の集合が 3 点以上からなる集合の場合に有効である．

補題 4-4. $\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} z(\lambda_1,\lambda_2) > 0$ であるようなすべての $\lambda_1 \in \Lambda_1$ に対して

$$\Theta_1(X_2^*/\lambda_1) := \{\theta_1 \in \Theta_1\,;\, \max_{i\in\Theta_1} \sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} u_1(i,\,\theta_2)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$= \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1,\, \theta_2) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2)\},$$

（各 $\lambda_1 \in \Lambda_1$ 毎に純戦略の範囲で戦略 $(x_2^*(\theta_2/\lambda_2\,;\, \lambda_2 \in \Lambda_2)$ に対する best response を求めているのである.）

$\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} z(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ であるようなすべての $\lambda_2 \in \Lambda_2$ に対して

$$\Theta_2(X_1^*/\lambda_2) := \{\theta_2 \in \Theta_2\,;\, \max_{j \in \Theta_2} \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} u_2(\theta_1,\, j) x_1^*(\theta_1/\lambda_1) z(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$= \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} u_2(\theta_1,\, \theta_2) x_1^*(\theta_1/\lambda_1) z(\lambda_1, \lambda_2)\}$$

とおく．このとき，$(X_1^*,\, X_2^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡であるための必要十分条件は，X_1^* の分布 $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}\,;\, \lambda_1 \in \Lambda_1)$ と X_2^* の分布 $(\{x_2^*(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}\,;\, \lambda_2 \in \Lambda_2)$ が次の条件を満たすことである.

(i) $\sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} z(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ であるようなすべての $\lambda_1 \in \Lambda_1$ に対して

$$\{\theta_1 \in \Theta_1\,;\, x_1^*(\theta_1/\lambda_1) > 0\} \subset \Theta_1(X_2^*/\lambda_1)$$

が成り立つ.

(ii) $\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} z(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ であるようなすべての $\lambda_2 \in \Lambda_2$ に対して

$$\{\theta_2 \in \Theta_2\,;\, x_2^*(\theta_2/\lambda_2) > 0\} \subset \Theta_2(X_1^*/\lambda_2)$$

が成り立つ.

証明. まず，補題 4-4 の (i) が成り立っていると仮定する．$\Theta_1(X_2^*/\lambda_1)$ の定義から，すべての $j \in \Theta_1$ と $\sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} z(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ であるような $\lambda_1 \in \Lambda_1$ に対して

$$\max_{i \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(i,\, \theta_2) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) =$$

$$\sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1,\, \theta_2) x_1^*(\theta_1/\lambda_1) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$\geq \sum_{\theta_1 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(j,\, \theta_2) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2)$$

が成り立つ．ここで，上記の不等式の両辺に任意の分布 $\{x_1(j)\}_{j \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ の要素 $x_1(j)$ をかけて j について足し合わせると $\sum_{j \in \Theta_1} x_1(j) = 1$ だから補題 4-3’ の (i) が得られる.

逆に，$\sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} z(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ であるような，ある $\lambda_1 \in \Lambda_1$ と $\theta_{10} \in \Theta_1$ があって，$\theta_{10} \notin \Theta_1(X_2^*/\lambda_1)$ かつ，$x_1^*(\theta_{10}/\lambda_1) > 0$ であると仮定する．$\Theta_1(X_2^*/\lambda_1)$ の定義から，

$$\max_{i \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(i,\, \theta_2) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) > \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_{10},\, \theta_2) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2).$$

従って，$\{i \in \Theta_1\,;\, x_1(i) > 0\} \subset \Theta_1((X_2^*/\lambda_1)$ を満たす任意の $\{x_1(i)\}_{i \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1,\, \theta_2) x_1^*(\theta_1/\lambda_1) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) \\
&= \sum_{\theta_1 \in \Theta_1, \theta_1 \neq \theta_{10}} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1,\, \theta_2) x_1^*(\theta_1/\lambda_1) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) \\
&\quad + \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_{10},\, \theta_2) x_1^*(\theta_{10}/\lambda_1) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) \\
&\quad < \max_{i \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(i,\, \theta_2) x_2^*(\theta_2/\lambda_2) z(\lambda_1, \lambda_2) \\
&= \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1,\, \theta_2) x_1(\theta_1) x_2^*(\theta_2/\lambda_1) z(\lambda_1, \lambda_2)
\end{aligned}$$

が成り立つ．この不等式は補題 4-3' の (i) に反する．よって，$(X_1^*,\, X_2^*)$ は代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡ではない．(ii) についても同様である．(証明終り)

例を示す.

（例 4-4.) (Fudenberg-Tirole, 1991 [15], p.54) 例 4-1 と同じゲームについて代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡が内生的均衡とどう違うか（彼らは同値だと主張しているが）を示そう.

		プレーヤー 2	
		1	2
プレーヤー 1	1	(5, 1)	(0, 0)
	2	(4, 4)	(1, 5)

Table 4-4=Table 4-1

この非協力ゲームのナッシュ均衡戦略は前述したように次の 3 つである.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(Fudenberg-Tirole, 1991 [15], p.54) には Aumann の論文 (1974, [5]) の方法で

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

が外生的相関均衡であることを直感的に説明している．そのアイディアは次のようなものである．

まず，等確率をもつ 3 つの事象 A, B, C を考える．プレーヤー 1 は，事象 A が起こった場合は選択肢 1 を選び，事象 B または C が起こった場合は選択肢 2 を選ぶ．一方，プレーヤー 2 は，事象 A または B が起こった場合は選択肢 1 を選び，事象 C が起こった場合は選択肢 2 を選ぶ．同じ情報源から異なるメッセージを受け取ると考えるのである．このとき，確かに直感的な確率計算によってプレーヤー 1 とプレーヤー 2 の戦略プロファイルの結合分布は σ_0 となることがわかる．

この筋書きを我々の定式化で説明する．$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \{1, 2\}$（2 点集合）とおく．ただし，上記の事象 A, B, C との対応関係は Λ_1 においては $1 \in \Lambda_1 \Leftrightarrow A$, $2 \in \Lambda_1 \Leftrightarrow B \cup C$. 一方，$\Lambda_2$ においては $1 \in \Lambda_2 \Leftrightarrow A \cup B$, $2 \in \Lambda_2 \Leftrightarrow C$ と考える．このとき，各代理人のアドバイス Z_1, Z_2 とプレーヤーの戦略の条件付き確率は次のように表わせる．

$$\begin{aligned}
&z(1, 1) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(A \cap (A \cup B)) = P(A) = 1/3, \\
&z(1, 2) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 2) = P(A \cap C)) = P(\emptyset) = 0, \\
&z(2, 1) = P(Z_1 = 2, Z_2 = 1) = P((B \cup C) \cap (A \cup B)) = P(B) = 1/3, \\
&z(2, 2) = P(Z_1 = 2, Z_2 = 2) = P((B \cup C) \cap C) = P(C) = 1/3. \\
&x_1^*(1/1) = P(X_1^* = 1/Z_1 = 1) = 1,\ x_1^*(2/1) = P(X_1^* = 2/Z_1 = 1) = 0, \\
&x_1^*(1/2) = P(X_1^* = 1/Z_1 = 2) = 0,\ x_1^*(2/2) = P(X_1^* = 2/Z_1 = 2) = 1, \\
&x_2^*(1/1) = P(X_2^* = 1/Z_2 = 1) = 1,\ x_2^*(2/1) = P(X_2^* = 2/Z_2 = 1) = 0, \\
&x_2^*(1/2) = P(X_2^* = 1/Z_2 = 2) = 0,\ x_2^*(2/2) = P(X_2^* = 2/Z_2 = 2) = 1.
\end{aligned}$$

以上のように書き直すと，(X_1^*, X_2^*) の結合分布は (30 頁) の公式通りの計算によって σ_0 となることがわかる．しかし，彼らの説明は直感的で他に均衡分布があるかないか全く検討されていない．我々は，厳密な定式化によって，彼らの状況下で次のようにこの代理人を持つ非協力ゲームの全ての外生的相関均衡を求めることが出来る．

命題 4-1. 例 4-4 において，代理人のアドバイスは $z(1, 1) = z(2, 1) = z(2, 2) = 1/3$, $z(1, 2) = 0$ だとする．このとき，通常のナッシュ均衡戦略以外のすべての外生的相関均衡は次の 4 種類である．この場合戦略の集合が 2 点集合であることから，$x_1^*(2/\lambda_1) = 1 - x_1^*(1/\lambda_1), x_2^*(2/\lambda_2) = 1 - x_2^*(1/\lambda_2)$ である．従って，それぞれの戦略を $(x_1^*(1/1), x_1^*(1/2)$ と $(x_2^*(1/1), x_2^*(1/2)$ で表わす．さらに，$P(X_1^* = \theta_1, X_2^* = \theta_2) := p(\theta_1, \theta_2)\,;\, \theta_1, \theta_2 = 1, 2$ を行列表示する．

(1) $(x_1^*(1/1) = 1,\ 0 \leq x_1^*(1/2) \leq 1/2)$, $(x_2^*(1/1) = 1,\ x_2^*(1/2) = 0)$,

$$\sigma_4 = (1 - x_1^*(1/2)) \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} + x_1^*(1/2) \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで，$x_1^*(1/2)$ は $0 \leq x_1^*(1/2) \leq 1/2$ の範囲で自由に選ぶことができる．

(2) $(x_1^*(1/1) = 0,\ 1/2 \leq x_1^*(1/2) \leq 1)$, $(x_2^*(1/1) = 0,\ x_2^*(1/2) = 1)$,

$$\sigma_5 = x_1^*(1/2) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} + (1 - x_1^*(1/2)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

ここで，$x_1^*(1/2)$ は $1/2 \leq x^*(1/2) \leq 1$ の範囲で自由に選ぶことができる．

(3) $(x_1^*(1/1) = 1,\ x_1^*(1/2) = 0)$, $(1/2 \leq x_2^*(1/1) \leq 1,\ x_2^*(1/2) = 0)$,

$$\sigma_6 = x_2^*(1/1) \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} + (1 - x_2^*(1/1)) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

ここで，$x_2^*(1/1)$ は $1/2 \leq x_2^*(1/1) \leq 1$ の範囲で自由に選ぶことができる．

(4) $(x_1^*(1/1) = 0,\ x_1^*(1/2) = 1)$, $(0 \leq x_2^*(1/1) \leq 1/2,\ x_2^*(1/2) = 1)$,

$$\sigma_7 = (1 - x_2^*(1/1)) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} + x_2^*(/1) \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで，$x_2^*(1/1)$ は $0 \leq x_2^*(1/1) \leq 1/2$ の範囲で自由に選ぶことができる．

(1) において $x_1^*(1/2) = 0$, または (3) において $x_2^*(1/1) = 1$ とすれば Fudenberg-Tirole の分布 σ_0 が得られる．内生的相関均衡は例 4-1(26 頁) のところで既に述べた．

(例 4-5.) (Aumann(1974 [5], example (2.7)).

プレーヤー 2

プレーヤー 1		1	2
	1	(6, 6)	(2, 7)
	2	(7, 2)	(0, 0)

Table 4-5

この非協力ゲームのナッシュ均衡戦略は次の 3 つである．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 4/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Aumann (1974) は

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

が混合ナッシュ均衡戦略 σ_3 より，よりよい期待利得がえられる外生的相関均衡であり，それは次のような random device を用いて得られる，と説明している．

まず，確率 1/3 づつで実現する 3 つの事象 A, B, C を考える．プレーヤー 1 は，事象 A が起こった場合は選択肢 2 を選び，事象 B または C が起こった場合は選択肢 1 を選ぶ．一方，プレーヤー 2 は，事象 A または B が起こった場合は選択肢 1 を選び，事象 C が起こった場合は選択肢 2 を選ぶ．同じ情報源から異なるメッセージを受け取ると考えるのである．このとき，確かに直感的な確率計算によってプレーヤー 1 とプレーヤー 2 の戦略プロファイルの結合分布は σ_4 となることがわかる．

この筋書きを我々の定式化で説明する．$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \{1, 2\}$ （2 点集合）とおく．ただし，上記の事象 A, B, C との対応関係は Λ_1 においては $1 \in \Lambda_1 \Leftrightarrow B \cup C$, $2 \in \Lambda_1 \Leftrightarrow A$. 一方，$\Lambda_2$ においては $1 \in \Lambda_2 \Leftrightarrow A \cup B$, $2 \in \Lambda_2 \Leftrightarrow C$ と考える．このとき，各代理人のアドバイス Z_1, Z_2 とプレーヤーの戦略の条件付き確率は次のように表わせる．

$$\begin{aligned}
&z(1, 1) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P((B \cup C) \cap (A \cup B)) = P(B) = 1/3,\\
&z(1, 2) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 2) = P((B \cup C) \cap C) = P(C) = 1/3,\\
&z(2, 1) = P(Z_1 = 2, Z_2 = 1) = P(A \cap (A \cup B)) = P(A) = 1/3,\\
&z(2, 2) = P(Z_1 = 2, Z_2 = 2) = P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0.\\
&x_1^*(1/1) = P(X_1^* = 1/Z_1 = 1) = 1,\ x_1^*(2/1) = P(X_1^* = 2/Z_1 = 1) = 0,\\
&x_1^*(1/2) = P(X_1^* = 1/Z_1 = 2) = 0,\ x_1^*(2/2) = P(X_1^* = 2/Z_1 = 2) = 1,\\
&x_2^*(1/1) = P(X_2^* = 1/Z_2 = 1) = 1,\ x_2^*(2/1) = P(X_2^* = 2/Z_2 = 1) = 0,\\
&x_2^*(1/2) = P(X_2^* = 1/Z_2 = 2) = 0,\ x_2^*(2/2) = P(X_2^* = 2/Z_2 = 2) = 1.
\end{aligned}$$

以上のように書き直すと，(X_1^*, X_2^*) の結合分布は (30 頁) の公式通りの計算によって σ_4 となることがわかる．しかし，彼の説明は直感的で他に均衡分布があるかないか全く検討されていない．我々は，厳密な定式化によって，彼の状況下で次のようにこの代理人を持つ非協力ゲームの全ての外生的相関均衡を求めることが出来る．

命題 4-2. 例 4-5 において，代理人のアドバイスは $z(1, 1) = z(1, 2) = z(2, 1) = 1/3$, $z(2, 2) = 0$ だとする．このとき，通常のナッシュ均衡戦略以外のすべての外生的相関均衡は次の 4 つである．この場合戦略の集合が 2 点集合であることから，$x_1^*(2/\lambda_1) = 1 - x_1^*(1/\lambda_1)$, $x_2^*(2/\lambda_2) = 1 - x_2^*(1/\lambda_2)$ である．従って，それぞれの戦略を $(x_1^*(1/1), x_1^*(1/2)$ と $(x_2^*(1/1), x_2^*(1/2)$ で表わす．さらに，$P(X_1^* = \theta_1, X_2^* = \theta_2) := p(\theta_1, \theta_2)\,;\ \theta_1, \theta_2 = 1, 2$ を行列表示する．

(1) $(x_1^*(1/1) = 1,\ x_1^*(1/2) = 0)$, $(x_2^*(1/1) = 1,\ x_2^*(1/2) = 0)$,

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $(x_1^*(1/1) = 1/3,\ x_1^*(1/2) = 1)$, $(x_2^*(1/1) = 1/3,\ x_2^*(1/2) = 1)$,

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 7/27 & 8/27 \\ 8/27 & 4/27 \end{pmatrix}.$$

(3) $(x_1^*(1/1) = 1,\, x_1^*(1/2) = 1/3)$, $(x_2^*(1/1) = 2/3,\, x_2^*(1/2) = 0)$,

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 8/27 & 13/27 \\ 4/27 & 2/27 \end{pmatrix}.$$

(4) $(x_1^*(1/1) = 2/3,\, x_1^*(1/2) = 0)$, $(x_2^*(1/1) = 1,\, x_2^*(1/2) = 1/3)$,

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} 8/27 & 4/27 \\ 13/27 & 2/27 \end{pmatrix}.$$

命題 4-1 と 4-2 の証明のために次の補題を準備する．

補題 4-5. $\Theta_1 = \Theta_2 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = \{1,\, 2\}$(2 点集合) の場合，$(X_1^*,\, X_2^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡であるための必要十分条件は，X_1^* の分布 $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\,;\, \lambda_1 \in \Lambda_1)$ と X_2^* の分布 $(\{x_2^*(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\, \lambda_2 \in \Lambda_2)$ が次の条件を満たすことである．

$x_1(2/\lambda_1) = 1 - x_1(1/\lambda_1)\,;\, \lambda_1 = 1, 2,\ x_2(2/\lambda_2) = 1 - x_2(1/\lambda_2)\,;\, \lambda_2 = 1, 2$
だから，$(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の結合分布の指標としては

$$(x_1(1/1),\, x_1(1/2),\, x_2(1/1),\, x_2(1/2))$$

を用いる．この場合，$x_1(1/1), x_1(1/2), x_2(1/1), x_2(1/2)$ の値は 0 と 1 の間を自由に選べることに注意する．また，自明なケースを避けるために以下では

$z(\lambda_1,\, \bullet) := z(\lambda_1,\, 1) + z(\lambda_1,\, 2) > 0\,;\, \lambda_1 = 1,\, 2,$
$z(\bullet,\, \lambda_2) := z(1,\, \lambda_2) + z(2,\, \lambda_2) > 0\,;\, \lambda_2 = 1,\, 2$

を仮定する．さらに，

$$A_1(\theta_2) := u_1(1,\, \theta_2) - u_1(2,\, \theta_2),\ (\theta_2 = 1,\, 2),\ A_2(\theta_1) := u_2(\theta_1,\, 1) - u_2(\theta_1,\, 2),\ (\theta_1 = 1,\, 2)$$

とおく．

以上の記号を使って補題 4-3' の条件 (i), (ii) を書き直すと，

(i-1) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_1^*(1/1) - x)\{A_1(2)z(1,\, \bullet) + (A_1(1) - A_1(2)) \sum_{\lambda_2=1}^{2} x_2^*(1/\lambda_2) z(1,\, \lambda_2)\} \ge 0 \tag{10}$$

が成り立つ．

(i-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x_1^*(1/2) - x)\{A_1(2)z(2,\, \bullet) + (A_1(1) - A_1(2)) \sum_{\lambda_2=1}^{2} x_2^*(1/\lambda_2)z(2,\, \lambda_2)\} \geq 0 \tag{11}$$

が成り立つ.

(ii-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x_2^*(1/1) - x)\{A_2(2)z(\bullet,\, 1) + (A_2(1) - A_2(2)) \sum_{\lambda_1=1}^{2} x_1^*(1/\lambda_1)z(\lambda_1,\, 1)\} \geq 0 \tag{12}$$

が成り立つ.

(ii-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x_2^*(1/2) - x)\{A_2(2)z(\bullet,\, 2) + (A_2(1) - A_2(2)) \sum_{\lambda_1=1}^{2} x_1^*(1/\lambda_1)z(\lambda_1,\, 2)\} \geq 0 \tag{13}$$

が成り立つ.

命題 4-1 の証明. 例 4-4 では $z(1,\, 1) = z(2,\, 1) = z(2,\, 2) = 1/3$, $z(1,\, 2) = 0$ だから, $z(1,\, \bullet) = 1/3$, $z(2,\, \bullet) = 2/3$, $z(\bullet,\, 1) = 2/3$, $z(\bullet,\, 2) = 1/3$. $A_1(1) = 1$, $A_1(2) = -1$, $A_2(1) = 1$, $A_2(2) = -1$ だから, 補題 4-5 の (10) 式, (11) 式, (10) 式, (13) 式は次のように表わされる.

(i-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x_1^*(1/1) - x)(2x_2^*(1/1) - 1) \geq 0 \tag{14}$$

が成り立つ.

(i-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x_1^*(1/2) - x)(x_2^*(1/1) + x_2^*(1/2) - 1) \geq 0 \tag{15}$$

が成り立つ.

(ii-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x_2^*(1/1) - x)(x_1^*(1/1) + x_1^*(1/2) - 1) \geq 0 \tag{16}$$

が成り立つ.

(ii-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x_2^*(1/2) - x)(2x_1^*(1/2) - 1) \geq 0 \tag{17}$$

が成り立つ.

命題 4-1 の (1) から (4) の場合について，容易に条件式 (14), (15), (16), (17) を満たすことが確かめられる．逆にこれらの条件式を満たす解は命題 1 の 4 つの場合に限られるか，という点については少々チェックが面倒であるから省略する．実際には，上記の条件式を場合にわけて解いて得られた結果が命題 4-1 の４つの場合なのである．

命題 4-2 の証明. 例 4-5 では $z(1,1) = z(1,2) = z(2,1) = 1/3$, $z(2,2) = 0$ だから，$z(1,\bullet) = 2/3$, $z(2,\bullet) = 1/3$, $z(\bullet,1) = 2/3$, $z(\bullet,2) = 1/3$. $A_1(1) = -1$, $A_1(2) = 2$, $A_2(1) = -1$, $A_2(2) = 2$ だから，補題 4-5 の (10) 式, (11) 式, (10) 式, (13) 式は次のように表わされる．

(i-1) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_1^*(1/1) - x)(-3x_2^*(1/1) - 3x_2^*(1/2) + 4) \ge 0 \tag{18}$$

が成り立つ．

(i-2) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_1^*(1/2) - x)(-3x_2^*(1/1) + 2) \ge 0 \tag{19}$$

が成り立つ．

(ii-1) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_2^*(1/1) - x)(-3x_1^*(1/1) - 3x_1^*(1/2) + 4) \ge 0 \tag{20}$$

が成り立つ．

(ii-2) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_2^*(1/2) - x)(-3x_1^*(1/1) + 2) \ge 0 \tag{21}$$

が成り立つ．

命題 4-2 の (1) から (4) の場合について，容易に条件式 (18), (19), (20), (21) を満たすことが確かめられる．逆にこれらの条件式を満たす解は命題 2 の 4 つの場合に限られるか，という点については少々チェックが面倒であるから省略する．実際には，上記の条件式を場合にわけて解いて得られた結果が命題 4-2 の４つの場合なのである．

(例 4-6.) Aumann の論文 (1974, [5]) に載っている他の例についても我々の意味での代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡を求めておく．

		プレーヤー 2		
		1	2	3
プレーヤー 1	1	(6, 6)	(0, 0)	(2, 7)
	2	(0, 0)	(4, 4)	(3, 0)
	3	(7, 2)	(0, 3)	(0, 0)

Table 4-6

この例は例 4-5 のゲームに選択肢を一つ余計に加えて得られる標準形ゲームである．つまり，$\Theta_1 = \Theta_2 = \{1,\,2,\,3\}$(3 点集合) である．代理人のアドバイスについても例 4-5 の場合と同様と仮定する．つまり，$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \{1,\,2\}$, $z(1,\,1) = P(Z_1 = 1,\,Z_2 = 1) = 1/3$, $z(1,\,2) = P(Z_1 = 1,\,Z_2 = 2) = 1/3$, $z(2,\,1) = P(Z_1 = 2,\,Z_2 = 1) = 1/3$, $z(2,\,2) = P(Z_1 = 2,\,Z_2 = 2) = 0$ と仮定する．

戦略プロファイル $(X_1,\,X_2) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の分布をそれぞれ

$$\{x_1(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1=1,2,3},\ \lambda_1 = 1,2\,;\ \{x_2(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2=1,2,3},\ \lambda_2 = 1,2$$

で表わすと，結合分布 $p(\theta_1,\,\theta_2) := P(X_1 = \theta_1,\,X_2 = \theta_2)$ は次のように表わされる．

$$\begin{aligned} p(\theta_1,\,\theta_2) &= \sum_{\lambda_1=1,\lambda_2=1}^{2} P(X_1 = \theta_1/Z_1 = \lambda_1)P(X_2 = \theta_2/Z_2 = \lambda_2)P(Z_1 = \lambda_1,\,Z_2 = \lambda_2) \\ &= (x_1(\theta_1/1)x_2(\theta_2/1) + x_1(\theta_1/1)x_2(\theta_2/2) + x_1(\theta_1/2)x_2(\theta_2/1))/3, \\ &\quad\ \theta_1,\,\theta_2 = 1,2,3. \end{aligned} \tag{22}$$

この例の場合は (Aumann (1974, p.72–73)) に述べてある相関均衡のみが我々の意味でも通常のナッシュ均衡戦略ではない唯一の外生的相関均衡である．

命題 4-3. 例 4-6 においては，次のような代理人を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡 $(X_1^*,\,X_2^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ を持つ．

$X_1^* \approx (\{x_1(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1=1,2,3}\,;\ \lambda_1 = 1,2)$, $X_2^* \approx (\{x_2(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2=1,2,3}\,;\ \lambda_2 = 1,2)$

とすると

$$\begin{aligned} &x_1^*(1/1) = 1, x_1^*(2/1) = 0, x_1^*(3/1) = 0,\ x_1^*(1/2) = 0, x_1^*(2/2) = 0, x_1^*(3/2) = 1, \\ &x_2^*(1/1) = 1, x_2^*(2/1) = 0, x_2^*(3/1) = 0,\ x_2^*(1/2) = 0, x_2^*(2/2) = 0, x_2^*(3/2) = 1. \end{aligned}$$

結合分布 $P(X_1^* = i,\,X_2^* = j) =: p_{ij}^*\,;\ i,j = 1,2,3$ を 3 次の行列で表わすと，

$$(p_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これ以外に外生的相関均衡が存在しないことのチェックは少々面倒なので，上記の分布が外生的相関均衡であることのみをチェックする．

容易に計算できるように，$E[u_1(X_1^*,\,X_2^*)] = E[u_2(X_1^*,\,X_2^*)] = 5$ である．一方，(22) から，任意の $\{x_1(\theta_1/1)\}_{\theta_1=1,2,3} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$, $\{x_1(\theta_1/2)\}_{\theta_1=1,2,3} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して，

$$\begin{aligned} E[u_1(X_1,\,X_2^*)] &= (8x_1(1/1) + 3x_1(2/1) + 7x_1(3/1) + 6x(1/2) + 7x_1(3/2))/3 \\ &\le 8(x_1(1/1) + x_1(2/1) + x_1(3/1))/3 + 7(x_1(1/2) + x_1(2/2) + x_1(3/2))/3 \\ &= 5 = E[u_1(X_1^*,\,X_2^*)] \end{aligned}$$

が得られる．同様にして，任意の $\{x_2(\theta_2/1)\}_{\theta_2=1,2,3} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$, $\{x_2(\theta_2/2)\}_{\theta_2=1,2,3} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して，

$$\begin{aligned} E[u_2(X_1^*, X_2)] &= (8x_2(1/1) + 3x_2(2/1) + 7x_2(3/1) + 6x_2(1/2) + 7x_2()3/2))/3 \\ &\leq 8(x_2(1/1) + x_2(2/1) + x_2(3/1))/3 + 7(x_2(1/2) + x_2(2/2) + x_2(3/2))/3 \\ &= 5 = E[u_2(X_1^*, X_2^*)] \end{aligned}$$

が得られるから (X_1^*, X_2^*) は外生的相関均衡である．

(例 4-7.) Aumann (1974, p.71, example (2.7))．この例のプレーヤーは 3 人で，プレーヤー 1 と 2 の選択肢は 2 点集合，プレーヤー 3 の選択肢は 3 点集合である．それぞれの利得行列は，左がプレーヤー 3 が選択肢 1 を選んだ時の 3 人の利得行列，真中がプレーヤー 3 が選択肢 2 を選んだ時の 3 人の利得行列, 右がプレーヤー 3 が選択肢 3 を選んだ時の 3 人の利得行列を表わす．ただし，それぞれの利得行列はプレーヤー 1 と 2 の利得表でカッコ内の 3 番目の数字がプレーヤー 3 の利得である．

	1	2
1	(0, 0, 3)	(0, 0 0)
2	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)

	1	2
1	(2, 2, 2)	(0, 0, 0)
2	(0, 0, 0)	(2, 2, 2)

	1	2
1	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
2	(0, 1, 0)	(0, 0, 3)

Table 4-7

この例では，Aumann が指摘しているように，3 つの純戦略ナッシュ均衡戦略と 1 つの混合ナッシュ均衡戦略が存在する．さらに彼は次のような random device を用いて相関均衡戦略を求めると，混合ナッシュ均衡戦略よりもよりよい期待利得の相関均衡が得られる，と述べている．すなわち，

“the following situation allows for a better payoff. Players 1 and 2 get together and toss a fair coin. If the coin falls on heads, Players 1 and 2 choose $1 \in \Theta_1$ and $1 \in \Theta_2$, respectively; otherwise, they choose $2 \in \Theta_1$ and $2 \in \Theta_2$, respectively. On the other hand, Player 3 always plays $2 \in \Theta_3$. Then, the payoff is 2 for all players.”

さらに，彼はもし硬貨投げの結果をプレーヤー 3 が知ったならばこの戦略プロファイルは相関均衡にならないことを主張している．彼の主張自体は，利得表をゆっくり眺めれば納得できる．しかし，それは状況設定が異なるのであるから当然そのような可能性がある．問題は最初の状況設定で Aumann の指摘する相関均衡が他にないか，ということであるが，その点について彼は何も述べていない．我々の定式化を用いれば，外生的相関均衡として彼の相関均衡のみならず他にも存在することが以下に示すように，Aumann のような直感的説明ではなく，厳密な計算によって求めることが出来る．

まず最初にプレーヤーの数が $n \geq 3$ の場合でも各プレーヤーが代理人を持ち，各代理人がアドバイス Z_n をする時の外生的相関均衡の定義は二人ゲームの代理人を持つ非協力ゲームから全く容易に拡張できることを注意しておく．特に，条件 (A-1)，(A-2) を n 人

ゲームに拡張して，これらの条件を満たす戦略プロファイルの全体 $\mathcal{R}_{Z_1,\ldots,Z_n}(\Theta_1\times\cdots\times\Theta_n)$ をきちんと定義しておく必要がある．

さて，例 4-7 の Aumann の状況設定を我々の定式化で書き直すと次のようになる．

記号：

$\Theta_1 = \Theta_2 = \{1, 2\}$, $\Theta_3 = \{1, 2, 3\}$. $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \{1, 2\}$, $\Lambda_3 = \{1\}$(1 点集合), $P(Z_1 = Z_2 = 1) = 1/2$, $P(Z_1 = Z_2 = 2) = 1/2$, $P(Z_3 = 1) = 1$. つまり，Z_3 は自明な確率変数である．我々の定式化においてこのような場合も排除していないことに注意されたい．すべての Λ_n が 1 点集合からなる場合は代理人を持つ非協力ゲームは通常の非協力ゲームになる．

Aumann のいう相関均衡に対応する戦略プロファイルを

$$(X_1^*, X_2^*, X_3^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2,Z_3}(\Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3)$$

とすると，その分布は

$P(X_1^* = 1/Z_1 = 1) = 1$, $P(X_1^* = 2/Z_1 = 2) = 1$,

$P(X_2^* = 1/Z_2 = 1) = 1$, $P(X_2^* = 2/Z_2 = 2) = 1$, $P(X_3^* = 2) = 1$

と表わされる．

一般に，$(X_1, X_2, X_3) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2,Z_3}(\Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3)$ の分布は次の条件付き分布で特徴付けられる．

$P(X_1 = 1/Z_1 = 1) =: x_1(1/1)$, $P(X_1 = 2/Z_1 = 1) =: x_1(2/1) = 1 - x_1(1/1)$,

$P(X_1 = 1/Z_1 = 2) =: x_1(1/2)$, $P(X_1 = 2/Z_1 = 2) =: x_1(2/2) = 1 - x_1((1/2)$,

$P(X_2 = 1/Z_2 = 1) =: x_2(1/1)$, $P(X_2 = 2/Z_2 = 1) =: x_2(2/1) = 1 - x_2(1/1)$,

$P(X_2 = 1/Z_2 = 2) =: x_2(1/2)$, $P(X_2 = 2/Z_2 = 2) =: x_2(2/2) = 1 - x_2(1/2)$,

$P(X_3 = 1/Z_3 = 1) = P(X_3 = 1) =: x_3(1)$, $P(X_3 = 2/Z_3 = 1) = P(X_3 = 2) =: x_3(2)$,

$P(X_3 = 3/Z_3 = 1) = P(X_3 = 3) =: x_3(3)$.

ここで，Aumann の設定ではプレーヤー 3 の戦略 X_3 はプレーヤー 1 と 2 の戦略プロファイル (X_1, X_2) とは独立であることに注意する．この例の設定の下で，条件 (A-1), (A-2) から (X_1, X_2, X_3) の結合分布 $p_{ijk} := P(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k)$ は次のように表わされる．

$$\begin{aligned}
p_{ijk} &= \sum_{s=1}^{2} P(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k, Z_1 = Z_2 = s, Z_3 = 1) \\
&= \sum_{s=1}^{2} P(X_1 = i/Z_1 = s)P(X_2 = i/Z_2 = s)P(X_3 = k)P(Z_1 = Z_2 = s) \\
&= (x_1(i/1)x_2(j/1) + x_1(i/2)x_2(j/2))x_3(k)/2.
\end{aligned}$$

このとき，我々の意味で外生的相関均衡である戦略プロファイル $(X_1^*, X_2^*, X_3^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2,Z_3}(\Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3)$ の条件付き分布は右肩に $*$ と付けて表わすと，補題 4-3' の条件は次のように表わされる．

(i-1)　$0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_1^*(1/1) - x)((4x_3^*(2) - x_3^*(1))x_2^*(1/1) - 2x_3^*(2)) \ge 0 \tag{23}$$

が成り立つ．

(i-2) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_1^*(1/2) - x)((4x_3^*(2) - x_3^*(1))x_2^*(1/2) - 2x_3^*(2)) \ge 0 \tag{24}$$

が成り立つ．

(ii-1) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_2^*(1/1) - x)((4x_3^*(2) - x_3^*(3))(x_1^*(1/1) - 2x_3^*(2) + x_3^*(3)) \ge 0 \tag{25}$$

が成り立つ．

(ii-2) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_2^*(1/2) - x)((4x_3^*(2) - x_3^*(3))x_1^*(1/2) - 2x_3^*(2) + x_3^*(3)) \ge 0 \tag{26}$$

が成り立つ．

(iii) $\forall x(1), \forall x(2), \forall x(3) \ge 0$ such that $x(1) + x(2) + x(3) = 1$ に対して，

$$\begin{aligned} 3(x_3^*(1) - x(1)) \sum_{m=1}^{2} x_1^*(1/m)x_2^*(1/m) + 2(x_3^*(2) - x(2)) \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} x_1^*(s/t)x_2^*(s/t) \\ + 3(x_3^*(3) - x(3)) \sum_{m=1}^{2} x_1^*(2/m)x_2^*(2/m) \quad \ge 0 \end{aligned} \tag{27}$$

が成り立つ．

Aumann (1974 [5], p.71) の主張を我々の記号で云い換えると，$x_1^*(1/1) = 1$, $x_1^*(1/2) = 0$, $x_2^*(1/1) = 1$, $x_2^*(1/2) = 0$, $x_3^*(2) = 1$ が外生的相関均衡になる，ということである．彼の場合，プレーヤー 1 と 2 の戦略プロファイルの結合分布 $p_{ij}^* := P(X_1^* = i, X_2^* = j)$ は次のようになっている．

$$(p_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

ところが，条件式 (23) から (28) までを満たす分布はたくさんあって，

$x_1^*(1/1) = 0$, $x_1^*(1/2) = 1$, $x_2^*(1/1) = 1$, $x_2^*(1/2) = 0$, $x_3^*(2) = 0$ または，

$x_1^*(1/1) = 1,\, x_1^*(1/2) = 0,\, x_2^*(1/1) = 0,\, x_2^*(1/2) = 1\, x_3^*(2) = 0$
もすべて外生的相関均衡なのである．ここで，$x_3^*(1), x_3^*(3) \geq 0$ は $x_3^*(1) + x_3^*(3) = 1$ を満たす範囲で自由に選べるパラメーターである．この場合のプレーヤー 1 と 2 の損略プロファイルの結合分布 $p_{ij}^* := P(X_1^* = i,\, X_2^* = j)$ は

$$(p_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

である．これらの分布が条件式 (23) から (28) を満たすことは容易に確かめられる．また，これ以外に外生的相関均衡は存在しないことも補題 4-4 を 3 人プレーヤーの場合に拡張して用いると容易に確認できるから省略する．

§ 4-2-2. 仲介者を持つ非協力ゲーム

Kôno([31]) で導入した「仲介者を持つ非協力ゲーム」は前項で定義した代理人を持つ非協力ゲームの特別な場合であり，例 4-7 ですでに現れているが，この場合は相関均衡の全体が完全に特徴づけられるので別項とした．代理人と仲介者では社会学的応用場面では相当にイメージは異なるが，数学的構造，という意味では後者は前者の特別な場合である．

定義 4-6. 代理人を持つ非協力ゲームにおいて，特に $\Lambda_1 = \Lambda_2 =: \Lambda$, $P(Z_1 = Z_2) = 1$ であるとき，つまり，それぞれの代理人のアドバイスが確率 1 で一致しているとき，**仲介者を持つ非協力ゲーム**という．$Z := Z_1 = Z_2$ を仲介者のアドバイスということにする．この場合，仮定（A-2）は不要である．つまり，仲介者が選ぶ確率変数 Z を所与として，プレーヤー 1, 2 が選ぶ確率変数 $X_1,\, X_2$ に関する確率構造に対して次の仮定をおく．

仮定 (A): $(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ は Z に関して条件付き独立である．すなわち，任意の $\theta_1 \in \Theta_1$, $\theta_2 \in \Theta_2$ と $\lambda \in \Lambda$ such that $P(Z = \lambda) > 0$ に対して

$$P(X_1 = \theta_1,\, X_2 = \theta_2 / Z = \lambda) = P(X_1 = \theta_1 / Z = \lambda) P(X_2 = \theta_2 / Z = \lambda)$$

が成り立つ．

以下，仲介者のアドバイス $Z \in \mathcal{R}(\Lambda)$ は一つ固定する．自明な場合を避けるため $\forall \lambda \in \Lambda$, $P(Z = \lambda) > 0$ を仮定しておく（もしこの確率がゼロならば最初からこの要素を除いておけばよい）．

記号：
$\mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2) := \{(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)\, ;\, (X_1,\, X_2)$ such that 仮定 (A) を満たす $\}$.

以上のように準備して，あらためて仲介者を持つ非協力ゲームを定義し直すと次のようになる．ただし，仲介者の選択肢 Z は所与とする．

定義 4-7.(＝定義 4-6) 標準形ゲーム：$\Gamma = (N, \{\Theta_n\}, \{u_n(\theta)\}\,;\, n = 1, 2)$ のすべての戦略プロファイル $(X_1, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素が $\mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素に制限されているとき，Γ を**仲介者を持つ非協力ゲーム**と呼ぶ.

ナッシュ均衡概念は次のように自然に拡張できる.

定義 4-8. 戦略プロファイル $(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が次の 2 条件を満たすとき，仲介者を持つ非協力ゲームの**外生的相関均衡** (exogenous correlated equilibrium with a mediator) である，という.

(i) $\forall X_1 \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ such that $(X_1, X_2^*) \in \mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$,

$$E[u_1(X_1^*, X_2^*)] \geq E[u_1(X_1, X_2^*)],$$

(ii) $\forall X_2 \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ such that $(X_1^*, X_2) \in \mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$.

$$E[u_2(X_1^*, X_2^*)] \geq E[u_2(X_1^*, X_2)].$$

さて，定義 4-8 を分布を用いて書き直してみよう．そのためにはまず，$(X_1, X_2) \in \mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$ を結合分布で特徴づけなくてはいけない．$Z \in \mathcal{R}(\Lambda)$ が予め与えられているから，(X_1, X_2) の結合分布 $p(\theta_1, \theta_2) := P(X_1 = \theta_1, X_2 = \theta_2)$ は 3 つの確率変数 $(X_1\, X_2, Z)$ の確率構造から，仮定 (A) を用いて次のような簡単な確率計算によって定められる．ただし，$z(\lambda) := P(Z = \lambda)$ とおく.

$$\begin{aligned}
p(\theta_1, \theta_2) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} P(X_1 = \theta_1, X_2 = \theta_2, Z = \lambda) \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} P(X_1 = \theta_1, X_2 = \theta_2 / Z = \lambda) z(\lambda) \\
&\quad \text{ここで仮定 (A) を使って} \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} P(X_1 = \theta_1 / Z = \lambda) P(X_2 = \theta_2 / Z = \lambda) z(\lambda) \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} x_1(\theta_1/\lambda) x_2(\theta_2/\lambda) z(\lambda).
\end{aligned}$$

ここで，$x_1(\theta_1/\lambda) := P(X_1 = \theta_1 / Z = \lambda)$ ，$x_2(\theta_2/\lambda) := P(X_2 = \theta_2/Z = \lambda)$ とおいた.

この式を見ればわかる通り，(X_1, X_2) の結合分布 $p(\theta_1, \theta_2)$ は Θ_1 上の分布の族 $(\{x_1(\theta_1/\lambda)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)\,;\, \lambda \in \Lambda)$ と Θ_2 上の分布の族 $(\{x_2(\theta_2/\lambda)\}_{\theta_2 \in \Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)\,;\, \lambda \in \Lambda)$ によってそれぞれ独立に決定されることがわかる．従って，$(X_1, X_2) \in \mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$ に対して，X_1, X_2 の分布をそれぞれ

$$X_1 \approx (\{x_1(\theta_1/\lambda)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}\,;\, \lambda \in \Lambda), \quad X_2 \approx (\{x_2(\theta_2/\lambda)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}\,;\, \lambda \in \Lambda)$$

で表わす.

補題 4-6. $(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が仲介者を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡であるための必要十分条件は，X_1^* の分布 $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}\,;\, \lambda \in \Lambda)$ と X_2^* の分布 $(\{x_2^*(\theta_2/\lambda)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}\,;\, \lambda \in \Lambda)$ が次の条件を満たすことである.

(i) 任意の $\{x_1(\theta_1/\lambda)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して,

$$\sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda \in \Lambda} u_1(\theta_1,\, \theta_2)(x_1^*(\theta_1/\lambda) - x_1(\theta_1/\lambda))x_2^*(\theta_2/\lambda)z(\lambda) \geq 0$$

が成り立つ.

(ii) 任意の $\{x_2(\theta_2/\lambda)\}_{\theta_2 \in \Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して,

$$\sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda \in \Lambda} u_2(\theta_1,\, \theta_2)(x_2^*(\theta_2/\lambda) - x_2(\theta_2/\lambda))x_1^*(\theta_1/\lambda)z(\lambda) \geq 0$$

が成り立つ.

補題 4-6 は定義 4-8 を単に分布の言葉で書き換えただけである．しかし，任意に選べる分布の族 $(\{x_1(\theta_1/\lambda)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}\ ;\ \lambda \in \Lambda)$, $(\{x_2(\theta_2/\lambda)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}\ ;\ \lambda \in \Lambda)$ は λ 毎に自由に選べるのであるから，上記の不等式は (i) について λ 毎に，(ii) についても λ 毎に成り立たなくてはいけない．すなわち，次の補題が成り立つ.

補題 4-6'. $(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$ が仲介者を持つ外生的相関均衡であるための必要十分条件は, X_1^* の分布 $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}\,;\, \lambda \in \Lambda)$ と X_2^* の分布 $(\{x_2^*(\theta_2/\lambda)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}\,;\, \lambda \in \Lambda)$ が次の条件を満たすことである.

(i) 任意の $\lambda \in \Lambda$ と 任意の $\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して,

$$\sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_1(\theta_1,\, \theta_2)(x_1^*(\theta_1/\lambda) - x_1(\theta_1))x_2^*(\theta_2/\lambda) \geq 0$$

が成り立つ.

(ii) 任意の $\lambda \in \Lambda$ と 任意の $\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2 \in \Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して,

$$\sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_2(\theta_1,\, \theta_2)(x_2^*(\theta_2/\lambda) - x_2(\theta_2))x_1^*(\theta_1/\lambda) \geq 0$$

が成り立つ.

定理 4-3. 仲介者を持つ外生的相関均衡 $(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_Z(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の結合分布の全体を $\mathcal{D}_{Z,exoNash}(\Theta_1 \times \Theta_2)$, 仲介者を持たない通常の非協力ゲームと考えた時のナッシュ

均衡戦略の結合分布の全体を $\mathcal{D}_{Nash}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ とするとき，

$$\mathcal{D}_{Z,exoNash}(\Theta_1 \times \Theta_2) = \{\sum_{\lambda \in \Lambda} z(\lambda)\sigma_\lambda\,;\, \sigma_\lambda \in \mathcal{D}_{Nash}(\Theta_1 \times \Theta_2),\ \lambda \in \Lambda\}.$$

と表わされる．つまり，仲介者を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡の結合分布は通常のナッシュう均衡の結合分布の一次結合で表わされるのである．従って，ナッシュ均衡戦略さえわかればよいことになる．特に，λ に無関係に同一のナッシュ均衡戦略 $\sigma = \sigma_\lambda$ を選べば $\sigma \in \mathcal{D}_{Z,exoNash}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ であることがわかる．定理 4-3 は定理 4-2 の特別な場合だから当然である．

証明. 補題 4-6' と補題 3-1 とをよく見比べてみれば，各 λ 毎に分布

$$(\{x_1^*(\theta_1/\lambda)\}_{\theta_1 \in \Theta_1},\, \{x_2^*(\theta_2/\lambda)\}_{\theta_2 \in \Theta_2})$$

がナッシュ均衡になっていることがわかる．補題 4-6' と補題 4-6 は同値だから，補題 4-6 が成り立っている．つまり，

$$\sigma = \sum_{\lambda \in \Lambda} z(\lambda)\sigma_\lambda$$

は外生的相関均衡 (X_1^*, X_2^*) の結合分布になっている.（証明終り）

定理 4-3 に対するコメント[72]:

1. 定理 4-3 に依れば特に，アドバイスの集合 Λ の要素の数 $|\Lambda|$ が $\mathcal{D}_{Nash}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素の数 $|\mathcal{D}_{Nash}(\Theta_1 \times \Theta_2)|$ と同じである $(|\Lambda| = |\mathcal{D}_{Nash}(\Theta_1 \times \Theta_2)|)$ とき，$\mathcal{D}_{Nash}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の凸包の任意の要素はあるアドバイス $Z \in \mathcal{R}(\Lambda)$ が存在して $\mathcal{D}_{Z,exoNash}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ の要素となる.（凸包の定義から明らか．§3, 13 頁を参照されたい）.

2. 仲介者を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡はAumann(1974,[5]) の “randomizing structure” が “standard” な場合に相当すると思われる．何故ならば彼は次のように述べているからである．ただし，彼の言う ramdomizing stracture が ”standard” であることの定義は standard な確率論の教科書には出てこない.

> (Aumann 1974, [5], p.78) In the case of two-person games, when the randomizing structure is standard, then it is easily verified that the set of equilibrium payoffs is precisely the convex hull of the Nash equilibrium payoffs.
>
> (Aumann 1987, [7], p.4) By similar methods, it may be seen that any convex combination of Nash equilibria is a correlated equilibrium.

(例 4-8.) 例 1 と同じゲーム（Fudenberg-Tirole のテキストブック ([15], p.54) について，仲介者を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡を求めてみる．プレーヤーの利得行列

[72] Aumann(1974 [5], 1987 [7]) のいう correlated equilibrium の定義と我々の内生的あるいは外生的相関均衡の定義は明確に異なる定式化である．従って，得られる定理も当然異なる.

は次のようであった．

		プレーヤー 2	
		1	2
プレーヤー 1	1	(5, 1)	(0, 0)
	2	(4, 4)	(1, 5)

Table 4-8=Table 4.1

この非協力ゲームのナッシュ均衡は 3 つあり，$\Theta_1 \times \Theta_2$ 上の分布で表わすと

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

ここで，2×2 行列 (p_{ij}) は $p_{ij} := P(X_1^* = i,\, X_2^* = j)$ （$(X_1^*,\, X_2^*)$ はナッシュ均衡）を表す．

ここで，仲介者が登場してアドバイス $Z \in \mathcal{R}(\Lambda)$ を選ぶ．ただし，$\Lambda = \{1,\, 2\}$(2 点集合)．このとき，仲介者を持つ非協力ゲームの外生的相関均衡で通常のナッシュ均衡でない分布は次の 3 つの分布である．

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 - 3z(i)/4 & z(i)/4 \\ z(i)/4 & z(i)/4 \end{pmatrix} = z(i)\sigma_3 + (1 - z(i))\sigma_1,$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} z(i)/4 & z(i)/4 \\ z(i)/4 & 1 - 3z(i)/4 \end{pmatrix} = z(i)\sigma_3 + (1 - z(i))\sigma_2,$$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} z(i) & 0 \\ 0 & 1 - z(i) \end{pmatrix} = z(i)\sigma_1 + (1 - z(i))\sigma_2.$$

ここで，$z(i) := P(Z = i),\, i = 1, 2$ である．

♠ R.J.Aumann の correlated equilibrium について―若干のコメント―

Aumann の業績の一つとされている彼の，同値とされている二つの correlated equilibrium の定義に関して筆者はどうも得心がいかない．くわしくは論文 Kôno(2008, [31]) の discussion の項を参照されたい．本講義録における外生的相関均衡の定義は，次節で述べるベイジアンゲームにおいて，利得関数がタイプに依存しないと仮定した場合のベイジアン・ナッシュ均衡 (定義 5-2, 56 頁) と完全に一致している．Correlated equilibrium の概念が Bayesian Game と関連があることは知られていて，Myerson(1985, [52]) でも指摘してある．しかし，彼の主張は彼のいう incentive-compatibility との関連であり，ベイジアン・ナッシュ均衡と同じだ，という認識がどうも感じられない．確かに，彼は Aumann(1974, [5]) の correlated equilibrium の定義式が incentive-compatibility の定義式の特別な場合（pay-off function がタイプに依存しない場合）であることを次のように述べている．

(p.253) Conditions (7.2) and (7.3) are also the definition of a correlated equilibrium due to Aumann[1974]. Thus, the concept of an incentive-compatible mechanism is just a generalization of Aumann's concept of correlated equilibrium and the two concepts coincide for games with complete information.

しかし，Myerson の言う “incentive-compatible mechanism” は仲介者 (mediator) の戦略であって，プレーヤーの戦略ではないのである．また，彼の言う Aumann の correlated equilibrium の定義は Aumann 1987([7]) に出てくる定義式と同値な Proposition 2.3(p.6) を指していると思われる．しかし，Myerson の論文は 1985 年であり，掲載雑誌が 2 年も前である． Fudenberg-Tirole (1991, [15]) や岡田 (1996, [58]) の教科書が何れも correlated equilibrium の説明を不完備情報ゲーム（ベイジアンゲーム）の項で扱っているのは Myerson に従ったためと思われるが一読しただけでは何故ベイジアンゲームと関係があるのか理解するのは難しい.

§5. 不完備情報ゲーム（ベイジアンゲーム）

不完備情報ゲーム (game with incomplete information)[73]を最初に定式化したのは誰かということについて，多くの文献は 1994 年ノーベル経済学賞を受けた Harsanyi(1967-8, [21]) としているが，Milgrom-Weber(1985, [43]) では，W.Vickrey(1961) Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed-Tenders. J.Finance 16:8-37. を挙げている．Priority が誰に属するかは重要な結果ほど論争の種になるが，重要な結果ではなくても priority のことは絶えず念頭に置いておく習慣だけは身につけておく必要がある．このことは後述する進化ゲームのところでも再び取り上げる (67 頁)．逆に，本当にオリジナルな概念，結果なのか首を傾げたくなるような場合もある．たとえば，Selten(1975, [67], 1994 年ノーベル経済学賞受賞者）の展開形ゲームの再定式化の論文や Myerson(1979,[47], 2007 年度ノーベル経済学賞受賞者）の mechanism desin の話しである．少々云い換えて新しい術語を定義しただけで priority が認められるわけではない.

不完備情報ゲームとはゲームの構成要素の何かがプレーヤーの共有知識になっていない状態をさす．実際には，各プレーヤーの持っている情報が正確には相手に知られていない（自分は知っている）という状況を想定している[74]．この時重要なことはそれら

[73]展開形ゲームにおける不完全情報ゲーム (game with inperfect information) とは異なる概念であるから注意されたい.

[74]ゲーム理論の教科書で説明してある不完備情報ゲームはすべて，展開形ゲームの特別な場合として説明している．しかし，展開形ゲームは動学的ゲームとも呼ばれるように時間的経過（プレーヤーが逐次プレーして行く）を含むゲームにこそ相応しい表現形であるが，ベイジアンゲームはプレーヤーにとってはワンショットのゲームであって展開形ゲームで表わすメリットはあまりない．かと云って標準形ゲームには分類しないようである．本節で説明するように確率変数で表現すれば直感的にも，数学的にもきわめて明瞭に表現できる．Harsanyi ([21]) の原論文と比較されたい．思うに，標準形，展開形という非協力ゲームの分類自体があまり有効ではない，ということではなかろうか．少なくとも，ベイジアンゲームを展開形ゲームとして説明するメリットはほとんどないと考えている．標準形ゲームを多少一般化したと考える

の情報がいつの時点でどの範囲のプレーヤーが知っている情報なのか，自分だけか，相手だけか，全員か，さらに展開形ゲームの場合はいつの時点でその情報が誰に明らかになるのか，を定式化する必要がある．多くの教科書に書かれている応用例を見ると，どうしても内容に引きずられて数学的構造の見通しが悪いという印象がある．数学的構造として定式化する以上はたとえ，主観的認知確率であっても客観的第三者から見て説明できなければならない．本講義録では出来るだけ確率変数を用いて統一的に表現することを試み，その後で個別に主観的にもっともらしい説明をする，という立場をとっている．なお，プレーヤーの数は何人でもよいのであるが，考え方を明確にするために二人ゲームの場合に限って解説する． n 人ゲームの場合に拡張することは容易である．

ベイジアンゲーム (Bayesian Game)

情報の不完備さは利得行列が確定しないところにある，と考える．Harsanyi(1967-8, [21]) は各プレーヤーがタイプに分かれていて，その利得関数はすべてのプレーヤーのタイプに依存して決まっており，そのことは全てのプレーヤーの共有知識である，と仮定する．各プレーヤーは自分のタイプだけは確定的に認識しているが，相手のタイプについては，各プレーヤーが主観確率で推定するか，あるいは客観確率（たとえば自然現象に依存し，すべてのプレーヤーがその確率を客観的に推定できる）等で定まっている，という定式化をすることによって不完備情報ゲームを完備情報ゲームとして扱う，という定式化を行った[75]．このようなゲームをベイジアンゲーム (Bayesian Game) と呼んでいる．しかし，一般には不完備情報ゲームとベイジアンゲームはほとんど同義語として理解されているように思われる[76].

記号：

(1) N：プレーヤーの集合，$|N| = 2$,

(2) $\Theta_n\,;\, n \in N$：プレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ の純戦略の全体 (有限集合)．二人のプレーヤーの純戦略セットの直積 $\Theta_1 \times \Theta_2$ に値を取る確率変数の全体を $\mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ と記す.

(3) $\Lambda_n\,;\, n \in N$：プレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ のタイプを表わすパラメータ集合（有限集合）．$\Lambda_1 \times \Lambda_2$ をタイプ空間と呼ぶことにする．$\Lambda_1 \times \Lambda_2$ に値を取る確率変数の全体を $\mathcal{R}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$ と記す.

(4) $u_n(\theta_1, \theta_2\,;\, \lambda_1, \lambda_2)$：プレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ の利得関数（$\Theta_1 \times \Theta_2 \times \Lambda_1 \times \Lambda_2$ 上で定義された実数値関数）.

これらの概念が一組準備されている時，ベイジアンゲーム (a Bayesian game)

だけで充分である．

[75]折角相手のプレーヤーのタイプを推定するのであるから，相手のタイプにも合わせて戦略を決めてよさそうに思えるが，その場合は利得行列が確定してしまい，その利得行列の下でのナッシュ均衡戦略が最適応答戦略となるから，ゲーム理論として新しい発展がない．

[76]不完備情報ゲーム＝ベイジアンゲーム，という理解は Fudenberg-Tirole (1991, [15])，ギボンズ (1982, [16]) に従った．しかし，Selten(1983, [70]) で用いられている “the game with incomplete information” は Harsanyi のそれとは異なっており，本文中にも文献表にも Harsanyi を引用していない．

$$\Gamma := (\{\Theta_n\},\, \{\Lambda_n\},\, \{u_n(\theta_1, \theta_2\,;\, \lambda_1, \lambda_2)\}\,;\, n = 1, 2)$$

と記すことにする．

通常の標準形ゲームとの大きな違いは，ゲームを始める前に（プレーヤーが戦略を選択する前に）各プレーヤーはタイプに関して予めある程度の不完全な情報を持っている，と仮定することである．基本的には，自分のタイプについては認識しており，相手のタイプに関しては確率的にしか推定できない，という仮定である．数学的には相手のタイプは認識できるが，自分のタイプについては不確かである，という定式化も可能である[77]．情報不完備ゲームといっても数学的に定式化した段階で数学的解析に堪えるだけの情報は完備している．

この情報に関して Harsanyi(1967-68, [21]) は次のような二通りの定式化を行っている．ひとつは主観的情報であり，もうひとつは客観的情報である．

ベイジアンゲームの原点である彼の論文の出発点ではプレーヤーのタイプの違いについて

each player has a subjective probability over the alternative possibilities(p.159)

となっているのであるが，そのすぐ後の説明では

it is assumed that these probability distributions entertained by the different players are mutually “consistent”.

と consistency assumption を課している．そうすると最初の設定である，各プレーヤーの相手のタイプに対する主観的確率評価が変質してしまい，

In cases where the consistency assumption holds, the original game can be replaced by a game where nature first conducts a lottery.

とあるように自然が確率分布を与えてしまっていて各プレーヤーの主観的確率評価がけし飛んでしまっている．

タイプの違いについて最初に自然が確率分布を決めてしまう，という設定はその後のベイジアンゲームを解説しているかなり多くの教科書に踏襲されている．Fudenberg-Tirole の本 ([15]) やギボンズの本 ([16]) では consistency assumption を課さずに両者を融合したような説明をしながら結局主観的確率評価は consistency assumption を満たしていると仮定するのであるが，プレーヤーの数が多くなるほどあまりにも非現実的な仮定と思われる．本節では consistency assumption を課さずに議論を進める．

彼の定式化を我々の立場から，すなわち，確率変数を用いて表現する．

(1) 主観的情報：プレーヤー n が抱いている $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ 上の主観的確率分布．タイプ空間 $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ に値を取る確率変数 $\vec{Z}_n$ で表わすことにする．$\vec{Z}_n = (Z_{n1}, Z_{n2})$ とあらわされる．ここで，Z_{ni} は $\Lambda_i, (i = 1, 2)$ に値を取る確率変数．各プレーヤーは自分のタイプ

[77] たとえば，おんどりは自分の頭の上についた「とさか」の大きさは見えないが，相手のそれは目で見て確認できるであろう．

は認識していると仮定するから，Z_{nn}, $n = 1, 2$ は導入する必要はないのであるが[78]，後の数学的展開と整合性を保つために導入しておく．

(2) 客観的情報：$\Lambda_1 \times \Lambda_2$ 上の客観的確率分布が予め与えられていると仮定する．タイプ空間 $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ に値を取る確率変数 $\vec{Z}$ で表わすことにする．$\vec{Z}$ は自然が予め与え，各プレーヤーはその分布に関しては共通に認識していると仮定する．

Harsanyi は (1) と (2) を同じ数学的定式化と看做すためにいわゆる consistency assumption を課しているのである．

定義 5-1. (1) の主観的情報 $\vec{Z}_n\,(n = 1, 2)$ が **consistency assumption** を満たすとは $P(\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2) = 1$ が成り立つときをいう．

以上のような定式化の下にまず，consistency assumption を仮定しない主観的情報 $\vec{Z}_n = (Z_{n1}, Z_{n2}) \in \mathcal{R}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$, $(n = 1, 2)$ を持つベイジアンゲーム (a Bayesian game)

$$\Gamma := (\{\Theta_n\}, \{\Lambda_n\}, \{u_n(\theta_1, \theta_2\,;\,\lambda_1, \lambda_2)\}\,;\, n = 1, 2)$$

を考える．通常の教科書では分布で表現されているベイジアンゲームの戦略を我々はあくまで選択肢の集合に値を取る確率変数で表現する．すなわち，プレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ の戦略とは Θ_n に値を取る確率変数 $X_n \in \mathcal{R}(\Theta_n)$ を一つ選ぶことである．ベイジアンゲームにおいてはこれらの戦略の間の確率構造は次のような条件件を満たしていると仮定する[79]．なお，これらの仮定は§4-2 の代理人を持つ非協力ゲームの定式化 (29 頁) と全く同様であり，consistency assumption の下では完全に同一の仮定である．唯一の違いは，代理人を持つ非協力ゲームの利得関数が唯ひとつ定まっている，つまり完全情報である，ということである．そのことは Myerson(1985, [52], p252) の論文の §7 が "Correlated equilibria of games with complete information" となっていることからも明らかである．ただし，書いてある中身は本講義録の主張とはかけ離れている（50 頁を参照されたい）．

仮定 (A-1): $(X_1, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ は $\vec{Z}_n$, $(n = 1, 2)$ に関して条件付き独立である．すなわち，任意の $\theta_1 \in \Theta_1$, $\theta_2 \in \Theta_2$ と $\lambda_1 \in \Lambda_1$, $\lambda_2 \in \Lambda_2$ such that $P(Z_{n1} = \lambda_1,\, Z_{n2} = \lambda_2) > 0$ に対して

$$P(X_1 = \theta_1,\, X_2 = \theta_2 / Z_{n1} = \lambda_1,\, Z_{n2} = \lambda_2) = \\ P(X_1 = \theta_1 / Z_{n1} = \lambda_1,\, Z_{n2} = \lambda_2) P(X_2 = \theta_2 / Z_{n1} = \lambda_1,\, Z_{n2} = \lambda_2)$$

が成り立つ．

仮定 (A-2): プレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ の戦略は彼/彼女のタイプのみに依存する．つまり，各プレーヤーは自分のタイプは認識しているが，相手のタイプに関する情報は持って

[78]実際，後で述べる consistency assumption を仮定しないベイジアン・ナッシュ均衡の定義は自分のタイプに関する周辺分布に依存しない．

[79]通常の教科書で，分布で表現されているベイジアンゲームの確率構造はここで仮定されていることが暗黙の内に，あるいは直感的に想定されている．

いない（不完備な情報しか持っていない）と仮定する．すなわち，任意の $\theta_1 \in \Theta_1,\, \theta_2 \in \Theta_2$ と $\lambda_1 \in \Lambda_1,\, \lambda_2 \in \Lambda_2$ such that $P(Z_{n1} = \lambda_1,\, Z_{n2} = \lambda_2) > 0$ に対して

(i) $P(X_1 = \theta_1/Z_{n1} = \lambda_1,\, Z_{n2} = \lambda_2) = P(X_1 = \theta_1/Z_{n1} = \lambda_1)$,

(ii) $P(X_2 = \theta_2/Z_{n1} = \lambda_1,\, Z_{n2} = \lambda_2) = P(X_2 = \theta_2/Z_{n2} = \lambda_2)$, .

仮定 (A-3):

(i) 任意の $X_1 \in \mathcal{R}(\Theta_1)$，$\theta_1 \in \Theta_1,\, \lambda_1 \in \Lambda_1$ に対して

$$P(X_1 = \theta_1/Z_{11} = \lambda_1) = P(X_1 = \theta_1/Z_{21} = \lambda_1)(=: x_1(\theta_1/\lambda_1) \text{ とおく}),$$

(ii) 任意の $X_2 \in \mathcal{R}(\Theta_2)$，$\theta_2 \in \Theta_2,\, \lambda_2 \in \Lambda_2$ に対して

$$P(X_2 = \theta_2/Z_{12} = \lambda_2) = P(X_2 = \theta_2/Z_{22} = \lambda_2)(=: x_2(\theta_2/\lambda_2) \text{ とおく})$$

が成り立つ．

本講義録の大部分の結果（知られている殆どの結果がそうである）は consistency assumption を仮定しているから，仮定 (A-3) は不要なのであるが，ギボンズ (1992/1995, [16] 150 頁) のベイジアン・ナッシュ均衡戦略の定義では consistency assumption が仮定されていないから，この仮定 (A-3) が暗黙の内に仮定されていなければばならない．逆に言うと仮定 (A-3) さえあれば，consistency assumption の仮定の下で得られている従来の結果の大部分は consistency assumption の仮定なしで成り立つのではないかと思われる．もちろん，自然がタイプの分布を決める，という場合は状況設定から，つまり数学的要請ではなく consistency assumption を仮定するのが自然である．また，ベイジアンゲームを §7(96 頁) で述べる展開形ゲームで表わそうとした場合，consistency assumption を仮定しないと極めて複雑な樹形になる．ただし，その場合 §7 節の仮定 7-4(109 頁) で定式化する我々の意味での展開形ゲームの範疇にははいらない．一方，展開形ゲームのことを念頭に置かずに，上記のように確率変数を用いて定式化すると何れにしろさしたる困難は生じない．なまじい展開形ゲームを用いて視覚的に理解しようとすると却って数学的構造を理解するのが困難である．

注意 5-1. 主観的情報が consistency assumption を満たすと仮定する場合，数学的には，客観的情報が与えられている場合と完全に区別がつかない同じ定式化となる．ただ，主観的情報が本当に consistency assumption を満たすとはちょっと考えられないので，あくまでモデルをやさしくするための人工的仮定であると理解する方がよいと筆者は考える．

記号：

$$\mathcal{R}_{\vec{Z}_1,\vec{Z}_2}(\Theta_1 \times \Theta_2) :=$$

$$\{(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}(\Theta_1 \times \Theta_2) : (X_1,\, X_2) \text{ such that 仮定 (A-1), (A-2), (A-3) を満たす}\}.$$

プレーヤー 1 が戦略 X_1 を，プレーヤー 2 が戦略 X_2(ただし，$(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}_{\vec{Z}_1,\vec{Z}_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$) を選んだ時のプレーヤー 1 の期待利得　$\overline{u}_1(X_1,\, X_2)$ とプレーヤー 2 の期待利得 $\overline{u}_2(X_1,\, X_2)$ はそれぞれ，

$$\overline{u}_1(X_1,\, X_2) := E[u_1(X_1,\, X_2\,;\, Z_{11}, Z_{12})], \quad \overline{u}_2(X_1,\, X_2) := E[u_2(X_1,\, X_2\,;\, Z_{21}, Z_{22})]$$

で表される．このとき，

ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 (Bayesian-Nash equilibrium) は，代理人を持つ非協力ゲームの場合 (30 頁) と全く同様に，次のように定義できる．

定義 5-2. $\mathcal{R}_{\vec{Z}_1,\vec{Z}_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ に属する戦略プロファイル $(X_1^*,\, X_2^*)$ が**ベイジアン・ナッシュ均衡戦略**であるとは次の２つの条件を満たすことである．

(i) $\forall X_1 \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ such that $(X_1,\, X_2^*) \in \mathcal{R}_{\vec{Z}_1,\vec{Z}_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)\,;\; \overline{u}_1(X_1^*,\, X_2^*) \geq \overline{u}_1(X_1,\, X_2^*)\,,$

(ii) $\forall X_2 \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ such that $(X_1^*,\, X_2) \in \mathcal{R}_{\vec{Z}_1,\vec{Z}_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)\,;\; \overline{u}_2(X_1^*,\, X_2^*) \geq \overline{u}_2(X_1^*,\, X_2)\,.$

注意 5-2. 定義 5-2 を分布の言葉で表現すると通常の教科書に書いてあるベイジアン・ナッシュ均衡戦略と同値な表現が得られる．次の補題を参照されたい．

$(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}_{\vec{Z}_1,\vec{Z}_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ に対してプレーヤー n, $(n = 1, 2)$ 戦略 $X_n \in \mathcal{R}(\Theta_n)$ の分布は Θ_n 上の確率分布の組 $\{x_n(\theta_n/\lambda_n)\}_{\theta_n \in \Theta_n}$, $\lambda_n \in \Lambda_n$ によって一意に定まる．(この分布の組は代理人を持つ非協力ゲームのところですでに **行動戦略** (31 頁) と呼ぶことにした）．

さらに，$P(Z_{n1} = \lambda_1, Z_{n2} = \lambda_2) = z_n(\lambda_1,\, \lambda_2)$, $(n = 1, 2)$ とおく．

プレーヤー１が戦略 X_1 を，プレーヤー２が戦略 X_2 を選んだ時のプレーヤー１の期待利得 $\overline{u}_1(X_1,\, X_2)$ とプレーヤー２の期待利得 $\overline{u}_2(X_1,\, X_2)$ は行動戦略を用いてそれぞれ次のように表される．

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1(X_1,\, X_2) &= \sum_{\theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1, \theta_2\,;\, \lambda_1, \lambda_2) \\
&\qquad \times P(X_1 = \theta_1,\, X_2 = \theta_2,\, Z_{11} = \lambda_1, Z_{12} = \lambda_2) \\
&= \sum_{\theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1, \theta_2\,;\, \lambda_1, \lambda_2) \\
&\qquad \times P(X_1 = \theta_1, X_2 = \theta_2 / Z_{11} = \lambda_1, Z_{12} = \lambda_2) z_1(\lambda_1, \lambda_2) \\
&= \sum_{\theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1, \theta_2\,;\, \lambda_1, \lambda_2) \\
&\qquad \times P(X_1 = \theta_1 / Z_{11} = \lambda_1, Z_{12} = \lambda_2) P(X_2 = \theta_2 / Z_{11} = \lambda_1, Z_{12} = \lambda_2) z_1(\lambda_1, \lambda_2) \\
&\qquad \text{（仮定 (A-1) を用いた）} \\
&= \sum_{\theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1, \theta_2\,;\, \lambda_1, \lambda_2) \\
&\qquad \times P(X_1 = \theta_1 / Z_{11} = \lambda_1) P(X_2 = \theta_2 / Z_{12} = \lambda_2) z_1(\lambda_1, \lambda_2) \\
&\qquad \text{(仮定 (A-2) を用いた)} \\
&= \sum_{\theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2} u_1(\theta_1, \theta_2\,;\, \lambda_1, \lambda_2) x_1(\theta_1/\lambda_1) x_2(\theta_2/\lambda_2) z_1(\lambda_1, \lambda_2) \\
&\qquad \text{(仮定 (A-3) を用いた).}
\end{aligned}$$

同様に,

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_2(X_1,\,X_2) &= \sum_{\theta_1\in\Theta_1,\theta_2\in\Theta_2}\ \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1,\lambda_2\in\Lambda_2} u_2(\theta_1,\theta_2\,;\lambda_1,\lambda_2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times P(X_1=\theta_1,\,X_2=\theta_2,\,Z_{21}=\lambda_1,Z_{22}=\lambda_2) \\
&= \sum_{\theta_1\in\Theta_1,\theta_2\in\Theta_2}\ \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1,\lambda_2\in\Lambda_2} u_2(\theta_1,\theta_2\,;\lambda_1,\lambda_2)x_1(\theta_1/\lambda_1)x_2(\theta_2/\lambda_2)z_2(\lambda_1,\lambda_2).
\end{aligned}
$$

このとき，定義 5-2 と同値な次の補題が得られる．

補題 5-1. 行動戦略プロファイル $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\,;\,\lambda_1\in\Lambda_1;\,\{x_2^*(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\,\lambda_2\in\Lambda_2)$ 　がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は，次の 2 つの条件を満たすことである．ただし，一般に $\mathcal{P}(M)$ は有限集合 M 上の確率分布全体を表す．

(i) $\forall\lambda_1\in\Lambda_1,\,\forall\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\in\mathcal{P}(\Theta_1)$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z_1(\lambda_1,\lambda_2) \\
&\qquad \geq \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1(\theta_1)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z_1(\lambda_1,\lambda_2).
\end{aligned}
$$

(ii) $\forall\lambda_2\in\Lambda_2,\,\forall\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\in\mathcal{P}(\Theta_2)$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} u_2(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z_2(\lambda_1,\lambda_2) \\
&\qquad \geq \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} u_2(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)x_2(\theta_2)z_2(\lambda_1,\lambda_2).
\end{aligned}
$$

上記の関係式を条件付き平均つまり，(i) の両辺を $P(Z_{11}=\lambda_1)=\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}z_1(\lambda_1,\lambda_2)$ で割り，(ii) の両辺を $P(Z_{22}=\lambda_2)=\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}z_2(\lambda_1,\lambda_2)$ で割って $z_1(\lambda_1,\lambda_2)/P(Z_{11}=\lambda_1)=:z_1(\lambda_2/\lambda_1)$, $z_2(\lambda_1,\lambda_2)/P(Z_{22}=\lambda_2)=:z_2(\lambda_1/\lambda_2)$ で表わせば通常の教科書に書いてある条件式となる．すなわち，

補題 5-1'. 行動戦略プロファイル $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\,;\,\lambda_1\in\Lambda_1;\,\{x_2^*(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\,\lambda_2\in\Lambda_2)$ 　がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は，次の 2 つの条件を満たすことである．

(i) $\forall\lambda_1\in\Lambda_1,\,\forall\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\in\mathcal{P}(\Theta_1)$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z_1(\lambda_2/\lambda_1) \\
&\qquad \geq \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1(\theta_1)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z_1(\lambda_2/\lambda_1).
\end{aligned}
$$

(ii) $\forall\lambda_2\in\Lambda_2,\,\forall\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\in\mathcal{P}(\Theta_2)$,

$$
\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} u_2(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z_2(\lambda_1/\lambda_2)
$$

$$\geq \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} u_2(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)x_2(\theta_2)z_2(\lambda_1/\lambda_2).$$

この式を見れば分かるように，Z_{11} と Z_{22} の分布には関係しない．つまり，予め与えなくてよい．しかし，定式化において確率構造を未定のままにしておくのはあまり感心しない．確率構造を未定のまま定式化するから仮定 (A-3) が必要なことが見落とされてしまうのである．ただ，含意としては，自分のタイプは認識しているから，そのタイプ毎に均衡解を求めている，という意味で補題 5-1' の方が分かりやすいかも知れない．

ナッシュ均衡戦略の判定条件としてベイジアン・ナッシュ均衡戦略の場合も補題 3-2(15 頁), 補題 4-4(33 頁) に対応する次の補題が有効である．

補題 5-2. $\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} z_1(\lambda_1,\,\lambda_2) > 0$ であるようなすべての $\lambda_1\in\Lambda_1$ に対して

$$\Theta_1(X_2^*/\lambda_1) := \{\theta_1\in\Theta_1\,;\,\max_{i\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} u_1(i,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z_1(\lambda_1,\,\lambda_2)$$

$$= \sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z_1(\lambda_1,\,\lambda_2)\},$$

（各 $\lambda_1\in\Lambda_1$ 毎に純戦略の範囲で best response を求めているのである．）

$\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} z_2(\lambda_1,\,\lambda_2) > 0$ であるようなすべての $\lambda_2\in\Lambda_2$ に対して

$$\Theta_2(X_1^*/\lambda_2) := \{\theta_2\in\Theta_2\,;\,\max_{j\in\Theta_2}\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} u_2(\theta_1,\,j\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)z_2(\lambda_1,\,\lambda_2)$$

$$= \sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} u_2(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)z_2(\lambda_1,\,\lambda_2)\}$$

とおく．このとき，$(X_1^*,\,X_2^*)\in\mathcal{R}_{\vec{Z}_1,\vec{Z}_2}(\Theta_1\times\Theta_2)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は，X_1^* の分布 $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\,;\,\lambda_1\in\Lambda_1)$ と X_2^* の分布 $(\{x_2^*(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\,\lambda_2\in\Lambda_2)$ が次の条件を満たすことである．

(i) $\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2} z_1(\lambda_1,\,\lambda_2) > 0$ であるようなすべての $\lambda_1\in\Lambda_1$ に対して

$$\{\theta_1\in\Theta_1\,;\,x_1^*(\theta_1/\lambda_1)>0\}\subset\Theta_1(X_2^*/\lambda_1)$$

が成り立つ．

(ii) $\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} z_2(\lambda_1,\,\lambda_2) > 0$ であるようなすべての $\lambda_2\in\Lambda_2$ に対して

$$\{\theta_2\in\Theta_2\,;\,x_2^*(\theta_2/\lambda_2)>0\}\subset\Theta_2(X_1^*/\lambda_2)$$

が成り立つ．

証明. 補題 5-2 の証明は補題 4-4(33 頁) のそれと全く同様であるから読者自ら試みられたい.

ベイジアン・ナッシュ均衡戦略の計算例

通常のゲーム理論の教科書では最も簡単な例，二人ゲーム，2 点集合からなる純戦略セットとタイプ空間の場合ですらすべてのベイジアン・ナッシュ均衡戦略を求めようという気持ちにとぼしく，直感的に自明に求められる例しか説明していないように感じられるが，条件式をきちんと行動戦略で表わせばそれほど難しい計算ではない．以下では，まず，二人ゲーム，2 点集合からなる純戦略セットとタイプ空間の場合の一般論を述べてから具体例について説明する.

純戦略セットとタイプ空間がふたつの 2 点集合の直積だから，すべての行動戦略 $\{x_n(\theta_n)\}_{\theta_n\in\Theta_n} \in \mathcal{P}(\Theta_n)$, $(n = 1, 2)$ は $x_n(2) = 1 - x_n(1)$ と表わされれ，プレーヤー n の行動戦略は二つのパラメーター $x_n(1/1)$ と $x_n(1/2)$ を $0 \leq x_n(1/1), x_n(1/2) \leq 1$ の範囲で自由に与えれば決まる．従って，このゲームのひとつの戦略プロファイルを $(x_1(1/1), x_1(1/2)\,; x_2(1/1), x_2(1/2))$ で表わす．代理人を持つ非協力ゲームの場合に示した補題 4-5(39 頁) と同様に次の補題が補題 5-1 から容易に導かれる.

補題 5-3. $\Theta_1 = \Theta_2 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = \{1, 2\}$ (2 点集合) の場合，$(X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{R}_{\bar{Z}_1,\bar{Z}_2}(\Theta_1 \times \Theta_2)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は，X_1^* の分布 $(x_1^*(1/1), x_1^*(1/2))$ と X_2^* の分布 $(x_2^*(1/1), x_2^*(1/2))$ が次の条件を満たすことである.

$$
\begin{aligned}
&A_n(\lambda_1, \lambda_2) := u_n(1, 1\,; \lambda_1, \lambda_2) + u_n(2, 2\,; \lambda_1, \lambda_2) - u_n(1, 2\,; \lambda_1, \lambda_2) - u_n(2, 1\,; \lambda_1, \lambda_2),\\
&(n = 1, 2),\\
&B(\lambda_1, \lambda_2) := u_1(1, 2\,; \lambda_1, \lambda_2) - u_1(2, 2\,; \lambda_1, \lambda_2),\\
&C(\lambda_1, \lambda_2) := u_2(2, 1\,; \lambda_1, \lambda_2) - u_2(2, 2\,; \lambda_1, \lambda_2),
\end{aligned}
$$

とおく.

以上の記号を使って補題 5-1 の条件 (i), (ii) を書き直すと，

(i-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(x_1^*(1/1) - x)(&A_1(1, 1)z_1(1, 1)x_2^*(1/1) + A_1(1, 2)z_1(1, 2)x_2^*(1/2)\\
&+ B(1, 1)z_1(1, 1) + B(1, 2)z_1(1, 2)) \geq 0 \qquad (28)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

(i-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x_1^*(1/2) - x)(A_1(2,1)z_1(2,1)x_2^*(1/1) + A_1(2,2)z_1(2,2)x_2^*(1/2) + B(2,1)z_1(2,1) + B(2,2)z_1(2,2)) \geq 0 \tag{29}$$

が成り立つ．

(ii-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x_2^*(1/1) - x)(A_2(1,1)z_2(1,1)x_1^*(1/1) + A_2(2,1)z_2(2,1)x_1^*(1/2) + C(1,1)z_2(1,1) + C(2,1)z_2(2,1)) \geq 0 \tag{30}$$

が成り立つ．

(ii-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x_2^*(1/2) - x)(A_2(1,2)z_2(1,2)x_1^*(1/1) + A_2(2,2)z_2(2,2)x_1^*(1/2) + C(1,2)z_2(1,2) + C(2,2)z_2(2,2)) \geq 0 \tag{31}$$

が成り立つ．

経済学の具体例ではタイプが異なっても利益が異なるだけで質的に違うという印象が薄い．その点，社会学に適用した場合は相手のタイプや利得が質的違いを反映している場合が多いから，数値が違うだけで結果の含意が全く異なる印象を受けることが多い．つまりベイジアンゲームはもっと社会学に応用されてよいと筆者は考えるが，数理モデルに対する許容度は残念ながら経済学の分野程ではないようである．ここでは患者と看護師の関係を例として取り上げてみた．

すなわち，あなたが病院に入院して看護師さんと出来るだけよい対人関係を築こうと考えたとする．当然看護師さんも入院してきた患者と出来るだけよい関係を築こうと考えるはずである．次のような例を考えてみよう．

患者-看護師関係のベイジアンゲーム[80]

この例では患者に二通りのタイプ（同調型と非同調（唯我独尊型）），看護師にも二通りのタイプ（同調型と非同調型（信念型））があり，それぞれの組み合わせで利得行列が異なる場合に，どのような選択が均衡戦略（ベイジアン・ナッシュ均衡）となるか，どのようにすればよりよい患者ー看護師関係を築けるかを静学的ゲーム理論[81]の立場から考察する．

[80]第 48 回数理社会学会 (2009.9.19-20．北星学園大学（札幌市)) において発表した内容に手を加えた．特に，当該発表には仮定に多少の誤解があり，結果的に consistency assumption を仮定していたが，本項では仮定していない．

[81]時間発展を考慮しないゲーム理論を静学的理論 (static theory), 考慮する場合を動学的理論 (dynamic theory) と呼ぶようである．標準形ゲーム，ベイジアンゲームは静学的ゲーム理論であり，展開形ゲームでプレーに時間的順序がある場合は動学的ゲーム理論である．本講義録では扱わないが，レプリケーター

タイプ分けとその含意：患者と看護師はそれぞれ２つの選択肢（同調＝１か非同調＝２）を持つとする．ここで，タイプの解釈であるが，患者については２種類のタイプを持つグループがあり，看護師は確定的には患者のタイプを知らないとする．患者は自分のタイプは知っていて，看護師には２種類のタイプの看護師がいることは知っているが自分の担当の看護師さんがどちらのタイプで接してくれるかを確定的には知らないと考える．看護師のタイプは職業的訓練を受けた一人の看護師が患者に対して２種類の接し方（タイプ）を自分の判断で適時使い分けることができると考える[82].

♣ 患者（プレーヤー１）のタイプ１（同調型）:

相手のタイプに合わせる性格．従って，利得行列は調整型ゲーム $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ で表される．

♠ 患者（プレーヤー１）のタイプ２（非同調型）:

相手とは順位関係が定まる方を好む性格. 従って, 利得行列は反調整型ゲーム $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ で表される．ただし，本質的仮定ではないが便宜上 $a_1 > a_2 > 0$ を仮定する．

♡ 看護師（プレーヤー２）のタイプ１（同調型）:

相手のタイプに合わせる性格．従って，利得行列は調整型ゲーム $\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ で表される．

♢ 看護師（プレーヤー２）のタイプ２（非同調型）:

相手とは順位関係が定まる方を好む性格. 従って, 利得行列は反調整型ゲーム $\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$

で表される．ただし，本質的仮定ではないが便宜上 $b_1 > b_2 > 0$ を仮定する．なお，反調整型ゲームのパラメーターの大小関係について患者と看護師では異なることに注意されたい．理由は数学的結論がより単純に表現出来るようにするためである．

互いのタイプが同じ場合，そのタイプが 1 であれば互いに同じ戦略を取るのがナッシュ均衡戦略であり，そのタイプが 2 であれば互いに相手とは異なる戦略を取るのがナッシュ均衡戦略であることがわかる．

ダイナミックスは時間を独立変数とする微分方程式系であるから，その名の通り動学的ゲーム理論である．本講義録では通常のゲーム理論の教科書では展開形ゲーム理論として扱われるベイジアンゲームも本項で示すように可能な限り標準形ゲーム理論と同様な定式化を行って分析するつもりなので静学的か動学的かは本質的違いではないと考えている．実際，ベイジアンゲームは本講義録 §7 (96 頁) で我々が定義する本質的展開形ゲームではないから，展開形ゲームで表現し，分析するメリットは殆どないと考えられる．

[82]看護師の方も 2 種類の違うタイプを持つ看護師さんがいる，と仮定することもできる．その場合，タイプの分布は客観的に決まると考える方が自然であろう．その場合は当然，consistency assumption が成り立つと仮定するのが自然である．

さて，二つのタイプが組み合わされると結果としてどのような利得行列になるだろうか．両者のタイプが一致すれば共に本来の利得が得られ，タイプが一致しない場合は互いに消耗して正の利得のはずが負になると仮定して考えてみよう．つまり,（患者-看護師）の利得行列はそれぞれのタイプの組み合わせにより次のようになると予想される．ただし，$(p > 0,\ \ q > 0)$ は消耗の度合を表すパラメーターである．

¶ タイプ $(1,1)$：

	1	2
1	$(a_1,\, b_1)$	$(0, 0)$
2	$(0, 0)$	$(a_2,\, b_2)$

¶ タイプ $(1,2)$：

	1	2
1	$(-pa_1,\, 0)$	$(0,\, -qb_1)$
2	$(0,\, -qb_2)$	$(-pa_2,\, 0)$

¶ タイプ $(2,1)$：

	1	2
1	$(0,\, -qb_1)$	$(-pa_2,\, 0)$
2	$(-pa_1,\, 0)$	$(0,\, -qb_2)$

¶ タイプ $(2,2)$：

	1	2
1	$(0,\, 0)$	$(a_2,\, b_1)$
2	$(a_1,\, b_2)$	$(0,\, 0)$

Table 5-1

患者-看護師関係のベイジアン・ナッシュ均衡戦略

さて，上記の患者-看護師関係のベイジアンゲームのベイジアン・ナッシュ均衡戦略を求めるとどうなるであろうか．

均衡は互いのタイプをどのように推定するか，つまり，$\Lambda_1 \times \Lambda_2$ 上の分布 $\{z_n(\lambda_1, \lambda_2)\}_{\lambda_1,\lambda_2=1,2}$ によって異なり得る．以下では自明な場合を除くために $0 < P(Z_{n1} = 1) = z_n(1,1) + z_n(1,2) < 1$, $0 < P(Z_{n2} = 2) = z_n(1,2) + z_n(2,2) < 1$, $(n = 1,2)$ を仮定する．

得られた結果とその含意：

命題 5-1.

(1) 行動戦略

$(x_1^*(1/1),\, x_1^*(1/2)\,;\, x_2^*(1/1),\, x_2^*(1/2)) = (0,1;0,1), (0,1;1,0), (1,0;0,1), (1,0;1,0)$

はベイジアン・ナッシュ均衡戦略ではない．つまり，互いに分離戦略 (31 頁) をとると均衡戦略に達することができない．

（含意）患者は自分のタイプによって行動戦略が異なるのは自然であるが，看護師がたとえ患者によかれと思ってタイプによって戦略を使い分けること（分離戦略）はよい結果を生まない，ということを意味するように思われる．職業的訓練を経ている看護師さんは自分本来のタイプに関わらず同じ戦略を選ぶ（一括戦略，31 頁) 方が均衡戦略に達する可能性が大きい．

(2) 次に，どのような場合にベイジアン・ナッシュ均衡戦略が得られるかを考える．均衡戦略の存在は多分に $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ 上の分布 $\{z_n(\lambda_1, \lambda_2)\}_{\lambda_1,\lambda_2=1,2}\, (n = 1, 2)$ に依存する．

通常のベイジアンゲームの定式化とは異なり，consistency assumption を課さない[83]から，自然が与えた所与の分布とは考えない．従って，患者，看護師がよりよい期待利得を求めて相手のシグナル等を参考に自分の信念（主観確率）を変えることが可能であると考えてみよう．

互いのタイプに対する推定（主観確率）は分析の出発時点で既に次の条件を満たしていると仮定する．

仮定 (1)：
$z_1(1,1),\ z_2(1,1) \geq \max\{pz_1(1,2),\ qz_2(2,1)\}$ かつ
$z_1(2,2),\ z_2(2,2) \geq \max\{pz_1(2,1),\ qz_2(1,2)\}$.

このとき，行動戦略
$(x_1^*(1/1),\, x_1^*(1/2)\,;\, x_2^*(1/1),\, x_2^*(1/2) =$
(i) $(0,1;0,0)$, (ii) $(1,0;1,1)$, (iii) $(0,0;0,1)$, (iv) $(1,1;1,0)$
はそれぞれベイジアン・ナッシュ均衡戦略である．なお，このときの期待利得はそれぞれ
患者の期待利得：
(i) $u_1 = a_2(z_1(1,1) + z_1(2,2) - pz_1(1,2) - pz_1(2,1))$,
(ii) $u_1 = a_1(z_1(1,1) + z_1(2,2) - pz_1(1,2) - pz_1(2,1))$,
(iii) $u_1 = a_2z_1(1,1) + a_1z_1(2,2)$,
(iv) $u_1 = a_1z_1(1,1) + a_2z_1(2,2)$,
看護師の期待利得：
(i) $u_2 = b_2z_2(1,1) + b_1z_2(2,2)$,
(ii) $u_2 = b_1z_2(1,1) + b_2z_2(2,2)$,
(iii) $u_2 = b_2(z_2(1,1) + z_2(2,2) - qz_2(1,2) - qz_2(2,1))$,
(iv) $u_2 = b_1(z_2(1,1) + z_2(2,2) - qz_2(1,2) - qz_2(2,1))$
である．

（含意）患者は自分のタイプに従ってベストをつくし，看護師の側のみタイプに関わらず一定の戦略を取ることにって得られる均衡戦略は (i) と (ii) である．ことのき，さらに看護師のタイプを見極める患者の条件付き主観確率 $P(Z_{12} = j/Z_{11} = i),\ i \neq j$ は操作可能であると考えられる．同様に，患者のタイプを見極める看護師の条件付き主観確率 $P(Z_{21} = j/Z_{22} = i),\ i \neq j$ は操作可能であると考えられる．結果として患者は $z_1(1,2) = z_1(2,1) = 0$ となるように，看護師は $z_2(1,2) = z_2(2,1) = 0$ となるようにすることによってそれぞれの期待利得を高めることが可能であると考えられる．大切なことはタイプのミスマッチが起こらないようにすることであり，患者はありのまま（つまり自分のタイプに従って），看護師はタイプにかかわらず一定の態度で患者に接するのがよい，という極めて常識的な結論が厳密に定式化できたことになる．ただし，出発の時点であまりにもミスマッチがひどい場合（つまり仮定 (1) が満たされていない場合），こ

[83]consistency assumption を仮定しないまま分析を進めている例は他の文献ではほとんど見当たらない．

の命題は成立しないことに注意されたい．

(3) 今度は仮定 (1) とは真逆のことを仮定してみる．
仮定 (2)：
$z_1(1,1),\ z_2(1,1) < \min\{pz_1(1,2),\ qz_2(2,1)\}$ かつ
$z_1(2,2),\ z_2(2,2) < \min\{pz_1(2,1),\ qz_2(1,2)\}$.

このときは，$x_1^*(1/1),\ x_1^*(1/2),\ x_2^*(1/1),\ x_2^*(1/2) = 0\,\mathrm{or}\,1$ (展開形ゲームと考えた時の純戦略）の範囲でベイジアン・ナッシュ均衡戦略は存在しない．

なお，$\alpha = a_2/(a_1+a_2),\ \beta = b_2/(b_1+b_2)$ とおくと，仮定 (1)，(2) に関わらず，混合戦略（一括戦略）として $(x_1^*(1/1),\ x_1^*(1/2)\,;\ x_2^*(1/1),\ x_2^*(1/2)) = (\beta,\beta;\alpha,\alpha)$ はベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，そのときの期待利得は $u_1 = \alpha a_1(z_1(1,1)+z_1(2,2)-pz_1(1,2)-pz_1(2,1)),\ u_2 = \beta b_1(z_2(1,1)+z_2(2,2)-qz_2(1,2)-pz_2(2,1))$ となる．仮定 (2) の下では負の期待利得のベイジアン・ナッシュ均衡解しか存在しないことがわかる．つまり，相手のタイプと自分のタイプがミスマッチするような推測をすると最悪な結果となることがわかる．

命題 5-1 の証明. 補題 5-3 の条件を具体的に書き下すと次のようになる．

$A_1(1,1) = a_1+a_2,\ A_1(1,2) = -p(a_1+a_2),$
$A_1((2,1) = p(a_1+a_2),\ A_1(2,2) = -(a_1+a_2).$
$B(1,1) = -a_2,\ B(1,2) = pa_2,\ B(2,1) = -pa_2,\ B(2,2) = a_2.$

$A_2(1,1) = b_1+b_2,\ A_2(1,2) = q(b_1+b_2),$
$A_2((2,1) = -q(b_1+b_2),\ A_2(2,2) = -(b_1+b_2).$
$C(1,1) = -b_2,\ C(1,2) = -qb_2,\ B(2,1) = qb_2,\ B(2,2) = b_2,$

だから，条件式は

(i-1) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_1^*(1/1)-x)f_1(x_2^*(1/1), x_2^*(1/2)) \ge 0 \tag{32}$$

が成り立つ．ここで，

$f_1(x_2^*(1/1), x_2^*(1/2)) :=$
$(a_1+a_2)z_1(1,1)x_2^*(1/1) - p(a_1+a_2)z_1(1,2)x_2^*(1/2) - a_2z_1(1,1) + pa_2z_1(1,2).$

(i-2) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x_1^*(1/2)-x)f_2(x_2^*(1/1), x_2^*(1/2)) \ge 0 \tag{33}$$

が成り立つ．ここで，

$f_2(x_2^*(1/1), x_2^*(1/2)) :=$

$p(a_1+a_2)z_1(2,1)x_2^*(1/1)-(a_1+a_2)z_1(2,2)x_2^*(1/2)-pa_2z_1(2,1)+a_2z_1(2,2).$

(ii-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x_2^*(1/1)-x)g_1(x_1^*(1/1),x_1^*(1/2)) \geq 0 \tag{34}$$

が成り立つ．ここで，

$g_1(x_1^*(1/1),x_1^*(1/2)) :=$
$(b_1+b_2)z_2(1,1)x_1^*(1/1)-q(b_1+b_2)z_2(2,1)x_1^*(1/2)-b_2z_2(1,1)+qb_2z_2(2,1).$

(ii-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x_2^*(1/2)-x)g_2(x_1^*(1/1),x_1^*(1/2)) \geq 0 \tag{35}$$

が成り立つ．ここで，

$g_2(x_1^*(1/1),x_1^*(1/2)) :=$
$q(b_1+b_2)z_2(1,2)x_1^*(1/1)-(b_1+b_2)z_2(2,2)x_1^*(1/2)-qb_2z_2(1,2)+b_2z_2(2,2).$

これらの条件式から演繹出来ることは，

(f-1) $f_1>0\ (<0) \Longrightarrow x_1(1/1)=1\ (=0)$,
(f-2) $f_2>0\ (<0) \Longrightarrow x_1(1/2)=1\ (=0)$,
(g-1) $g_1>0\ (<0) \Longrightarrow x_2(1/1)=1\ (=0)$,
(g-2) $g_2>0\ (<0) \Longrightarrow x_2(1/2)=1\ (=0)$

が成り立たなければならない，ということである．さらに，ここで，$0<\alpha:=a_2/(a_1+a_2)<1$, $0<\beta:=b_2/(b_1+b_2)<1$ とおいて，パラメーターを二つ減らしておき，$f_n\,;n=1,2$ については (a_1+a_2) で割った関数を改めて $f_n\,;n=1,2$ と置きなおしておく．$g_n\,;n=1,2$ については (b_1+b_2) で割った関数を改めて $g_n\,;n=1,2$ と置きなおしておく．最初の仮定により，常に

(a) $f_1(0,1):=-\alpha z_1(1,1)-p(1-\alpha)z_1(1,2)<0$,
(b) $f_1(1,0):=(1-\alpha)z_1(1,1)+p\alpha z_1(1,2)>0$,
(c) $f_2(0,1):=-(1-\alpha)z_1(2,2)-p\alpha z_1(2,1)<0$,
(d) $f_2(1,0):=\alpha z_1(2,2)+p(1-\alpha)z_1(2,1)>0$

が成り立っている．

同様に，
(a)' $g_1(0,1):=-\beta z_2(1,1)-q(1-\beta)z_2(2,1)<0$,
(b)' $g_1(1,0):=(1-\beta)z_2(1,1)+q\beta z_2(2,1)>0$,
(c)' $g_2(0,1):=-(1-\beta)z_2(2,2)-q\beta z_2(1,2)<0$,
(d)' $g_2(1,0):=\beta z_2(2,2)+q(1-\beta)z_2(1,2)>0$

である．ここで，命題の (1) において，行動戦略が $(0,1\,;\,0,1)$ の場合を考えてみよう．上記の (f-2) と (c) から $x_1(1/2)=0$ でなくてはならないから出発した前提と矛盾する．故に，この場合はあり得ないことがわかる．他の場合についても同様の考察をすると，上記の (f-1))-(g-2) と (a)–(d)' のどれかと両立できないことがわかる．つまり，命題の (1) が証明された．

次に (2) を証明する．同様の計算によって，仮定 (1) の下で，

(e) $f_1(0,0)=-\alpha(z_1(1,1)-pz_1(1,2))<0$,
(f) $f_1(1,1)=(1-\alpha)(z_1(1,1)-pz_1(1,2))>0$,
(g) $f_2(0,0)=\alpha(z_1(2,2)-pz_1(2,1))>0$,
(h) $f_2(1,1)=-(1-\alpha)(z_1(2,2)-pz_1(2,1))<0$,

(e)' $g_1(0,0)=-\beta(z_2(1,1)-qz_2(2,1))<0$,
(f)' $g_1(1,1)=(1-\beta)(z_2(1,1)-qz_2(2,1))>0$,
(g)' $g_2(0,0)=\beta(z_2(2,2)-qz_2(1,2))>0$,
(h)' $g_2(1,1)=-(1-\beta)(z_2(2,2)-qz_2(1,2))<0$

であることがわかる．従って，(1) の場合の考察と同様にして今度は (2) の結論が矛盾なく導かれる．他方，仮定 (2) の下ではこの結論が逆になるから，(1) と合わせて (3) の結論が得られる．なお，混合戦略の均衡は $f_1=f_2=g_1=g_2=0$ の解として求められるから，これ等の線形連立方程式を解くことによって解が得られる（代入してみると直ちに解であることが確認できる）.（証明終り）

仮定 (1) と (2) 以外の場合も勿論あり得るわけである．それぞれの場合，同様の考察によっていくつかの純戦略が均衡戦略となる．練習のため読者自身で導出を試みられたい．

§6. ベイジアンゲームによる ESS (進化的安定戦略）の定式化

メイナード・スミスに端を発する ESS については前の講義録でも詳しく解説した．本講義録では異なる立場，例えば一方が縄張りの所有者，他方が侵入者といった対称ではない動物間の闘争の ESS をベイジアンゲームを用いて考察する．立場が異なることはタイプを導入することによって表現可能であるから，ごく自然にベイジアンゲームで定式化できるであろうことは誰でも考えつくことである．と思って文献を調べ始めて少々驚いた．

ここで，少々気になっていることを述べておく．それは 51 頁でもふれたが，立場の異なる者同士の対戦を論じた進化ゲーム理論の定式化は誰に priority があるか，という問題である．私が Selten(1980, [69]) の論文を中心に少々調べた範囲内の進化ゲーム関係の文献，生物分野の雑誌は勿論，経済学分野の雑誌に掲載されている論文において，Harsanyi(1967-8, [21]) の論文は引用文献にすら挙っていないのである．唯一の例外は Selten(1980, [69]) の論文であるが，引用文献にあるだけで本文には言及がない．しかし，

Selten(1980, [69]) の論文はまさしくベイジアンゲームなのである．本節において，メイナード・スミス (1982, [40])，Selten(1980, [69]) の結果を我々の定式化によるベイジアンゲームによって分析し，彼らの結果を含むより一般の命題を証明する．

今から本講義録で論じるように，Selten(1980, [69]) の結果を含む，異なる役割を演じる動物同士の対戦における ESS の問題は Harsanyi(1967-68, [21]) のベイジアンゲームによって定式化するのが自然であるし，Selten(1980, [69]) の論文はベイジアンゲームを用いて定式化してみると容易に拡張できることを 定理 6-2 で示す[84].

本節の主要結果を欧文論文として投稿していたところ，神戸大学の樋口保成さんから Selten(1983, [70]), Vega-Redondo(1986, [80]) で異なる役割を持つ Hawk-Dove Game について論じてある，との御指摘を戴いた．なお，Selten([70] には訂正論文 [71] があるから注意されたい．しかし，Selten の定式化は本節とはかなり異なり,「所有者」「侵入者」という役割の違いのみならずその場所に「Good」と「Bad」があり，それを展開形ゲームで表現しているため，本節が扱う問題よりもう少し複雑である．さらに，役割の非対称性を対称化するために 2 回自然がランダムに振り分ける，という設定がなされている．にも拘わらず同じ役割を持つものどうしは最初から対戦しない，という設定になっている．自然が登場する，という意味では展開形ゲームであるが，私がいう本質的展開形ゲームではないから標準形ゲームに自然が選ぶ確率変数を二つ導入する方が数学的にはより正確に表現できると思われる．他方，標準形として表現したのが Samuelson(1991, [65]) の論文であるが，彼の定式化 (p.114) は文章で表現してあるため，基本的には本節の定式化あるいは次に述べる Vega-Redondo の本の定式化と同値と思われるが，最初から同じ役割を持つプレーヤーどうしは対戦しないことが暗黙の内に仮定されているようである．

Vega-Redondo(1986, [80]) の本の 26 頁には非対称なアニマル・コンテストとして，本節での対称ゲームの定式化，定義 6-5(72 頁) と同値な仮定がなされている．しかし，彼はそれ以上の一般論は展開していないし，例としてあげてある Hawk-Dove game はメイナード・スミスの例の範囲内である．何れにしろ本節で紹介するような具体的結果は得られていない．

ここでも不思議に思えるのはこれらの論文がいづれも Harsanyi(1967-68, [21]) を引用していないことである．

問題提起[85]

メイナード・スミス (1982, [40]) は有名なタカ・ハトゲームにおいて，一対のプレーヤーの立場が互いに異なる場合，たとえば，一方が所有者，他方が侵入者という非対称タカ・ハトゲームについて論じている（p.110-p.112）．ESS を議論する場合は戦略に焦点をあてるために，彼の言うブルジョワ戦略を担うプレーヤーの役割が必ずしも明確では

[84] Harsanyi (1967, part I) の論文の脚注には Selten とも議論したことが記されているし，Selten Game なる名称まで用いているから両者には十分コミュニケーションはあったことが想像される．

[85] これ以降の本節の内容は第 49 回数理社会学会 (2010.3.7-8. 於：立命館大学) における口頭発表用のレジメを発展させたものである．なお，内容的には英文の論文, Kôno([32]) と同じである．

ない．一方，利得がプレーヤーのタイプによって異なるゲームはHarsanyi(1967-68, [21])によって論じられている（ベイジアンゲーム）．本節では，メイナード・スミスで論じられている，所有者であるか侵入者であるかによって戦略を変更するブルジョワ戦略について，Harsanyi のベイジアンゲームの枠組みで定式化するとどのような結論が導かれるかを論じる．結果として，メイナード・スミスの主張がベイジアンゲームの枠組みの中でどのように正当化され，さらにどのように一般化され得るか，が明らかにできる．また，Selten(1980) の定理（混合 ESS は存在しない）も容易に精密化できる．

まず，メイナード・スミス ([40], p.110) の主張を整理する．

(1) タカ・ハトゲームにおいて，資源の価値は，所有者にとっては V, 侵入者（非所有者）にとっては v とする ($V > v > 0$).

(2) 戦って負けた時のダメージは共に $C > 0$ である.（ただし，本節では，所有者は C，侵入者は c と一般化する (C, $c > 0$).

(3) B（ブルジョワ) 戦略とは，所有者の時は H(タカ), 侵入者の時は D(ハト) を選択する，という戦略.

(4) A (Anti-ブルジョワ戦略）戦略とは，所有者の時は D, 侵入者の時は H を選択する，という戦略[86].

(5) H 戦略とは，常に H を選択する戦略，D 戦略とは，常に D を選択する戦略，とする．

このとき，各戦略の利得は次のようになるとしている．ただし，利得行列は対称となるように仮定されているから，プレーヤー１（行プレーヤー）の利得のみが書かれている．

	H	D	B	A
H	$(V+v-2C)/4$	$(V+v)/2$	$(2V+v-C)/4$	$(V+2v-C)/4$
D	0	$(V+v)/4$	$V/4$	$v/4$
B	$(V-C)/4$	$(2V+v)/4$	$V/2$	$(V+v-C)/4$
A	$(v-C)/4$	$(V+2v)/4$	$(V+v-C)/4$	$v/2$

Table 6-1

メイナード・スミス ([40], 訳本の 110 頁, 原著 p.101) は各戦略が対戦した場合の利得の計算方法を必ずしも明確には説明していない．たとえばB戦略同士が戦う，とはどのような状況を想定しているのだろうか．この表の結果から逆算すると実は対戦方法に一定の仮定が設けられていて，所有者同士，侵入者同士は決して戦わない，と仮定されているのである．しかし，標準形で上の表のように表わしてしまうとB戦略，A戦略同士

[86]「金持ちけんかせず」と日本では云うから，A 戦略の方がブルジョワ戦略のような印象を持つが，メイナード・スミスは A 戦略が ESS となる場合に paradoxical ESS と呼んでいる．イギリスではアグレッシブでないと金持ちであり続けるのは難しい，ということかもしれない．

の利得を決めないわけにはいかない．その利得の決め方の説明は直感的にはもっともらしいが，彼の定式化を多少とも拡張しようと考えると何が本質的な仮定なのかが明らかではない．本節の定式化の後にあらためて利得を計算してみると自然に上記の利得表が得られる[87]．

メイナード・スミスは上記４つの選択肢を持つ標準形ゲームとして数値例を挙げて，
ケース (i) : $C > V > v$ の場合， B と A の二つのみが ESS,
ケース (ii) : $V > C > v$ の場合，B のみが ESS である，
ことを示している．

我々は以上の結果を Harsanyi のベイジアンゲームの枠組みを用いて導出する．その結果，ブルジョワ戦略そのものをゲーム理論の中に位置づけることが可能となり，直感を排してかつメイナード・スミスの上記の結果が厳密に導出され，さらにより一般化された結果も自然に導かれることを示す．

ベイジアンゲームにおける ESS の定式化

メイナード・スミスのタカ・ハトゲームをベイジアンゲームの枠組みで定式化するために，§5 のベイジアンゲームにおいて，タイプ空間，純戦略空間はすべてのプレーヤーについて同一であると仮定する．すなわち，

タイプ空間：Λ (有限集合) ：Λ-値確率変数を $Z_n, (n = 1, 2)$ とする．$z(\lambda_1, \lambda_2) := P(Z_1 = \lambda_1, Z_2 = \lambda_2)$ は予め自然によって与えられたタイプ空間 $\Lambda \times \Lambda$ 上の分布と考える．

純戦略空間：Θ (有限集合) ：Θ-値確率変数 $X_n, (n = 1, 2)$ でプレーヤー n の（混合）戦略を表すことにする．Θ-値確率変数の全体を $\mathcal{R}(\Theta)$ とする．

このとき，§5 のベイジアンゲームの仮定 (54 頁) をもう一度確認しておく．なお，メイナード・スミスでは動物は自分のタイプのみならず相手のタイプも認識しているのではないか，という記述があるが，その場合，ゲーム論的には情報不完備ではなくなり，各タイプの組み合わせごとに通常の標準形ゲームとなり，新しいナッシュ均衡や ESS は現れない．従って，ベイジアンゲームで定式化する場合は，自分が所有者であるか，侵入者であるかのみを認識しているものと仮定する．尤も，メイナード・スミスの場合，確率１で同じタイプ同士は出あわないと仮定しているから，自分が所有者であれば対戦相手は必ず侵入者であり，逆もまた真である．ただ，そのことと相手のタイプも認識しているかいないか，ということは別問題である．

役割を持つ動物間の対戦を定式化するために次の仮定を置く．

仮定（A-1)：(X_1, X_2) は (Z_1, Z_2) に関して条件付き独立である．すなわち，
$\forall\theta_1 \in \Theta, \forall\theta_2 \in \Theta, \forall\lambda_1 \in \Lambda, \forall\lambda_2 \in \Lambda$ に対して，

[87]実は，原著の初版 (1982) ではこの利得表が訳本 (平成 7 年第 6 刷) と異なる．原著の方が誤りであると思われる．

$P(X_1 = \theta_1,\, X_2 = \theta_2/Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2) = P(X_1 = \theta_1/Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2)P(X_2 = \theta_2/Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2)$.

仮定（A-2)：各プレーヤーの戦略は自分のタイプにのみ依存する．すなわち，

(i) $P(X_1 = \theta_1/Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2) = P(X_1 = \theta_1/Z_1 = \lambda_1)(=: x_1(\theta_1/\lambda_1)$ とおく)

(ii) $P(X_2 = \theta_2/Z_1 = \lambda_1,\, Z_2 = \lambda_2) = P(X_2 = \theta_2/Z_2 = \lambda_2)(=: x_2(\theta_2/\lambda_2)$ とおく)

なお，consistency assumption を仮定しているから §5 の仮定 (A-3)(55 頁) は不要である．

条件 (A-1),(A-2) を満たす戦略プロファイルの全体を$\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta)$ とする．$(X_1,\, X_2) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta)$ に対して一意に定まる Θ 上の確率分布の組 $\{x_n(\theta_n/\lambda_n)\}_{\theta_n\in\Theta},\, \lambda_n \in \Lambda$ は代理人を持つ非協力ゲームのところですでに プレーヤー $n\,(n = 1, 2)$ の**行動戦略** (31 頁) と呼ぶことにした．

利得関数: 各プレーヤーの利得はお互いの戦略のみならず，お互いのタイプによって異なり得ると仮定する．すなわち，プレーヤー 1 の利得行列を $u_1(\theta_1,\, \theta_2\,;\, \lambda_1,\, \lambda_2)\,;\, \theta_1 \in \Theta,\, \theta_2 \in \Theta,\, \lambda_1 \in \Lambda,\, \lambda_2 \in \Lambda$，プレーヤー 2 の利得行列を $u_2(\theta_1,\, \theta_2\,;\, \lambda_1,\, \lambda_2)\,;\, \theta_1 \in \Theta,\, \theta_2 \in \Theta,\, \lambda_1 \in \Lambda,\, \lambda_2 \in \Lambda$ とする．プレーヤー 1 とプレーヤー 2 がそれぞれ戦略 X_1 と X_2（ただし，$(X_1,\, X_2)) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta),$）を取るときのプレーヤー 1 の期待利得 $\overline{u}_1(X_1,\, X_2)$，プレーヤー 2 の期待利得 $\overline{u}_2(X_1,\, X_2)$ はそれぞれ

$$\overline{u}_1(X_1,\, X_2) = E[u_1(X_1,\, X_2\,;\, Z_1, Z_2)],\ \ \overline{u}_2(X_1,\, X_2) = E[u_2(X_1,\, X_2\,;\, Z_1, Z_2)]$$

で表わされる．ここで，$E[\,\cdot\,]$ は実数値確率変数の平均を表わす．

以上の一般的定式化の下で，ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 (56 頁) は§5 のベイジアンゲームで consistency assumption を仮定した場合と同じだから，次のように定義できる．

定義 6-1. $\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta))$ に属する戦略プロファイル $(X_1^*,\, X_2^*)$ が**ベイジアン・ナッシュ均衡戦略**であるとは次の 2 つの条件を満たすことである．

(i) $\forall X_1 \in \mathcal{R}(\Theta)$ such that $(X_1,\, X_2^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta))\,;\ \overline{u}_1(X_1^*,\, X_2^*) \geq \overline{u}_1(X_1,\, X_2^*)\,.$

(ii) $\forall X_2 \in \mathcal{R}(\Theta)$ such that $(X_1^*,\, X_2) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta))\,;\ \overline{u}_2(X_1^*,\, X_2^*) \geq \overline{u}_2(X_1^*,\, X_2)\,.$

自然がタイプに関する $\Lambda\times\Lambda$ 上の分布 $P(Z_1 = \lambda_1, Z_2 = \lambda_2) =: z(\lambda_1, \lambda_2)$ を与えたとき，プレーヤー $n,\, (n = 1, 2)$ が戦略 X_n を選んだ時の，プレーヤー n の期待利得を行動戦略

$$X_n \approx (\{x_n(\theta_n/\lambda_n)\}_{\theta_n\in\Theta_n}\,;\, \lambda_n \in \Lambda_n),\, (n = 1, 2)$$

で表わすと，

$$\overline{u}_n(X_1,\, X_2) = \sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_1\in\Lambda}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_n(\theta_1, \theta_2\,;\, \lambda_1, \lambda_2)P(X_1 = \theta_1,\, X_2 = \theta_2,\, Z_1 = \lambda_1, Z_2 = \lambda_2)$$

$$= \sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_1\in\Lambda}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_n(\theta_1,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1(\theta_1/\lambda_1)x_2(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2)$$

(仮定 (A-1) と (A-2) を用いた)

となる．

定義 6-1 を行動戦略の言葉で表現すると通常の教科書に書いてあるベイジアン・ナッシュ均衡戦略と同値な次の表現が得られる (さらに $z(\lambda_1,\lambda_2)$ を自分のタイプに関する条件付き確率で表わすと完全に同じ表現となる)．補題 5-1(57 頁) の特別な場合，つまり，consistency assumption を仮定した場合である．

補題 6-1. 行動戦略プロファイル $(\{x_1^*(\theta_1/\lambda_1)\}_{\theta_1\in\Theta}\,;\,\lambda_1\in\Lambda;\,\{x_2^*(\theta_2/\lambda_2)\}_{\theta_2\in\Theta}\,;\,\lambda_2\in\Lambda)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は次の 2 つの条件を満たすことである．ただし，$\mathcal{P}(M)$ は有限集合 M 上の確率分布全体を表す．

(i) $\forall\lambda_1\in\Lambda,\,\forall\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta}\in\mathcal{P}(\Theta)$,

$$\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)(x_1^*(\theta_1/\lambda_1)-x_1(\theta_1))x_2^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2)\ge 0\,,$$

(ii) $\forall\lambda_2\in\Lambda,\,\forall\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta}\in\mathcal{P}(\Theta)$,

$$\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_1\in\Lambda} u_2(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x_1^*(\theta_1/\lambda_1)(x_2^*(\theta_2/\lambda_2)-x_2(\theta_2))z(\lambda_1,\lambda_2)\ge 0\,.$$

次に，ベイジアンゲームの ESS を定義しなくてはならない．

定義 6-2. 確率変数としては異なっていても行動戦略が同じとき，つまり，$\forall\theta_1\in\Theta,\,\forall\lambda_1\in\Lambda\,;\,x_1(\theta_1/\lambda_1)=x_2(\theta_1/\lambda_1)$ が成り立つ時，$X_1\cong X_2$ と記す[88]．

定義 6-3. 行動戦略 $(\{x(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}\,;\,\lambda\in\Lambda)$ が,「$\exists\lambda,\ \{x(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}$ は単位分布でない」となっているとき，λ-**混合行動戦略**，或いは単に**混合戦略**と呼ぶ．このような λ が存在しないとき，つまり,「$\forall\lambda,\ \{x(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}$ が単位分布である」とき，**純粋行動戦略**と呼ぶ．また，すべての $\lambda\in\Lambda$ に対して λ-混合行動戦略であるとき**完全混合行動戦略**，という．

ESS を議論するときはベイジアン・ナッシュ均衡戦略の定義のところの等号，不等号について厳密に確認する必要が生じるので定義 6-1 をもう少し強めた概念を導入しておく．

定義 6-4. 戦略プロファイル $(X_1^*,\,X_2^*)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって，定義 6-1 の (i), (ii) においてすべての戦略 $X_1\ncong X_1^*$ と $X_2\ncong X_2^*$ に対して真の不等号で成り立っているとき，**強ベイジアン・ナッシュ均衡**であるという．

[88]細かいことであるが，定義 3-2(11 頁) の $X\approx Y$ とは異なることに注意されたい．$X_1\cong X_2$ ならば $X\approx Y$ であるが，逆は必ずしも真ではない．

ESS の概念をベイジアン・ナッシュ均衡戦略に対して定義するためにまず，対称ゲームの概念を定義する．

定義 6-5. 上記のゲームが**対称ゲーム**であるとは，任意の $(\theta_1,\,\theta_2)\in(\Theta\times\Theta)$ と任意の $(\lambda_1,\,\lambda_2)\in\Lambda\times\Lambda$ に対して

(1) $u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)=u_2(\theta_2,\,\theta_1\,;\,\lambda_2,\lambda_1)$,

(2) $z(\lambda_1,\lambda_2)=z(\lambda_2,\lambda_1)$

が満たされることである．

利得関数の定義を眺めれば直ちに，次の補題が得られる．

補題 6-2. 対称ゲームならば，任意の戦略プロファイル $(X_1,\,X_2)\in\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta)$ に対して $\overline{u}_1(X_1,\,X_2)=\overline{u}_2(X_2,\,X_1)$ が成り立つ．

ここで，通常の ESS の定義を思い出してもらうと極めて自然に，対称なベイジアンゲームに対して ESS の概念が次のように定義できることがわかる．

定義 6-6. 対称ゲームにおいて，戦略プロファイル $(X_1^*,\,X_2^*)$ が次の条件を満たすとき，**ESS**（進化的安定戦略）であるという．

(1) $X_1^*\cong X_2^*$,

(2) 任意の $X_{21}\cong X_{22}$ such that $(X_1^*,\,X_{21}),(X_{21},\,X_2^*),(X_{21},\,X_{22})\in\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta)$ に対して，

(i) $\overline{u}_1(X_1^*,\,X_2^*)\ge\overline{u}_1(X_{21},\,X_2^*)$, (すなわち，$(X_1^*,\,X_2^*)$ はベイジアン・ナッシュ均衡戦略である)

(ii) $\overline{u}_1(X_1^*,\,X_2^*)=\overline{u}_1(X_{21},\,X_2^*)$, かつ $X_1^*\ncong X_{21}$ ならば, $\overline{u}_1(X_1^*,\,X_{21})>\overline{u}_1(X_{21},\,X_{22})$.

ESS に関しては確率変数で表現するよりも分布つまり行動戦略で表現する方がわかりやすい．定義 6-4 は実は $X_1^*\cong X_2^*$ の行動戦略 $(\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta},\,\lambda\in\Lambda)$ が ESS であるかどうかを定義しているのである．従って，行動戦略のことを $X^*,\,X$ で表わせば定義 6-6 は

(i) $\forall X,\,\overline{u}_1(X^*,\,X^*)\ge\overline{u}_1(X,\,X^*)$,

(ii) $X^*\neq X$ かつ, $\overline{u}_1(X^*,\,X^*)=\overline{u}_1(X,\,X^*)$ を満たすすべての行動戦略 X に対して，$\overline{u}_1(X^*,\,X)>\overline{u}_1(X,\,X)$

と表現できる．本講義録では一貫して分布を確率変数で表現することに拘ったためにかえって面倒な表現になったことは否めない．ただ，それはあくまで確率分布の本質がわかった上での話であって，最初から簡便な表現をしてしまうと本質的なところの理解が不十分になる恐れがある．実際多くのゲーム理論の教科書の表現方法は簡便過ぎてどうも何が本質的な仮定なのか理解に苦しむところが多々あるように思われてならない．

注意 6-1. 定義 6-6 の条件 (1), (2) の (i) は戦略プロファイル $(X_1^*,\,X_2^*)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であることを意味している．従って，以後この条件を満たしている場合，単に戦略 X^* または行動戦略 $(\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta},\,\lambda\in\Lambda)$ がベイジアン・ナッシュ

均衡戦略である，ということにする．

補題 6-3. 対称ゲームにおいて，行動戦略 $(\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta},\, \lambda\in\Lambda)$ が ESS であるための必要十分条件は，次の (i), (ii) の条件を満たすことである．

(i) $\forall\lambda_1\in\Lambda,\, \forall\{x(\theta/\lambda_1)\}_{\theta\in\Theta}\in\mathcal{P}(\Theta)$,

$$\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_1(\theta_1,\, \theta_2\,;\, \lambda_1,\lambda_2)(x^*(\theta_1/\lambda_1)-x(\theta_1/\lambda_1))x^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2)\geq 0\,,$$

(ii)

$$\forall\lambda_1\in\Lambda\,,\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_1(\theta_1,\, \theta_2\,;\, \lambda_1,\lambda_2)(x^*(\theta_1/\lambda_1)-x(\theta_1/\lambda_1))x^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2)=0 \tag{36}$$

が成り立つようなすべての行動戦略 $(\{x(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}\in\mathcal{P}(\Theta)\,;\,\lambda\in\Lambda)\neq(\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta},\, \lambda\in\Lambda)$ に対して，

$$\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_1\in\Lambda}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_1(\theta_1,\, \theta_2\,;\, \lambda_1,\lambda_2)(x^*(\theta_1/\lambda_1)-x(\theta_1/\lambda_1))x(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2)>0$$

が成り立つ．

補題6-3 の条件(i) は行動戦略プロファイル $(\{x^*(\theta/\lambda\}_{\theta\in\Theta}\in\mathcal{P}(\Theta)\,;\,\lambda\in\Lambda,\{x^*(\theta/\lambda\}_{\theta\in\Theta}\in\mathcal{P}(\Theta)\,;\,\lambda\in\Lambda)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であることと同値な条件である．以後簡単に行動戦略 $(\{x^*(\theta/\lambda\}_{\theta\in\Theta}\in\mathcal{P}(\Theta)\,;\,\lambda\in\Lambda)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略である，という．

補題 6-3 は ESS の定義 6-6 を行動戦略の言葉で書き換えただけなので具体的に ESS を求めるためにはもう少し考察が必要である．補題 6-3 をもう一度よく見直してみると，(ii) の条件式 (36) は等式だから，この条件式 (36) から結論式を引いて (ii) と同値な次の命題が得られる．すなわち，

(ii)' (36) が成り立っているようなすべての行動戦略 $(\{x(\theta/\lambda\}_{\theta\in\Theta}\in\mathcal{P}(\Theta)\,;\,\lambda\in\Lambda)\neq(\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta},\, \lambda\in\Lambda)$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_1\in\Lambda}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} & u_1(\theta_1,\, \theta_2\,;\, \lambda_1,\lambda_2)(x^*(\theta_1/\lambda_1)-x(\theta_1/\lambda_1))\times \\ & (x^*(\theta_2/\lambda_2)-x(\theta_2/\lambda_2))z(\lambda_1,\lambda_2)<0\,.\end{aligned} \tag{37}$$

が成り立つ．

次に，補題 5-2(58 頁) を対称ゲームに適用するために書き換えると次の補題が得られる．以下の議論では

$$\forall\lambda\in\Lambda,\ \sum_{\lambda_2\in\Lambda} z(\lambda,\lambda_2)>0$$

を仮定する（ゼロとなる λ が存在する場合は最初から除いておけばよい．なお，対称性から $\sum_{\lambda_2\in\Lambda} z(\lambda,\lambda_2) = \sum_{\lambda_1\in\Lambda} z(\lambda_1,\lambda) > 0$ も自動的に仮定されていることに注意せよ.）．

補題 6-4. 対称ゲームにおいて，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\Theta(X^*/\lambda) := \{\theta \in \Theta\,;\, \max_{i\in\Theta} \sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_1(i,\,\theta_2\,;\,\lambda,\lambda_2)x^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda,\lambda_2)$$

$$= \sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_1(\theta,\,\theta_2\,;\,\lambda,\lambda_2)x^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda,\lambda_2)\},$$

（各 $\lambda \in \Lambda$ 毎に純戦略の範囲で best response を求めているのである）

とおくとき，行動戦略 $\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta},\, \lambda \in \Lambda$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は，次の条件を満たすことである．

(i) すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\{\theta \in \Theta\,;\, x^*(\theta/\lambda) > 0\} \subset \Theta(X^*/\lambda)$$

が成り立つ．

注意 6-2. 行動戦略 $\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta},\, \lambda \in \Lambda$ が強ベイジアン・ナッシュ均衡ならば 純粋行動戦略であり，かつ ESS であるが，純粋行動戦略がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であっても必ずしも強ベイジアン・ナッシュ均衡あるいは ESS であるとは限らない．つまり，強ベイジアン・ナッシュ均衡であるための必要十分条件は $\forall\lambda \in \Lambda,\, |\{\theta \in \Theta\,;\, x^*(\theta/\lambda) > 0\} = \Theta(X^*/\lambda)| = 1$ であるのに対して，純粋行動戦略は $\forall\lambda \in \Lambda,\, |\{\theta \in \Theta\,;\, x^*(\theta/\lambda) > 0\}| = 1$ しか満たしていないという違いである．

注意 6-2 の証明. 補題 6-4 と強ベイジアン・ナッシュ均衡の定義から明かである．

さて，補題 6-4 を考慮すると，(37) 式は

$$\sum_{\lambda_1\in\Lambda}\sum_{\lambda_2\in\Lambda}\sum_{\theta_1\in\Theta(X^*/\lambda_1)}\sum_{\theta_2\in\Theta(X^*/\lambda_2)} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)(x^*(\theta_1/\lambda_1) - x(\theta_1/\lambda_1))\times$$
$$(x^*(\theta_2/\lambda_2) - x(\theta_2/\lambda_2))z(\lambda_1,\lambda_2) < 0 \tag{38}$$

と書き換えられる．

さらに，$\{\theta \in \Theta\,;\, x^*(\theta/\lambda) > 0\}$ の中の任意の要素 $\theta_\lambda^{(0)}$ を選んで固定しておき，$\Theta(X^*/\lambda)^* := \Theta(X^*/\lambda) - \{\theta_\lambda^{(0)}\}$ (集合 $\Theta(X^*/\lambda)$ から要素 $\theta_\lambda^{(0)}$ を取り除いた集合) とおく．集合 A の要素の総数を $|A|$ で表わすと，$|\Theta(X^*/\lambda)| = 1$ のときは，$\Theta(X^*/\lambda)^*$ は空集合である．$\Lambda^* := \{\lambda \in \Lambda\,;\, |\Theta(X^*/\lambda)| \geq 2\}$ とおく．$|\Theta(X^*/\lambda)| = 1$ の場合は (36) が成り立つのは $x^*(\theta_\lambda^{(0)}/\lambda) = x(\theta_\lambda^{(0)}/\lambda) = 1$ の場合しかないから，補題 6-3 の (ii) は常に成り立っている．$|\Theta(X^*/\lambda)| \geq 2$ のときは，$\sum_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda)} x^*(\theta/\lambda) = 1$ だから，

$x^*(\theta_\lambda^{(0)}/\lambda) = 1 - \sum_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda)^*} x^*(\theta/\lambda)$（$\{x(\theta/\lambda)\}$ についても同様）．従って，(38) は次のように変形される．

$$\sum_{\lambda_1\in\Lambda^*}\sum_{\lambda_2\in\Lambda^*}\sum_{\theta_1\in\Theta(X^*/\lambda_1)^*}\sum_{\theta_2\in\Theta(X^*/\lambda_2)^*}(u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2) - u_1(\theta_{\lambda_1}^{(0)},\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)$$
$$- u_1(\theta_1,\,\theta_{\lambda_2}^{(0)}\,;\,\lambda_1,\lambda_2) + u_1(\theta_{\lambda_1}^{(0)},\,\theta_{\lambda_2}^{(0)}\,;\,\lambda_1,\lambda_2))z(\lambda_1,\lambda_2)\times$$
$$(x^*(\theta_1/\lambda_1) - x(\theta_1/\lambda_1))(x^*(\theta_2/\lambda_2) - x(\theta_2/\lambda_2)) < 0 \tag{39}$$

と書き換えられる．

ここで，成分が

$$\begin{aligned} u((\theta_1,\lambda_1),(\theta_2,\lambda_2)) :=\ & - u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2) + u_1(\theta_1,\,\theta_{\lambda_2}^{(0)}\,;\,\lambda_1,\lambda_2) \\ & + u_1(\theta_{\lambda_1}^{(0)},\,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2) - u_1(\theta_{\lambda_1}^{(0)},\,\theta_{\lambda_2}^{(0)}\,;\,\lambda_1,\lambda_2))z(\lambda_1,\lambda_2)\,; \\ & \lambda_n\in\Lambda^*,\,\theta_n\in\Theta(X^*/\lambda_n)^*,\ n=1,2 \end{aligned} \tag{40}$$

で定義された $d := \sum_{\lambda\in\Lambda^*}|\Theta(X^*/\lambda)^*|$ 次の正方行列を $U(X^*) = (u((\theta_1,\lambda_1),(\theta_2,\lambda_2)))$[89]，その対称化行列 $(U(X^*) + U^t(X^*))/2$ を $U^s(X^*)$ とする．ここで，U^t は行列 U の転置行列を表わす．d 次元ユークリッド空間 R^d の通常の内積を（，）で表わし，$\vec{x} = x^*(\theta/\lambda) - x(\theta/\lambda) \in R^d$ とおけば，(39) 式は

$$(U(X^*)\vec{x},\,\vec{x}) = (U^s(X^*)\vec{x},\,\vec{x}) > 0 \tag{41}$$

と表わされる．

このとき，われわれは　Abakuks(1980, [1]) の定理を次のように拡張することが出来る[90]．

定理 6-1. 行動戦略 $X^* \approx \{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta},\,\lambda\in\Lambda$ において，

(i) X^* が強ベイジアン・ナッシュ均衡ならば ESS である．

(ii) 行動戦略 X^* がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって，行列 $U^s(X^*)$ が正定値行列ならば，行動戦略 X^* は ESS である．

(iii) 行動戦略 X^* がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって $\forall\lambda\in\Lambda,\,|\Theta(X^*/\lambda)| = |\{\theta\in\Theta\,;\,x^*(\theta/\lambda) > 0\}|$，または，高々ただ１点 λ_0 を除くすべての $\lambda\in\Lambda$ に対して，$|\Theta(X^*/\lambda)| = |\{\theta\in\Theta\,;\,x^*(\theta/\lambda) > 0\}|$ かつ，$|\Theta(X^*/\lambda_0)| = |\{\theta\in\Theta\,;\,x^*(\theta/\lambda_0) > 0\}| + 1$ を満たすとき，行動戦略 X^* が ESS であるための必要十分条件は，行列 $U^s(X^*)$ が正定値行列となることである．

---

89 成分の並べ方は問わない．最初にひとつの並べ方を指定しておけばよい．

90 もとの定理は Haigh(1975, [20]) である．しかし，彼の定理の記述は不正確であり，かつ誤りを含んでいた．その訂正は Abakuks(1980, [1]) においてなされている．なお，Selten([70], 1983) では Haigh's criterion として頻繁に引用されている．

注意 6-3. 定理 6-1 の (iii) の仮定を緩めることは出来ない．Abakuks(1980, [1]) に標準形ゲームに対する ESS の場合に反例があげてある．

証明. d-次実ベクトル空間を V, V の要素を $\vec{x}$, その $\lambda \in \Lambda^*$, $\theta \in \Theta(X^*/\lambda)^*$ に対応する成分を $x(\theta/\lambda)$ で表わす．さらに，通常のユークリッドの内積を $(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$ で表わす.

(i) 注意 6-2 ですでに述べた.

(ii) (38) 式から明かである（$U(X^*)$ を定義するとき，成分の符合を逆にしてあることに注意されたい）.

(iii) 十分条件はすでに (ii) で述べているから，条件式の仮定のもとで行動戦略 $(\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}, \lambda \in \Lambda)$ が ESS であるならば，行列 $U^s(X^*)$ が正定値行列であるを示せば十分である.

V のゼロでない任意のベクトルを $\vec{y}$ とする．このとき，

$$\epsilon = \min_{\theta\in\{\theta\in\Theta\,;\,x^*(\theta/\lambda)>0\},\,\lambda\in\Lambda^*}\{x^*(\theta/\lambda)\}.$$

とおく． 仮定から $\epsilon > 0$ である．さらに，例外点 λ_0 が存在する場合，$\Theta(X^*/\lambda_0) - \{\theta \in \Theta\,;\, x^*(\theta/\lambda_0) > 0\}$ は仮定から 1 点集合だから，その点を $\theta^{(1)}_{\lambda_0}$ とするとき，

$$sig\{\vec{y}\} := \begin{cases} 1 & \text{if} \;\; y(\theta^{(1)}_{\lambda_0}/\lambda_0) \geq 0 \\ -1 & \text{if} \;\; y(\theta^{(1)}_{\lambda_0}/\lambda_0) < 0 \end{cases} \tag{42}$$

と定めておく．以下，例外点が存在しない場合は $sig\{\vec{y}\}$ の項をスキップすること．ここで，V のベクトル $\vec{x}$ を次のように定める.

$$M := \max_{\lambda\in\Lambda^*}\sum_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda)^*}|y(\theta/\lambda)|,$$

$$x(\theta/\lambda) := x^*(\theta/\lambda) + (sig\{\vec{y}\}\epsilon/M)y(\theta/\lambda)\,;\, \lambda \in \Lambda^*,\, \theta \in \Theta(X^*/\lambda)^*.$$

ϵ の定義と λ_0 が存在する場合は $sig\{\vec{y}\}$ と M の定義から，任意の $\lambda \in \Lambda^*$, $\theta \in \Theta(X^*/\lambda)^*$ に対して，$x(\theta/\lambda) \geq 0$ である．さらに，任意の $\lambda \in \Lambda^*$ に対して

$$x(\theta^{(0)}_{\lambda}/\lambda) := 1 - \sum_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda)^*} x(\theta/\lambda) \geq 1 - \sum_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda)^*} x^*(\theta/\lambda) - \epsilon = x^*(\theta^{(0)}_{\lambda}/\lambda) - \epsilon \geq 0$$

である．従って，$\lambda \in \Lambda^*$ に対して，$\{x(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda)}$ は確率ベクトルとみなすことができるから

$$(sig\{\vec{y}\}\epsilon/M)y(\theta/\lambda) = x(\theta/\lambda) - x^*(\theta/\lambda)$$

を (41) 式に代入することが出来て，

$$(sig\{\vec{y}\}\epsilon/M)^2(U^s\vec{y}, \vec{y}) > 0. \qquad \text{（証明終り）}$$

Selten(1980, [69]) の定理[91]は次のように精緻化できる．

ベイジアン・ナッシュ均衡戦略が $|\Theta(X^*/\lambda)| = 1$ を満たしている時，**局所 λ-強ベイジアン・ナッシュ均衡**であると呼ぶことにする．この定義は補題 6-4 を考慮すると補題 6-3 において，$\lambda \in \Lambda$ 毎に $\forall\{x(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta} \in \mathcal{P}(\Theta) \neq \{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}$ に対して，補題 6-3 の (i) が真の不等式で成り立っていることと同値である．もちろん，$\forall\lambda$ に対して局所 λ-強ベイジアン・ナッシュ均衡であることと強ベイジアン・ナッシュ均衡であることは同値である．

定理 6-2. $z(\lambda,\lambda) = 0$ ならば ESS は局所 λ-強ベイジアン・ナッシュ均衡に限る．

証明[92]．背理法で証明する．$z(\lambda_0,\lambda_0) = 0$ かつ，行動戦略 $X^* \approx (\{x^*(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}\,;\,\lambda \in \Lambda)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，$|\Theta(X^*/\lambda_0)| \geq 2$ であると仮定する．補題 6-3, 6-4 から $\{x^*(\theta/\lambda_0)\}_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda_0)} \neq \{y(\theta/\lambda_0)\}_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda_0)}$ なる $\Theta(X^*/\lambda_0)$ 上の分布 $\{y(\theta/\lambda_0)\}_{\theta\in\Theta(X^*/\lambda_0)}$ が存在して

$$\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_0,\lambda_2)x^*(\theta_1/\lambda_0)x^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_0,\lambda_2) =$$
$$\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\sum_{\lambda_2\in\Lambda} u_1(\theta_1,\,\theta_2\,;\,\lambda_0,\lambda_2)y(\theta_1/\lambda_0)x^*(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_0,\lambda_2). \tag{43}$$

ここで，新しい行動戦略 $X \approx (\{x(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}\,;\,\lambda \in \Lambda)$ を次のように定義する．

$$x(\theta/\lambda) = \begin{cases} x^*(\theta/\lambda) & \text{if } \lambda \neq \lambda_0, \\ y(\theta/\lambda_0) & \text{if } \lambda = \lambda_0. \end{cases}$$

定義から $X^* \ncong X$ である．さらに，$X^* \cong X_1^* \cong X_2^*$, $(X_1^*,\,X_2^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta)$ と $(X,\,X_1^*) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta)$ に対して $\overline{u}(X_1^*,\,X_2^*) = \overline{u}(X,\,X_1^*)$ である．次に，$X \cong X_1 \cong X_2$, $(X_1,\,X_2) \in \mathcal{R}_{Z_1,Z_2}(\Theta\times\Theta)$ に対して X の定義より，$z(\lambda_0,\lambda_0) = 0$ を考慮して，

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1(X_1,\,X_2) &= \sum_{\lambda_1\in\Lambda}\sum_{\lambda_2\in\Lambda}\sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta} u_1(\theta_1,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x(\theta_1/\lambda_1)x(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2) \\
&= \sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\Big(\sum_{\lambda_1\neq\lambda_0}\sum_{\lambda_2\neq\lambda_0} u_1(\theta_1,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x^*(\theta_1/\lambda_1)x(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2) \\
&\quad + \sum_{\lambda_2\neq\lambda_0} u_1(\theta_1,\theta_2\,;\,\lambda_0,\lambda_2)y(\theta_1/\lambda_0)x(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_0,\lambda_2) \\
&\quad + \sum_{\lambda_1\neq\lambda_0} u_1(\theta_1,\theta_0\,;\,\lambda_1,\lambda_0)x(\theta_1/\lambda_1)y(\theta_2/\lambda_0)z(\lambda_1,\lambda_0)\Big)
\end{aligned}$$

[91] $\forall\lambda$ に対して，$z(\lambda,\lambda) = 0$ ならば ESS は純粋行動戦略に限る．

[92] ウェイブル ([85]) は Selten の定理に対して 1-page proof を与えている (命題 2.18, 86 頁)．この系の証明も彼の方針を参考にした．

$$
\begin{aligned}
& (43)\text{ 式と } x(\theta/\lambda) \text{ の定義を用いて} \\
= & \sum_{\theta_1\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta}\Big(\sum_{\lambda_1\neq\lambda_0}\sum_{\lambda_2\neq\lambda_0} u_1(\theta_1,\theta_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2)x^*(\theta_1/\lambda_1)x(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_1,\lambda_2) \\
& + \sum_{\lambda_2\neq\lambda_0} u_1(\theta_1,\theta_2\,;\,\lambda_0,\lambda_2)x^*(\theta_1/\lambda_0)x(\theta_2/\lambda_2)z(\lambda_0,\lambda_2) \\
& + \sum_{\lambda_1\neq\lambda_0} u_1(\theta_1,\theta_0\,;\,\lambda_1,\lambda_0)x^*(\theta_1/\lambda_1)x(\theta_2/\lambda_0)z(\lambda_1,\lambda_0)\Big) \\
= & \overline{u}_1(X^*,\,X)
\end{aligned}
$$

が得られる．この等式は ESS の定義式 6-4 の条件 (ii) に反する．よって，X^* は ESS ではない.（証明終り）

最後に，ESS の定義と補題 6-4 から直ちに導かれる定理を紹介しておく[93].

定理 6-3. X^* が ESS ならば，$\forall\lambda$ に対して $\{\theta\,;\,y(\theta/\lambda)>0\}\subset\Theta(X^*/\lambda)$ であるような, X^* とは異なる行動戦略 $Y\approx(\{y(\theta/\lambda)\}_{\theta\in\Theta}\,;\,\lambda\in\Lambda)$ はベイジアン・ナッシュ均衡戦略では有り得ない.

系. フルサポート (即ち，$\forall\lambda, \{\theta\in\Theta\,;\,x^*(\theta/\lambda)>0\}=\Theta$) を持つ ESS が存在するならば，このゲームの対称なベイジアン・ナッシュ均衡戦略は $X^*\approx\{x^*(\theta/\lambda)\}$ に限る[94]. 従って，勿論他に ESS は存在しない.

§ 6-1. タカ・ハトベイジアンゲーム

さて，以上の準備をしておくとメイナード・スミスのカタ・ハトゲームはベイジアンゲームの枠組みの中で次のように定式化できる．以下のゲームを**タカ・ハトベイジアンゲーム**ということにする.

タイプ空間：$\Lambda=\{1,2\}=\{$ 所有者，侵入者 $\}$. $\Lambda\times\Lambda$ 上の分布 $\{z(\lambda_1,\lambda_2)\}$ は対称である．つまり，$z(1,2)=z(2,1)$ と非自明性 $P(Z_1\neq Z_2)>0$ を仮定する[95]．なお，対称性から Z_1 と Z_2 の分布は同一である．この場合，自由に選べるパラメーターは二つであるから,

$$
\begin{aligned}
w_1 &:= P(Z_2=1/Z_1=1)=\frac{z(1,1)}{z(1,1)+z(1,2)}, \\
w_2 &:= P(Z_2=1/Z_1=2)=\frac{z(2,1)}{z(2,1)+z(2,2)}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

とおく．このとき，Z_1 と Z_2 が同分布を持つことから，$P(Z_1=1)=P(Z_2=1)=P(Z_2=1/Z_1=1)P(Z_1=1)+P(Z_2=1/Z_1=2)P(Z_1=2)=w_1P(Z_1=1)+w_2(1-P(Z_1=1))$.

[93]標準形ゲームの ESS の場合については Haigh([20]) が指摘している.

[94]対称でない行動戦略プロファイル (X_1^*,X_2^*) がベイジアン・ナッシュ均衡戦略である可能性はある.

[95]$P(Z_1=Z_2)=1$ の場合，各タイプ内だけでゲームが行われるだけであるから，各タイプ毎に通常の非協力ゲームの分析を行えばよい．一般論では形式上この場合を除外していない.

この関係式を整理すると $(1-w_1+w_2)P(Z_1=1)=w_2$．従って，

$$
\begin{aligned}
z(1,1) &= \frac{w_1 w_2}{1-w_1+w_2}, \quad z(1,2) = \frac{(1-w_1)w_2}{1-w_1+w_2} \\
z(2,1) &= \frac{(1-w_1)w_2}{1-w_1+w_2}, \quad z(2,2) = \frac{(1-w_1)(1-w_2)}{1-w_1+w_2}.
\end{aligned} \tag{45}
$$

この関係式からわかるように，非自明性の仮定 $z(1,2)>0$ と同値な条件として次のことを仮定する．

仮定 6-1.

$$0 \le w_1 < 1, \quad 0 < w_2 \le 1.$$

純戦略空間：$\Theta = \{1,\, 2\} = \{H,\, D\}$

タカ・ハトゲームに二つのタイプ，所有者（タイプ 1 とする），侵入者（タイプ 2 とする）があるから，プレーヤー１のタイプが λ_1, プレーヤー 2 のタイプが λ_2 の時タイプ $(\lambda_1,\, \lambda_2)$ と記して利得行列を次のよう定める．

¶ タイプ $(1,1)$：

	H	D
H	$((V-C)/2,\, (V-C)/2)$	$(V,\, 0)$
D	$(0,\, V)$	$(V/2,\, V/2)$

¶ タイプ $(1,2)$：

	H	D
H	$((V-C)/2,\, (v-c)/2)$	$(V,\, 0)$
D	$(0,\, v)$	$(V/2,\, v/2)$

¶ タイプ $(2,1)$：

	H	D
H	$((v-c)/2,\, (V-C)/2)$	$(v,\, 0)$
D	$(0,\, V)$	$(v/2,\, V/2)$

¶ タイプ $(2,2)$：

	H	D
H	$((v-c)/2,\, (v-c)/2)$	$(v,\, 0)$
D	$(0,\, v)$	$(v/2,\, v/2)$

以上の定義から，定義 6-3 の (i) が満たされており，さらに，メイナード・スミスにおいては $z(1,1)=z(2,2)=0$, $z(1,2)=z(2,1)=1/2$ であるから，定義 6-3 の (i) も満たされている．従って，対称ゲームになっている．

ここで，メイナード・スミスの意味でのタカ戦略 (H), ハト戦略 (D), ブルジョワ戦略 (B), 戦略 (A) を行動戦略で表現すると次のようになる．選択肢が二つしかなく，$x(2/\lambda_1) = 1 - x(1/\lambda_1)\,;\, \lambda_1 = 1, 2$ だから，以下行動戦略を二つのパラメーター $(x(1/1),\, x(1/2))$ で表わすことにする．

タカ戦略 (H)：$(x(1/1),\, x(1/2)) = (1,\, 1)$, ハト戦略 (D): $(x(1/1),\, x(1/2)) = (0,\, 0)$,
ブルジョワ戦略 (B): $(x(1/1),\, x(1/2)) = (1,\, 0)$, 戦略 (A) : $(x(1/1),\, x(1/2)) = (0,\, 1)$.

なお，$z(1,1) = z(2,2) = 0,\ z(1,2) = z(2,1) = 1/2$ のもとで期待利得を計算すると，各戦略間の対戦に対してプレーヤー 1 の期待利得は正しく Table 6-1(68 頁) に示した利得表の通りになることが容易に確認できる．

以上の設定の下にメイナード・スミスの結果を含む次の結果が得られる．なお，タカ・ハトベイジアンゲームの構造は本質的に５つのパラメーター $w_1,\, w_2,\, r_1 := V/C,\, r_2 := v/c, \gamma := C/c$ によって決定される．特に，ベイジアン・ナッシュ均衡戦略は４つのパラメーター $w_1,\, w_2,\, r_1,\, r_2$ によって完全に決定されるが，ESS であるかどうかの判定には γ が必要である．ここで，$r_1,\, r_2,\, \gamma$ については次のことを仮定する．

仮定 6-2.

$$r_1 := V/C > 0, \quad r_2 := v/c > 0, \quad \gamma := C/c > 0.$$

最初にタカ・ハトベイジアンゲームのベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $(x^*(1/1), x^*(1/2))$ が ESS となる条件を具体的にチェックしておく．２タイプしかないから次の命題 6-1 の (0) から (3) については定理 6-1 を適用することが出来る．(4) は直接定義に戻って計算で確認する必要がある．

命題 6-1. (0) $|\Theta(X^*/1)| = 1,\ |\Theta(X^*/2)| = 1$ の場合．ベイジアン・ナッシュ均衡 $(x^*(1/1) = 0, \mathrm{or}\, 1,\, x^*(1/2) = 0, \mathrm{or}\, 1)$ は ESS である．

(1) $|\Theta(X^*/1)| = 1,\, |\Theta(X^*/2)| = 2$ の場合，

ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $(x^*(1/1) = 0, \mathrm{or}\, 1,\, 0 \le x^*(1/2) \le 1)$ が ESS であるための必要十分条件は $z(2,2) > 0\, (\Leftrightarrow (1 - w_2) > 0)$ である．

(2) $|\Theta(X^*/1)| = 2,\, |\Theta(X^*/2)| = 1$ の場合，

ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $(0 \le x^*(1/1) \le 1,\, x^*(1/2) = 0, \mathrm{or}\, 1)$ が ESS であるための必要十分条件は $z(1,1) > 0\, (\Leftrightarrow w_1 > 0)$ である．

(3) $|\Theta(X^*/1)| = |\Theta(X^*/2)| = 2$，かつ $0 < x^*(1/1) < 1$ または $0 < x^*(1/2) < 1$ の場合，ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $(x^*(1/1),\, x^*(1/2))$ が ESS であるための必要十分条件は

$$g(w_1) = \frac{4\gamma w_1}{4\gamma + (\gamma - 1)^2 (1 - w_1)}$$

とおくとき，

$$0 < w_1,\, w_2 < 1 \text{ かつ } w_2 < g(w_1) \tag{46}$$

である．特に $\gamma = 1$ の場合は $g(w_1) = w_1$ であるが，それ以外では $w_2 = g(w_1)$ のグラフは原点 $(0,0)$ と 点 $(1,1)$ を通り，真に単調増加で下に凸（2 階の導関数の値が正）であるような関数である．

(4) $|\Theta(X^*/1)| = |\Theta(X^*/2)| = 2$ かつ $|\{\theta\,;\, x^*(\theta/1) > 0\}| = |\{\theta\,;\, x^*(\theta/2) > 0\}| = 1$, つまり純粋行動戦略であって局所 λ-強ベイジアン・ナッシュ均衡 $(\lambda = 1, 2)$ となっていない場合．(H) 戦略または (D) 戦略が ESS であるための必要十分条件[96]は $0 < w_1, w_2 < 1$ である．つまり，$w_1 = 0$ または $w_2 = 1$ の場合に限り ESS ではない．他方，(B) 戦略または (A) 戦略が ESS であるための必要十分条件は (3) と同じ $0 < w_1,\, w_2 < 1$ かつ $w_2 < g(w_1)$ である．

証明. (0) この場合は強ベイジアン・ナッシュ均衡となっているから定理 6-1 (i) から ESS である．

(1) $|\Theta(X^*/1)| = 1, |\Theta(X^*/2)| = 2$ の場合，$\Lambda^* = \{\,2\,\}$ であり，$|\Theta| = 2$ だから $\theta_2^{(0)} = 2$ ならば $\theta_2 = 1$，$\theta_2^{(0)} = 1$ ならば $\theta_2 = 2$ であって，このときは定理 6-1 から $d = 1$ 次元の自明な行列 $U(X^*) = u((1,2),(1\,2))$ または $U(X^*) = u((2,2),(2\,2))$ を調べればよいことがわかる．しかし,，(40) 式 (75 頁) からわかるように両者は一致し，

$$\begin{aligned}
u((1,\,2),(1,\,2)) &= u((2,\,2),(2,\,2)) \\
&= (-w_1(1,\,1\,;\,2,\,2) + u_1(1,\,2\,;\,2,\,2) + u_1(2,\,1\,;\,2,\,2) - u_1(2,\,2\,;\,2,\,2))z(2,\,2). \\
&= cz(2,\,2)/2
\end{aligned}$$

となるから，正定値行列であるための必要十分条件は $z(2,2) > 0$ となることでる．これは $w_2 < 1$ と同値である．

(2) の証明は (1) とまったく同様であるから読者自ら試みられたい．

(3) 仮定から，$\theta_1^{(0)} = \theta_2^{(0)} = 1$ または $\theta_1^{(0)} = \theta_2^{(0)} = 1$ と定めることが出来る．$\Lambda^* = \Lambda = \{\,1,\,2\,\}$ だから，$U(X^*)$ は 2 次の行列 $U(\lambda_1, \lambda_2) := (u(1,1\,;\,\lambda_1,\lambda_2))_{\lambda_1=1,2\,\lambda_2=1,2}$ または $U(\lambda_1,\lambda_2) := (u(2,2\,;\,\lambda_1,\lambda_2))_{\lambda_1=1,2\,\lambda_2=1,2}$ であるが，(40) 式 (75 頁) より両者は一致して

$$\begin{aligned}
U(\lambda_1,\lambda_2) = (&-u_1(1,\,1\,;\,\lambda_1,\,\lambda_2) + u_1(1,\,2\,;\,\lambda_1,\,\lambda_2) \\
&+ u_1(2,\,1\,;\,\lambda 1,\,\lambda_2) - u_1(2,\,2\,;\,\lambda_1,\,\lambda_2))z(\lambda_1,\,\lambda_2).
\end{aligned}$$

となる．これを具体的に計算すると

$$U(X^*) = \begin{pmatrix} (C/2)z(1,\,1) & (C/2)z(1,\,2) \\ (c/2)z(2,\,1) & (c/2)z(2,\,2) \end{pmatrix},$$

$$U^s(X^*) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2Cz(1,\,1) & (C+c)z(1,\,2) \\ (C+c)z(2,\,1) & 2cz(2,\,2) \end{pmatrix}$$

が得られる．$U^s(X^*)$ が正定値であるための必要十分条件は線形代数学の知識から，$z(1,1) > 0$, $z(2,2) > 0$ と行列式 $4Ccz(1,1)z(2,2) - (C+c)^2(z(1,2))^2 > 0$ である．これを w_1, w_2, γ で表わすと，(45) から，$w_1 > 0, w_2 < 1$ と

$$4Ccz(1,1)z(2,2) - (C+c)^2(z(1,2))^2 = \frac{c^2(1-w_1)w_2}{(1-w_1+w_2)^2}(4\gamma(w_1-w_2) - (\gamma-1)^2 w_2(1-w_1)) > 0$$

[96]実は後で示すように (D) 戦略は決してベイジアン・ナッシュ均衡戦略にならないから考慮しなくてよい．

となる．この関係式を整理すると$U^s(X^*)$が正定値であるための必要十分条件は仮定 6-1 も合わせて，

$$0 < w_1,\, w_2 < 1 \text{ かつ } w_2 < g(w_1) \tag{47}$$

と表わされる．

(4) この場合，(3) との決定的違いは 定理 6-1 が適用出来ないことである．(定理 6-1 の証明を注意深くチェックされたい)．従って，(41) 式 (75 頁) を直接計算する．行列 $U(X^*)$ は (λ_1, λ_2) で成分が決まる 2 次の正方行列である．ひとつひとつチェックする．

(4-1) $x^*(1/1) = x^*(1/2) = 1$(H 戦略) の場合．$\theta_1^{(0)} = 1,\ \theta_2^{(0)} = 1$ であるから，行列 $U(X^*)$ そのものは (3) の場合と全く同じく，

$$U(X^*) = \begin{pmatrix} (C/2)z(1,\,1) & (C/2)z(1,\,2) \\ (c/2)z(2,\,1) & (c/2)z(2,\,2) \end{pmatrix}$$

となる．(3) との違いは，$x^*(2/1) - x(2/1) = -x(2/1), x^*(2/2) - x(2/2) = -x(2/2)$ となるためで，(41) 式の左辺は

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2=1,2} U(\lambda_1, \lambda_2)x(2/\lambda_1)x(2/\lambda_2) =$$

$$Cz(1,1)x(2/1))^2/2{+}Cz(1,2)x(2/1)x(2/2)/2{+}cz(2,1)x(2/2)x(2/1)/2{+}cz(2,2)(x(2/2))^2/2$$
$$= C(z(1,1){+}z(1,2))x(2/1)(w_1x(2/2){+}(1{-}w_1)x(2/2)/2{+}c(z(2,1){+}z(2,2))x(2/2)(w_2x(2/1){+}$$
$$(1 - w_2)x(2/2)/2$$

となり，$(x^*(2/1), x^*(2/2)) = (0, 0) \neq (x(2/1), x(2/2))$ と $\{z(\theta/\lambda)\}$ の非自明性の仮定から上の式は，$0 < w_1, w_2 < 1$ のときは正，$w_1 = 0$ のときは $x(2/1) \neq 0, x(2/2) = 0$, $w_2 = 1$ のときは $x(2/1) = 0, x(2/2) \neq 0$ に対してゼロとなるから ESS ではない．

(4-2) $x^*(1/1) = x^*(1/2) = 0$(D 戦略) の場合．この場合の行列 $U(X^*)$ は (4-1) と全く一致するのであるが，読者は自ら確認されたい．ただし，後で示すように D 戦略はけっしてベイジアン・ナッシュ均衡戦略にならないからこの場合は除外してよい．

(4-3) $x^*(1/1) = 1,\ x^*(1/2) = 0$(B 戦略) の場合．$\theta_1^{(0)} = 1,\ \theta_2^{(0)} = 2$ であるが，(40) 式 (75 頁) より，行列 $U(X^*)$ の成分 $U(\lambda_1, \lambda_2)$ は

$$U(1,1) = (-u_1(2,\,2\,;\,1,\,1) + u_1(2,\,1\,;\,1,\,1) + u_1(1,\,2\,;\,1\,1) - u_1(1,\,1\,;\,1,\,1))z(1,1).$$

$$U(1,2) = (-u_1(2,\,1\,;\,1,\,2) + u_1(1,\,1\,;\,1,\,2) + u_1(2,\,2\,;\,1,\,2) - u_1(1,\,2\,;\,1,\,2))z(1,\,2).$$

$$U(2,1) = (-u_1(1,\,2\,;\,2,\,1) + u_1(2,\,2\,;\,2,\,1) + u_1(1,\,1\,;\,2,\,1) - u_1(2,\,1\,;\,2,\,1))z(2,\,1).$$

$$U(1,1) = (-u_1(1,\,1\,;\,2,\,2) + u_1(1,\,2\,;\,2,\,2) + u_1(2,\,1\,;\,2\,2) - u_1(2,\,2\,;\,2,\,2))z(2,2).$$

となる．これを具体的に計算すると

$$U(X^*) = \begin{pmatrix} (C/2)z(1,\,1) & -(C/2)z(1,\,2) \\ -(c/2)z(2,\,1) & (c/2)z(2,\,2) \end{pmatrix}$$

となる．この場合は，$x^*(2/1)-x(2/1)=-x(2/1), x^*(1/2)-x(1/2)=-x(1/2)$ となるためで，(41) 式の左辺は

$$Cz(1,1)x(2/1))^2/2-Cz(1,2)x(2/1)x(1/2)/2-cz(2,1)x(1/2)x(2/1)/2+cz(2,2)(x(1/2))^2/2$$
$$=(C/2)x(2/1)(z(1,1)x(2/1)-z(1,2)x(1/2))-(c/2)x(1/2)(z(2,1)x(2/1)-z(2,2)x(1/2))$$

となる．(4-1) との違いは $(x^*(2/1)$ を $-(x^*(2/1)$ に置き換えた方が値が大きくなる．つまり，上式がゼロでない任意のベクトルに対して正とならなくてはいけない．つまり，正定値でなくてはいけないから，結論は (3) の場合と同様となる．つまり，ESS となるための必要十分条件は $0<w_1$, $w_2<1$ かつ $w_2<g(w_1)$ である．

(4-4) $x^*(1/1)=0$, $x^*(1/2)=1$(A 戦略) の場合．この場合も $U(X^*)$ は (4-3) と全く同じ行列が得られるから読者は自ら確認されたい.（証明終り）

次に，具体的にどのような種類のベイジアン・ナッシュ均衡戦略あるいは ESS が存在するか，パラメーター r_1, r_2, w_1, w_2 の完全な分類に対して解答を与える．分類は (r_1, r_2) 平面の第 I 象限の領域で表現する．w_1, w_2 はパラメーターとして扱う.

命題 6-2. ESS を問題にしているので対称なベイジアン・ナッシュ均衡戦略のみに注目する．従って，対称な均衡行動戦略を $(x^*(1/1), x^*(1/2))$ によって表わす.

(I) D 戦略 $(x^*(1/1), x^*(1/2))=(0,0)$）は決してベイジアン・ナッシュ均衡戦略（従って ESS）にならない,

(II) (1) $r_1>1$ かつ $r_2>1$ の場合．$(x^*(1/1), x^*(1/2))=(1,1)$(H 戦略）が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，強ベイジアン均衡であって ESS である,

(2) $r_1=1<r_2$ の場合．$(x^*(1/1), x^*(1/2))=(1,1)$(H 戦略）が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるが，$w_1>0$ ならば ESS であり，そうでなければ ESS ではない.

(3) $r_1>1=r_2$ の場合は．$(x^*(1/1), x^*(1/2))=(1,1)$(H 戦略）が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるが，$1-w_2>0$ ならば ESS であり，そうでなければ ESS ではない.

(4) $r_1=r_2=1$ の場合．$(x^*(1/1), x^*(1/2))=(1,1)$(H 戦略）が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，$0<w_1, w_2<1$ ならば ESS であるが，$w_1=0$ または $w_2=1$ の場合は ESS ではない.

以下，$r_1<1$ または，$r_2<1$ の場合は w_1, w_2 の相互関係によって結果が異なる.

(III) $w_1=0$, $w_2=1$，つまり $z(1,1)=z(2,2)=0$ を仮定する.（従って対称性から必然的に $z(1,2)=z(2,1)=1/2$ であり，Selten([69], 1980) の定理が適用可能である）. メイナード・スミスでは言葉で説明してあり，またより一般的枠組みを述べていないからはっきりとは意識しずらいが我々の枠組みの中で位置付けると彼の説明している状況は明らかにこの場合である.

(5) $r_2<1<r_1$ の場合．$(x^*(1/1), x^*(1/2))=(1,0)$)(B 戦略）が唯一のベイジアン・

ナッシュ均衡戦略であり，強ベイジアン・ナッシュ均衡であって ESS である．

(6) $r_2 < 1 = r_1$ の場合．$(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1, 0))$(B 戦略）が強ベイジアン・ナッシュ均衡であって ESS であるが，$(0 \le x^*(1/1) \le r_2, 1)$ という ESS ではないベイジアン・ナッシュ均衡戦略が存在する．

(7) $r_1 < 1 < r_2$ の場合（メイナード・スミスでは $v < V, C = c$ を仮定しているから $r_2 < r_1$ であり，この場合は現れない）．$(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (0, 1)$(A 戦略）が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，強ベイジアン・ナッシュ均衡であって ESS である．

(8) $r_1 < 1 = r_2$ の場合．$(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (0, 1)$(A 戦略）が強ベイジアン・ナッシュ均衡であって ESS であるが，$(1, 0 \le x^*(1/2) \le r_1)$ という ESS ではないベイジアン・ナッシュ均衡戦略が存在する．

(9) $r_1 < 1, r_2 < 1$ の場合３つの対称ベイジアン･ナッシュ均衡戦略 (i) $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1, 0)$ (B 戦略）, (ii) $(0, 1)$ (A 戦略), (iii) 混合戦略 $(r_2\,, r_1)$ が存在する．このうち，混合戦略は Selten の定理によって ESS ではなく，B 戦略と A 戦略のみが強ベイジアン・ナッシュ均衡であって ESS である．メイナード・スミスの結果（８章 110 頁-111 頁）は上記 (1),(5),(9) に対応している．なお二つの非対称ベイジアン・ナッシュ均衡戦略，$(x_1^*(1/1), x_1^*(1/2)\,;\, x_2^*(1/1), x_2^*(1/2)) = (r_2, 1\,;\, 0,\, r_1)$ と $(r_2, 0\,;\, 1,\, r_1)$ が存在する．読者自身で確認されたい．

ここで，数学記号を確認しておく．実数，a, b に対して，$a \vee b = \max\{a, b\}, a \wedge b = \min\{a, b\}$ を表わす．

(IV) $w_1 = 0, 0 < w_2 < 1$，つまり $z(1, 1) = 0, 0 < z(2, 2) < 1$ を仮定する．

(10) $r_2 < 1 < r_1$ の場合．$(x^*(1/1) = 1, x^*(1/2) = ((r_2 - w_2)/(1 - w_2)) \vee 0)$ が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって，ESS である．

(11) $r_2 < 1 = r_1$ の場合．$(x^*(1/1) = 1, x^*(1/2) = ((r_2 - w_2)/(1 - w_2)) \vee 0)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，ESS である．さらに，$r_2 \ge 1 - w_2$ の範囲では，$(0 \le x^*(1/1) \le (r_2 - (1 - w_2))/w_2, x^*(1/2) = 1)$ というベイジアン・ナッシュ均衡戦略も存在するが，ESS ではない．

(12) $r_1 < 1$ の場合，$r_2 < (1 - w_2)r_1 + w_2$ ならば $(x^*(1/1) = 1, x^*(1/2)) = ((r_2 - w_2)/(1 - w_2)) \vee 0)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって，ESS である．他方，$r_2 > (1 - w_2)r_1$ ならば $(x^*(1/1) = 0, x^*(1/2) = (r_2/(1 - w_2)) \wedge 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって，ESS である．その他に $(1 - w_2)r_1 \le r_2 \le (1 - w_2)r_1 + w_2$ の場合，$(x^*(1/1) = (r_2 - (1 - w_2)r_1)/w_2,\ x^*(1/2) = r_1)$ もベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるが，ESS ではない．

(V) $0 < w_1 < 1, w_2 = 1$，つまり $0 < z(1, 1) < 1, z(2, 2) = 0$ を仮定する．

(13) $r_1 < 1 < r_2$ の場合．$(x^*(1/1)) = ((r_1 - (1 - w_1))/w_1) \vee 0, x^*(1/2) = 1)$ が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって，ESS である．

(14) $r_1 < 1 = r_2$ の場合．$(x^*(1/1) = ((r_1 - (1 - w_1))/w_1) \vee 0, x^*(1/2) = 1)$ が

ベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，ESS である．さらに，$r_1 \geq w_1$ の範囲では，$(x^*(1/1) = 1, 0 \leq x^*(1/2) \leq (r_1 - w_1)/(1 - w_1))$ というベイジアン・ナッシュ均衡戦略も存在するが，ESS ではない．

(15) $r_2 < 1$ の場合．$r_1 < w_1 r_2 + (1 - w_1)$ ならば $(x^*(1/1) = ((r_1 - (1 - w_1))/w_1) \vee 0, x^*(1/2) = 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって，ESS である．他方，$r_1 > w_1 r_2$ ならば $(x^*(1/1)) = (r_1/w_1) \wedge 1, x^*(1/2) = 0)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であって，ESS である．その他に $w_1 r_2 \leq r_1 \leq w_1 r_2 + (1 - w_1)$ の場合，$(x^*(1/1) = r_2, x^*(1/2) = (r_1 - w_1 r_2)/(1 - w_1))$ もベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるが，ESS ではない．

(VI) $0 < w_1, w_2 < 1$，つまり $0 < z(1,1) < 1, 0 < z(2,2) < 1$ を仮定する．この場合は，所有者同士，非所有者同士が出会う可能性があるので Selten の定理は適用できない．実際混合戦略でも ESS となる場合が存在する．かつ，(III)–(V) に比べてはるかに多様な場合分けが必要になる．以下細かくチェックして行く．w_1, w_2 を所与のパラメーターと考えて，(r_1, r_2) を座標とみなす座標平面の第 I 象限に図を描いて考えると理解しやすいであろう．

$$\ell_1(r_1) := (1 - w_2)r_1/(1 - w_1), \quad \ell_2(r_1) := w_2 r_1/w_1 + (w_1 - w_2)/w_1,$$

$$\ell_3(r_2) := w_1 r_2/w_2, \quad \ell_4(r_2) := (1 - w_1)r_2/(1 - w_2) + (w_1 - w_2)/(1 - w_2)\ ,$$

とおく．

(VI-1) $0 < w_2 < w_1 < 1$ の場合．唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略が存在している．具体的には次のようになっている．

$$R_{11} := \{(r_1, r_2)\,;\, r_1 < 1,\, r_2 > \ell_1(r_1) \wedge \ell_2(r_1)\}$$

$$R_{12} := \{(r_1, r_2)\,;\, r_2 < 1,\, r_1 > \ell_3(r_2) \wedge \ell_4(r_2)\}$$

$$R_{13} := \{(r_1, r_2)\,;\, r_1 \leq \ell_3(r_2) \wedge \ell_4(r_2),\, r_2 \leq \ell_1(r_1) \wedge \ell_2(r_1)\} - (1,1)$$

とおく．

$w_2/w_1 < (1 - w_2)/(1 - w_1)$ と $\ell_2(1) = \ell_4(1) = 1$ に注意すると，R_{11}, R_{12}, R_{13} は領域 $\{0 < r_1 < 1\} \cup \{0 < r_2 < 1\}$ の分割になっていることに注意されたい．

(16) $(r_1, r_2) \in R_{11}$ のとき，

$(x^*(1/1) = ((r_1 - (1 - w_1))/w_1) \vee 0, x^*(1/2) = (r_2/(1 - w_2)) \wedge 1)$ が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，かつ ESS でもある．

(17) $(r_1, r_2) \in R_{12}$ のとき，

$(x^*(1/1) = (r_1/w_1) \wedge 1, x^*(1/2) = ((r_2 - w_2)/(1 - w_2)) \vee 0)$ が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，かつ ESS でもある．

(18) $(r_1, r_2) \in R_{13}$ のとき，

$(x^*(1/1) = ((1 - w_2)r_1 - (1 - w_1)r_2)/(w_1 - w_2), x^*(1/2) = (-w_2 r_1 + w_1 r_2)/(w_1 - w_2))$ が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，かつ $w_2 < g(w_1)$ のとき，かつそのときのみ ESS でもある．

(VI-2) $0 < w_1 < w_2 < 1$ の場合.

$R_{21} := \{(r_1, r_2)\,;\, r_1 < 1,\, r_2 > \ell_1(r_1) \vee \ell_2(r_1)\}$

$R_{22} := \{(r_1, r_2)\,;\, r_2 < 1,\, r_1 > \ell_3(r_2) \vee \ell_4(r_2)\}$

$R_{23} := \{(r_1, r_2)\,;\, r_1 \geq \ell_3(r_2) \vee \ell_4(r_2),\, r_2 \geq \ell_1(r_1) \vee \ell_2(r_1)\} - (1, 1)$

とおく.

この場合は (VI-1) と違って，$\{0 < r_1 < 1\} \cup \{0 < r_2 < 1\} = R_{21} \cup R_{22}$ であり，$R_{23} \supset R_{21} \cap R_{22}$ である．共通の領域では2種類のベイジアン・ナッシュ均衡戦略が存在する．ただし，それらの境界では解が一致する.

(19) $(r_1, r_2) \in R_{21}$ のとき，

$(x^*(1/1) = ((r_1 - (1 - w_1))/w_1) \vee 0, \,, x^*(1/2) = (r_2/(1 - w_2)) \wedge 1)$ はベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，かつ ESS である.

(20) $(r_1, r_2) \in R_{22}$ のとき，

$(x^*(1/1) = (r_1/w_1) \wedge 1,\, x^*(1/2) = ((r_2 - w_2)/(1 - w_2)) \vee 0)$ はベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，かつ ESS である

(21) $(r_1, r_2) \in R_{23}$ のとき，

$(x^*(1/1) = ((1 - w_2)r_1 - (1 - w_1)r_2)/(w_1 - w_2),\, x^*(1/2) = (-w_2 r_1 + w_1 r_2)/(w_1 - w_2))$ はベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるが， ESS ではない.

(VI-3) $0 < w_1 = w_2 = w < 1$ の場合．$w_2 = w_1$ となるのは確率変数 Z_1 と Z_2 が独立の場合，かつその場合のみである．この場合，$z(1, 1) = w^2$ である.

(22) (VI-1) の (16),(17) あるいは (VI) の (19),(20) において，$w_1 = w_2 = w$ と置いて得られる解の他に，$r_1 = r_2 = r < 1$ の場合に

$$r - wx^*(1/1) - (1 - w)x^*(1/2) = 0$$

を満たす $0 \leq x^*(1/1),\, x^*(1/2) \leq 1$ なるベイジアン・ナッシュ均衡戦略が存在するが何れも ESS ではない.

証明． まず，対称行動戦略がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるための条件は補題 5-3(59 頁) に於いて, $X_1^* \cong X_2^*$

$A_1(\lambda_1, \lambda_2) := u_1(1, 1\,;\, \lambda_1, \lambda_2) + u_1(2, 2\,;\, \lambda_1, \lambda_2) - u_1(1, 2\,;\, \lambda_1, \lambda_2) - u_1(2, 1\,;\, \lambda_1, \lambda_2)$

$B(\lambda_1, \lambda_2) := u_1(1, 2\,;\, \lambda_1, \lambda_2) - u_1(2, 2\,;\, \lambda_1, \lambda_2)$,

だから，

$A_1(1,\, 1) = A_1(1,\, 2) = -C/2, \quad A_1(2,\, 1) = A_1(2,\, 2) = -c/2,$

$B(1,\, 1) = B(1,\, 2) = V/2, \qquad B(2,\, 1) = B(2,\, 2) = v/2,$

$z_1(\lambda_1, \lambda_2) = z_2(\lambda_1, \lambda_2) = z(\lambda_1, \lambda_2).$

これを補題 5-3 の (i-1),(i-2) に代入して (さらに，両辺を 2 倍する），

(i-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/1) - x)((V - Cx^*(1/1))z(1,1) + (V - Cx^*(1/2))z(1,2)) \geq 0, \tag{48}$$

と

(i-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/2) - x)((v - cx^*(1/1))z(2,1) + (v - cx^*(1/2))z(2,2)) \geq 0 \tag{49}$$

が得られる．

(48) 式 を $C(z(1,1)+z(1,2))$ で割り，(49) 式を $c(z(2,1)+z(2,2))$ で割って，w_1, w_2, r_1, r_2 で表わすと

(i-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/1) - x)(r_1 - w_1 x^*(1/1) - (1 - w_1)x^*(1/2)) \geq 0, \tag{50}$$

と

(i-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/2) - x)(r_2 - w_2 x^*(1/1) - (1 - w_2)x^*(1/2)) \geq 0 \tag{51}$$

となる．

(I) 条件式 (50) と条件式 (51) に $x^*(1/1) = x^*(1/2) = 0$(D 戦略) を代入してみると，$r_1, r_2 > 0$ だから，決して成り立たないことがわかるから，D 戦略は決してベイジアン・ナッシュ均衡戦略になり得ない．

(II) (1) $r_1 > 1$, $r_2 > 1$ の場合，$r_1, r_2 > x^*(1/1), x^*(1/2)$ だから，条件式 (50) と条件式 (51) を満たす解は $x^*(1/1) = x^*(1/2) = 1$ (H 戦略) しか存在しない．かつ不等式で成り立っているから強ベイジアン均衡であって ESS である, (2) $r_1 = 1$ かつ $r_2 > 1$ の場合はやはり，$(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1,1)$(H 戦略）が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるが，$|\Theta(X^*/1)| = 2$, $|\Theta(X^*/2)| = 1$ である．しかし，命題 6-1 (2) より，$w_1 > 0$ ならば ESS であり，そうでなければ ESS ではない．同様に，(3) $r_1 > 1$ かつ $r_2 = 1$ の場合はやはり，$(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1,1)$(H 戦略）が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるが，$|\Theta(X^*/2)| = 2$, $|\Theta(X^*/1)| = 1$ である．しかし，命題 6-1 (2) より，$1 - w_2 > 0$ ならば ESS でり，そうでなければ ESS ではない．最後に (4) $r_1 = r_2 = 1$ の場合，やはり，$(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1,1)$(H 戦略）が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるが，$|\Theta(X^*/1)| = |\Theta(X^*/2)| = 2$ であり，命題 6-1 (4) から結論が得られる．

(III) $w_1 = 0$, $w_2 = 1$，つまり $z(1,1) = z(2,2) = 0(\Longleftrightarrow z(1,2) = z(2,1) = 1/2)$ の場合．条件式 (50) と条件式 (51) は

(i-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x^*(1/1) - x)(r_1 - x^*(1/2)) \geq 0, \tag{52}$$

と

(i-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して,

$$(x^*(1/2) - x)(r_2 - x^*(1/1)) \geq 0 \tag{53}$$

となる.

従って, (5) $r_2 < 1 < r_1$ の場合. $r_1 - x^*(1/2)) > 0$ だから, (52) 式から $x^*(1/1) = 1$ となり, $r_2 - x^*(1/1) < 0$ と (53) 式から $x^*(1/2) = 0$ が得られる. この場合, 真に不等号が成立しているから強ベイジアン・ナッシュ均衡である. 従って, $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1, 0)$(B 戦略) が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略かつ ESS でもある.

(6) $r_2 < 1 = r_1$ の場合. $x^*(1/2) = 1$ が解ならば, 条件式 (52) は任意の $x^*(1/1)$ に対して成立する. しかし, 条件式 (53) から $r_2 - x^*(1/1) \geq 0$ でなくてはならない. この場合, $x^*(1/1) = r_2$ ならば $|\Theta(X^*/1)| = 2$, $|\Theta(X^*/2)| = 2$, $|\{\theta\,;\, x^*(\theta/1) > 0\}| = 2$ で命題 6-1 (3) より ESS ではない. $0 \leq x^*(1/1) < r_2$ ならば $|\Theta(X^*/2)| = 1$ で命題 6-1 (2) より ESS ではない. $x^*(1/2) < 1$ が解ならば条件式 (52) より $x^*(1/1) = 1$ でなくてはならず, 条件式 (53) から $x^*(1/2) = 0$ が得られる. この場合は強ベイジアン・ナッシュ均衡である.

(7) $r_1 < 1 < r_2$ の場合 (メイナード・スミスでは $V > v$, $C = c$ を仮定しているからこの場合は現れない). この場合は (5) において, 単に r_1 と r_2 を取り換えただけであるから, 容易に $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (0, 1)$(A 戦略) が唯一のベイジアン・ナッシュ均衡戦略, かつ強ベイジアン・ナッシュ均衡であり ESS でもあることがわかる.

(8) $r_1 < 1 = r_2$ の場合. $x^*(1/1) = 1$ が解ならば, 条件式 (53) は任意の $x^*(1/2)$ に対して成立する. しかし, 条件式 (52) から $r_1 - x^*(1/2) \geq 0$ でなくてはならない. この場合, $|\Theta(X^*/2)| = 2$, $x^*(1/2) = r_1$ ならば $|\Theta(X^*/1)| = 2$, $|\{\theta\,;\, x^*(\theta/2) > 0\}| = 2$ で命題 6-1 (3) より ESS ではない. $0 \leq x^*(1/2) < r_1$ ならば $|\Theta(X^*/1)| = 1$ で命題 6-1 (1) より ESS ではない. $x^*(1/1) < 1$ が解ならば条件式 (53) より $x^*(1/2) = 1$ でなくてはならず, 条件式 (52) から $x^*(1/1) = 0$ が得られる. この場合は強ベイジアン・ナッシュ均衡である.

(9) $r_1 < 1$ かつ $r_2 < 1$ の場合. この場合は少々面倒である. まず, $r_1 < 1$ だから, $r_1 - x^*(1/2) = 0$ つまり, $0 < x^*(1/2) = r_1 < 1$ の場合, 条件式 (52) は任意の $x^*(1/1)$ に対して成り立っている. しかし, 条件式 (53) において $(x^*(1/2) - x) = (r_1 - x)$ は正にも負にもなるから, ここの不等式が成り立つためには $r_2 - x^*(1/1) = 0$ でなくてはならない. つまり, $x^*(1/1) = r_2$ しか許されない. 結局, この場合は混合ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (r_2, r_1)$ が得られる. 且つ Selten の定理が成り立つケースであるからこの混合戦略は ESS ではない. 次に, $r_1 - x^*(1/2) > 0$ の場合を

考察しよう．この場合，条件式 (52) は $x^*(1/1) = 1$ の場合しか成り立たない．これを条件式 (53) に代入すると $r_2 - 1 < 0$ だから $x^*(1/2) = 0$ の場合しか成り立たない．この値は $r_1 - x^*(1/2) > 0$ と矛盾しない．結局，この場合はベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1\,, 0)$(B 戦略) が得られる．かつ条件式は不等号で成り立っているから強ベイジアン・ナッシュ均衡であり，従って ESS である．最後に $r_1 - x^*(1/2) < 0$ の場合を考察しよう．この場合，条件式 (52) $x^*(1/1) = 0$ の場合しか成り立たない．これを条件式 (53) に代入すると $r_2 > 0$ だから $x^*(1/2) = 1$ の場合しか成り立たない．この値は $r_1 - x^*(1/2) < 0$ と矛盾しない．結局，この場合は強ベイジアン・ナッシュ均衡 $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (0\,, 1)$(A 戦略) が得られる．すなわち ESS でもある．なお，補題 5-3(59 頁) を用いて計算すると二つの非対称ベイジアン・ナッシュ均衡戦略，$(r_2, 1\,; 0, r_1)$ と $(r_2, 0\,; 1, r_1)$ が得られるから読者は自身で確認されたい．

(IV) $w_1 = 0, 0 < w_2 < 1$，つまり $z(1,1) = 0, 0 < z(2,2) < 1$ を仮定する．条件式 (50) と条件式 (51) は

(i-1)　$0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/1) - x)(r_1 - x^*(1/2)) \geq 0, \tag{54}$$

と

(i-2)　$0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/2) - x)(r_2 - w_2 x^*(1/1) - (1 - w_2)x^*(1/2))) \geq 0 \tag{55}$$

となる．

(10) $r_2 < 1 < r_1$ の場合．条件式 (54) から $x^*(1/1) = 1$ でなくてはいけない．これを条件式 (55) に代入すると，$0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/2) - x)(r_2 - w_2 - (1 - w_2)x^*(1/2)) \geq 0 \tag{56}$$

となる．$r_2 - w_2 - (1 - w_2) < 0$ だから $x^*(1/2) = 1$ は解ではない．

$r_2 < w_2$ ならば $x^*(1/2) = 0$, $w_2 \leq r_2 < 1$ ならば $x^*(1/2) = (r_2 - w_2)/(1 - w_2)$ が解である．従って，$(x^*(1/1) = 1, x^*(1/2) = ((r_2 - w_2)/(1 - w_2)) \vee 0)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，$|\Theta(X^*/1)| = 1$ だから，命題 6-1 (1) により ESS である．

(11) $r_2 < 1 = r_1$ の場合．$x^*(1/2) = 1$ ならば条件式 (54) は無条件になりたつが，条件式 (55) から，$(r_2 - x^*(1/1))w_2 - (1 - w_2) \geq 0$ でなくてはならない．この式を $x^*(1/1)$ について解くと，$x^*(1/1) \leq (r_2 - (1 - w_2))/w_2$ となる．$x^*(1/1) \geq 0$ でなくてはいけないから $r_2 \geq 1 - w_2$．このとき，$(0 \leq x^*(1/1) \leq (r_2 - (1 - w_2))/w_2, x^*(1/2) = 1$ はベイジアン・ナッシュ均衡戦略である．さらに，命題 6-1 (2) または (3) により ESS ではない．次に，$0 < x^*(1/2) < 1$ なる解が存在したとすると，条件式 (54) から $x^*(1/1) = 1$．条件式 (55) から $(r_2 - 1)w_2 + (r_2 - x^*(1/2))(1 - w_2) = 0$．この式を解いて $x^*(1/2) =$

$(r_2 - w_2)/(1 - w_2)$．$0 < x^*(1/2) < 1$ でなくてはならないから $w_2 < r_2 < 1$．しかし，$r_2 \le w_2$ の場合は $x^*(1/2) = 0$ として条件式 (55) は満たされる．従って，$0 < r_2 < 1$ ならば，$(x^*(1/1) = 1, x^*(1/2) = ((r_2 - w_2)/(1 - w_2)) \vee 0)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，命題 6-1 (1) により ESS である．

(12) $r_1 < 1$ の場合．3 通りに分けて考える．条件式 (54) の解が $x^*(1/2) = r_1$ の場合．条件式 (55) は等号で成り立たなくてはならないから，$(r_2 - x^*(1/1))w_2 + (r_2 - r_1)(1 - w_2)) = 0$．これを $x^*(1/1)$ について解いて，$x^*(1/1) = (r_2 - r_1(1 - w_2))/w_2$．$0 \le x^*(1/1) \le 1$ でなくてはならないから $(1 - w_2)r_1 \le r_2 \le (1 - w_2)r_1 + w_2$．ただし，この場合は命題 6-1 (3) から ESS ではない．条件式 (54) の解が $x^*(1/2) < r_1$ の場合．$x^*(1/1) = 1$ でなくてはならない．$x^*(1/2) < r_1 < 1$ だから条件式 (55 から $(r_2 - w_2) \le (1 - w_2)x^*(1/2)$．ただし，$x^*(1/2) > 0$ ならば等号でなりたたなくてはならないから，$0 < x^*(1/2) = (r_2 - w_2)/(1 - w_2) < r_1$．$r_2 - w_2 < 0$ ならば $x^*(1/2) = 0$ でなくてはならない．まとめると，$(r_2 - w_2)/(1 - w_2) < r_1$ の場合，$(x^*(1/1) = 1, x^*(1/2)) = ((r_2 - w_2)/(1 - w_2)) \vee 0)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略である．かつ，命題 6-1 (1) より ESS である．最後に，条件式 (54) の解が $x^*(1/2) > r_1$ の場合．$x^*(1/1) = 0$ でなくてはならない．$x^*(1/2) > r_1 > 0$ だから条件式 (55) から $r_2 \ge (1 - w_2)x^*(1/2)$．ただし，$x^*(1/2) < 1$ ならば等号でなりたたなくてはならないから，$1 > x^*(1/2) = r_2/(1 - w_2) > r_1$．$r_2 > 1 - w_2$ ならば $x^*(1/2) = 1$ でなくてはならない．まとめると，$r_2 > r_1(1 - w_2)$ ならば $(x^*(1/1) = 0, x^*(1/2) = (r_2/(1 - w_2)) \wedge 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略である．かつ，命題 6-1 (1) より ESS である．

(V) $0 < w_1 < 1, w_2 = 1$，つまり $0 < z(1, 1) < 1, z(2, 2) = 0$ を仮定する．条件式 (50) と条件式 (51) は

(i-1) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x^*(1/1) - x)(r_1 - w_1 x^*(1/1) - (1 - w_1)x^*(1/2)) \ge 0, \tag{57}$$

と

(i-2) $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x^*(1/2) - x)(r_2 - x^*(1/1)) \ge 0 \tag{58}$$

となる．

(13) $r_1 < 1 < r_2$ の場合．条件式 (58) から $x^*(1/2) = 1$ でなくてはいけない．これを条件式 (57) に代入すると $0 \le \forall x \le 1$ に対して，

$$(x^*(1/1) - x)(r_1 - (1 - w_1) - w_1 x^*(1/1)) \ge 0 \tag{59}$$

となる．$r_1 - (1 - w_1) - w_1 < 0$ だから，$x^*(1/1) = 1$ は解ではない．$r_1 \le 1 - w_1$ ならば $x^*(1/1) = 0, 1 - w_1 \ge r_1 < 1$ ならば $x^*(1/1) = (r_1 - (1 - w_{1)})/w_1)$ が解である．従って，$(x^*(/1) = ((r_1 - (1 - w_{1)})/w_1)) \vee 0$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり $|\Theta(X^*/2)| = 1$ だから，命題 6-1 (2) より ESS である．

(14) $r_1 < 1 = r_2$ の場合．$x^*(1/1) = 1$ ならば条件式 (58) は無条件になりたつが，条件式 (57) から，$(r_1 - 1)w_1 + (r_1 - x^*(1/2))(1 - w_1)) \geq 0$ でなくてはならない．この式を $x^*(1/2)$ について解くと，$x^*(1/2) \leq (r_1 - w_1))/(1 - w_1)$ となる．$x^*(1/2) \geq 0$ でなくてはいけないから $r_1 \geq w_1$．このとき，$(x^*(1/1) = 1, 0 \leq x^*(1/2) \leq (r_1 - w_1))/(1 - w_1))$ はベイジアン・ナッシュ均衡戦略である．さらに，命題 6-1 (3) または (4) により ESS ではない．次に，$0 < x^*(1/1) < 1$ なる解が存在したとすると，条件式 (58) から $x^*(1/2) = 1$．条件式 (57) から $(r_1 - x^*(1/1))w_1 + (r_1 - 1)(1 - w_1) = 0$．この式を解いて $x^*(1/1) = (r_1 - (1 - w_1))/w_1$．$0 < x^*(1/1) < 1$ でなくてはならないから $1 - w_1 < r_1 < 1$．しかし，$r_1 = 1 - w_1$ の場合は $x^*(1/1) = 0$ として条件式 (57) は満たされる．従って，$0 < r_1 < 1$ ならば，$(x^*(1/1) = ((r_1 - (1 - w_1))/w_1) \vee 0, x^*(1/2) = 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であり，命題 6-1 (2) により ESS である．

(15) $r_2 < 1$ の場合．3 通りに分けて考える．条件式 (58) の解が $x^*(1/1) = r_2$ の場合．条件式 (57) は等号で成り立たなくてはならないから，$(r_1 - r_2)w_1 + (r_1 - x^*(1/2))(1 - w_1)) = 0$．これを $x^*(1/2)$ について解いて，$x^*(1/2) = (r_1 - w_1 r_2)/(1 - w_1)$．$0 \leq x^*(1/2) \leq 1$ でなくてはならないから $w_1 r_2 \leq r_1 \leq w_1 r_2 + (1 - w_1)$．ただし，この場合は命題 6-1 (3) から ESS ではない．条件式 (58) の解が $x^*(1/1) < r_2$ の場合．$x^*(1/2) = 1$ でなくてはならない．$x^*(1/1) < r_2 < 1$ だから条件式 (57 から $r_1 - (1 - w_1) \leq w_1)x^*(1/1)$．ただし，$x^*(1/1) > 0$ ならば等号でなりたたなくてはならないから，$0 < x^*(1/1) = (r_1 - (1 - w_1))/w_1 < r_2$ $r_1 - (1 - w_1) \leq 0$ ならば $x^*(1/1) = 0$ でなくてはならない．まとめると，$(r_1 - (1 - w_1))/w_1 < r_2$ ならば $(x^*(1/1) = (r_1 - (1 - w_1))/w_1 \vee 0, x^*(1/2) = 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略である．かつ，命題 6-1 (2) により ESS である．最後に，条件式 (58) の解が $x^*(1/1) > r_2$ の場合．$x^*(1/2) = 0$ でなくてはならない．$x^*(1/1) > r_2 > 0$ だから条件式 (57) から $r_1 \geq w_1 x^*(1/1)$．ただし，$x^*(1/1) < 1$ ならば等号でなりたたなくてはならないから，$1 > x^*(1/1) = r_1/w_1 > r_2$．$r_1 > w_1$ ならば $x^*(1/1) = 1$ でなくてはならない．まとめると，$r_1 > w_1 r_2$ ならば $(x^*(1/2) = 0, x^*(1/1)) = (r_1/w_1) \wedge 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略である．かつ，命題 6-1 (2) により ESS である．

(VI) $0 < w_1, w_2 < 1$ の場合を証明する．

$$f_1(x, y) := r_1 - w_1 x - (1 - w_1)y, \qquad f_2(x, y) := r_2 - w_2 x - (1 - w_2)y$$

とおくと，条件式 (50)，条件式 (51) は

(i-1) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/1) - x)f_1(x^*(1/1), x^*(1/2)) \geq 0, \tag{60}$$

(i-2) $0 \leq \forall x \leq 1$ に対して，

$$(x^*(1/2) - x)f_2(x^*(1/1), x^*(1/2)) \geq 0 \tag{61}$$

と表わされる．

以下，行動戦略 $(x^*(1/1), x^*(1/2))$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略であるときに，分布 $\{x^*(\theta/1)\}$ と $\{x^*(\theta/2)\}$ の台の違いによって分類し，条件式 (60) と条件式 (61) から r_1, r_2 が満たすべき条件を (r_1, r_2) 平面上の領域として表わす．領域が重なる部分では複数のベイジアン・ナッシュ均衡戦略を持つことになる．まず，一覧表にまとめる．

(a) $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1,1)$(H 戦略) がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合，

$$f_1(1,1) \geq 0, \quad f_2(1,1) \geq 0.$$

(b) $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1,0)$(B 戦略) がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合，

$$f_1(1,0) \geq 0, \quad f_2(1,0) \leq 0.$$

(c) $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (0,1)$(A 戦略) がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合，

$$f_1(0,1) \leq 0, \quad f_2(0,1) \geq 0.$$

(d) $(x^*(1/1) = 1,\, 0 < x^*(1/2) < 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合，

$$f_1(1, x^*(1/2)) \geq 0, \quad f_2(1, x^*(1/2)) = 0.$$

(e) $(0 < x^*(1/1) < 1,\, x^*(1/2) = 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合，

$$f_1(x^*(1/1), 1) = 0, \quad f_2(x^*(1/1), 1) \geq 0.$$

(f) $(x^*(1/1) = 0,\, 0 < x^*(1/2)) < 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合，

$$f_1(0, x^*(1/2)) \leq 0, \quad f_2(0, x^*(1/2)) = 0.$$

(g) $(0 < x^*(1/1) < 1,\, x^*(1/2)) = 0)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合，

$$f_1(x^*(1/1), 0) = 0, \quad f_2(x^*(1/1), 0) \leq 0.$$

(h) $0 < (x^*(1/1) < 1,\, 0 < x^*(1/2)) < 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合，

$$f_1(x^*(1/1), x^*(1/2)) = 0, \quad f_2(x^*(1/1), x^*(1/2)) = 0.$$

以下，順に条件式を解いてゆく．

(a) $f_1(1,1) = r_1 - 1 \geq 0$. $f_2(1,1) = r_2 - 1 \geq 0$ であるから，$r_1 \geq 1, r_2 \geq 1$ となり既に (II) で考察した．

(b) $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (1,0)$(B 戦略) がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合．

$f_1(1,0) = r_1 - w_1 \geq 0$. $f_2(1,0) = r_2 - w_2 \leq 0$ でなくてはならない．なお，$r_1 > w_1$ の場合は $|\Theta(X^*/1)| = 1$, $r_1 = w_1$ の場合は $|\Theta(X^*/1)| = 2$，$r_2 < w_2$ の場合は $|\Theta(X^*/2)| = 1$, $r_2 = w_2$ の場合は $|\Theta(X^*/2)| = 2$ である．従って，$(r_1 > w_1,\, r_2 < w_2)$ ならば強ベイジアン・ナッシュ均衡，$(r_1 = w_1,\, r_2 < w_2)$ または $(r_1 > w_1,\, r_2 = w_2)$ ならば命題 6-1 (1),(2)

により ESS である．命題 6-1 (4) により $w_2 < g(w_1)$ の場合に限り ESS である．

(c) $(x^*(1/1), x^*(1/2)) = (0,1)$(A 戦略) がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合.

$f_1(0,1) = r_1 - (1-w_1) \leq 0$, $f_2(0,1) = r_2 - (1-w_2) \geq 0$. なお，$r_1 < 1-w_1$ の場合は $|\Theta(X^*/1)| = 1$, $r_1 = 1-w_1$ の場合は $|\Theta(X^*/1)| = 2$，$r_2 > 1-w_2$ の場合は $|\Theta(X^*/2)| = 1$, $r_2 = 1-w_2$ の場合は $|\Theta(X^*/2)| = 2$ である．従って，$(r_1 < 1-w_1, r_2 > 1-w_2)$ ならば強ベイジアン・ナッシュ均衡，$(r_1 = 1-w_1, r_2 > 1-w_2)$ または $(r_1 < 1-w_1, r_2 = 1-w_2)$ の場合は命題 6-1 (1),(2) により ESS である．$(r_1 = 1-w_1, r_2 = 1-w_2)$ の場合は命題 6-1 (4) により $w_2 < g(w_1)$ の場合に限り ESS である．

(d) $(x^*(1/1) = 1, 0 < x^*(1/2) < 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合.

$f_1(1, x^*(1/2)) = r_1 - w_1 - (1-w_1)x^*(1/2)) \geq 0 \ \cdots (*)$,

$f_2(1, x^*(1/2)) = r_2 - w_2 - (1-w_2)x^*(1/2) = 0 \ \cdots (**)$.

なお，この場合，$f_1(1, x^*(1/2)) > 0$ ならば，$|\Theta(X^*/1)| = 1$ であり，命題 6-1 (1) より ESS であるが，$f_1(1, x^*(1/2)) = 0$ ならば，$|\Theta(X^*/1)| = 2$ であり，もちろん，$|\Theta(X^*/2)| = 2$ であるから命題 6-1 (3) より $0 < w_2 < g(w_1)$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない．さて，$(**)$ を $x^*(1/2)$ について解くと $x^*(1/2) = (r_2 - w_2)/(1-w_2)$ が得られる．この解を $(*)$ に代入して整理すると，$r_1 \geq \ell_4(r_2)$，$0 < x^*(1/2) < 1$ から $w_2 < r_2 < 1$ が得られる．まとめると，ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $(x^*(1/1) = 1, x^*(1/2) = (r_2 - w_2)/(1-w_2))$ は $(r_1 > \ell_4(r_2), w_2 < r_2 < 1)$ ならば ESS であるが $(r_1 = \ell_4(r_2), w_2 < r_2 < 1)$ の場合は $0 < w_2 < g(w_1)$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない.

(e) $(0 < x^*(1/1) < 1, x^*(1/2) = 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合.

$f_1(x^*(1/1), 1) = r_1 - w_1x^*(1/1) - (1-w_1) = 0 \ \cdots (*)$,

$f_2(x^*(1/1), 1) = r_2 - w_2x^*(1/1) - (1-w_2) \geq 0 \ \cdots (**)$.

なお，この場合，$f_2(x^*(1/1), 1) > 0$ ならば，$|\Theta(X^*/2)| = 1$ であり，命題 6-1 (2) より ESS であるが，$f_2(x^*(1/1), 1) = 0$ ならば，$|\Theta(X^*/2)| = 2$ であり，もちろん，$|\Theta(X^*/1)| = 2$ であるから命題 6-1 (3) より $0 < w_2 < g(w_1)$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない．さて，$(*)$ を $x^*(1/1)$ について解くと $x^*(1/1) = (r_1 - (1-w_1))/w_1$ が得られる．この解を $(**)$ に代入して整理すると，$r_2 \geq \ell_2(r_1)$，$0 < x^*(1/1) < 1$ から $1 - w_1 < r_1 < 1$ が得られる．まとめると，ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $((x^*(1/1) = (r_1 - (1-w_1))/w_1, x^*(1/2) = 1)$ は $(1-w_1 < r_1 < 1, r_2 > \ell_2(r_1))$ ならば ESS であるが $(1-w_1 < r_1 < 1, r_2) = \ell_2(r_1))$ の場合は $0 < w_2 < g(w_1)$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない.

(f) $(x^*(1/1) = 0, 0 < x^*(1/2)) < 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合.

$f_1(0, x^*(1/2)) = r_1 - (1-w_1)x^*(1/2) \leq 0 \ \cdots (*)$,

$f_2(0, x^*(1/2)) = r_2 - (1-w_2)x^*(1/2) = 0 \ \cdots (**)$.

なお，この場合，$f_1(0, x^*(1/2)) < 0$ ならば，$|\Theta(X^*/1)| = 1$ であり，命題 6-1 (1) より ESS であるが，$f_1(0, x^*(1/2)) = 0$ ならば，$|\Theta(X^*/1)| = 2$ であり，もちろん，$|\Theta(X^*/2)| = 2$ であるから命題 6-1 (3) より $0 < w_2 < g(w_1)$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない．さて，$(**)$ を $x^*(1/2)$ について解くと $x^*(1/2) = r_2/(1-w_2)$ が得られる．この解を $(*)$ に代入して整理すると，$r_2 \geq \ell_1(r_1)$，$0 < x^*(1/2) < 1$ から $0 < r_2 < 1-w_2$ が得られる．まとめると，ベイジアン･ナッシュ均衡戦略 $(x^*(1/1) = 0, x^*(1/2) = r_2/(1-w_2)$ は $0 < r_2 < 1-w_2$ かつ $r_2 > \ell_1(r_1)$ ならば ESS であるが $0 < r_2) < 1-w_2$ かつ $r_2 = \ell_1(r_1)$ の場合は $0 < w_2 < g(w_1)$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない．

(g) $(0 < x^*(1/1) < 1, x^*(1/2)) = 0)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合．

$f_1(x^*(1/1), 0) = r_1 - w_1x^*(1/1) = 0 \ \cdots (*)$,

$f_2(x^*(1/1), 0) = r_2 - w_2x^*(1/1) \leq 0 \ \cdots (**)$.

なお，この場合，$f_2(x^*(1/1), 0) < 0$ ならば，$|\Theta(X^*/2)| = 1$ であり，命題 6-1 (2) より ESS であるが，$f_2(x^*(1/1), 0) = 0$ ならば，$|\Theta(X^*/2)| = 2$ であり，もちろん，$|\Theta(X^*/2)| = 2$ であるから命題 6-1 (3) より $0 < w_2 < g(w_1)$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない．さて，$(*)$ を $x^*(1/1)$ について解くと $x^*(1/1) = r_1/w_1$ が得られる．この解を $(**)$ に代入して整理すると，$r_1 \geq \ell_3(r_2)$，$0 < x^*(1/1) < 1$ から $0 < r_1 < w_1$ が得られる．まとめると，ベイジアン・ナッシュ均衡戦略 $(x^*(1/1) = r_1/w_1, x^*(1/2) = 0)$ は $0 < r_1 < w_1$ かつ $r_1 > \ell_3(r_2)$ ならば ESS であるが $0 < r_1 < w_1$ かつ $r_1 = \ell_3(r_2)$ の場合は $0 < w_2 < g(w_1) < 1$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない．

(h) $0 < (x^*(1/1) < 1, 0 < x^*(1/2)) < 1)$ がベイジアン・ナッシュ均衡戦略となる場合．

$f_1(x^*(1/1), x^*(1/2)) = r_1 - w_1x^*(1/1) - (1-w_1)x^*(1/2) = 0 \ \cdots (*)$,

$f_2(x^*(1/1), x^*(1/2)) = r_2 - w_2x^*(1/1) - (1-w_2)x^*(1/2) = 0 \ \cdots (**)$.

なお，この場合，$|\{\theta\,;\, x^*(\theta/1) > 0\}| = 2$, $|\{\theta\,;\, x^*(\theta/2) > 0\}| = 2$ であり，命題 6-1 (3) より $0 < w_2 < g(w_1)$ ならば ESS，そうでなければ ESS ではない．さて，線形連立方程式 $(*)$,$(**)$ の解を求める．線形連立方程式の解の存在と一意性の判定条件はよく知られているから，それを適用すると，$w_1 \neq w_2$ のとき．唯一の解

$$x^*(1/1) = \frac{(1-w_2)r_1 - (1-w_1)r_2}{w_1 - w_2},\ x^*(1/2) = \frac{-w_2r_1 + w_1r_2}{w_1 - w_2}. \tag{62}$$

が存在する．

ただし，これらの解はさらに，条件 $0 < x^*(1/1), x^*(1/2) < 1$ を満たさなくてはならない．グラフを描いて見ればすぐわかるように w_1, w_2 の関係によって表現が異なるの

で場合をわける．

(h-1)． $w_2 < w_1$ のとき．条件 $0 < x^*(1/1) < 1$ と条件 $0 < x^*(1/2) < 1$ から $\{(r_1, r_2)\,;\, r_1 < \ell_3(r_2) \wedge \ell_4(r_2),\, r_2 < \ell_1(r_1) \wedge \ell_2(r_1)\} - (1,1)$ が得られ，さらに，命題 6-1 (3) により $w_2 < g(w_2)$ の範囲でのみ ESS である．

(h-2)． $w_1 < w_2$ のとき．条件 $0 < x^*(1/1) < 1$ と条件 $0 < x^*(1/2) < 1$ から $\{(r_1, r_2)\,;\, r_1 > \ell_3(r_2) \vee \ell_4(r_2),\, r_2 > \ell_1(r_1) \vee \ell_2(r_1)\} - (1,1)$ が得られ，$w_1 < w_2 \Rightarrow w_2 > g(w_1)$ なる関係にあるから命題 6-1 (3) により ESS ではない．

さて，(a) から (h) までに得られた r_1, r_2 に関する条件を $w_2 < w_1$ の場合と $w_1 < w_2$ の場合とにわけて (r_1, r_2) 平面上のグラフに描いて眺めて見ると R_{11}, R_{21} は (c),(e),(f) 場合，R_{12}, R_{22} は (b),(d),(g) 場合，R_{13}, R_{23} は (h) 場合にそれぞれあたっていることがわかる．

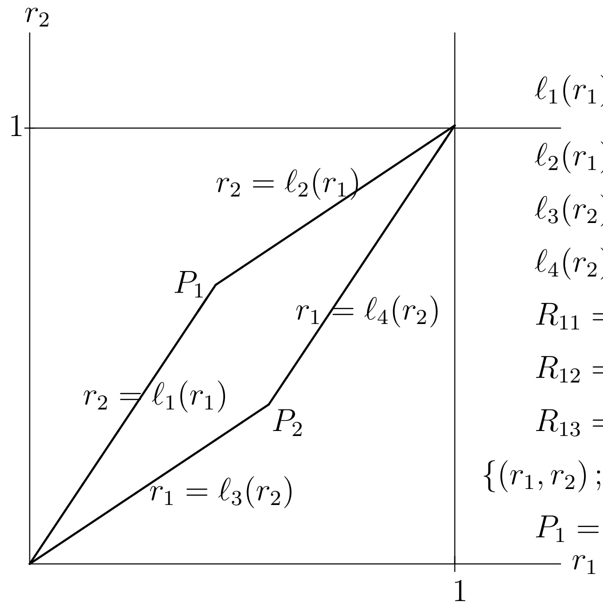
$w_1 = w_2 =: w$ の場合は $r_1 = r_2 =: r < 1$ の場合のみ共通解が無数に存在して

$$r - wx^*(1/1) - (1-w)x^*(1/2) = 0 \tag{63}$$

なる関係で結ばれている．このとき，$|\Theta(X^*/1)| = 2, |\Theta(X^*/2)| = 2$ であるが，$w \geq g(w)$ だから，命題 6-1 (3) より，これらのベイジアン・ナッシュ均衡戦略は ESS ではない．ただし，$r = 1$ の場合は H 戦略が存在するが，(II) の (4) で考察している．

$0 < w_2 < w_1 < 1$ の場合のグラフを描いておくので参考にしながら確認してほしい．

この場合は $w_2/w_1 < (1-w_2)/(1-w_1)$ であり，また常に $\ell_2(1) = \ell_4(1) = 1$ であることも確認してほしい．



$$\begin{aligned}
&\ell_1(r_1) = (1-w_2)r_1/(1-w_1),\\
&\ell_2(r_1) = w_2 r_1/w_1 + (w_1 - w_2)/w_1,\\
&\ell_3(r_2) = w_1 r_2/w_2,\\
&\ell_4(r_2) = (1-w_1)r_2/(1-w_2) + (w_1-w_2)/(1-w_2),\\
&R_{11} = \{(r_1, r_2)\,;\, r_1 < 1,\, r_2 \geq \ell_1(r_1) \wedge \ell_2(r_1)\},\\
&R_{12} = \{(r_1, r_2)\,;\, r_2 < 1,\, r_1 \geq \ell_3(r_2) \wedge \ell_4(r_2)\},\\
&R_{13} =\\
&\{(r_1, r_2)\,;\, r_1 < \ell_3(r_2) \wedge \ell_4(r_2),\, r_2 < \ell_1(r_1) \wedge \ell_2(r_1)\} - (1,1),\\
&P_1 = (1-w_1, 1-w_2),\ P_2 = (w_1, w_2).
\end{aligned}$$

Figure for $0 < w_2 < w_1 < 1$

ゲーム理論は少し一般化するとパラメーターがやたらに増えて収拾がつかないが，といって多くの教科書のように数値例しか挙げてないとパラメーターに関して均衡点が連続に変化するか，と云った均衡解の安定性に関する議論の参考例にならない．実際，ナッシュ均衡戦略の精密化（refinement）に関する議論は均衡解の安定性と深く関係するのであるが，数値例だけではいまひとつ理解が深まらない，という印象がある．タカ・ハトベイジアンゲームの場合，パラメーターに関して不連続で不自然な均衡解が現れるのはごく限られた場合だということがわかる．しかし，次節で解説する典型的な展開形ゲームに対してはそうではない．それは標準形ゲームやベイジアンゲームでは極めて特別な場合しか起こらなかった現象が，後続のプレーヤーの戦略が先行するプレーヤーの戦略に依存するような展開形ゲーム（本質的展開形ゲーム）の場合には標準形ゲームやベイジアンゲームでは例外的にしか起こらなかった現象が自然にかつ頻繁に現れるからである．

§7.　展開形ゲーム瞥見 — 本質的展開形ゲーム

§6 節までのゲームは,「自然」や「代理人」,「仲介者」を除くすべてのプレーヤーが同時に戦略を選択する同時手番のゲームとして標準形ゲームで表現できた．しかし，日常的な遊びとしてのゲームは囲碁，将棋，トランプゲームのようにプレーヤーのプレーする順番が決まっている．また社会科学に応用する場合もプレーは同時ではなく，先行する相手の選択肢に依存する，と考える方が自然である場合が多い．このようなゲームを念頭において定式化されたゲームが展開形ゲーム (extensive form game) である．

§1 章 (1 頁) でも触れたが，ナッシュ均衡戦略を求める，ということだけであれば標準形ゲームで表現しても展開形ゲームで表現しても数学的には同値である．というより展開形ゲームのナッシュ均衡戦略の定義そのものが，通常展開形ゲームを標準形ゲームで表現し直した時の標準形ゲームのナッシュ均衡戦略で定義されているから当然である．しかし，以下縷々解説するように同時手番でないゲームの場合，最初に戦略を選択する（しなければならない）プレーヤーは次のプレーヤーがどれだけの情報を知っていてどこまで合理的な思考をして戦略を決めていると考えてよいのか，という問題にどうしても拘ってしまう．もちろん，§2 章 (6 頁) でも論じたが，第 2 手番のプレーヤーも与えられた情報の下で自分の期待利得を最大にするようにプレーする冷静で合理的プレーヤーを想定しているのであって，如何に直感と異なる（現実に同じルールでプレーするなら自分は到底そのような手を選択しないだろう，と感じる）としても，数学的分析に最初の仮定以外の原理を持ち込んで議論すべきではない．このことを強調するのは，展開形ゲームになると標準形ゲーム以上に直感的な議論が氾濫して明かに最初のゲームのプレーの大原則から外れたような議論がなされているからである．標準形ゲームにしろ展開形ゲームにしろ非協力ゲームに分類されるゲームは明示的に定式化された場合を除いて[97]プレーヤー間の情報交換は厳禁である．にもかかわらず，先手と後手との間に時間差

[97]たとえば，本講義録の内生的，外生的相関のある非協力ゲームの場合である．§4, 18 頁で議論した．

があると，その間に何らかの情報交換の可能性を考慮したり余計な心配をしてしまうらしい．もちろん，先手のプレーヤーが先にプレーするに際して，後手のプレーヤーが果して本当に合理的で冷静なプレーヤーとして対応してくれるであろうか，という疑念を抱くのは無理からぬことではある．しかし，それは人間行動が本当に合理的か，ゲーム理論は果して人間行動を近似的にしろ正しく表現しているか，という別の興味あるテーマではあってもゲーム理論そのものの分析とは無関係であり，ゲーム理論を理解するためには百害あって一利なしの錯乱要因である．一方で，本来は定式化の枠内として考察しなくてはいけないにも拘わらず，展開形ゲームを説明している多くの教科書や論文一般について言えることであるが，ゲームの木で表現すると混合戦略[98]（行動戦略全体という方が適切であるが) を定式化通りに求めようとはせず，直感に頼って純粋戦略の範囲内でナッシュ均衡戦略を求めるだけで満足しているケースが多すぎるように思われる．この節ではプレーヤーの手番が時間的に異なる，つまり，プレーヤーが順番に選択肢を選び，後手のプレーヤーは先行するプレーヤーの戦略を見て自分の戦略を決めてよい，というゲームを考察するのが目的である．通常の標準形ゲームはもちろんのこと §5 節で取り上げたベイジアンゲームも展開形ゲームで表現することはできるが本質的に同時手番のゲームであって，ゲームの木で表現するメリットは殆どないといってよい．むしろ，直感に頼ろうとする傾向が強くなり（特に教科書がそうである）数学的理解の妨げになる恐れがある．従って，本節で取り上げる展開形ゲームは後手の選択が真に先手のプレーヤーの選択肢に依存するような展開形ゲームについての議論をめざす．私はこのような展開形ゲームを**本質的展開形ゲーム (essential extensive form game)** と呼び，標準形ゲームとははっきり区別して考える[99]．遊戯としてのゲームは殆どこのタイプであり，ノイマン・モルゲンシュテルンの本 ([84]) もこのようなゲームを念頭に置いて定式化したと思われる．ただ，彼らはまず言葉で延々と記述してあるため理解し難い．現在，すべてのゲーム理論の教科書に於いて展開形ゲームの定式化はまず，ゲームの木から出発しているがノイマン・モルゲンシュテルンは「10.4.1 ゲームを記述するのに，われわれは多数の分割を使わなければならなかったが，これらの分割を実際に図で表示するとなると容易ではない．ここでは，こうした問題を体系的に論ずるつもりはない．つまり，比較的単純なゲームでさえ，複雑で入り組んだ図になるし，したがって，図表示のもつ通常の利点は得られないからである．」（10.4.1 第 1 巻 125 頁，文庫版第 1 巻 205 頁-206 頁）と述べて，極めて複雑な図 10 が例として挙げてある．ところが，この図は Kuhn の定式化した展開形ゲームの公理を満たしていないように思われる[100]．ノイマン・モルゲンシュテルンはチェスやブリッジをイメージして説明はしているが，公理としては相当に一般的な定式化を考えていたように思われる．ただし，その後のゲーム理論の

[98]本節では展開形ゲームの混合戦略は利用しない．

[99]標準形ゲーム，ベイジアンゲームと本質的展開形ゲームは排反的分類である．

[100]しかし，Kuhn([36]) には “the formulation given above is more general than von Neumann’s ...” (p.197) と書いてある．もっとも彼の論文の Theorem of Categorization(p.199) は “The von Neumann games, excluding illegal or impossible plays,$\cdots$” が Kuhn の general n-person game の特別な場合だと述べているから，結局全く一般には両者の定義の間に包含関係はないのかもしれない．

本で説明してある展開形ゲームは，Kuhn(1953, [36]) によって定式化されたゲームの木と呼ばれる樹形を出発にした定式化に基づいている．Kuhn の論文にはノイマン・モルゲンシュテルンの定式化との間の対応関係が説明してある．

本講義録はゲーム理論の解説書ではないから展開形ゲームの一般論についてスタンダードな解説はしない．読者にはある程度の展開形ゲームの予備知識があるものとして話を進める．ただし，可能な限り展開形ゲームをもっとすっきりと統一的に各プレーヤーの戦略がひとつの確率変数で表現できるような定式化を若干試みた (107 頁以降を参照されたい)．新しい定式化に基づいた理論展開を十分に追及する時間的余裕がなかったのが心残りであるが，関心のある読者の参考になれば幸である．なお，展開形ゲームについては主に Kuhn(1953, [36]), Selten(1975, [67]), 岡田 (1996, [58]) を参考にした．

本節では具体例として，後手のプレーヤーの戦略が先手の選択肢に依存するような，私が言うところの本質的展開形ゲームの典型例としてよく知られたシグナリングゲームについて考察する．しかし，最初に，記号の説明を兼ねて標準形ゲームを展開形ゲームで表わすとどうなるかを確認しておく．そのために最も簡単な 2×2 の標準形ゲームを完全に同値な展開形ゲームで表わしてみる[101]．

[101]Kuhn, 岡田の定式化においては本講義録の §5 章 (51 頁) で紹介したベイジアンゲームのようにプレーヤーの外に必ず「自然」が定める手番 (chance) を定義しているので，展開形ゲームでは「自然」は必ず登場しなければならない構成要素のような印象を与えているが，Selten の定式化を見ると「自然」というプレーヤーの集合は空集合である可能性があることを明示している．なお，岡田の本では「頂点」と呼んでいる点は「終点」に言い換えた．彼は樹形を下から上に向って文字通り樹のように伸ばしているから終点は文字通り頂点になるわけであるが，本節では樹形を横にしたためである．なお，本節の「頂点」は Kuhn, Selten のいう vertex の日本語訳である，

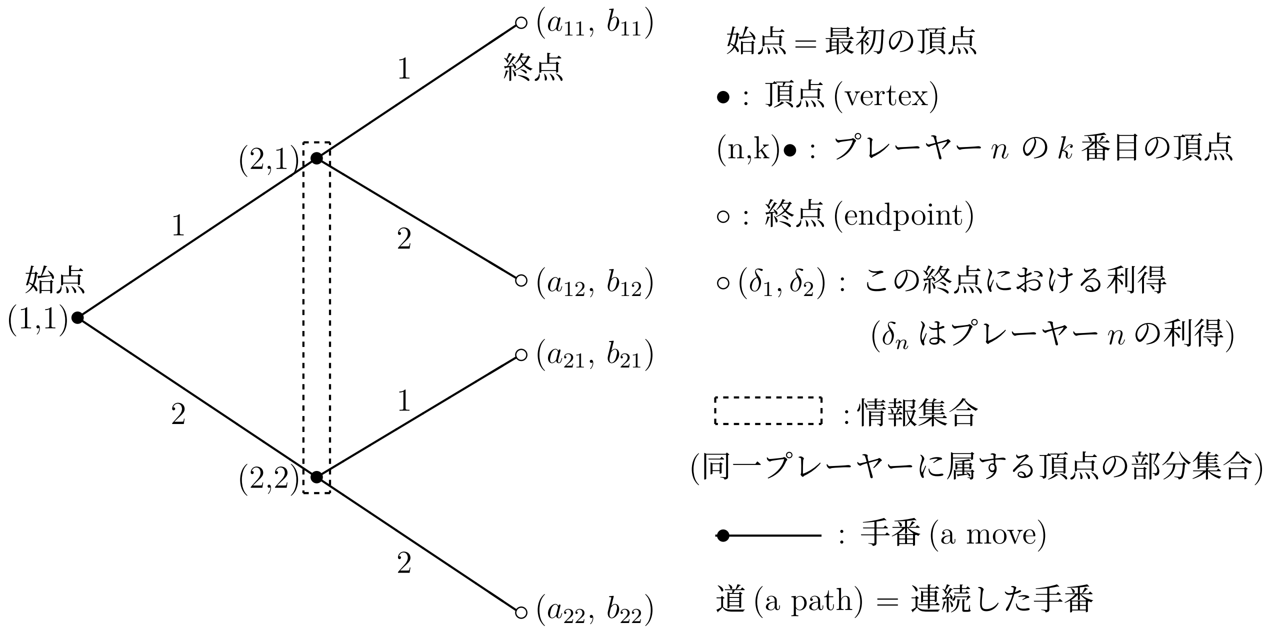


図 7-1. 2×2 の標準形ゲームの展開形ゲームによる表現

簡単に図 7-1 の説明をしておく．展開形のゲームは基本的に最初の頂点（始点と呼ぶ）から出発して終点に至る連続した path が一つの実現したプレーであり，その結果得られる利得が各終点に書いてある．図 7-1 から分かるようにプレーヤー１に属する頂点は最初の一点だけであるから，プレーヤー１はここで選択肢 1 か 2 を選ぶ．ランダムに選んでもよい．つまり，確率 p で選択肢 1 を，確率 $1-p$ で 2 を選ぶことも一つの戦略として認める．つまり，プレーヤー 1 のひとつの戦略とは頂点 $(1,1)$● に附属した選択肢の集合 $\Theta_1 = \{1,2\}$ に値を取る確率変数 $X_1 \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ である．プレーヤー 1 に属する頂点はこれだけであるから，プレーヤー 1 のプレーはこれでおしまいである．

次はプレーヤー 2 の手番であるが，ここで，展開形ゲーム独特の概念が登場する．それは情報集合という概念である．図 7-1 ではプレーヤー 2 は一つの情報集合を持っている．その意味はプレーヤー 1 が戦略を一つ選択すると頂点 $(2,1)$● または $(2,2)$● がある確率で選ばれるわけであるが，この情報集合に属する頂点について，プレーヤー 2 はどの path を経て到達したかを認識出来ない，ということを意味する．その上でプレーヤー 2 は選択肢の集合を $\Theta_2 = \{1,2\}$ として，戦略 $X_2 \in \mathcal{R}(\Theta_2)$ を選ばなければならない．以上の仮定を定式化すると次のように表現できる．

仮定 7-1. 同一の情報集合に含まれる頂点に附属する選択肢の集合は同一集合でなくてはならない．

次に，どの path を経てこの情報集合に達したかを知らずに戦略を選択しなくてはいけない，ということの数学的表現を確率変数を用いて表現する．

仮定 7-2. 図 7-1 において，プレーヤー 1 の戦略 X_1 とプレーヤー 2 の戦略 X_2 の確率構造は次の関係を満たさなくてはならない.

$$\forall\theta_1 \in \Theta_1, \forall\theta_2 \in \Theta_2,\ P(X_2 = \theta_2/X_1 = \theta_1) = P(X_2 = \theta_2). \tag{64}$$

ここで，この図 7-1 の場合は $\Theta_1 = \Theta_2 = \{1, 2\}$ である．(64) 式を見れば分かる通り，この仮定は確率変数 X_1 と X_2 が独立である，という条件に外ならない．つまり，この展開形ゲームは完全に標準形ゲームと同値なのである．この展開形ゲームでは形式上，プレーヤー 1 と 2 が順番にプレーしているが，プレーヤー 2 の戦略は先手のプレーヤー 1 の選択肢に依存していない（してはいけない）．従って，私のいう本質的展開形ゲームではない．実際，展開形ゲームで表現したことによって得られる数学的知見は何もない．むしろ，本来同時手番であるゲームに先手，後手という誤ったイメージを持ち込むだけ性質（タチ）が悪い.

次に期待利得の計算方法を説明する．プレーヤーがプレーし終って終点に達するとその終点に対して定義された利得を受取るわけであるが，確率的に到達した場合はどのように期待利得を計算するのであろうか．まず，終点はこの終点と始点とを結ぶ一つの道 (a path) と１対１に対応していることに注意する．たとえば，一番上の終点はプレーヤー 1 が選択肢から 1 を選択し，プレーヤー 2 が選択肢から 1 を選択したことに完全に対応している．つまり，標準形ゲームのところで表現したように，$a_{ij} = u_1(i, j)$, $b_{ij} = u_2(i, j)\,;\, i \in \Theta_1,\, j \in \Theta_2$ と表わされるのである．プレーヤー 1 の戦略を X_1, プレーヤー 2 の戦略を X_2 としたとき，実際に現れる path は確率変数 X_1 と X_2 の実現値 (11 頁を参照されたい) $(X_1(\omega), X_2(\omega))$ によって表現される．従ってこの path が実現される確率は仮定 7-2 より

$$P(\{\omega\,;\, X_1(\omega) = i\} \cap \{\omega\,;\, X_2(\omega) = j\}) = P(\{\omega\,;\, X_1(\omega) = i\}) \times P(\{\omega\,;\, X_2(\omega) = j\})$$

となって，以下何から何まで §3 章 (8 頁) の非協力ゲームの定式化と一致することがわかる.

それでは，図 7-1 の情報集合の部分を次のように手直しするとどのようなゲームになるであろうか.

次の図 7-2 の展開形ゲームには情報集合がないのではなく，各頂点ひとつづつがそれぞれひとつの情報集合をなしている，と理解してほしい．プレーヤー 1 については図 7-1 の場合と同様であるが，違いはプレーヤー 2 の行動に現れる．つまり，プレーヤー 2 に属する頂点 $(2, 1)\bullet$ と $(2, 2)\bullet$ は別の情報集合に属するから，プレーヤー 2 はそれを識別出来る，と考える．つまり，プレーヤー 2 はプレーヤー 1 が選択肢 1 を選んだらこうする，選択肢 2 を選んだらああする，と相手の出方によって選択肢を変えてよい.

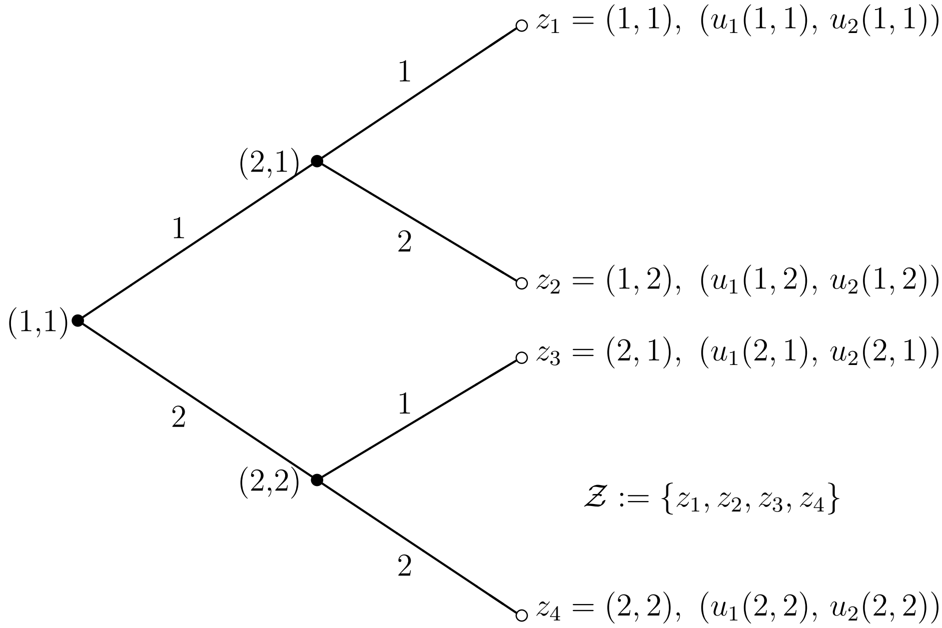


図 7-2. 展開形ゲームの一例

つまり，図 7-1 と整合的に説明すると，各プレーヤーは自分に属する各情報集合毎に選択肢（確率的選択を許す）を決めておき，この選択肢のセットを**行動戦略**と呼び展開形ゲームにおいて各プレーヤーのひとつの戦略と考える．確率変数で表わすとプレーヤー 1 の戦略は一つの確率変数 $X_1 \in \mathcal{R}(\Theta_1)$ で図 7-1 の場合と同様であるが，プレーヤー 2 の戦略は情報集合が二つあり，夫々の情報集合における選択肢の集合 Θ_{21} と Θ_{22} は異なる集合でよい．後では便宜上 $\{1, 2, \cdots\}$（但し有限集合）で表わすが，それは経路の違いは事前に認識されているから，同じ番号であっても情報集合が違えば違う選択肢であることを識別できるからである．このとき，プレーヤー 2 の戦略を確率変数 X_2 で表わすと，X_2 は $\Theta_{21} \cup \Theta_{22}$ に値を取る確率変数である．このとき，(X_1, X_2) の確率構造は次の条件を満たさなくてはならない（展開形ゲームの情報構造がどう反映されているかよく注意してほしい）．

仮定 7-3. 図 7-2 において，プレーヤー 1 の戦略 X_1 とプレーヤー 2 の戦略 X_2 の確率構造は次の関係を満たさなくてはならない．

プレーヤー 1 の行動戦略を $b_1 := (\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1))$, プレーヤー 2 の行動戦略を $b_2 := (\{x_2(\theta_{2i}/i)\}_{\theta_{2i} \in \Theta_{2i}} \in \mathcal{P}(\Theta_{2i})\,;\, i \in \Theta_1)$ とするとき，

(i) $P(X_1 = i) = x_1(i)$,

(ii)

$$P(X_1 = i,\, X_2 = j) = \begin{cases} x_2(j/i)x_1(i) & \text{if} \quad j \in \Theta_{2i} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{65}$$

定義 7-1. プレーヤー 1, 2 の行動戦略プロファイル $\vec{b} := (b_1, b_2)$ に対して 仮定 7-3

を満たす確率変数 (X_1, X_2) を $\vec{b}$ の**確率変数による表現**あるいは**確率変数で表現する**，という．

ここで注意することは，プレーヤー 2 の行動戦略 b_2 が同じでも確率変数によって表現した場合の確率変数 X_2 の分布はプレーヤー 1 の行動戦略によって変わり得る，ということである．この点が標準形ゲームはもちろん，ベイジアンゲームや相関均衡を議論していた時とは決定的に異なる．従って，ナッシュ均衡戦略の定義も行動戦略を用いて表現せざるを得ない．では，確率変数によって表現することのメリットは何であろうか．それは今後の研究によって明らかにされることを期待したいが，少なくとも行動戦略プロファイルでは始点から終点までの一本の path を表現できないが，確率変数による表現を用いると一本の path は 確率変数の実現値 $(X_1(\omega),\, X_2(\omega))$ で表現できる．直感に頼らずにナッシュ均衡戦略の精緻化を考察する際には確率変数に依る表現は不可欠であると信じている．

さて，プレーヤー $n (n = 1, 2)$ の利得は終点に達した時に決められる．つまり，終点の全体 $= \mathcal{Z}$ 上で定義された実数値関数 $u_n(z)\,;\, z \in \mathcal{Z}$ で与えられる．さらに，各 z は始点から終点に至る一本の path と 1 対 1 対応している．図 7-2 の場合は $z \longleftrightarrow (i,\, j)\,;\, i \in \Theta_1,\, j \in \Theta_{2i}$ であるから，$u_n(z) = u_n(i,\, j)$ と表わされる．従って，行動戦略プロファイル (b_1, b_2) に対するプレーヤー n の期待利得 $\overline{u}_n(b_1, b_2)$ は

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_n(b_1, b_2) &= E[u_n(X_1, X_2)] && (66)\\
&= \sum_{i\in\Theta_1} \sum_{j\in\Theta_{2i}} u_n(i,\, j) x_1(i) x_2(j/i) && (67)
\end{aligned}
$$

で表わされる．

定義 7-2. プレーヤー 1 の行動戦略の全体を $\mathcal{B}_1$, プレーヤー 2 の行動戦略の全体を $\mathcal{B}_2$ とおく．このとき，行動戦略プロファイル $(b_1^*, b_2^*) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ が**ナッシュ均衡戦略**であるとは次の 2 条件を満たすこととときをいう．なお，この定義はプレーヤーが二人の場合（「自然」が別のプレーヤーとして加わってもよい）の展開形ゲーム一般に対して有効な定義である．

(i) $\forall b_1 \in \mathcal{B}_1,\ \overline{u}_1(b_1^*, b_2^*) \geq \overline{u}_1(b_1, b_2^*)$ が成り立つ．

(ii) $\forall b_2 \in \mathcal{B}_2,\ \overline{u}_2(b_1^*, b_2^*) \geq \overline{u}_2(b_1^*, b_2)$ が成り立つ．

例によって，定義 7-2 を 図 7-2 の展開形ゲームについて分布の言葉で書き直す．

補題 7-1. プレーヤー 1 と 2 の行動戦略プロファイル

$$
(b_1^* = (\{x_1(i)\}_{i\in\Theta_1}), b_2^* = (\{x_2^*(\theta_{2i}/i)\}_{\theta_{2i}\in\Theta_{2i}}\,;\, i \in \Theta_1))
$$

がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は次の 2 条件を満たすことである．

(i) $\forall\{x_1(i)\}_{i\in\Theta_1}\in\mathcal{P}(\Theta_1),\quad \sum_{i\in\Theta_1}\sum_{j\in\Theta_{2i}}u_1(i,\,j)(x_1^*(i)-x_1(i))x_2^*(j/i)\ge 0,$

(ii) $\forall i\in\Theta_1,\ \forall\{x_2(j/i)\}_{j\in\Theta_{2i}}\in\mathcal{P}(\Theta_{2i}),\ \sum_{i\in\Theta_1}\sum_{j\in\Theta_{2i}}u_2(i,\,j)x_1^*(i)(x_2^*(j/i)-x_2(j/i))\ge 0.$

補題 7-1 の (ii) の条件は各 $i\in\Theta_1$ 毎に分布 $\{x_2(j/i)\}_{j\in\Theta_{2i}}$ を任意に選んでよいから次の条件と同値であることがわかる．

補題 7-2. 補題 7-1 の条件 (ii) は次の条件 (ii)' と同値である．

(ii)' $\forall i\in\Theta_1$ such that $x_1^*(i)>0,\ \forall\{x_2(j)\}_{j\in\Theta_{2i}}\in\mathcal{P}(\Theta_{2i}),$

$$\sum_{j\in\Theta_{2i}}u_2(i,\,j)(x_2^*(j/i)-x_2(j))\ge 0.$$

煩わしいので以下ではプレーヤー 1 の選択肢毎にプレーヤー 2 の選択肢の集合が異なることを記号で明示的に表示することは止める．選択肢の要素の数が異なる場合は $\sum$ の順番が交換可能ではない等の不都合が生じる可能性があるので注意を要する．以下のような簡単な例ではそのようなことは起こらない．

さらに，補題 3-2(15 頁), 補題 4-4(33 頁), 補題 5-2(58 頁) と同様の次の補題が得られる．証明はこれ等の補題と全く同様にして出来るから各自で試みられたい．

補題 7-3.

$$\Theta_1(X_2^*):=\{\theta_1\in\Theta_1\,;\,\max_{i\in\Theta}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}u_1(i,\theta_2)x_2^*(\theta_2/i)=\sum_{\theta_2\in\Theta_2}u_1(\theta_1,\theta_2)x_2^*(\theta_2/\theta_1)\}$$

$$\Theta_2(X_1^*/\theta_1):=\begin{cases}\{\theta_2\in\Theta_2\,;\,\max_{j\in\Theta_2}u_2(\theta_1,\,j)=u_2(\theta_1,\,\theta_2)\} & \text{if } x_1^*(\theta_1)>0\,,\\ \emptyset & \text{if } x_1^*(\theta_1)=0.\end{cases}$$

とおくとき，プレーヤー 1 の行動戦略 $b_1^*=(\{x_1^*(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\})$ とプレーヤー 2 の行動戦略 $b_2^*=(\{x_2^*(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\,\theta_1\in\Theta_1\})$ がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は

(i) $\{\theta_1\,;\,x_1^*(\theta_1)>0\}\subset\Theta_1(X_2^*)$，かつ，

(ii) $\forall\theta_1\in\Theta_1$ such that $x_1^*(\theta_1)>0,\ \{\theta_2\,;\,x_2^*(\theta_2/\theta_1)>0\}\subset\Theta_2(X_1^*/\theta_1).$

図 7-1, 図 7-2 の展開形ゲームはあまりにも簡単すぎるので如何様にも表現できる．しかし，一般の展開形ゲームに対して何に注目してどのように一般化するかは難しい問題である．多くの教科書の例はケースバイケースの説明が多く，一般的記述は論理が不明確でさらなる推論を推し進めることが困難である．本節で多少別の定式化を試みる．従来よりマシな定式化かどうかはたとえばナッシュ均衡戦略の精緻化として知られている Selten(1975, [67]) の完全性 (“trembling hand” perfection) や Kreps and Wilson(1982,

[34]) の逐次均衡 (sequential equilibrium) がどのくらい自然に定義できるかによって判定できるであろう．今後の展開に期待したい．本節では最後にギボンズ ([16], 4.2. 184 頁-191 頁) のシグナリングゲームの完全ベイジアン均衡について再定式化して計算してみる．

ところで，補題 7-2 の (ii)' をよく眺めると（あるいは，面倒なことをあれこれ考えなくても）プレーヤー 2 にとっては情報集合は 1 点のみから成る[102]からその時点で自分の選択肢を自由に選べる．つまり，その頂点で許された選択肢の中でベストな選択肢を選べばよいに決まっている．ということをプレーヤー 1 は予測できるわけであるから，プレーヤー 2 が選んだ選択肢の中でプレーヤー 1 にとってベストな選択肢を探せばよい．このプロセスを逆向き帰納法 (backward induction) という[103]．多くのゲーム理論の参考書はこのような純粋戦略によるナッシュ均衡戦略を求めただけで満足しているが，ナッシュ均衡戦略となる行動戦略をすべて求めよ，という問題には答えていない場合が多い．次に図 7-2 より更に簡単な次のような例を考えて見よう．

次の図 7-3 の例は展開形ゲームとしては自明でない最も簡単な例である．何故ならば，標準形に直した場合に 2×2 の標準形ゲームになってしまうからである．

このゲームの特徴はプレーヤー 1 が選択肢 2 を選択するとゲームは直ちに終了し，プレーヤー 2 にはプレーをする機会が与えられないことである．

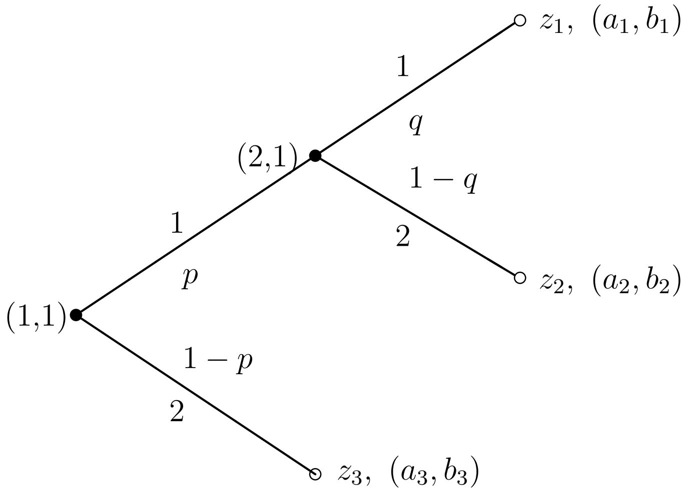


図 7-3. 最も簡単な展開形ゲームの例

このゲームにおいてはプレーヤー 1 もプレーヤー 2 も純粋戦略は 2 点集合 $\{1, 2\}$ で表わされるが，含意は 2×2 の標準形ゲームのそれとは全く様相を異にする．ただし，戦略については見掛け上は，プレーヤー 1 が $(1, 1)\bullet$ において選択肢 1 を選ぶ確率 p とプ

[102] すべての情報集合が 1 点のみからなる展開形ゲームを完全情報ゲームという．
[103] ゲームの木が有限で完全情報を持つ展開形ゲームは backward induction によって必ず純粋戦略の範囲内でナッシュ均衡戦略が得られる (Kuhn([36], p.209, Corollary 1).

レーヤー 2 が $(2,1)\bullet$ 上で選択肢 1 を選ぶ確率 q によって完全に記述できるから標準形ゲームの場合と数学的には同じ表現となる．この時，プレーヤー 1, 2 の期待利得をそれぞれ $\overline{u}_1(p,q), \overline{u}_2(p,q)$ とすると，簡単な計算によって，

$$\overline{u}_1(p,q) = a_1pq + a_2p(1-q) + a_3(1-p), \ \ \overline{u}_2(p,q) = b_1pq + b_2p(1-q) + b_3(1-p)$$

となる．従って，行動戦略プロファイル (p^*, q^*) がナッシュ均衡戦略であるための必要十分条件は次のようになる．

$$\text{(i) } \overline{u}_1(p^*,q^*) - \overline{u}_1(p,q^*) = (p^*-p)(q^*a_1 + (1-q^*)a_2 - a_3) \geq 0, \ 0 \leq \forall p \leq 1, \quad (68)$$

$$\text{(ii) } \overline{u}_2(p^*,q^*) - \overline{u}_2(p^*,q) = (q^*-q)p^*(b_1-b_2) \geq 0, \ 0 \leq \forall q \leq 1. \quad (69)$$

ここで，

$$f(x) = a_1x + a_2(1-x) - a_3 = (a_1-a_2)x + a_2 - a_3$$

とおく．利得の大小関係によっていくつかの場合にわかれ，それぞれに含意が異なる．

(1) $a_3 < a_1 \wedge a_2$ の場合，f は常に正だから (68) 式から $p^* = 1$ でなければならない．従って，(69) 式から $b_1 > b_2$ ならば $q^* = 1$, $b_1 < b_2$ ならば $q^* = 0$ が得られる．従って，これらの場合ナッシュ均衡戦略は純粋戦略の範囲で一意に定まる．直感的にも直ちに求められる自明なゲームである．

(2) $a_3 > a_1 \vee a_2$ の場合，f は常に負だから (68) 式から $p^* = 0$ でなければならない．従って，(69) 式は無条件に成立している．つまり，この場合のナッシュ均衡戦略はプレーヤー 1 が選択肢 2 を選び，プレーヤー 2 は何を選んでも定義上ナッシュ均衡戦略となっている．プレーヤー 2 はそもそもゲームに参加しないも同然だからゲームと言えるかどうかも疑問である．従って，これらの場合ナッシュ均衡戦略は混合戦略の場合も含めて直感的にも直ちに求められる自明なゲームである．

以上二つのケースはあまりにも自明すぎるが本講義録では数学として総ての場合を尽す，という考え方に基づいて一応触れておいた．

さて，問題は $a_1 \wedge a_2 < a_3 < a_1 \vee a_2$ の場合である．a_1 と a_2 には本質的差異がないので $a_1 < a_2$ を仮定する．

(3) $a_1 < a_3 < a_2$ の場合，このとき，$f(0) = a_2 - a_3 > 0$, $f(1) = a_1 - a_3 < 0$ であるから，$f(q_0^*) = 0$ を満たす $0 < q_0^* = (a_2-a_3)/(a_2-a_1) < 1$ が唯一点存在する．$q^* = q_0^*$ の場合，(68) 式は成り立っていることに注意する．一方，$p^* = 0$ のときは，(69) 式は常に成り立つから，結局 $(p^* = 0, q^* = q_0^*)$ はナッシュ均衡戦略である．これ以外のナッシュ均衡戦略を求めるためにプレーヤー 2 の利得によって場合を分ける．

(3-1) $b_1 = b_2$ の場合．(69) 式は常に成り立っているから，$(0 \leq p^* \leq 1, q^* = q_0^*)$ はナッシュ均衡戦略である．(68) 式について考えると，$f > 0$ ならば $p^* = 1$, $f < 0$ ならば $p^* = 0$ を考慮すると，$(p^* = 1, 0 \leq q^* < q_0^*)$ と $(p^* = 0, q_0^* < q^* \leq 1)$ もナッシュ均衡戦略の条件を満たすことがわかる．まとめると，ナッシュ均衡戦略は $(0 \leq p^* \leq 1, q^* = q_0^*)$, $(p^* = 1, 0 \leq q^* < q_0^*)$, $(p^* = 0, q_0^* < q^* \leq 1)$ の 3 種類ある．

(3-2) $b_1 > b_2$ の場合．$0 < q^* = q_0^* < 1$ が (69) 式を満たすためには $p^* = 0$ でなくてはならない．つまり，$(p^* = 0, q^* = q_0^*)$ はひとつのナッシュ均衡戦略である．次に，$q^* \neq q_0^*$ の場合，$p^* > 0$ ならば，(69) 式から $q^* = 1$ でなくてはならず， $f(1) < 0$ だから (68) 式から $p^* = 0$ となり矛盾が導かれるのでこの場合からは解は得られない．$p^* = 0$ ならば，(69) 式は無条件に成り立つ．かつ，(68) 式が成り立つ条件として $f(q^*) \leq 0$ でなくてはならない．つまり，$q_0^* \leq q^* \leq 1$．まとめると，この場合，ナッシュ均衡戦略は 純粋戦略 $(p^*, q^*) = (0, 1)$ と無数の混合行動戦略 $(p^* = 0, q_0^* \leq q^* < 1)$ からなる．

(3-3) $b_1 < b_2$ の場合．$0 < q^* = q_0^* < 1$ が (69) 式を満たすためには $p^* = 0$ でなくてはならない．つまり，$(p^* = 0, q^* = q_0^*)$ はひとつのナッシュ均衡戦略である．次に，$q^* \neq q_0^*$ の場合，$p^* > 0$ ならば，(69) 式から $q^* = 0$ でなくてはならず， $f(0) > 0$ だから (68) 式から $p^* = 1$ でなくてはならない．つまり，$(p^*, q^*) = (1, 0)$ はひとつのナッシュ均衡戦略である．$p^* = 0$ ならば，(69) 式は無条件に成り立つ．かつ，(68) 式が成り立つ条件として $f(q^*) \leq 0$ でなくてはならない．つまり，$q_0^* \leq q^* \leq 1$．まとめると，この場合，ナッシュ均衡戦略は 純粋戦略 $(p^*, q^*) = (1, 0), (0, 1)$ と無数の混合行動戦略 $(p^* = 0, q_0^* \leq q^* < 1)$ からなる．

ここまでは無味乾燥なナッシュ均衡戦略の導出であるが，展開形ゲームは標準形ゲームよりも日常生活上のイメージを持ちやすいせいもあり，また純粋戦略プロファイルのナッシュ均衡戦略は図を眺めて考察すれば（特に backward induction によって）容易に求められることもあって，多くのゲーム理論の教科書は含意を込めて説明してあることが多い．しかし，社会学上の数理モデルの問題点でもあると筆者には感じられるが，含意を込めるとしばしば数理モデルの最初の仮定や大前提を逸脱した解説をするゲーム理論の教科書が見受けられる．例をあげると,「信用できない脅し (uncredible threat)」という話である[104]．この話は次のように説明されている．(68) 式と (69) 式においてプレーヤー 2 の利得 b_3 まったく関係してこない．つまり，この値はナッシュ均衡戦略とは本質的に何の関係もない値なのである．ところが，この例の (3-3) のケースを想定してほしい．ここで，b_3 の値が b_1, b_2 より大きいと仮定する．そうすると，プレーヤー 2 としては $p^* = 0$ を含むナッシュ均衡戦略が実現してくれるのが最も利得が高い．しかも，$p^* = 0$ つまり，プレーヤー 1 が選択肢 2 を選んでくれたらゲームは終り，プレーヤー 2 は労せずして望み得る最高の利得をえることが出来る．そこで，プレーヤー 1 が選択肢 2 を選ぶよう動機づけるために，プレーヤー 2 は選択肢 1 を選ぶぞと言ってプレーヤー 1 を脅す，というのである．この場合は確かに，$(p^* = 0, q^* = 1)$ もナッシュ均衡戦略である．特に a_1 がプレーヤー 1 にとって死活的なダメージを意味する場合には，心理的には $(p^* = 0, q^* = 1)$ というナッシュ均衡戦略で我慢せざるを得ないかな，と感じるかもしれない．しかし，そのような脅しは信用する必要がない，何故ならば，プレーヤー 1 が $p^* = 1$，つまり選択肢 1 を選んだ場合のナッシュ均衡戦略は $(p^* = 1, q^* = 0)$ しかないのである．つまりプレーヤー 2 が合理的な選択をする限り，選択肢 1 は選ばないはず

[104]たとえば，岡田 ([58]) の 111 頁あたり，あるいは佐藤 ([66]) の 66 頁-71 頁を参照されたい．

だからである．ただし，このような説明は正しい問題提起ではないと筆者は考えている．その理由は，プレーヤー2からプレーヤー1へのコミュニケーションは禁じられている，つまり，このゲームの数理モデルの枠内の仮定ではない説明を勝手に捏造してもらっては困る，ということである．コミュニケーションをゲーム構造の中に組み込むことは可能であるから，そのようなゲームの枠内で議論してもらいたい．この問題は強いて言えばゲーム理論の大前提である「個人合理性」の問題点である，という指摘は正しい．実際，プレーヤー1がプレーヤー2の合理性を信頼しなかった場合，万一自分の選択肢1に対してプレーヤー2が選択肢1を選ぶという非合理な対応をするかもしれない，と恐れた場合，自分にとって死活的不利益を被ることを避ける意味で，$(p^*=0, q^*=1)$というナッシュ均衡戦略もあながち荒唐無稽で非合理な選択ではないであろう[105]．もうひとつ別の解釈[106]はサブゲーム完全なナッシュ均衡戦略[107]，という概念である．上記(3-3)の場合，ナッシュ均衡$(p^*, q^*) = (0, 1)$はプレーヤー2の頂点$(2, 1)\bullet$に至った時点で考えて見るとプレーヤー2にとっての合理的選択は$b_1 < b_2$であるから，$q^* = 0$であるべきだ，従って，このような均衡解には合理性がない（根拠のない脅しと云われる所以であろう），サブゲーム完全なナッシュ均衡戦略ではない，というわけである．

ところが，この話は次のようにも解釈できる．ナッシュ均衡解$(p^*, q^*) = (1, 0)$の場合のプレーヤー1と2の利得はそれぞれa_2とb_2である．一方，ナッシュ均衡解$(p^*, q^*) = (0, 1)$の場合のプレーヤー1と2の利得はそれぞれa_3とb_3である．しかし，仮定によって$a_3 < a_2$だから先手のプレーヤー1にとってナッシュ均衡解$(p^*, q^*) = (1, 0)$を選択する方が明かに有利である．かつ，プレーヤー1は先手なのだからそれは可能なのである．何もサブゲームうんぬんという難しいことを言わなくても自明に合理的な選択はできる．このことは本質的展開形ゲーム一般について言えることである．期待利得を合せて考えるアイディはGintis(2009, [19])による[108]，

ところで，展開形ゲームにおいても混合行動戦略まで含めて総てのナッシュ均衡を求

[105] ここでナッシュ均衡戦略の基になっている原理「相手が手を変えない限り自分から手を変えても得にならない」という原理ではなく，ゼロサムゲームにおいてノイマンが採用した原理「最悪の状況を想定してその中で最善を尽くす」というマックス・ミニ原理が顔を出してくるのは興味深い．どういう原理で行動するか，複数の原理があってよい．ナッシュ均衡戦略概念があまりにも数学的に綺麗な定式化だったために現実感覚とずれた均衡解が得られる場合がある．そのようなナッシュ均衡解を排除するためにナッシュ均衡の精緻化，という方向で研究がすすめられた．たとえば，この「信用出来ないおどし」はサブゲーム完全均衡ではないとして排除される．しかし，このサブゲーム完全性もプレーヤー1にとって後手が完全に合理的に選択することを仮定しているナッシュ均衡戦略であるから，やはり現実感覚とは合わない．現実感覚としてはマックス・ミニ原理の方がしばしば受け入れられているのではないだろうか．人質の人命尊重を最優先にする考え方は明らかにマックス・ミニ原理であって，テロリストの要求に屈する根拠はナッシュ均衡概念ではない．

[106] この解釈の方がゲーム理論の「正統な」解釈である．

[107] Selten 1975, [67]

[108] この場合，プレーヤー1とプレーヤー2は利害が相反するが先にプレーするのはプレーヤー1だから当然プレーヤー1に選択権があると考えるのが自然である．Gintisのlocal best response criterion ([19], p.90)ではすべてのプレーヤーにhighest payoffを選択するチャンスが与えられているが，そのようなことがすべてのプレーヤーにconsistentに保証されるのだろうか．

めようとするとルーティンな計算が必要である．そのためにはもっと一般の展開形ゲームについてもルーティンな方法で定式化してルーティンにナッシュ均衡戦略を求める公式を導出しておく必要がある．そうやって初めてあまり望ましくない，あるいは不合理と思われるようなナッシュ均衡をどうやって排除するかというナッシュ均衡戦略の精緻化 (refinement) の問題を精緻に分析することが可能になる．そのためには，最も簡単な展開形ゲームである図 7-3 のゲームについて一般的に定式化するためにあえて余計な手を加えた次の図 7-4 を眺めてほしい．

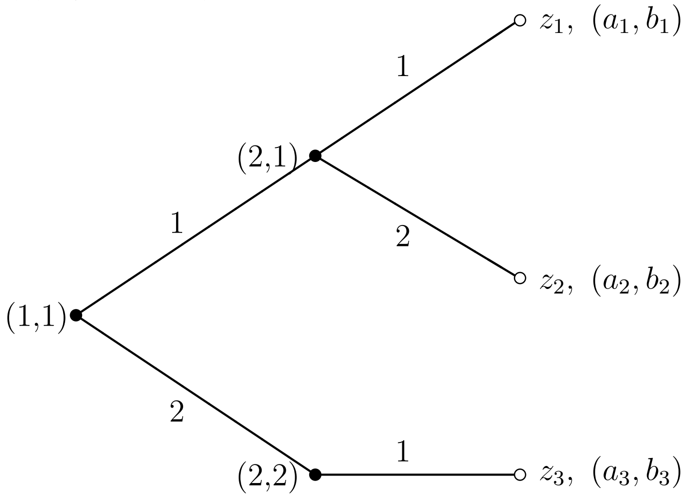


図 7-4. 7-3 と同値な展開形ゲーム

展開形ゲームを一般的に表わそうとすると，簡単な例の場合は却って面倒な表現になる場合がある．図 7-3 の展開形ゲームを一般的に表現するために実は数学的構造を不変に保ったまま自明なダミーの情報集合と move を付け加えた．その目的は始点から終点までの手番の数をすべての終点に対して同じ手数とし，さらに始点から同じ数の手番にある頂点は同じプレーヤーに属するようにするためである．必要ならばダミーの頂点を導入することによって，展開形ゲーム一般の表現を統一的に表現しよう，というわけである．図 7-4 の展開形ゲームは明らかに図 7-3 と同じ展開形ゲームであるが，プレーヤー 2 の情報集合はひとつ増えている．ただし，この情報集合の上でのプレーヤー 2 の行動戦略は自明な選択しかないものとする．

以上，簡単な展開形ゲームを参考にしながら，より一般的に，統一的に展開形ゲームを定式化することを考えよう．

統一的表現の一歩は始点（自然の手番のこともあるし，プレーヤー 1 の手番のこともある）から何番目の頂点か（但し，始点はゼロ番目とする）を明示することである．Kuhn([36]) には rank という概念で定義してあるが[109]，Selten([67]), 岡田 ([58]) では無

[109] もっとも，Kuhn は彼の定式化には結局この rank という概念を用いていない．ノイマン・モルゲン

視されている．本講義録ではこの rank を重視する．頂点の集合を V とおく．頂点 v の rank を $rank(v)$ と記す．

仮定 7-4.

必要ならばダミーの頂点を導入することによって次の仮定を満たすことを要請する．

(1) すべての終点は同一の rank を持つ．終点の rank を r_Z(有限) とする．$\mathcal{Z} := \{v\,;\, rank(v) = r_Z\}$（終点の全体）とおく．これ以降，終点は頂点の集合には含めない．

(2) 同一 rank の頂点は必ず同一のプレーヤーに属する．集合 $\{r = 0, 1, \ldots, r_Z - 1\}$ の分割を $\cup_{n=o}^{N} P_n$ とする．ただし，P_0 は空集合ないし始点のみからなる[110]．空集合でない場合，$n = 0$ は「自然」と考える．従ってプレーヤーの数は常に N 人である．$P_0 = \emptyset$ の場合，始点は P_1 に属すると仮定する．

(2) 引続く rank の頂点は必ず異なるプレーヤーに属する．i.e. $r \in P_n \Longrightarrow r+1 \notin P_n$.

(3) $r = 0, 1, \ldots, r_Z - 1$ に対して $V_r := \{v \in V\,;\, rank(v) = r\}$ とおく．

V_r の分割 $V_r = \cup_{s=1}^{s_r} I_{r,s}$ を情報分割という．$I_{r,s}$ を情報集合 (an information set) という．

(5) 各情報集合 $I_{r,s}$ は選択肢の集合 $\Theta_{r,s}$(空でない有限集合) を持つ．

(6) 完全記憶 (perfect recall)：（自分がプレーした過去のすべての選択肢を覚えている，識別できるという仮定）ゲームの木を想像しながら考えて貰うと理解しやすい，頂点 v_1, v_2 に対して，$v_1 \in I_{r,s}$, $\theta_1 \in \Theta_{r,s}$ とその後のいくつかの move によって v_2 に達することが出来るとき，$v_1\,;\,\theta_1 \to v_2$ と記す．このとき，次の性質が成り立つことを仮定する．

$$1 \leq \forall n \leq N,\ \forall r_1,\, r_2 \in P_n,\ \forall v_1 \in I_{r_1,s_1},\ \forall v_2 \in I_{r_2,s_2} \text{ such that } v_1\,;\,\theta_1 \to v_2 \text{ に対して，}$$

$$v_1\,;\,\theta_1 \to v_3, \quad \forall v_3 \in I_{r_2,s_2}$$

が成り立つ[111]．

さらに，展開形ゲームにおける純粋戦略について説明する．直感的には始点から終点をむすぶひとつの path が純粋戦略のように感じるがそうではない．つまり，実現しなかった move についても本当はどういう行動を取るはずだっかかを予め指定しておかなくてはいけない．たとえば，図 7-2 に於いてプレーヤー 1 が選択肢 1 を確率 1 で選択すると，選択肢 2 につらなる path はプレーヤー 2 が何を選ぼうと終点に達することはない，しかし，可能性としてプレーヤー 1 が選択肢 2 を取るかもしれない以上，その対応戦略についてプレーヤー 2 は予め決めておかなくてはならない．展開形ゲームの行

シュテルン ([84], pp.73-75) では終点までの手番の数を（必要ならばダミーの手番を挿入して）総ての終点について一定であると仮定してゲームの length(長さ) と呼んで，公理の最初に掲げている．本節の定式化 (仮定 7-4) は更に，各ステップ毎に同一の長さの手番は同一のプレーヤーに属すると仮定している．

[110] 複数の「自然」を持つ展開形ゲームも考えられるが，よく知られた応用例を考察するためには「自然」の選択は最初の一回だけでよい．

[111] Selten([67]), p.27 及び 岡田 ([58]) の定義 3.6(81 頁) に従った．なお，Kuhn([36]) の Definition 17(p.213) は純粋戦略を利用した定義で分かりづらい．

動戦略，純粋戦略，混合戦略について整理すると次のようになる．

定義 7-3.（この定義はオーソドックスな定義である．多くのゲーム理論の教科書通りである）

(1) 展開形ゲームにおけるプレーヤー $n\,(n \geq 1)$ の**行動戦略**とは $r \in P_n$ に属する各情報集合 $I_{r,s}$ 毎に選択肢の集合 $\Theta_{r,s}$ 上の分布 $\{x_{r,n}(\theta/s)\}_{\theta \in \Theta_{r,s}} \in \mathcal{P}(\Theta_{r,s})$ を決めておくことである．ただし，$n = 0$ に対しては自然の選択と考えて，その分布は所与とする．$r = 0$ に対しては仮定 7-4 (3) から情報集合は唯 1 点のみからなるから，$r = 0$ に対しては $\{x_0(\theta_0)\}_{\theta_0 \in \Theta_0}$ と記す．$P_0 = \emptyset$ のときは，ゲームは $n = 1$ から始まる．ひとつの行動戦略を

$$b_n := (\{x_{r,n}(\theta_{r,s}/s)\}_{\theta_{r,s} \in \Theta_{r,s}}\,;\, 1 \leq s \leq s_r,\, r \in P_n),\ 1 \leq n \leq N$$

で表わすことにする（誤解が生じない場合はもっと略記する）．プレーヤー n の行動戦略の全体を $\mathcal{B}_n$ と記す．

(2) 展開形ゲームにおけるプレーヤー n の（ひとつ）の**純粋戦略**とはひとつの行動戦略におけるすべての分布が単位分布となっている場合をいう．

(3) 展開形ゲームにおけるプレーヤー n の**混合戦略**とはプレーヤー n の純粋戦略全体の集合上の分布のことである．

前述したように展開形ゲームを標準形ゲームに翻訳してナッシュ均衡を求める場合は純粋戦略と混合戦略の概念だけあればよいわけであるが，展開形ゲームの特徴は定義 7-3 にも既に現れているように，最初にまず，行動戦略が定義されてその後で純粋戦略，混合戦略が定義されているとおり，行動戦略が基本なのである．ただし，過去の自分の選択は記憶している，という完全記憶 (perfect recall) の仮定なしには行動戦略から定義したナッシュ均衡の存在が保証されない[112]．完全記憶を仮定すると Kuhn の定理 (Kuhn, [36], Theorem 4, p.214) によって混合戦略と同一の利得構造を与える行動戦略が存在するから混合戦略を考慮する必要がない．展開形ゲームにおける混合戦略は到底直感的には理解し難いので，その意味でも展開形ゲームでは完全記憶を持つことは最初から仮定すべきだろう．

それでは各プレーヤーの行動戦略を知れば展開形ゲームをプレーした結果が直感的に理解できるだろうか．多くの教科書では path をたどって説明するが，始点から終点に至る一本の path は純粋戦略の一部しか表現していない．行動戦略を記号で与えてもそれらを用いて，特定の終点にいたる確率を表現することは難しい．簡単な例の場合はゲームの木から目で追って図から求めることは容易であるがシステマティックな計算をすることが難しい．そのためか多くの教科書で簡単な例ですら，展開形ゲームの総てのナッシュ均衡を求めてもう他にはない，というチェックが殆どなされていない．

[112] 鈴木光男 ([77]), p.118-121 に反例があげてある．

次に定義 7-1(101 頁) を一般化して上記の行動戦略を確率変数で表現することを考えよう．

仮定 7-5（行動戦略を確率変数で表現すること）プレーヤー $n \geq 1$ の行動戦略を

$$b_n := (\{x_{r,n}(\theta_{r,s}/s)\}_{\theta_{r,s}\in\Theta_{r,s}}\,;\, 1 \leq s \leq s_r,\, r \in P_n)$$

とする．ただし，$P_0 \neq \emptyset$ とする．$P_0 = \emptyset$ の場合の修正は容易だから省略する．$r = 0$ の場合は仮定により $s_r = 1$ だから，選択肢の集合を Θ_0 とする．Θ_0 に値を取る確率変数を X_0 とする．これは自然が選ぶ確率変数であるから所与と仮定する．さらに rank $r(\geq 1)$ 毎に $\cup_{s=1,\ldots,s_r}\Theta_{r,s}$ に値を取る確率変数 $X_{r,n}\,;\, r \in P_n,\ 1 \leq n \leq N$ を対応させる．このとき，$(X_0, X_{1,n_1}, X_{2,n_2}, \ldots)$(有限列) の確率構造は次の関係式を満たすと仮定する．

(1) $P(X_0 = \theta_0) = x_0(\theta_0)$ （所与），

(2)

$$P(X_0 = \theta_0, \ldots, X_{r,n_r} = \theta_{r,s}, X_{r+1,n_{r+1}} = \theta_{r+1,t}) = \begin{cases} x_{r+1,n_{r+1}}(\theta_{r+1,t}/t) \times P_r, & \text{if } \ \theta_{r+1,t} \in \Theta_{r+1,t} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{70}$$

ここで，$P_r = P(X_0 = \theta_0, \ldots, X_{r,n_r} = \theta_{r,s})$ かつ，$I_{r+1,t}$ は path $(\theta_0, \ldots, \theta_{r,s})$ によって到達した情報集合である．

注意すべきことは，確率変数 $(X_0, X_{1,n_1}, X_{2,n_2}, \ldots)$ の確率構造は自然が与えた所与の分布 $\{x_0(\theta_0)\} \in \mathcal{P}(\Theta_0)$ と行動戦略プロファイル $(b_n\,;\, n = 1, \ldots, N)$ 全体によって決まるが，2 章から 6 章のような仕方でこの確率変数列を用いてナッシュ均衡を定義することはできない．その理由は本質的展開形ゲームの場合，先行するプレーヤーの行動戦略を変更すると後続の確率変数の分布が変わってしまうからである．正の確率で到達している情報集合上にある行動戦略が条件付き確率に一致しているということは要請しているが，確率変数自体の分布は先行する行動戦略の分布に依存して変るから同じ確率変数 X_n で表わすわけにいかないのである．

各プレーヤーが純粋戦略を一つ定めると終点がただひとつ定まり，従って各プレーヤーの利得が定まる．従って，標準形ゲームがひとつ定義できたことになる．これを展開形ゲームの標準化という．ただし，こうして得られた標準形ゲームを図 7-1 の要領で展開形ゲームに直してももとの展開形ゲームとは一致しない．つまり，展開形ゲームを標準形ゲームに直して研究するには無理があるのである．標準形ゲームの場合は各プレーヤーが一つずつ純粋戦略を選んだ純粋戦略プロファイルと利得とは 1 対 1 に対応していた．ところが展開形ゲームでは一般にこの対応が多対 1 の関係にある．利得と 1 対 1 に対応しているのは始点から終点を結ぶ一本の path である．行動戦略を確率変数列で表現した場合，始点から終点をむすぶひとつの path は 確率変数の実現値 $(X_0(\omega), X_{1,n_1}(\omega), X_{2,n_2}(\omega), \ldots)$ で表わされる．ただし，ここで，確率論特有の考え方であるが，確率ゼロの事象は実現しないと考える．

プレーヤー n の期待利得は終点の全体集合，$\mathcal{Z}$ 上で定義された実数値関数 $u_n(z)\,;\, z \in \mathcal{Z}$ で表わされ，直感的には理解し易い．実際，多くのゲーム理論の教科書はこのように表現してある．ただ，その場合，行動戦略が具体的に与えられたときに期待利得を具体的に表現することが難しい．我々の仮定 7-4 を満たす展開形ゲームにおいて行動戦略を確率変数で表現した場合，終点 z に到達する確率 P_z は

$$P_z = P(\{\omega\,;\,(X_0(\omega), X_{1,n_1}(\omega), X_{2,n_2}(\omega), \ldots,) = z\})$$

のように表わされるから，具体的な path の確率計算はこのゲームの構造を決めている仮定 7-5 を使って条件付き確率を順に計算して行けばよい．

具体例としてよく知られているシグナリングゲームを取り上げる．

§7-1．シグナリングゲームのナッシュ均衡と完全ベイジアン均衡

図 7-4 より複雑で偶然手番を持ち，かつ本質的展開形ゲームでもあるような一例として「シグナリングゲーム」の名で知られている次のようなゲームを考える．

図 7-5 において，$(0,1)\bullet$ は自然に属する情報集合で自然はプレーヤー 1 のタイプを集合 $\Theta_0 = \{1,2\}$ の中からランダムに選ぶ．それを表わす確率変数を X_0 で表わす．$P(X_0 = \theta_0) = x_0(\theta_0)$ は所与とする．自明な場合を除くため $\forall\theta_0 \in \Theta_0$, $0 < x_0(\theta_0) < 1$ を仮定する．プレーヤー 1 の情報集合は $(1,1)\bullet$ と $(1,2)\bullet$ であり，プレーヤー 1 の行動戦略は $b_1 = (\{x_1(\theta_1/\theta_0)\}_{\theta_1=1,2}\,;\,\theta_0 = 1,2)$, プレーヤー 2 の情報集合は二つの 2 点集合 $I_{2,1} = \{(2,1)\bullet, (2,2)\bullet\}$ と $I_{2,2} = \{(2,3)\bullet, (2,4)\bullet\}$ であり，行動戦略は $b_2 = (\{x_2(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2=1,2}\,;\,\theta_1 = 1,2)$ と表わされる．

終点は自然の選択肢，$\theta_0 \in \Theta_0 = \{1,2\}$, プレーヤー 1 の選択肢 $\theta_1 \in \Theta_1 = \{1,2\}$, プレーヤー 2 の選択肢 $\theta_2 \in \Theta_2 = \{1,2\}$ によって完全に決定されるから，このときのプレーヤー n の利得を $u_n(\theta_1, \theta_2\,;\,\theta_0)$ で表わす．プレーヤー 1 と 2 の行動戦略を確率変数 X_1, X_2 で表わすと

$$\begin{aligned} P(X_0 = \theta_0, X_1 = \theta_1, X_2 = \theta_2) &= P(X_2 = \theta_2/X_0 = \theta_0, X_1 = \theta_1)P(X_0 = \theta_0, X_1 = \theta_1) \\ &= x_2(\theta_2/\theta_1)P(X_1 = \theta_1/X_0 = \theta_0)P(X_0 = \theta_0) \\ &= x_2(\theta_2/\theta_1)x_1(\theta_1/\theta_0)x_0(\theta_0) \end{aligned}$$

となる．従って，プレーヤー n の期待利得 $\overline{u}_n(b_1, b_2)$ は

$$\begin{aligned} \overline{u}_n(b_1, b_2) &= E[u_n(X_1, X_2\,;\,X_0)] \\ &= \sum_{\theta_0\in\Theta_0}\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_n(\theta_1, \theta_2\,;\,\theta_0)x_0(\theta_0)x_1(\theta_1/\theta_0)x_2(\theta_2/\theta_1) \end{aligned}$$

と表わされる．なお，これらの式は選択肢の集合が有限集合であればいつでも成り立つ式である．さらに，θ_2 の取り得る選択肢は θ_1 に応じて異なってもよいが，その場合は $\sum$ の順序を取り換えてはならない．プレーヤー 1 の選択肢も一般論としては情報集合

毎に異なってもよいのであるが，この例のようなシグナリングゲームの場合，自分のタイプ毎に異なる選択肢を用いるとプレーヤー 2 はその選択肢を見ただけでプレーヤー 1 のタイプを知ってしまうから，プレーヤー 1 の選択肢の集合は情報集合に拘わらず同じ選択肢の集合でなくてはならない.

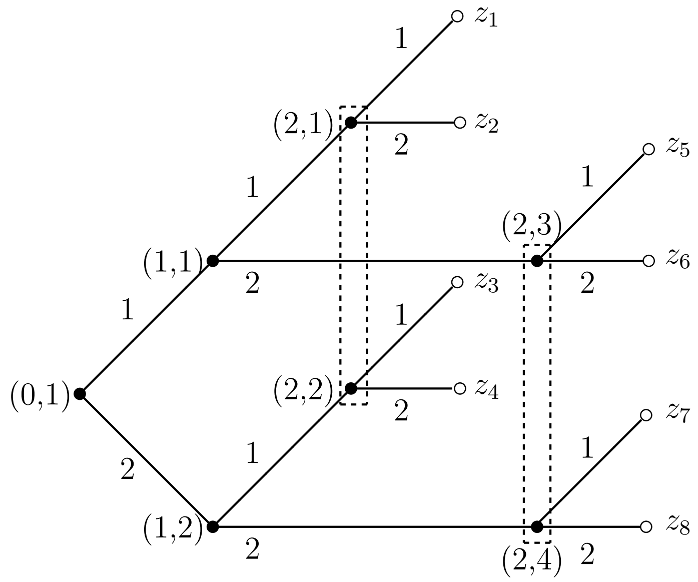


図 7-5. シグナリングゲーム

ナッシュ均衡を求める条件式は次の補題である（定義と言ってもよい）.

補題 7-4. プレーヤー 1 の行動戦略 $b_1^* = (\{x_1^*(\theta_1/\theta_0)\}_{\theta_1 \in \Theta_1}\,;\,\theta_0 \in \Theta_0)$ とプレーヤー 2 の行動戦略 $b_2^* = (\{x_2^*(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2 \in \Theta_2}\,;\,\theta_1 \in \Theta_1\})$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件は

(i) $\forall \theta_0 \in \Theta_0, \forall \{x_1(\theta_1/\theta_0)\}_{\theta_1 \in \Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して

$$\begin{aligned} \overline{u}_1(b_1^*, b_2^*) - \overline{u}_1(b_1, b_2^*) &= \sum_{\theta_0 \in \Theta_0} \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_1(\theta_1, \theta_2\,;\,\theta_0) x_0(\theta_0)(x_1^*(\theta_1/\theta_0) - x_1(\theta_1/\theta_0)) x_2^*(\theta_2/\theta_1) \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{71}$$

(ii) $\forall \theta_1 \in \Theta_1, \forall \{x_2(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2 \in \Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して

$$\begin{aligned} \overline{u}_2(b_1^*, b_2^*) - \overline{u}_2(b_1^*, b_2) &= \sum_{\theta_0 \in \Theta_0} \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} u_2(\theta_1, \theta_2\,;\,\theta_0) x_0(\theta_0) x_1^*(\theta_1/\theta_0)(x_2^*(\theta_2/\theta_1) - x_2(\theta_2/\theta_1)) \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{72}$$

が成り立つことである.

さらに，(i) の条件をよく考えると，$\theta_0 \in \Theta_0$ 毎に任意の分布が選べるから (i) の不等式は θ_0 毎に成り立たなくてはいけない．ただし，$\forall \theta_0 \in \Theta_0$, $x_0(\theta_0) > 0$ を仮定してい

るから，条件 (i) (71) 式は次の条件式 (i)' と同値である．

(i)' $\forall\theta_0 \in \Theta_0, \forall\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\theta_2\,;\,\theta_0)(x_1^*(\theta_1/\theta_0)-x_1(\theta_1))x_2^*(\theta_2/\theta_1) \geq 0, \tag{73}$$

が成り立つ．

次に条件式 (ii) についてちょっと確率論の初歩を思い出してほしい．二つの確率変数 X と Y を考える．話を易しくするために離散分布を持つとする．条件付き確率に就いての乗法公式によって

$$P(X=*, Y=**) = P(Y=**/X=*)P(X=*) = P(X=*/Y=**)P(Y=**)$$

であるから，行動戦略の確率変数による表現を用いると

$$P(X_0=\theta_0,\, X_1^*=\theta_1) = x_0(\theta_0)x_1^*(\theta_1/\theta_0) = \mu^*(\theta_0/\theta_1)x_1^*(\theta_1), \tag{74}$$

となる[113]．ここで，$P(X_1^*=\theta_1) =: x_1^*(\theta_1)$, $P(X_0=\theta_0/X_1^*=\theta_1) =: \mu^*(\theta_0/\theta_1)$ とおいた．$x_0(\theta_0)$ は事前確率，$\mu^*(\theta_0/\theta_1)$ は θ_1 が実現したとき，θ_0 が原因であると推定する事後確率であると呼ばれている．等式 (74) を眺めればすぐ分かるように $x_1(\theta_1)=0$ の場合，$\mu^*(\theta_0/\theta_1)$ は決定出来ない．

さて，条件式 (72) をこの事後確率 $\mu^*(\theta_0/\theta_1)$ を使って書き直して見ると

(ii)' $\forall\theta_1 \in \Theta_1, \forall\{x_2(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2\in\Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して

$$\begin{aligned}\overline{u}_2(b_1^*,b_2^*)-\overline{u}_2(b_1^*,b_2) &= \sum_{\theta_0\in\Theta_0}\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_2(\theta_1,\theta_2\,;\,\theta_0)\mu^*(\theta_0/\theta_1)x_1^*(\theta_1)(x_2^*(\theta_2/\theta_1)-x_2(\theta_2/\theta_1))\\ &\geq 0 \end{aligned}\tag{75}$$

が成り立つことである，と書き換えられる．ところがこの条件式は $\theta_1 \in \Theta_1$ 毎に任意の分布が選べるから θ_1 毎に成り立たなくてはいけない．ただし，$x_1^*(\theta_1)=0$ の場合は自明に成り立っている．従って，補題 7-4 は次のように書き換えられる．

補題 7-5. プレーヤー 1 の行動戦略 $b_1^* = (\{x_1^*(\theta_1/\theta_0)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\}\,;\,\theta_0\in\Theta_0)$ とプレーヤー 2 の行動戦略 $b_2^* = (\{x_2^*(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\,\theta_1\in\Theta_1\})$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件は

(i) $\forall\theta_0 \in \Theta_0, \forall\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1} \in \mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2} u_1(\theta_1,\theta_2\,;\,\theta_0)(x_1^*(\theta_1/\theta_0)-x_1(\theta_1))x_2^*(\theta_2/\theta_1) \geq 0, \tag{76}$$

(ii) $\forall\theta_1 \in \Theta_1$ such that $x_1^*(\theta_1)>0$, $\forall\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2} \in \mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して

$$\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\theta_0\in\Theta_0} u_2(\theta_1,\theta_2\,;\,\theta_0)\mu^*(\theta_0/\theta_1)(x_2^*(\theta_2/\theta_1)-x_2(\theta_2)) \geq 0 \tag{77}$$

[113] この公式から有名なベイズの公式が直ちに導かれる．

が成り立つことである，

ここで，事後確率 $\mu^*(\theta_0/\theta_1)$ の含意を考える．プレーヤー 2 の情報集合はプレーヤー 1 の選択肢 θ_1 と 1 対 1 に対応している．従って，$\mu^*(\theta_0/\theta_1)$ はプレーヤー 2 の情報集合をパラメーターに持つ Θ_0 上の確率分布と看做される．従って，たとえ，$x_1^*(\theta_1)=0$ であってもプレーヤー 2 が自分の情報集合 θ_1 の各頂点に path が到達してきたと仮定したとき，プレーヤー 1 がタイプ $X_0=\theta_0$ に違いない，という信念の強さ（確率）と考え，補題 7-5 の (77) 式が $x_1^*(\theta_1)>0$ の条件なしに成り立つとき，この信念も含めて均衡概念とするのが完全ベイジアン均衡の考え方である．つまり，

定義 7-4. プレーヤー 1 の行動戦略 $b_1^*=(\{x_1^*(\theta_1/\theta_0)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\}\,;\,\theta_0\in\Theta_0)$ とプレーヤー 2 の行動戦略 $b_2^*=(\{x_2^*(\theta_2/\theta_1)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\,;\,\theta_1\in\Theta_1\})$ 及びプレーヤー 2 の情報集合上の信念 $(\{\mu^*(\theta_0/\theta_1)\}_{\theta_0\in\Theta_0}\,;\,\theta_1\in\Theta_1)$ の組が**完全ベイジアン均衡**であるとは，次の 2 つの条件を満たすときをいう．

(i) $\forall\theta_0\in\Theta_0, \forall\{x_1(\theta_1)\}_{\theta_1\in\Theta_1}\in\mathcal{P}(\Theta_1)$ に対して

$$\sum_{\theta_1\in\Theta_1}\sum_{\theta_2\in\Theta_2}u_1(\theta_1,\theta_2\,;\,\theta_0)(x_1^*(\theta_1/\theta_0)-x_1(\theta_1))x_2^*(\theta_2/\theta_1)\geq 0, \tag{78}$$

(ii) $\forall\theta_1\in\Theta_1\,\forall\{x_2(\theta_2)\}_{\theta_2\in\Theta_2}\in\mathcal{P}(\Theta_2)$ に対して

$$\sum_{\theta_2\in\Theta_2}\sum_{\theta_0\in\Theta_0}u_2(\theta_1,\theta_2\,;\,\theta_0)\mu^*(\theta_0/\theta_1)(x_2^*(\theta_2/\theta_1)-x_2(\theta_2))\geq 0 \tag{79}$$

が成り立つこと．ただし，信念に関しては $\forall x_1^*(\theta_1)>0$ に対して

$$\mu^*(\theta_0/\theta_1)=\frac{x_0(\theta_0)x_1^*(\theta_1/\theta_0)}{x_1^*(\theta_1)}, \tag{80}$$

なる関係式を満たしていなくてはならない．

実は殆ど総てのゲーム理論の教科書では完全ベイジアン均衡の定義が文章でしか表現されていない為に定義 7-4 と本当に同値かどうか定かでない．数学的に正確ではない文章表現と数式による定義とを比較してもどちらが正しいか判定できない．シグナリングゲームの場合は比較的明確で定義 7-4 の (79) 式はギボンズの本（[16]) の 188 頁に説明してあることと同値だと思われる．ただし，彼の式は純粋戦略の場合しか表現していない．

具体例としてギボンズの図 4.2.2(189 頁) を取り上げる．そのために，定義 7-4 を選択肢がすべて 2 点集合の場合に適用して書き下す．この場合，

$x_0(2)=1-x_0(1)$, $x_1(2/\theta_0)=1-x_1(1/\theta_0)\,;\,\theta_0=1,2$, $x_2(2/\theta_1)=1-x_2(1/\theta_1)\,;\,\theta_1=1,2$, $\mu^*(2/\theta_1)=1-\mu^*(1/\theta_1)\,;\,\theta_1=1,2$

だから，プレーヤー 1 の行動戦略を $b_1=(x_1(1/\theta_0)\,;\,\theta_0=1,2)$，プレーヤー 2 の行動戦略を $b_2=(x_2(1/\theta_1)\,;\,\theta_1=1,2)$，プレーヤー 2 の信念を $(\mu^*(1/\theta_1)\,;\,\theta_1=1,2)$ で表現す

る．このとき，定義 7-4 を具体的に計算することによって次の補題が得られる．ただし $0 < x_0(1) < 1$ は所与である（式の表には現れないが）．

補題 7-6. プレーヤー 1 の行動戦略 $b_1^* = (x_1^*(1/\theta_0)\,;\,\theta_0 = 1,2)$ とプレーヤー 2 の行動戦略 $b_2^* = (x_2^*(1/\theta_1)\,;\,\theta_1 = 1,2)$ 及びプレーヤー 2 の信念 $(\mu^*(1/\theta_1)\,;\,\theta_1 = 1,2)$ の組が完全ベイジアン均衡であるための必要十分条件は次の 5 つの条件を満たすことである．

(i-1) $0 \leq \forall x_1 \leq 1$ に対して，

$$\begin{aligned}(x_1^*(1/1) - x_1)\{&(u_1(1,1\,;\,1) - u_1(1,2\,;\,1))x_2^*(1/1)\\ &+ (u_1(2,2\,;\,1) - u_1(2,1\,;\,1))x_2^*(1/2) + u_1(1,2\,;\,1) - u_1(2,2\,;\,1)\} \geq 0,\end{aligned}$$

(i-2) $0 \leq \forall x_1 \leq 1$ に対して，

$$\begin{aligned}(x_1^*(1/2) - x_1)\{&(u_1(1,1\,;\,2) - u_1(1,2\,;\,2))x_2^*(1/1)\\ &+ (u_1(2,2\,;\,2) - u_1(2,1\,;\,2))x_2^*(1/2) + u_1(1,2\,;\,2) - u_1(2,2\,;\,2)\} \geq 0,\end{aligned}$$

(ii-1) $0 \leq \forall x_2 \leq 1$ に対して，

$$\begin{aligned}(x_2^*(1/1) - x_2)\{&(u_2(1,1\,;\,1) - u_2(1,1\,;\,2) - u_2(1,2\,;\,1) + u_2(1,2\,;\,2))\mu^*(1/1)\\ &+ u_2(1,1\,;\,2) - u_2(1,2\,;\,2)\} \geq 0,\end{aligned}$$

(ii-2) $0 \leq \forall x_2 \leq 1$ に対して，

$$\begin{aligned}(x_2^*(1/2) - x_2)\{&(u_2(2,1\,;\,1) - u_2(2,1\,;\,2) - u_2(2,2\,;\,1) + u_2(2,2\,;\,2))\mu^*(1/2)\\ &+ u_2(2,1\,;\,2) - u_2(2,2\,;\,2)\} \geq 0.\end{aligned}$$

$(*)$ $\mu^*(1/\theta_1) = \dfrac{x_0(1)x_1^*(\theta_1/1)}{x_1(\theta_1)}$ if $x_1(\theta_1) > 0,\ \theta_1 = 1,2.$

ここで，ギボンズの本 ([16]) の 189 頁の図 4.2.2 の数値を代入する．ただし，彼の本の記号との対応関係は $L = 1$, $R = 2$, $u = 1$, $d = 2$ である．また，初期分布は $x_0(1) = 1/2$ である．

$$\begin{aligned}&u_1(1,1\,;\,1) = 1,\ u_1(1,2\,;\,1) = 4,\ u_1(2,1\,;\,1) = 2,\ u_1(2,2\,;\,1) = 0,\\ &u_2(1,1\,;\,1) = 3,\ u_2(1,2\,;\,1) = 0,\ u_2(2,1\,;\,1) = 1,\ u_2(2,2\,;\,1) = 0,\\ &u_1(1,1\,;\,2) = 2,\ u_1(1,2\,;\,2) = 0,\ u_1(2,1\,;\,2) = 1,\ u_1(2,2\,;\,2) = 1,\\ &u_2(1,1\,;\,2) = 4,\ u_2(1,2\,;\,2) = 1,\ u_2(2,1\,;\,2) = 0,\ u_2(2,2\,;\,2) = 2.\end{aligned}$$

以上のデータを補題 7-6 の (i-i) から (ii-2) に代入すると次の不等式が得られる．

$$\text{(i-1)}\quad 0 \leq \forall x_1 \leq 1,\ (x_1^*(1/1) - x_1)(-3x_2^*(1/1) - 2x_2^*(1/2) + 4) \geq 0, \tag{81}$$

$$\text{(i-2)}\quad 0 \leq \forall x_1 \leq 1,\ (x_1^*(1/2) - x_1)(2x_2^*(1/1) - 1) \geq 0, \tag{82}$$

$$\text{(ii-1)}\quad 0 \leq \forall x_2 \leq 1,\ 3(x_2^*(1/1) - x_2) \geq 0, \tag{83}$$

$$\text{(ii-2)}\quad 0 \leq \forall x_2 \leq 1,\ (x_2^*(1/2) - x_2)(3\mu^*(1/2) - 2) \geq 0. \tag{84}$$

これらの不等式を眺めるとまず，(83) 式から $x_2^*(1/1)=1$ が得られ，これを (82) 式に代入すると $x_1^*(1/2)=1$ が得られる．さらに，(81) 式は

$$\text{(i-1)'}\quad 0\le\forall x_1\le 1,\ (x_1^*(1/1)-x_1)(1-2x_2^*(1/2))\ge 0 \tag{85}$$

となる．ここで場合を分けて考察する．

1. $x_2^*(1/2)=1/2$ の場合．(84) 式が成り立つためには $\mu^*(1/2)=2/3$ でなくてはならない．一方，$x_1^*(1/1)$ は (85) 式からは決められない．次に条件 $(*)$ をチェックする．$x_1^*(1/1)<1$ を仮定すると，$x_1^*(1/2)=1$ だから $x_1^*(1)=(1+x_1^*(1/1))/2<1$ となるが，$(*)$ 式から $\mu^*(1/2)=1$ が得られ，$\neq 2/3$ だから $x_1^*(1/1)<1$ は解では有り得ない．$x_1(1/1)=1$ の場合は $x_1^*(2)=0$ だから $\mu^*(1/2)=2/3$ と $(*)$ は矛盾せず，$\mu^*(1/1)$ は (81) 式から (84) 式までの条件では決定出来ず，条件 $(*)$ から $\mu^*(1/1)=x_0(1)=1/2$ が得られる．まとめると $x_1^*(1/1)=1, x_1^*(1/2)=1, x_2^*(1/1)=1, x_2^*(1/2)=1/2, \mu^*(1/1)=1/2, \mu^*(1/2)=2/3$ がひとつの完全ベイジアン均衡である．

2. $0<x_2^*(1/2)<1/2$ の場合．(84) 式が成り立つためには $\mu^*(1/2)=2/3$ でなくてはならない．一方，(85) 式から $x_1^*(1/1)=1$ が得られる．信念に関しては 1. の場合と同様であるから，まとめると，まとめると $x_1^*(1/1)=1, x_1^*(1/2)=1, x_2^*(1/1)=1, 0<x_2^*(1/2)<1/2, \mu^*(1/1)=1/2, \mu^*(1/2)=2/3$ が完全ベイジアン均衡である．

3. $x_2^*(1/2)=0$ の場合．(85) 式から $x_1^*(1/1)=1$ が得られ，(84) 式からは $\mu^*(1/2)\le 2/3$ が得られる．1,2 の場合と同様にして $\mu^*(1/2)\le 2/3,\ \mu^*(1/1)=1/2$ が結論される．まとめると，$x_1^*(1/1)=1, x_1^*(1/2)=1, x_2^*(1/1)=1, x_2^*(1/2)=0, \mu^*(1/1)=1/2, \mu^*(1/2)\le 2/3$ がひとつの完全ベイジアン均衡である．

4. $1/2<x_2^*(1/2)<1$ の場合．(85) 式から $x_1^*(1/1)=0$ が得られ，(84) 式からは $\mu^*(1/2)=2/3$ が得られる．ところが，この場合，$x_1^*(1)=x_2^*(2)=1/2$ だから $(*)$ より．$\mu^*(1/2)=1\neq 2/3$ となり矛盾するから解では有り得ない．

5. $x_2^*(1/2)=1$ の場合．(85) 式から $x_1^*(1/1)=0$ が得られ，(84) 式からは $\mu^*(1/2)\ge 2/3$ が得られる．ところが，この場合，$x_1^*(1)=x_2^*(2)=1/2$ だから $(*)$ より．$\mu^*(1/2)=1$ となるから，(84) 式の解 $\mu^*(1/2)\ge 2/3$ と合わせると $\mu^*(1/2)=1$ である．また，$(*)$ から $\mu^*(1/1)=0$ が得られる．まとめると，$x_1^*(1/1)=0, x_1^*(1/2)=1, x_2^*(1/1)=1, x_2^*(1/2)=1, \mu^*(1/1)=0, \mu^*(1/2)=1$ がひとつの完全ベイジアン均衡である．

以上ですべての完全ベイジアン均衡が求められた．1,2,3,5 をまとめると

(a) $x_1^*(1/1)=1, x_1^*(1/2)=1, x_2^*(1/1)=1, 0<x_2^*(1/2)\le 1/2,$

$\mu^*(1/1)=1/2, \mu^*(1/2)=2/3$, 期待利得 $\overline{u}_1=3/2, \overline{u}_2=7/2$.

(b) $x_1^*(1/1)=1, x_1^*(1/2)=1, x_2^*(1/1)=1, x_2^*(1/2)=0,$

$\mu^*(1/1)=1/2, \mu^*(1/2)\le 2/3$, 期待利得 $\overline{u}_1=3/2, \overline{u}_2=7/2$.

(c) $x_1^*(1/1) = 0$, $x_1^*(1/2) = 1$, $x_2^*(1/1) = 1$, $x_2^*(1/2) = 1$, $\mu^*(1/1) = 0$, $\mu^*(1/2) = 1$.
期待利得 $\overline{u}_1 = 2$, $\overline{u}_2 = 5/2$.

以上の解のうち，プレーヤー 1 から見て (a) と (b) は一括戦略，(c) は分離戦略である．ギボンズの本 ([16]) には書かれていないが，期待利得を比較するとプレーヤー 1 にとっては (c) の分離戦略を選択するのがよいことがわかる．つまり，このシグナリングゲームではプレーヤー 1 は自分のタイプを相手に知ってもらう方が有利なのである．本質的展開形ゲームでは複数のナッシュ均衡戦略解があっても先手のプレーヤーが自分にとって期待利得の高い方の均衡解を選ぶことが出来るからナッシュ均衡戦略解の精緻化を考える必要がないと言える（プレーヤー 1 にとって期待利得に差がない場合だけは別途考察する必要がある）．

なお，ギボンズの本では純粋戦略しか求めていないから (a) の解は書いてない．そもそも式を用いずに混合完全ベイジアン均衡を求めるのは不可能に近い．なお，通常のナッシュ均衡は補題 7-5 を用いて求めると次の通りである．

(a) $x_1^*(1/1) = 1$, $x_1^*(1/2) = 1$, $x_2^*(1/1) = 1$, $0 \leq x_2^*(1/2) \leq 1/2$,

(b) $x_1^*(1/1) = 0$, $x_1^*(1/2) = 1$, $x_2^*(1/1) = 1$, $x_2^*(1/2) = 1$.

これらのナッシュ均衡戦略解を眺めれば分かるようにナッシュ均衡戦略解そのものの中で不適切な解として完全ベイジアン均衡から除かれた解はない．ただ，プレーヤー 1 が自分のタイプ如何に拘わらず選択肢 2 を選ばなかった場合（一括戦略を取った場合），完全ベイジアン均衡ではプレーヤー 2 はプレーヤー 1 が選択肢 2 を選ぶかもしれないという「信念」（予測と云う方が適当だと思う．実際，Gintis([19]) は conjecture という概念を導入して local best response, LBR equilibrium という概念を定義している）とその時の選択がある意味で合理的でないといけないということを主張している．

本講義録では基本的に非協力ゲームのナッシュ均衡戦略の概念を中心に考察してきた．しかし，どうやってナッシュ均衡戦略解に到達するのか，ナッシュ均衡戦略解を一旦選んだら本当に抜け出せないのか，複数のナッシュ均衡戦略解が存在する場合どのナッシュ均衡戦略解を選ぶのが合理的なのか，あるいはナッシュ均衡戦略解の中に本当は合理的とは言えないような望ましくない解が紛れ込んでいるのではないか，等々ナッシュ均衡戦略解をめぐるあまたの研究成果がすでによく知られているが本稿で取り上げることが出来なかった．本講義録の基本的立場である確率変数を用いた定式化によって，文章による感覚的説明ではなく数学的論理展開からこれらの概念がもっとすっきりと，かつ数学的に厳密に表現できないかと思うのであるが，残念ながらそこまで到達する時間的能力的余裕がなかった．多くの研究者が本講義録をきっかけにこれらの方面に興味を持って頂ければ筆者としては望外の幸せである．

参考文献

[1] Abakuks, A. (1980) “Conditions for Evolutionarily Stable Strategies. *J. Appl. Prob.* 17: 559-562.

[2] Aumann, R. J. (1961) “Borel Structures for Function Spaces.” *Illinois Journal of Mathematics,* vol.5: 614–630.

[3] .... (1963) “On Choosing a Function at Random.” *Ergodic Theory* Ed. F.B. Wright, Academic Press: 1–20.

[4] .... (1964) “Mixed and Behavior Strategies in Infinite Extensive Games.” *Advances in Game Theory. Ann. of Math. Studies* No.52. Princeton University Press, Princeton, N.J. 627–650.

[5] .... (1974) “Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies,” *Journal of Mathematical Economics* 1: 67–96.

[6] .... (1976) “Agreeing to Disagree,” *The Annals of Statistics* vol.4, No.61: 1236–1239.

[7] .... (1987) “Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality,” *Econometrica* 55(1): 1–18.

[8] Aumann, R. J. and A. Brandenburger (1995) “Epistemic Conditions for Nash Equilibrium,” *Econometrica* 63(5): 1161–1180.

[9] Borel, E. (1938) “Applications aux jeux de hasard.” *Trait du calcul des probabilité et de ses applications,* Gauthier-Villars, Paris.

[10] .... (1953) “The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetrical Kernels”; “On Games thatInvolve Chance and the Skill of the Players”; and “On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinants and the General Theory of Play,” Translated by L.J.Savage, *Econometrica,* 21:97–117.

[11] Brandenburger, A. and E. Dekel (1987) “Rationalizability and Correlated Equilibria,” *Econometrica* 55(6): 1391–1402.

[12] Calvó-Armengol, A. (2006) “The Set of Correlated Equilibria of 2×2 Games,” http://selene.uab.es/acalvo/correlated.pdf.

[13] Chung, K. L. (1968) *A Course in Probability Theory.* Harcourt, Brace & World, Inc. New York.

[14] Evangelista, Fe S. and T. E. S. Raghavan, (1996) "A Note on Correlated Equilibrium", *International Journal of Game Theory* 25: 35–41.

[15] Fudenberg, D. and J. Tirole (1991) *Game Theory*. MIT Press, Cambridge.

[16] Gibbons, R. (1992) *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press. 『経済学のためのゲーム理論入門』(1995) 福岡正夫, 須田伸一訳. 創文社.

[17] Gilboa, I. and D. Schmeidler (1988) "Information Dependent Games: Can Common Sense be Common Knowledge?", *Economic Letters* 27: 215–221.

[18] Gintis, H. (2009) *The Bounds of Reason. Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences.* Princeton University Press.

[19] .... (2009) "The Local Best Response Criterion: An Epistemic Approach to Equilibrium refinement." *Journal of Economic Behavior & Organization* 71: 89–97.

[20] Haigh, J. (1975) "Game Theory and Evolution." *Advances in Appl. Prob.* vol.7, 8-11.

[21] Harsanyi, J.C. (1967-8) "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III," *Management Science*, Vol.14,No.3:159–182.No.5:320–334,No.7:486–502.

[22] Harsanyi, J.C. (1973) "Game with Randomly Disturbed Payoffs. A New Rationale for Mixed-Strategy Equilibrium Points." *International Journal of Game Theory* 2: 1-23.

[23] Hart, S. and A. Mas-Corell (2000) "A Simple Adaptive Procedure Leading to Correlated Equilibrium," *Econometrica* 68(5): 1127–1150.

[24] Hart, S. and D. Schmeidler (1989) "Existence of Correlated Equilibria," *Mathematics of Operations Research* 14(1): 18–25.

[25] Heap, S.P.H. and Y. Varoufakis (1995) Game Theory: A Critical Introduction, 『ゲーム理論：批判的入門』(1998) 荻沼　隆訳多賀出版.

[26] Hines, W. G. S. (1980) "Three Characterizations of Population Strategy Stability." *J. Appl. Prob.*17, 333–340.

[27] Holmström, B. and R.B. Myerson (1983) "Efficient and Durable Decision Rules with Incomplete Information." *Econometrica* 51(6): 1799–1819.

[28] 今井晴雄・岡田章編著 (2002)『ゲーム理論の新展開』, 勁草書房.

[29] Kohlberg, E. and J.-F. Mertens (1986) "On the Strategic Stability of Equilibria." *Econometrica*, 54: 1003–1038.

[30] Kôno, N. (2003)『ゲーム理論アラカルト一確率論の立場から一』Rokko Lectures in Mathematics, No.13. 神戸大学理学部数学教室.

[31] .... (2008) "Noncooperative Game in Cooperation: Reformulation of Correlated Equilibria," *The Kyoto Economic Review* 77(2): 107–125.

[32] .... (2009) "Noncooperative Game in Cooperation: Reformulation of Correlated Equilibria (II)," *The Kyoto Economic Review* 78(1): 1–18.

[33] .... (2011) "Evolutionarily Stable Strategies based on Bayesian Games." *Scientiae Mathematicae Japonicae* (掲載予定).

[34] Kreps, D.M. and R. Wilson (1982) "Sequential Equilibrium." *Econometrica* 50: 863-894.

[35] Kreps, D.M. (1990) *Game Theory and Economic Modeling.* Oxford University Press.『ゲーム理論と経済学』(2000) 高森他訳　東洋経済新報社.

[36] Kuhn, H.W. (1953) "Extensive Games and the Problem of Information." *Contributions to the Theory of Games,* Eds. Kuhn and Tucker, 193–216. Princeton University Press.

[37] Loève, M. (1955) *Probability Theory.* Second Edition. D. Van Nostrand Company.Inc. New Jersey.

[38] Luce, R. D. and H. Raiffa (1957) *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey.* John Wiley & Sons, Inc. New York.

[39] Mailath, G. J., L. Samuelson and A. Shaked (1997) "Correlated equilibria and local interactions," *Economic Theory* 9: 551–56.

[40] Maynard-Smith, J. (1982) *Evolution and the Theory of Games.*『進化とゲーム理論 : 闘争の論理』寺本英, 梯正之訳 (1985) 産業図書.

[41] Mandler, M. (2007) "Strategies as States," *Journal of Economic Theory* 135: 105–130.

[42] Mertens, J.-F and S.Zamir (1985) "Formalization of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information." *International Journal of Game Theory* 14: 1–29.

[43] Milgrom, P.R. and R.J. Weber (985) “Distributional Strategies for Games with Incomplete Information,” *Mathematics of Operations Research* Vol.10,No.4: 619632.

[44] Moulin, H. (1986) *Game Theory for the Social Sciences*. Second Edition. New York University Press. New York.

[45] Moulin, H. and J. P. Vial (1978) “Strategically Zero-Sum Games: The Class of Games whose Completely Mixed Equilibria Cannot be Improved upon,” *Internatioal Journal of Game Theory* 7(3/4): 201–221.

[46] Myerson, R. B. (1978) “Refinements of the Nash Equilibrium Concept.” *International Journal of Game Theory* 7(2): 73–80.

[47] .... (1979) “Incentive Compatibility and the Bargaining Problem.” *Econometrica* 47(1): 61–73.

[48] .... (1981) “Optimal Auction Design.” *Mathematics of Operations Research* 6(1): 58–73.

[49] .... (1982) “Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problems.” *Journal of Mathematical Economics* 10: 67–81.

[50] .... (1983) “Mechanism Design by an Informed Principal.” *Econometrica* 51(6): 1767–1797.

[51] .... (1984) “Cooperative Games with Imcomplete Information.” *International Journal of Game Theory* 13(2): 69–96.

[52] .... (1985) “Bayesian Equilibrium and Incentive-Compatibility: An Introduction,” in L. Hurwicz, D. Schmeidler, H. Sonnenschein (eds.)*Social goals and social organization. Essays in Memory of Elisha Pazner*. Cambridge University Press. Cambridge, pp.229–259.

[53] .... (1986) “Acceptable and Predominant Correlated Equilibria,” *International Journal of Game Theory* 15: 133–154.

[54] .... (1999) “Nash Equilibrium and the Histroy of Economic Theory.” *Journal of Economic Literature* XXXVII: 1067–1082.

[55] Nash, J.F. (1951) Non-cooperative Games. Annals of Mathematics, vol.54, 286-295.

[56] Nau, R., S. G. Canovas and P. Hansen (2004) “On the Geometry of Nash Equilibria and Correlated Equilibria,” *International Journal of Game Theory* 32: 443–453.

[57] Neyman, A. (1997) "Correlated Equilibrium and Potential Games," *International Journal of Game Theory* 26: 223–227.

[58] 岡田　章 (1996) 『ゲーム理論』有斐閣.

[59] Osborne, M. J. and A. Rubinstein (1994) *A Course in Game Theory.* MIT Press,Cambridge.

[60] Owen, G. (1995) *Game theory.* Third Edition. Academic Press. New York.

[61] Poundstone, W. (1993). Prisoner's dilemma. Anchor. 邦訳『囚人のジレンマ——フォン・ノイマンとゲームの理論』 松浦俊輔、青土社、(1995).

[62] Rosenthal, R. W. (1974) "Correlated Equilibria in Some Classes of Two-Person Games," *International Journal of Game Theory* 3(3): 119–128.

[63] .... (1978) "Arbitration of Two-Party Disputes under Uncertainty." *Review of Economic Studies* 45: 595-604.

[64] .... (1981) "Games of Perfect Information. Predatory Pricing and the Chain-Store Paradox." *Journal of Economic Theory* 25: 92–100.

[65] Samuelson, L. (1991) "Limit Evolutionarily Stable Strategies in Two-Player Normal Form Games." *Games and Economic Behavior*, 3: 110–128.

[66] 佐藤嘉倫 (2008) 『ゲーム理論 人間と社会の複雑な関係を解く』新曜社.

[67] Selten, R. (1975) "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games." *International Journal of Games Theory* 4(1): 25–55.

[68] .... (1978) "The Chain Store Paradox." *Theory and Decision*, 9: 127–159.

[69] .... (1980) "A Note on Evolutionarily Stable Strategies in Asymmetric Animal Conflicts." *Journal of Theoretical Biology*, 84: 93–101.

[70] .... (1983) "Evolutionary Stability in Extensive Two-Person Games." *Mathematical Social Sciences.* 5: 269–363.

[71] .... (1988) "Evolutionary Stability in Extensive Two-Person Games – Correction and Further Development." *Mathematical Social Sciences.* 16: 223–266.

[72] Shafer, G. and V. Vovk (2001) *Probability and Finance. it's Only a Game.* John Wiley & Sons.『ゲームとしての確率とファイナンス』(2006), 竹内啓，公文雅之訳（但し部分訳）．岩波書店.

[73] Shubik, M. (1970) “Game Theory, Behavior, and the Paradox of the Prisoner’s Dilemma: Three Solutions. *The Journal of Conflict Resolution.* 14(2): 181–193.

[74] Skyrms, R. (1996) *Evolution of the Social Contract.* Cambridge University Press. New York.

[75] Stirzaker, D. (2003) *Elementary Probability.* Second Edition. Cambridge University Press. Cambridge.

[76] 鈴木光男 (1973)『ゲーム理論の展開』東京図書.

[77] 鈴木光男 (1981)『ゲーム理論入門』共立全書 239, 共立出版.

[78] 鈴木光男 (1999)『ゲーム理論の世界』勁草書房.

[79] Vanderschraaf, P. (1995) “Endogenous Correlated Equilibria in Noncooperative Games,” *Theory and Decision* 38: 61–84.

[80] Vega-Redondo, F. (1996) *Evolution, Games, and Economic Behaviour.* Oxford University Press.

[81] .... (1995) “Convention as Correlated Equilibrium,” *Erkenntnis* 42: 65–87.

[82] Von Neumann, J. (1928) “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele,” *Mathematische Annalen,* 100:295–320. *Contributions to the Theory of Games.* Vol.IV. Tucker, A.W. and R.D. Luce(eds.) Annals of Mathematical Studies, No.40, 13–42 に英訳がある.

[83] .... (1937) “Uber ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes,” *Ergebnisse eines Mathmatik Kolloquiums*, 8:73–83.

[84] von Neumann, J. and Morgenstern, O.(1944) *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press. 『ゲームの理論と経済行動』(1972-73) 銀林浩他監訳，東京図書．最近 (2009 年 5 月）ちくま学芸文庫から 3 冊にまとめられて文庫化された．1953 年に出版された第 3 版の翻訳である．

[85] Weibull, J. W. (1995) *Evolutionary Game Theory.* The MIT Press.『進化ゲームの理論』(1998) 大和瀬二監訳　オフィスカノウチ.

以上