

超幾何学校 2014/2015 講義録¹

目次

1. 多変数超幾何関数の Pfaffian 方程式とモノドロミー 2, 松本圭司 述, 後藤良彰 注 1–22.
2. Pfaffian of Lauricella's Hypergeometric System F_A , Keiji Matsumoto, 23–37.
3. Macdonald 多項式とその周辺, 野海正俊 述, 渋川元樹, 宮永愛子 記, 39–73.
4. 合流型 A -超幾何関数とトーリックコンパクト化, 竹内潔 述, 武田裕康 記, 75–117.
5. 超幾何恒等式をめぐって, 岩崎克則 述, 蛭子彰仁 記. 119–158.

¹本講義録は最新の研究成果をわかりやすく紹介し新規の研究参加のための参考となるように企画しました. 出版にあたり神戸大学理学研究科数学専攻の関係者の皆様のご助力に感謝いたします. 本講義録は JSPS 科研費 25287018 (“多変数特殊関数の理論と数値計算”) の助成を受けています.

多変数超幾何関数の Pfaffian 方程式とモノドロミー 2

松本 圭司*(北海道大学)

Sep. 01,02, 超幾何学校 2014, 神戸大学理学部

0 Introduction

Gauss の超幾何級数は以下のように定義される:

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)(1, n)} x^n, \quad (a, n) = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

ただし, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ とする. x は変数, a, b, c はパラメーターとみなす. この級数は $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < 1\}$ で収束する.

超幾何級数は積分表示

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_1^{\infty} t^{b-c}(t-x)^{-b}(t-1)^{c-a} \frac{dt}{t-1} \quad (\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0)$$

をもち^{*1}, 超幾何微分方程式

$$\left[x(1-x) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + \{c - (a+b+1)x\} \left(\frac{d}{dx} \right) - ab \right] f = 0 \quad (1)$$

をみtas. 超幾何微分方程式は, Pfaffian 方程式と呼ばれる 1 階連立微分方程式系

$$d\mathbf{f} = W\mathbf{f},$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F(a, b, c; x) \\ \frac{d}{dx} F(a, b, c; x) \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{ab}{x(1-x)} & -\frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \end{pmatrix} dx$$

* この講義録は, 松本が講義で使用したスライドをベースに, 後藤良彰 (神戸大学) が神戸大学の人々の意見を取り入れつつ脚注を加えたものである.

^{*1} よく知られている公式 (積分区間が $[0, 1]$ のもの) に変数変換 $t \mapsto 1/t$ を施して得られる. $1/(t-1)$ が微分形式の方についている理由は, 後述のねじれコホモロジー群との兼ね合い.

と同値である*2. 未知関数 $\mathbf{f}$ を $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{x-1}{b} \end{pmatrix}$ により $\mathbf{h} = G\mathbf{f}$ に変換すると, $\mathbf{h}$ のみたす Pfaffian 方程式は

$$\begin{aligned} d\mathbf{h} &= dG \cdot \mathbf{f} + G \cdot d\mathbf{f} = dG \cdot G^{-1}\mathbf{h} + GWG^{-1}\mathbf{h} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & -c \end{pmatrix} \frac{dx}{x} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c-a-b \end{pmatrix} \frac{dx}{x-1} \right] \mathbf{h} \end{aligned}$$

となる*3. この Pfaffian 方程式における $d \log x = \frac{dx}{x}$, $d \log(1-x) = \frac{dx}{x-1}$ の係数行列

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & c-a-b \end{pmatrix} \text{ は以下をみたす:}$$

$$\begin{cases} W_0 C - C^t W_0 = O, \\ W_1 C - C^t W_1 = O, \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{c}{a(c-a)} & \frac{-1}{c-a} \\ \frac{-1}{c-a} & \frac{c-a-b}{(c-a)(-b)} \end{pmatrix}.$$

この講義において, 未知関数 $\mathbf{h}$ の由来およびこの関係式の幾何学的な意味について解説する.

超幾何級数の積分表示から, 多価関数 $u = t^{b-c}(t-x)^{-b}(t-1)^{c-a}$ に関するねじれ (コ) ホモロジー群が定義できる. これらの群は 2 次元であり, 超幾何級数の積分表示はねじれコホモロジー群とねじれコホモロジー群の間の pairing とみなせる*4.

Pfaffian 方程式は, ねじれコホモロジー群をファイバーとするベクトル束上の接続とみなせる. その接続がねじれコホモロジー群に定まる交点形式に関する許容接続*5 になって

*2 この d は後述の外微分作用素 d_x のこと. つまり, $d\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{f}}{dx} dx$ (ベクトル値関数の微分は各成分の微分, dx は形式的な記号と思って良い). 右辺では記法の都合上, W の後ろ ($\mathbf{f}$ の前) に dx があるが, これは一番右に持ってきても良い. dx の係数が等しいので, 「 $\frac{d\mathbf{f}}{dx} = (W \text{ の } dx \text{ を取ったもの}) \cdot \mathbf{f}$ 」という関係式を意味する. この場合は通常の Pfaffian 方程式にただ dx をつけたただけだが, 多変数の場合には各変数に関する Pfaffian 方程式を 1 個の方程式 $d\mathbf{f} = W\mathbf{f}$ の形にまとめて書けるようになる.

例. $\mathbf{f}$ が 2 変数関数からなるベクトル値関数のとき, $d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} dy$ であり, 行列 P, Q により $W = Pdx + Qdy$ と書いたとき, 方程式 $d\mathbf{f} = W\mathbf{f}$ は $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} dy = (Pdx + Qdy)\mathbf{f} = P\mathbf{f}dx + Q\mathbf{f}dy$ となる. 微分形式の間の等式なので, dx, dy の係数が等しいから, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = P\mathbf{f}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = Q\mathbf{f}$ という Pfaffian 系が得られる.

問. 可積分条件が微分形式としての等式 $dW = W \wedge W$ と同値であることを確かめよ.

*3 微分方程式系が divisor $r(x) = 0$ を確定型特異点とすると, その Pfaffian 方程式の接続行列は $r(x) = 0$ の一般的な点の周りで局所的に (定数係数行列) $\cdot d_x \log(r(x)) + (\text{正則関数行列}) \cdot (1\text{-form})$ の表示をもつ (cf. [Y1, §7.6]). 有理関数の部分分数展開のように, その特異部の和として Pfaffian 方程式の接続行列が表示される場合がある (いつでもそういう表示があるわけではない (例えば, Appell's F_4)). 未知関数 $\mathbf{f}$ に対する接続行列はこの表示にできないが, $\mathbf{h}$ に変換するとこの表示が得られることになる.

*4 ねじれホモロジー群については, [M3] で考察した.

*5 接続と交点形式が (4) をみたすこと (cf. [CFH]).

いる。現時点では、そのベクトル束に交点形式が底空間の変数に依存しないような大域的な frame が存在しているときに、接続の交点形式による表示が得られている。

- 1 回目の講義 (Sections 1, 2, 3) では、「ねじれ Stokes 定理」を復習し、ねじれコホモロジー群の定義する。その上の交点形式を定義し、計算方法を紹介。
- 2 回目の講義 (Sections 4, 5) では、超幾何微分方程式の Pfaffian 方程式の交点形式による表示と Appell's F_1 の Pfaffian 方程式への応用を解説。

以下の議論のため、次の記号を導入しておく^{*6}:

$$\begin{aligned} x_0 = 0, & & x_1 = x, & & x_2 = 1, & & x_3 = \infty & \in \mathbb{P}^1, \\ \alpha_0 = b - c, & & \alpha_1 = -b, & & \alpha_2 = c - a, & & \alpha_3 = a & \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

記号の整理 d_t, d_x をそれぞれ t, x に関する外微分作用素とする^{*7}。

$$u = u(t, x) = \prod_{i=0}^2 (t - x_i)^{\alpha_i} = t^{b-c} (t - x)^{-b} (t - 1)^{c-a},$$

$$\omega = d_t \log(u(t, x)) = \frac{d_t u(t, x)}{u(t, x)} = \sum_{i=0}^2 \frac{\alpha_i}{t - x_i} dt = \left[\frac{b-c}{t} + \frac{-b}{t-x} + \frac{c-a}{t-1} \right] dt,$$

$$\begin{aligned} \omega \text{ の極: } & t = x_0 = 0, \quad t = x_1 = x, \quad t = x_2 = 1, \quad t = x_3 = \infty, \\ \omega \text{ の留数: } & \alpha_0 = b - c, \quad \alpha_1 = -b, \quad \alpha_2 = c - a, \quad \alpha_3 = a. \end{aligned}$$

$$\omega_x = d_x \log(u(t, x)) = \frac{d_x u(t, x)}{u(t, x)} = \frac{-\alpha_1}{t-x} dx = \frac{b}{t-x} dx.$$

以後 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \notin \mathbb{Z}$ を仮定する。

1 ねじれ Stokes 定理の復習

当面は $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ の元 x を固定して考える。集合 $\mathbb{C}_x = \mathbb{C} - \{0, x, 1\} = \mathbb{P}^1 - \{0, x, 1, \infty\}$ 上の k 次微分形式^{*8} ψ と多価関数 $u(t)$ との積の積分 $\int_{\gamma} u(t) \psi$ を考える。多価関数 $u(t)$

^{*6} $x_2 = 1$ はやや不自然に見えるが、多変数化する際 (Section 5 参照) に都合が良い。また、 $\mathbb{P}^1$ は複素射影直線 (Riemann 球面)。

^{*7} 例えば、関数 (0-form) $g(t, x)$ については、 $d_t g(t, x) = \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, x)}{\partial \bar{t}} d\bar{t}$ 。ただし、本講演で考察するものは主に $g(t, x)$ が正則な場合であり、その場合は Cauchy-Riemann の関係式により、 $d_t g(t, x) = \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} dt$ である。(次の脚註も参照)

^{*8} 微分形式について少し補足しておく。

と ψ を分離し、積分を ψ と γ とその上の枝 $u(t)|_\gamma$ を組み合わせた γ^u との pairing $\langle \psi, \gamma^u \rangle$ とみなす.

このルールのもとで Stokes 定理

$$\int_{\Delta} d_t(u(t)\psi) = \int_{\partial\Delta} u(t)\psi \quad (2)$$

を見直す.

$$d_t(u(t)\psi) = d_t u(t) \wedge \psi + u(t) d_t \psi = u(t) \left(\frac{d_t u(t)}{u(t)} \wedge \psi + d_t \psi \right) = u(t) (\omega \wedge \psi + d_t \psi)$$

であるから、(2) の左辺は $\langle \nabla_\omega \psi, \Delta^u \rangle$ となる、ここで $\nabla_\omega = d_t + \omega \wedge$ は $\mathbb{C}_x$ 上の 1 価正則 1-form ω によりねじられた外微分作用素とする. 一方、(2) の右辺はねじれ境界作用素 ∂_ω によって $\langle \psi, \partial_\omega(\Delta^u) \rangle$ と表される^{*9}.

Theorem 1 (ねじれ Stokes 定理).

$$\langle \nabla_\omega \psi, \Delta^u \rangle = \langle \psi, \partial_\omega(\Delta^u) \rangle.$$

-
- Section 2 以降では「 k 次微分形式」を「 k -form」と書いているが、同じ意味である.
 - $\mathbb{C}_x$ を $t = s_1 + \sqrt{-1}s_2$ ($s_1, s_2 \in \mathbb{R}$) としたときの (s_1, s_2) を座標とした 2 次元実多様体 ($\subset \mathbb{R}^2$) とみなし、 $\mathbb{C}_x$ 上の C^∞ 級 k 次微分形式を考える. 後の記号に合わせて、この全体を $\mathcal{E}^k$ と書くことにする.
 - $\mathcal{E}^0$ の元は $\mathbb{C}_x$ 上の C^∞ 級関数のことであり、 $\mathcal{E}^1$ の元は $g_1 ds_1 + g_2 ds_2$ ($g_1, g_2 \in \mathcal{E}^0$) と表されるもの、 $\mathcal{E}^2$ の元は $h ds_1 \wedge ds_2$ ($h \in \mathcal{E}^0$) と表されるものである. ここでは、 ds_1, ds_2 は形式的な記号で、反可換性 $ds_2 \wedge ds_1 = -ds_1 \wedge ds_2$ および $ds_1 \wedge ds_1 = ds_2 \wedge ds_2 = 0$ を満たすものだという認識で十分である (詳しいことは多様体の教科書を参照). 便宜上、 $\mathcal{E}^k = 0$ ($k \neq 0, 1, 2$) とする.
 - 今のように複素多様体からくる実多様体で微分形式を考える場合は、 s_1, s_2 の代わりに $t = s_1 + \sqrt{-1}s_2, \bar{t} = s_1 - \sqrt{-1}s_2$ を座標とみなすことが多い (t と $\bar{t}$ は独立なものみなす). 計算規則は以下のようなになる (この辺りの幾何的な意味づけは、例えば [O, §3] に書かれている):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial s_1} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right),$$

$$dt = ds_1 + \sqrt{-1} ds_2, \quad d\bar{t} = ds_1 - \sqrt{-1} ds_2, \quad dt \wedge d\bar{t} = -2\sqrt{-1} ds_1 \wedge ds_2.$$

問. Cauchy-Riemann の関係式が $\partial f / \partial \bar{t} = 0$ と同値であることを確認せよ.

- 上で 0-form の外微分を書いたが、それを用いて 1-form の外微分が $d_t(h_1 dt + h_2 d\bar{t}) = d_t h_1 \wedge dt + d_t h_2 \wedge d\bar{t}$ で定義される ($d_t : \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1, d_t : \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$ という線形写像が定まっている).
- 問. $dt \wedge dt = d\bar{t} \wedge d\bar{t} = 0$ と $d\bar{t} \wedge dt = -dt \wedge d\bar{t}$ を用いて、(関数) $\cdot dt \wedge d\bar{t}$ の形の 2-form に整理せよ.
- 問. $f \in \mathcal{E}^0, \varphi \in \mathcal{E}^1$ に対して、 $d_t(f\varphi) = d_t f \wedge \varphi + f d_t \varphi$ となることを確かめよ.
- 問. $f \in \mathcal{E}^0$ に対して、 $d_t(d_t f) = 0$ となることを確認せよ.

^{*9} ねじれ境界作用素については [M3, Section 1] を参照.

k 次チェイン Δ_j とその上に指定された $u(t)$ の分枝との組の有限和 $\gamma^u = \sum_{j \in J} \Delta_j^u$ をねじれ k 次チェインといい, それら全体を $\mathcal{C}_k^u(\mathbb{C}_x)$ で表す. $\partial_\omega(\gamma^u) = 0$ をみたすものをねじれ k 次サイクルという.

$\nabla_\omega \psi = 0$ をみたす $\mathbb{C}_x$ 上の C^∞ 級 k 次微分形式 ψ をねじれ閉 k 次微分形式という. $\mathbb{C}_x$ 上の C^∞ 級 k 次微分形式 ψ に対して, $\nabla_\omega \eta = \psi$ を満たす $\mathbb{C}_x$ 上の C^∞ 級 $(k-1)$ 次微分形式 η が存在するとき, ψ をねじれ完全 k 次微分形式という. $\nabla_\omega \circ \nabla_\omega = 0$ をみたすので^{*10}, ねじれ完全 k 次微分形式はねじれ閉 k 次微分形式である.

超幾何関数の積分表示に表れる $\varphi_0 = \frac{dt}{t-1}$ は, ねじれ閉 1 次微分形式である. 実のところ $dt \wedge dt = 0$ なので $\mathbb{C}_x$ 上の正則 1 次微分形式はねじれ閉^{*11}.

2 ねじれコホモロジー群

ねじれ Stokes 定理より, ねじれ閉 k 次微分形式 φ と $\mathbb{C}_x$ 内のねじれ k サイクル γ^u との pairing $\langle \varphi, \gamma^u \rangle$ に対して, φ に $\nabla_\omega \eta$ が加わっても pairing の値は変化しない, つまり

$$\langle \varphi + \nabla_\omega \eta, \gamma^u \rangle = \langle \varphi, \gamma^u \rangle + \langle \nabla_\omega \eta, \gamma^u \rangle = \langle \varphi, \gamma^u \rangle + \langle \eta, \partial_\omega(\gamma^u) \rangle = \langle \varphi, \gamma^u \rangle$$

となる, ここで η は $\mathbb{C}_x$ 上の C^∞ 級 $(k-1)$ -form とする.

$\nabla_\omega \circ \nabla_\omega = 0$ であったから, k 次ねじれ代数的コホモロジー群, k 次ねじれコホモロジー群, compact な台をもつ k 次ねじれコホモロジー群をそれぞれ

$$\begin{aligned} H^k(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}) / \nabla_\omega(\Omega^{k-1}), \\ H^k(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}) / \nabla_\omega(\mathcal{E}^{k-1}), \\ H^k(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \mathcal{E}_c^k \rightarrow \mathcal{E}_c^{k+1}) / \nabla_\omega(\mathcal{E}_c^{k-1}), \end{aligned}$$

で定義する, ここで Ω^k は $t=0, x, 1, \infty$ にのみ極を許す $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 k -forms^{*12} のなす線型空間, $\mathcal{E}^k$ と $\mathcal{E}_c^k$ はそれぞれ $\mathbb{C}_x$ 上の smooth k -forms と $\mathbb{C}_x$ 上の compact な台をもつ smooth k -forms^{*13} のなす線型空間とする. 線形空間の包含関係より, 以下の 2 つの

^{*10} 実際, $\omega = d_t \log(u(t, x))$ と $d_t \circ d_t = 0$ に注意すれば,

$\nabla_\omega(\nabla_\omega \psi) = d_t(d_t \psi + \omega \wedge \psi) + \omega \wedge (d_t \psi + \omega \wedge \psi) = d_t(\omega \wedge \psi) + \omega \wedge d_t \psi = (d_t \omega) \wedge \psi = 0$ となる.

^{*11} 正則 1 次微分形式とは, $f dt$ (f は $\mathbb{C}_x$ 上の正則関数) と書かれるもの.

^{*12} 有理型 0-form は有理型関数のことで, 有理型 1-form は $\mathbb{C}_x$ 上の正則 1-form $f dt$ で f が有理型関数となっているもの. $\mathbb{P}^1$ 上で考えると, 有理型 (meromorphic) 関数と有理 (rational) 関数は同じなので, 有理関数係数と考えても問題はない. 有理 (rational) 関数とは, (多項式)/(多項式) の形の関数のこと. 有理型 2-form は 0 のみ.

^{*13} 微分形式の台は, 係数の関数の台 (1-form の場合は 2 個の関数の台の共通部分) のこと. また, 「 C^∞ 級」と「smooth」は同義.

自然な写像が存在する:

$$H^k(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^k(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega), \quad H^k(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^k(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega).$$

Proposition 1. 3種のねじれコホモロジー群 $H^k(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$, $H^k(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$, $H^k(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ はみな同型.

Proposition 2. 1次ねじれコホモロジー群以外はすべて0となる. 1次ねじれコホモロジー群は $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))/(\mathbb{C} \cdot \omega)$ と同型になり, 2次元である. ここで $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ は $t = 0, x, 1, \infty$ にのみ高々1位の極^{*14}を許す $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 1-forms のなす線形空間, $\mathbb{C} \cdot \omega$ は ω で張られる $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ の1次元部分空間.

Outline of Proof. 線形微分方程式 $\nabla_\omega(f) = 0$ の局所解空間は複素1次元で, それは $1/u(t, x)$ で与えられる. この関数は $\mathbb{C}_x$ 上の1価関数に拡張できない. 従って, 0次ねじれコホモロジー群はすべて0.

$\mathbb{C}_x$ は複素1次元なので, 有理型 2-forms は0のみで, $H^2(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) = 0$. Dolbeault cohomology 群の消滅から $\bar{\partial}$ 方程式が解ける^{*15}. 任意の $\psi \in H^2(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$ に対して, $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} f(t, \bar{t}) d\bar{t} \wedge dt = \nabla_\omega(f(t, \bar{t}) dt) = \psi$ をみたく $f(t, \bar{t}) dt$ が存在するので, $H^2(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega) = 0$. $H^2(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega) = 0$ を示すには $f(t, \bar{t}) dt$ を $\nabla_\omega(F)$ で compact support を持つように変形^{*16}.

$H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$ と $H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ の同型を示すには, 自然な写像 $H^k(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^k(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$ の全射性を示せばよい^{*17}. $\psi = \psi_1 dt + \psi_2 d\bar{t} \in H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$ に対して, $\bar{\partial} f(t, \bar{t}) = \psi_2 d\bar{t}$ となる f をとり, $\psi' = \psi - \nabla_\omega(f)$ とすると, それは $\mathbb{C}_x$ 上の正則 1-form になる. $t = 0, x, 1, \infty$ での ψ' の Laurent 展開における高位(2位以上)の負べきを含む

^{*14} 有理型 1-form $f(t)dt$ の $t = 0, x, 1$ での極の位数は $f(t)$ の極の位数のこと. $t = \infty$ での極の位数は, $t = 1/\tau$ と変数変換して, $f(t)dt = -\frac{1}{\tau^2} f(\frac{1}{\tau}) d\tau$ と書いたときの係数 $-\frac{1}{\tau^2} f(\frac{1}{\tau})$ の $\tau = 0$ での極の位数.

^{*15} 関数 f に対して, $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} d\bar{t}$ と定める (1-form についても, 外微分 d_t の時と同様に定める). 複素1次元の場合は, 与えられた g に対して, 偏微分方程式 $\partial f / \partial \bar{t} = g$ の解 f が存在するということ. Dolbeault cohomology 群の消滅については, 文献 [BG, Theorem 3.2.1] を参照. 円環 $\{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\}$ 上で $\frac{d\bar{t}}{t}$ は, d_t -完全ではないが, $\bar{\partial} \log |t|^2 = \frac{d\bar{t}}{t}$ より, $\bar{\partial}$ -完全となることが基本的性質.

^{*16} 後述の Theorem 2 の証明 (の前半) を真似ればよい.

^{*17} 単射性は, 「 $\psi \in \Omega^1$ かつ $\psi = \nabla_\omega f$ ($f \in \mathcal{E}^0$) $\Rightarrow f \in \Omega^0$ 」によって示される. 実際, $\psi = \nabla_\omega f$ の $d\bar{t}$ の係数を比較することで $\partial f / \partial \bar{t} = 0$ がわかり, f は $\mathbb{C}_x$ 上1価正則となる. $\nabla_\omega(f) = 0$ の解が $1/u(t, x)$ の定数倍であることから, 微分方程式 $\nabla_\omega(f) = \psi$ の $t = 0, x, 1, \infty$ の周りにおける1価正則局所解は存在すれば一意. $t = 0, x, 1, \infty$ の周りで f の Laurent 展開を考える. ψ は高々極しか持たないので, Theorem 2 の証明 (の前半) と同様の計算により, f はそれらの点で高々極となり, f は有理関数.

項を $\nabla_\omega(f')$ を加えて消していくことができる^{*18}.

$\mathbb{P}^1$ 上の有理型 1-form に対して, (極の個数)−(零点の個数)=2 であり^{*19}, 各極の留数の和は 0. $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ は $dt/t, dt/(t-x), dt/(t-1)$ で張られる 3 次元の線形空間になる^{*20}. ねじれ完全微分形式 $\omega = \nabla_\omega(1)$ はこれらの 1 次結合であり, ω で張られる 1 次元部分空間 $\mathbb{C} \cdot \omega$ ^{*21} による $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ の商空間は 2 次元となる. $H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) (\simeq H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega))$ と $H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ との同型は後で解説. $\square$

3 ねじれコホモロジー群上の交点形式

compact な台をもつ 1 次コホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ と ∇_ω を $\nabla_{-\omega} = d - \omega \wedge$ に変えて得られる 1 次コホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_{-\omega}) (\simeq H^1(\Omega^\bullet, \nabla_{-\omega}))$ に交点形式を

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{C}_x} \varphi \wedge \psi \left(= \int_{\mathbb{C}_x} u \varphi \wedge \frac{\psi}{u} \right), \quad \varphi \in \mathcal{E}_c^1, \psi \in \mathcal{E}^1$$

で定める. $\mathcal{E}_c^1$ の元 φ は, 各 x_j の十分小さな近傍内では, 恒等的に零となっているので, この積分は広義積分とはならず必ず値が定まる. また, 代表元の取り方によらずコホモロジー類のみによって値が定まっていることは, 例えば以下のようにして示される: $\psi \in \ker(\nabla_{-\omega})$ であったことに注意すれば, $f \in \mathcal{E}_c^0$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\omega f, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{C}_x} (d_t f + f \omega) \wedge \psi = \int_{\mathbb{C}_x} (d_t(f \wedge \psi) - f d_t \psi + f \omega \wedge \psi) \\ &= \int_{\mathbb{C}_x} (d_t(f \wedge \psi) - f \nabla_{-\omega}(\psi)) = \int_{\mathbb{C}_x} d_t(f \wedge \psi) = 0 \end{aligned}$$

^{*18} 真性特異点がある場合でも, Theorem 2 の証明 (の前半) と同様の計算を用いて簡約化は可能である. 例えば, ψ'/dt の $t = 0$ における Laurent 展開の主要部を $\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k}$ とする. f'_k ($k \geq 2$) を $\nabla_\omega(f'_k) = [t^{-k} + (t \text{ の } (-1) \text{ 次以上の項})]dt$ をみたす $t^{1-k}, \dots, t^{-1}$ の 1 次結合とすると, $\nabla_\omega(\sum_{k=2}^{\infty} c_k f'_k)$ で真性特異点を消去できる. f'_k を求める際に ω の $t = 0$ の周りでしか有効でない Laurent 展開を利用するが, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k}$ は $t = 0$ 以外で有効であることから, $\sum_{k=2}^{\infty} c_k f'_k$ は, $\mathbb{P}^1 - \{0\}$ で有効 (負べきの級数なので, $t \rightarrow \infty$ の収束は明らか).

^{*19} 標準因子 $K_{\mathbb{P}^1}$ に対して, $\deg(K_{\mathbb{P}^1}) = -2$ ということ. $\mathbb{C}$ 上の正則 1-form $1 \cdot dt$ は $\mathbb{C}$ 上には零点がなく, 変数変換 $t = 1/\tau$ により $-\frac{d\tau}{\tau^2}$ となるので, $t = \infty$ を 2 位の極としている.

^{*20} $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ が 3 次元であるということは, その元は $\frac{(c_0 + c_1 t + c_2 t^2)dt}{t(t-x)(t-1)}$ ($c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$) の形であることからわかる.

^{*21} $\ker(\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x)) \rightarrow H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)) = \mathbb{C} \cdot \omega$ となることは, $\nabla_\omega(f(t)) \in \Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ となる $f(t)$ の条件を考えればすぐにわかる. 実際, $f(t)$ が有限のところに極を有すると, $\nabla_\omega(f(t))$ はその極での位数が 2 以上となり, $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ に属さない. ゆえに $f(t)$ は多項式となるが, $\nabla_\omega(t^k)$ の $t = \infty$ における極の位数は $k+1$ なので, それが $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ に属するには $k = 0$.

となることがわかる (最後の等号は $\text{supp}(f)$ が compact であることと Stokes 定理から従う).

自然な写像が定める同型 $\iota_\omega : H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ が $H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ と $H^1(\Omega^\bullet, \nabla_{-\omega})$ の間の交点形式を誘導する^{*22}:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \iota_\omega(\varphi), \psi \rangle, \quad \varphi \in H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega), \quad \psi \in H^1(\Omega^\bullet, \nabla_{-\omega}).$$

Theorem 2. 交点形式は非退化 であり,

$$\varphi_{ij} = d_t \log \frac{t - x_i}{t - x_j} = \frac{dt}{t - x_i} - \frac{dt}{t - x_j}, \quad (0 \leq i < j \leq 3)$$

に対して

$$\langle \varphi_{ij}, \varphi_{pq} \rangle = 2\pi\sqrt{-1} \times \begin{cases} \frac{\alpha_i + \alpha_j}{\alpha_i \alpha_j} & \text{if } \{i, j\} \cap \{p, q\} = \{i, j\}, \\ \frac{\varepsilon}{\alpha_k} & \text{if } \{i, j\} \cap \{p, q\} = \{k\}, \\ 0 & \text{if } \{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset. \end{cases}$$

ここで,

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & x_1 &= x, & x_2 &= 1, & x_3 &= \infty, \\ \alpha_0 &= b - c, & \alpha_1 &= -b, & \alpha_2 &= c - a, & \alpha_3 &= a \end{aligned}$$

であったことに注意. また,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{if } i = p \text{ or } j = q, \\ -1 & \text{if } i = q \text{ or } j = p, \end{cases} \quad \varphi_{i3} = d \log \frac{t - x_i}{t - \infty} = \frac{dt}{t - x_i}$$

としている.

Remark 1. これらの交点数は x によらず, パラメーター $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のみで決まっている. 特に, φ_{ij} たちの x を含まない係数による 1 次結合全体 $\sum_{i,j} \mathbb{C} \cdot \varphi_{ij} \subset \Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))/(\mathbb{C} \cdot \omega)$ に制限すると, $\langle, \rangle$ は x によらない.

Proof. ^{*23} 同型 $\iota_\omega : H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ を追跡する. φ_{ij} は x_i, x_j にのみ留数 $1, -1$ の 1 位極をもつ $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 1-form である. $\mathbb{C}_x$ 上の smooth 関数 f で $\varphi_{ij} - \nabla_\omega f$ が各 x_ℓ ($\ell = 0, 1, 2, 3$) の小さな近傍 U_ℓ で恒等的に 0 になるものを構成する.

^{*22} 素朴には $\int_{\mathbb{C}_x} f(t)dt \wedge g(t)dt$ と定義したいが, $f(t)g(t)$ の極の寄与と $dt \wedge dt = 0$ で $\infty \times 0$ 型の不定形になっている. これを回避するために ι_ω を利用する.

^{*23} この証明は [M1] で与えられたもの. [CM] では, スペクトル系列などを用いたホモロジー代数的手法で示されている.

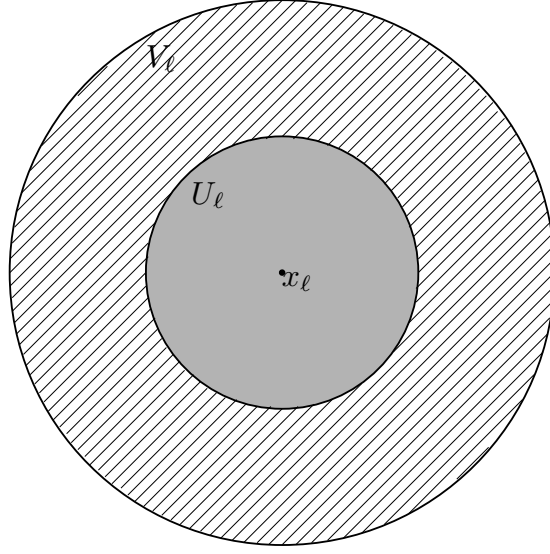


図1 x_ℓ の近傍 U_ℓ, V_ℓ .

U_ℓ 内で $f_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - x_\ell)^n$ において, 微分方程式 $\nabla_\omega f_\ell = \varphi_{ij}$ をみたす a_n を求めることができる^{*24}.

$$\omega = \left(\frac{\alpha_\ell}{t - x_\ell} + b_0 + b_1(t - x_\ell) + \cdots \right) dt$$

より, f_ℓ は x_ℓ が φ_{ij} の極でないときは $a_0 = 0$ で, $\ell = i, j$ ではそれぞれ $a_0 = \frac{1}{\alpha_i}, \frac{-1}{\alpha_j}$ となる収束べき級数になっている. その収束域を V_ℓ とし, 必要なら U_ℓ をさらに小さくして $U_\ell \subset V_\ell$ となるようにする (図1). V_ℓ の補集合 V_ℓ^c 上では恒等的に 0 となり, U_ℓ 上では恒等的に 1 となる $\mathbb{C}_x$ 上の smooth な関数を h_ℓ とする. 各 f_ℓ は V_ℓ 上でしか定義されないが,

$$f = \sum_{\ell=0}^3 h_\ell f_\ell$$

は $\mathbb{C}_x$ 上の関数とみなせ, $\varphi_{ij} - \nabla_\omega f$ は各 U_ℓ で恒等的に 0 となり $\mathcal{E}_c^1$ の元である. つまり, $\iota_\omega(\varphi_{ij})$ は $\varphi_{ij} - \nabla_\omega f \in \mathcal{E}_c^1$ で代表される. また, この元は $\cup_{\ell=0}^3 V_\ell$ の補集合上では

^{*24} $d_t f_\ell = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - x_\ell)^{n-1} dt$ などと計算すればよい. $\ell = 3$ ($x_\ell = \infty$) の時は, $t = 1/\tau$ で変数変換して $\tau = 0$ の周りで考える.

φ_{ij} と等しい.

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{ij}, \varphi_{pq} \rangle &= \int_{\mathbb{C}_x} (\varphi_{ij} - \nabla_\omega f) \wedge \varphi_{pq} \\
&= \sum_{\ell=0}^3 \int_{V_\ell} (\varphi_{ij} - \nabla_\omega f) \wedge \varphi_{pq} && ((\cup_{\ell=0}^3 V_\ell)^c \text{ で } (\dots) = \varphi_{ij} \text{ であり, } \varphi_{ij} \wedge \varphi_{pq} = 0) \\
&= \sum_{\ell=0}^3 \int_{V_\ell - U_\ell} (\varphi_{ij} - \nabla_\omega h_\ell f_\ell) \wedge \varphi_{pq} && (U_\ell \text{ で } (\dots) = 0 \text{ であり, } V_\ell \text{ で } f = h_\ell f_\ell) \\
&= - \sum_{\ell=0}^3 \int_{V_\ell - U_\ell} (\nabla_\omega h_\ell f_\ell) \wedge \varphi_{pq} && (\varphi_{ij} \wedge \varphi_{pq} = 0) \\
&= - \sum_{\ell=0}^3 \int_{V_\ell - U_\ell} d_t(f_\ell h_\ell) \wedge \varphi_{pq} && (\omega \wedge \varphi_{pq} = 0) \\
&= - \sum_{\ell=0}^3 \int_{\partial(V_\ell - U_\ell)} h_\ell f_\ell \varphi_{pq} && (d_t(h_\ell f_\ell \cdot \varphi_{pq}) = d_t(h_\ell f_\ell) \wedge \varphi_{pq} \text{ と Stokes 定理}) \\
&= \sum_{\ell=0}^3 \int_{\partial U_\ell} f_\ell \varphi_{pq} && (h_\ell|_{\partial V_\ell} \equiv 0, h_\ell|_{\partial U_\ell} \equiv 1) \\
&= 2\pi\sqrt{-1} \sum_{\ell=0}^3 \text{Res}_{t=x_\ell}(f_\ell \varphi_{pq}) && (\text{留数定理})
\end{aligned}$$

より定理が得られる. 2 次正方行列 $(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{0 \leq i, j \leq 1}$ ($\varphi_0 = \varphi_{23}$, $\varphi_1 = \varphi_{12}$) の行列式が 0 でないことから交点形式が非退化であることがわかる (演習問題 2, 4). $\square$

演習問題 1. 行列

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & -c \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c - a - b \end{pmatrix}$$

に対し, W_0 と W_1 の固有値と固有行ベクトルを求めよ.

演習問題 2. 行列

$$C = \begin{pmatrix} \frac{c}{a(c-a)} & \frac{-1}{c-a} \\ \frac{-1}{c-a} & \frac{c-a-b}{(c-a)(-b)} \end{pmatrix}$$

の行列式を計算し, $a, b, c - a, c - b \notin \mathbb{Z}$ ならば正則であることを示せ^{*25}.

^{*25} $\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0 \notin \mathbb{Z}$ と同じ条件.

演習問題 3. 上記の W_0, W_1, C に対して, 下記を示せ.

$$W_0 C - C {}^t W_0 = W_1 C - C {}^t W_1 = O.$$

演習問題 4. 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix}$ ($\varphi_0 = \varphi_{23}, \varphi_1 = \varphi_{12}$) が $2\pi\sqrt{-1}C$ であることを示せ.

4 Pfaffian 方程式と交点形式

超幾何級数 $F(a, b, c; x)$ の表示で現れる積分

$$\int_{\gamma} t^{b-c}(t-x)^{-b}(t-1)^{c-a} \frac{dt}{t-1} = \int_{\gamma} u(t, x) \varphi_0,$$

を x で微分する. γ^u がねじれサイクル^{*26}だと x について微分と t についての積分が交換できて,

$$d_x[u(t, x)\varphi] = dx \wedge \left[\left(\frac{d}{dx} u \right) \varphi + u \left(\frac{d}{dx} \varphi \right) \right] = u(t, x) [\omega_x + d_x \varphi]$$

となる^{*27}. ここで $\omega_x = d_x \log(u(t, x)) = \frac{b}{t-x} dx$ であった. 超幾何関数への x での微分を $\nabla_x = d_x + \omega_x \wedge = dx \wedge \left(\frac{b}{t-x} + \frac{d}{dx} \right)$ のねじれコホモロジー群 $H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ への作用とみなす^{*28}. また, φ_0 への ∇_x の作用は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b}{t-x} dx \wedge + d_x \right) \frac{dt}{t-1} \\ &= \frac{dx \wedge (bdt)}{(t-x)(t-1)} = \frac{bdx}{x-1} \wedge \left(\frac{dt}{t-x} - \frac{dt}{t-1} \right) = \frac{bdx}{x-1} \wedge \varphi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

である. Introduction の記号との関係は, 未知のベクトル値関数 $\mathbf{f}$ を $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$ (の積分) に

対応するものに変換する行列が $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{x-1}{b} \end{pmatrix}$ であり, φ_0, φ_1 に関する交点行列^{*29}が $2\pi\sqrt{-1}C$ になっている (演習問題 4).

^{*26} 開区間 $(1, \infty)$ と u の分枝の組はねじれ 1 次チェインではないが, [M3, Section 1] のように, pairing (積分) の値が同じになるねじれサイクル γ_0^u が構成できる.

^{*27} x の関数としては (1 価とは限らない) 正則関数しか扱わないので, $d\bar{x}$ などは考慮しない.

^{*28} ∇_x の作用としての見方 (ベクトル束の接続) は Section 5 で述べられている.

^{*29} $2\pi\sqrt{-1}$ を外した C を交点行列と呼ぶ場合もある.

以下、積分表示から Pfaffian 方程式を導出する。それは線型変換

$$\left(\frac{b}{t-x} + \frac{d}{dx} \right) : H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$$

を決定することに帰着される。もちろん超幾何微分方程式から

$$\frac{\nabla_x}{dx} = \frac{b}{t-x} + \frac{d}{dx} : \begin{array}{l} \varphi_0 \mapsto \frac{b}{x-1} \varphi_1 \\ \varphi_1 \mapsto \frac{-a}{x} \varphi_0 + \left(\frac{-c}{x} + \frac{c-a-b}{x-1} \right) \varphi_1 \end{array}$$

であることはわかるが、超幾何微分方程式の知識を仮定せずに、 ∇_x の定義に従い計算する。

まず、この作用素の $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ の元 $\varphi_{ij} = \frac{dt}{t-x_i} - \frac{dt}{t-x_j}$ ($0 \leq i < j \leq 3$) ($x_0 = 0, x_1 = x, x_2 = 1, x_3 = \infty$) への作用を調べる。

Lemma 1.

$$\frac{\nabla_x}{dx} \varphi_{23} = \frac{-\alpha_1}{x-1} \varphi_{12}, \quad \frac{\nabla_x}{dx} \varphi_{03} = \frac{\alpha_1}{x} \varphi_{01}.$$

Proof. 第 1 式は $\varphi_{23} = \varphi_0, \varphi_{12} = \varphi_1, b = -\alpha_1$ よりすでに (3) で計算している。第 2 式は

$$\frac{\nabla_x}{dx} \varphi_{03} = \frac{-\alpha_1}{t-x} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{\alpha_1}{x} \left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t-x} \right) = \frac{\alpha_1}{x} \varphi_{01}$$

として得られる。どちらの式でも $\frac{d}{dx}$ で forms が消えるので、計算は簡単。 $\square$

$\varphi_{23}, \varphi_{03}, \varphi_{12}, \varphi_{01}$ を φ_0, φ_1 の 1 次結合で表示すれば $\frac{\nabla_\omega}{dx}$ の表現行列が得られる^{*30}。ここでは、その計算をせずに表現行列を求める。

交点形式の非退化性と Remark 1 から、 $\sum_{i,j} \mathbb{C} \cdot \varphi_{ij}$ の元は φ_0, φ_1 の x を含まない係数による 1 次結合で表示できることがわかり、Lemma 1 より、表現行列は x を含まない 2×2 行列 W_0, W_1 を用いて

$$\frac{W_0}{x} + \frac{W_1}{x-1}$$

表されることがわかる。 W_0, W_1 の固有空間を調べて、表現行列を求める。

$H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ の元とみなすと φ_{13} を $\varphi_{23}, \varphi_{03}$ で表示できる：

$$\omega = \nabla_\omega(1) = \alpha_0 \frac{dt}{t-x_0} + \alpha_1 \frac{dt}{t-x_1} + \alpha_2 \frac{dt}{t-x_2} = 0$$

^{*30} 例えば、[AoKi, §3.8] ではその方針で導出している。これから行う計算は [M2] の方針。

が $H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ で成り立っているので,

$$\varphi_{13} = \frac{dt}{t-x_1} = \frac{-\alpha_0}{\alpha_1} \frac{dt}{t-x_0} + \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \frac{dt}{t-x_2} = \frac{-\alpha_0}{\alpha_1} \varphi_{03} + \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \varphi_{23}.$$

Lemma 1 より,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_x}{dx} \varphi_{13} &= -\frac{\alpha_0}{x} \varphi_{01} + \frac{\alpha_2}{x-1} \varphi_{12}, \\ \frac{\nabla_x}{dx} \varphi_{12} &= \frac{\nabla_x}{dx} (\varphi_{13} - \varphi_{23}) = -\frac{\alpha_0}{x} \varphi_{01} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{x-1} \varphi_{12}, \\ \frac{\nabla_x}{dx} \varphi_{01} &= \frac{\nabla_x}{dx} (\varphi_{03} - \varphi_{13}) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{x} \varphi_{01} - \frac{\alpha_2}{x-1} \varphi_{12} \end{aligned}$$

を得る.

Lemma 2. W_0 の固有値は 0 と $\alpha_0 + \alpha_1 = -c$ で, 固有値 0, $\alpha_0 + \alpha_1$ の固有ベクトルはそれぞれ $\varphi_0 = \varphi_{23}$, φ_{01} に対応している. W_1 の固有値は 0 と $\alpha_1 + \alpha_2 = c - a - b$ で, 固有値 0, $\alpha_1 + \alpha_2$ の固有ベクトルはそれぞれ φ_{03} , $\varphi_1 = \varphi_{12}$ に対応している.

Proof. W_0 に対応する線型変換は $\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\nabla_x}{dx}$ であり,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\nabla_x}{dx} (\varphi_{23}) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{-\alpha_1}{x-1} \varphi_{12} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\nabla_x}{dx} (\varphi_{01}) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{x} \varphi_{01} - \frac{\alpha_2}{x-1} \varphi_{12} \right) = (\alpha_0 + \alpha_1) \varphi_{01} \end{aligned}$$

となる. W_1 に対応する線型変換は $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{\nabla_x}{dx}$ であり,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{\nabla_x}{dx} (\varphi_{03}) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{\alpha_1}{x} \varphi_{01} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{\nabla_x}{dx} (\varphi_{12}) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(-\frac{\alpha_0}{x} \varphi_{01} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{x-1} \varphi_{12} \right) = (\alpha_1 + \alpha_2) \varphi_{12} \end{aligned}$$

となる. □

Remark 2. 0 でない固有値の固有ベクトルに対応する 1-form は vanishing form とみなすことができる. 例えば, W_0 の固有値 $\alpha_0 + \alpha_1$ の固有ベクトルに対応する $\varphi_{01} = \frac{dt}{t} - \frac{dt}{t-x}$ は $x \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する. 同様に, $x \rightarrow 1$ で $\varphi_{12} \rightarrow 0$ となっている.

φ_{ij} たちの (x を含まない) 線型結合 $\varphi, \varphi' \in \sum_{i,j} \mathbb{C} \cdot \varphi_{ij}$ に対しては, 交点形式 $\langle \varphi, \varphi' \rangle$ に変数 x が含まれていないので (Remark 1),

$$d_x \langle \varphi, \varphi' \rangle = 0$$

となる. 一方, φ を compact な support をもつ 1-form に変形して計算することで,

$$\begin{aligned} d_x \langle \varphi, \varphi' \rangle &= d_x \int_{\mathbb{C}_x} u \varphi \wedge \frac{\varphi'}{u} = \int_{\mathbb{C}_x} d_x [u \varphi] \wedge \frac{\varphi'}{u} + \int_{\mathbb{C}_x} u \varphi \wedge d_x \left[\frac{\varphi'}{u} \right] \\ &= \int_{\mathbb{C}_x} \nabla_x(\varphi) \wedge \varphi' + \int_{\mathbb{C}_x} \varphi \wedge \nabla_x^\vee(\varphi') \end{aligned}$$

となることから

$$d_x \langle \varphi, \varphi' \rangle = \langle \nabla_x(\varphi), \varphi' \rangle + \langle \varphi, \nabla_x^\vee(\varphi') \rangle \quad (4)$$

をみtas. ここで, $\nabla_x^\vee = d_x - \omega_x \wedge$ に関する表現行列 $W_0^\vee \frac{dx}{x} + W_1^\vee \frac{dx}{x-1}$ は W のパラメーターの符号をかえたものである (実は $W_i^\vee = -W_i$). φ, φ' に φ_0, φ_1 を代入し, 行列にまとめることで

$$\left(\frac{W_0}{x} + \frac{W_1}{x-1} \right) C + C^t \left(\frac{W_0^\vee}{x} + \frac{W_1^\vee}{x-1} \right) = O$$

を得る. $1/x, 1/(x-1)$ の係数を比較して, 以下を得る.

$$W_i C = -C^t W_i^\vee \quad (i = 0, 1). \quad (5)$$

Lemma 3. W_i の固有値 α, β に対する (行^{*31}) 固有ベクトル v, w に対し,

$$\alpha + \beta^\vee \neq 0 \implies v C^t w^\vee = 0.$$

ここで, $\beta^\vee, w^\vee$ は β, w のパラメーターの符号をかえたもの.

Proof. (5) 式から,

$$\alpha v C^t w^\vee = v W_i C^t w^\vee = -v C^t W_i^\vee w^\vee = -v C^t (w W_i)^\vee = -\beta^\vee v C^t w^\vee,$$

すなわち $(\alpha + \beta^\vee) v C^t w^\vee = 0$ となるので, $\alpha + \beta^\vee \neq 0$ より $v C^t w^\vee = 0$ である. $\square$

Proposition 3. $(\alpha_0 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$ のとき, ∇_x の基底 φ_0, φ_1 に関する表現行列 $W_0 \frac{dx}{x} + W_1 \frac{dx}{x-1}$ の W_0, W_1 は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} W_0 &= (\alpha_0 + \alpha_1) [\text{Id}_2 - C^t e_1 (e_1 C^t e_1)^{-1} e_1], \\ W_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2) C^t e_2 (e_2 C^t e_2)^{-1} e_2, \end{aligned}$$

ここで, Id_2 は 2 次単位行列で, $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.

^{*31} (線形代数の講義と違って) 基底を縦に並べて表現行列を作っているため, 行固有ベクトルを考えるのが自然.

Proof. W_0 の固有値 0 の固有ベクトルは $e_1 = (1, 0)$ で φ_0 と対応している. W_0 の固有値 $\alpha_0 + \alpha_1$ の固有ベクトル v は $vC^t e_1 = 0$ で定まる^{*32} ($e_1^\vee = e_1$ に注意).

$$\begin{aligned} e_1(\alpha_0 + \alpha_1)[\text{Id}_2 - C^t e_1(e_1 C^t e_1)^{-1} e_1] &= (\alpha_0 + \alpha_1)(e_1 - e_1) = 0, \\ v(\alpha_0 + \alpha_1)[\text{Id}_2 - C^t e_1(e_1 C^t e_1)^{-1} e_1] &= (\alpha_0 + \alpha_1)v \end{aligned}$$

より, この線型変換は W_0 と一致する.

W_1 の固有値 $\alpha_1 + \alpha_2$ の固有ベクトルは $e_2 = (0, 1)$ で φ_1 と対応している. W_1 の固有値 0 の固有ベクトル v は $vC^t e_2 = 0$ で定まる.

$$\begin{aligned} e_2[(\alpha_1 + \alpha_2)C^t e_2(e_2 C^t e_2)^{-1} e_2] &= (\alpha_1 + \alpha_2)e_2, \\ v[(\alpha_1 + \alpha_2)C^t e_2(e_2 C^t e_2)^{-1} e_2] &= 0 \end{aligned}$$

より, この線型変換は W_1 と一致する. □

交点形式 $\langle, \rangle$ を用いて ∇_x を基底をとらずに表示することができる.

Theorem 3. $\varphi \in \sum_{i,j} \mathbb{C} \cdot \varphi_{ij}$ に対して,

$$\nabla_x \varphi = (\alpha_0 + \alpha_1) \left(\varphi - \frac{\langle \varphi, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \varphi_0 \right) \frac{dx}{x} + (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\langle \varphi, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \varphi_1 \right) \frac{dx}{x-1},$$

0 でない固有値に対応する固有ベクトルだけで表示すると

$$\begin{aligned} \nabla_x \varphi &= (\alpha_0 + \alpha_1) \frac{\langle \varphi, \varphi_{01} \rangle \varphi_{01}}{\langle \varphi_{01}, \varphi_{01} \rangle} \frac{dx}{x} + (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\langle \varphi, \varphi_{12} \rangle \varphi_{12}}{\langle \varphi_{12}, \varphi_{12} \rangle} \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{\alpha_0 \alpha_1}{2\pi\sqrt{-1}} \langle \varphi, \varphi_{01} \rangle \varphi_{01} \frac{dx}{x} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2\pi\sqrt{-1}} \langle \varphi, \varphi_{12} \rangle \varphi_{12} \frac{dx}{x-1}. \end{aligned}$$

Proof. φ_0 が W_0 の固有値 0 の固有ベクトルと対応し, φ_1 が W_1 の固有値 $\alpha_1 + \alpha_2$ の固有ベクトルと対応すること, 固有値の異なる固有空間が交点形式に関して直交していること^{*33}からこの表示が得られる. 第 2 の表示では φ_{01} が W_0 の固有値 $\alpha_0 + \alpha_1$ の固有ベクトルと対応し,

$$\langle \varphi_{01}, \varphi_{01} \rangle = 2\pi\sqrt{-1} \cdot \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 \alpha_1}, \quad \langle \varphi_{12}, \varphi_{12} \rangle = 2\pi\sqrt{-1} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2},$$

となることから得られる. この表示は $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ でも $\alpha_0 + \alpha_1 = 0$ でも有効. □

^{*32} Lemma 3 および固有空間が 1 次元であることから従う.

^{*33} φ と ψ がそれぞれ行ベクトル v, w に対応しているとする (すなわち, $v = (v_0, v_1)$ とすると, $\varphi = v_0 \varphi_0 + v_1 \varphi_1$). このとき, 交点形式は $\langle \varphi, \psi \rangle = 2\pi\sqrt{-1} v C^t w^\vee$ と計算できる.

演習問題 5. φ_{01} と $\varphi_0 = \varphi_{23}$, $\varphi_1 = \varphi_{12}$ との交点数を計算し, φ_{01} を φ_0 と φ_1 の 1 次結合で表示せよ.

演習問題 6. 行列 W_0 を交点行列 C と固有値 $\alpha_0 + \alpha_1$ の固有ベクトルを用いて表示せよ^{*34}.

演習問題 7. φ_{03} と $\varphi_0 = \varphi_{23}$, $\varphi_1 = \varphi_{12}$ との交点数を計算し, φ_{03} を φ_0 と φ_1 の 1 次結合で表示せよ.

演習問題 8. 行列 W_1 を交点行列 C と固有値 0 の固有ベクトルを用いて表示せよ.

演習問題 9. 交点行列 C に対して, 2 次正方行列 M が $C {}^t M^\vee = -MC$ をみたすとする. M の固有値 α の固有行ベクトル v が $vC {}^t v^\vee \neq 0$ をみたすならば, $\alpha^\vee = -\alpha$ を示せ.

5 2 変数超幾何関数 Appell's F_1

Appell's F_1 は $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \max(|x_1|, |x_2|) < 1\}$ で広義一様絶対収束する級数

$$F_1(a, b_1, b_2, c; x) = \sum_{n=(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} \frac{(a, n_1 + n_2)(b_1, n_1)(b_2, n_2)}{(c, n_1 + n_2)(1, n_1)(1, n_2)} x_1^{n_1} x_2^{n_2}$$

で定義される, ここで $c \neq 0, -1, -2, \dots$.

$F_1(a, b_1, b_2, c; x)$ は, 以下の微分作用素を施すと 0 になる:

$$\begin{aligned} & x_1(1-x_1)\partial_1^2 + x_2(1-x_1)\partial_1\partial_2 + [c - (a+b_1+1)x_1]\partial_1 - b_1x_2\partial_2 - ab_1, \\ & x_2(1-x_2)\partial_2^2 + x_1(1-x_2)\partial_1\partial_2 + [c - (a+b_2+1)x_2]\partial_2 - b_2x_1\partial_1 - ab_2, \\ & (x_1-x_2)\partial_1\partial_2 - b_2\partial_1 + b_1\partial_2. \end{aligned}$$

ここで $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2$). これらの微分作用素で生成される微分方程式系 $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ を超幾何微分方程式系 Appell's $\mathcal{F}_1$ という.

Fact 1 ([H, §2.1], [Y1, §7.3]). $S = \{x \in \mathbb{C}^2 \mid x_1x_2(x_1-1)(x_2-1)(x_1-x_2) = 0\}$ とする. $X = \mathbb{C}^2 - S$ の任意の点 x の X 内の近傍 U_x における $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ の 1 価正則関数解全体のなす線型空間 $Sol(U_x)$ は 3 次元である.

^{*34} Proposition 3 の W_1 のような形で表示.

$F_1(a, b_1, b_2, c; x)$ には積分表示

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_1^\infty t^{b_1+b_2-c} (t-x_1)^{-b_1} (t-x_2)^{-b_2} (t-1)^{c-a} \frac{dt}{t-1}$$

$$(\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0)$$

がある^{*35}. 変数 $x_0 = 0, x_3 = 1, x_4 = \infty$ を導入し, $t = x_i$ での exponent としてパラメーター α_i ($i = 0, \dots, 4$) を以下のように導入する:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & x_1, & & x_2, & & x_3 &= 1, & x_4 &= \infty; \\ \alpha_0 &= b_1 + b_2 - c, & \alpha_1 &= -b_1, & \alpha_2 &= -b_2, & \alpha_3 &= c - a, & \alpha_4 &= a. \end{aligned}$$

ここでも $\alpha_i \notin \mathbb{Z}$ ($i = 0, \dots, 4$) および $x = (x_1, x_2) \in X$ を仮定して議論を進める. また,

$$u(t, x) = \prod_{i=0}^3 (t - x_i)^{\alpha_i} = t^{b_1+b_2-c} (t - x_1)^{-b_1} (t - x_2)^{-b_2} (t - 1)^{c-a}$$

とおく. この $u(t, x)$ に対して, logarithmic 1-forms ω と ω_x を下記で定める:

$$\begin{aligned} \omega &= d_t \log(u(t, x)) = \sum_{i=0}^3 \frac{\alpha_i dt}{t - x_i}, \\ \omega_x &= d_x \log(u(t, x)) = -\frac{\alpha_1 dx_1}{t - x_1} - \frac{\alpha_2 dx_2}{t - x_2}. \end{aligned}$$

$\nabla_{\pm\omega} = d_t \pm \omega \wedge$ によって, ねじれコホモロジー群 $H^k(\Omega^\bullet, \nabla_{\pm\omega}), H^k(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_{\pm\omega}), H^k(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_{\pm\omega})$ が定義される. ここで Ω^k は $t = 0, x_1, x_2, 1, \infty$ にのみ極を許す $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 k -forms のなす線形空間, $\mathcal{E}^k$ と $\mathcal{E}_c^k$ は $\mathbb{C}_x = \mathbb{C} - \{0, x_1, x_2, 1\} = \mathbb{P}^1 - \{0, x_1, x_2, 1, \infty\}$ 上の smooth k -forms と $\mathbb{C}_x$ 上の compact な台をもつ smooth k -forms のなす線形空間. Section 2 と同様の議論で次が得られる.

Proposition 4. 1 次ねじれコホモロジー群以外はすべて 0 となる. 1 次ねじれコホモロジー群は $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))/(\mathbb{C} \cdot \omega)$ と同型になり, 3 次元である. ここで, $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ は $t = 0, x_1, x_2, 1, \infty$ にのみ高々 1 位の極を許す $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 1-forms のなす線形空間, $\mathbb{C} \cdot \omega$ は ω で張られる $\Omega^1(\log(\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}_x))$ の 1 次元部分空間.

$H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ と $H^1(\Omega^\bullet, \nabla_{-\omega})$ の間に交点形式が[‡]

$$\int_{\mathbb{C}_x} \iota_\omega(\varphi) \wedge \psi$$

で定義される. ここで, $\iota_\omega : H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ は自然な同型.

^{*35} Gauss の時と同様, よく知られている積分表示に変数変換 $t \mapsto 1/t$ を施して得られる.

Theorem 4. $\varphi_{ij} = d_t \log\left(\frac{t-x_i}{t-x_j}\right) = \frac{dt}{t-x_i} - \frac{dt}{t-x_j}$ ($0 \leq i < j \leq 4$) に対して, 交点数 $\langle \varphi_{ij}, \varphi_{pq} \rangle$ は Theorem 2 内の公式で計算できる.

$\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ の Pfaffian 方程式を求めることは, ベクトル束の接続

$$\nabla_x = d_x + \omega_x \wedge : \Omega^0(X) \otimes \bigcup_{x \in X} H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow \Omega^1(X) \otimes \bigcup_{x \in X} H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$$

($\Omega^k(X)$ は $X = \mathbb{C}^2 - S$ 上の正則 k -forms の空間) の表示を与えること, より具体的に

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_{x_1}}{dx_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{-\alpha_1}{t-x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{b_1}{t-x_1} : H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega), \\ \frac{\nabla_{x_2}}{dx_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{-\alpha_2}{t-x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{b_2}{t-x_2} : H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \rightarrow H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega) \end{aligned}$$

を決定することに帰着される.

Lemma 4. $i = 1, 2$ と $0 \leq j \leq 4, j \neq i$ に対して,

$$\frac{\nabla_{x_i}}{dx_i}(\varphi_{j4}) = \frac{-\alpha_i}{x_i - x_j} \varphi_{ij}$$

となる. ここで, $j < i$ のとき $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$ であることに注意.

Proof. $j \neq i$ より, $\varphi_{j4} = \frac{dt}{t-x_j}$ は変数 x_i によらないので,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{-\alpha_i}{t-x_i} \right) \varphi_{j4} = \frac{-\alpha_i}{t-x_i} \cdot \frac{dt}{t-x_j} = \frac{-\alpha_i}{x_i - x_j} \left(\frac{dt}{t-x_i} - \frac{dt}{t-x_j} \right) = \frac{-\alpha_i}{x_i - x_j} \varphi_{ij}$$

となり, Lemma を得る. $\square$

$\varphi_0 = \varphi_{34}, \varphi_1 = \varphi_{13}, \varphi_2 = \varphi_{23}$ とする. $F_1(a, b_1, b_2, c; x)$ と φ_0 が対応しているので, Lemma 4 より, その x_1, x_2 偏微分がそれぞれ $\frac{-\alpha_1}{x_1-1} \varphi_1, \frac{-\alpha_2}{x_2-1} \varphi_2$ と対応することがわかる.

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ をベクトル束の frame とするとき^{*36}, その frame に対する接続行列 W は Section 4 と同様に x_1, x_2 を含まない 3×3 行列 W_{ij} を用いて

$$W = \sum_{0 \leq j \leq 3}^{j \neq 1} W_{1j} \frac{dx_1}{x_1 - x_j} + \sum_{0 \leq j \leq 3}^{j \neq 2} W_{2j} \frac{dx_2}{x_2 - x_j} \quad (6)$$

と表示できる ($x_0 = 0, x_3 = 1$).

^{*36} frame になっていることは, 後述の Proposition 6 と $\det C \neq 0$ から保証される.

Proposition 5. W_{ij} の固有値は $\alpha_i + \alpha_j$ と 0 である. $\alpha_i + \alpha_j$ の固有ベクトルは φ_{ij} と対応し, 0 の固有空間は φ_{k4} ($0 \leq k \leq 3, k \neq i, j$) で張られる 2次元空間と対応する. 異なる固有値の固有空間は, 交点形式に関して直交する.

Proof. W_{10} について調べる. Lemma 4 より, $k = 2, 3$ に対して

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} x_1 \left(\frac{\nabla_{x_1}}{dx_1}(\varphi_{k4}) \right) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} x_1 \frac{-\alpha_1}{x_1 - x_k} \varphi_{1k} = 0$$

となるので, W_{10} の固有値 0 の固有ベクトルは, φ_{24} と φ_{34} が対応する.

$\alpha_0 + \alpha_1$ の固有ベクトルを調べる. $\nabla_\omega(1) = \omega$ が $H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ の元としては 0 なので, $\varphi_{14} = \frac{-1}{\alpha_1}(\alpha_0\varphi_{04} + \alpha_2\varphi_{24} + \alpha_3\varphi_{34})$ であることに注意する. Lemma 4 より,

$$\frac{\nabla_{x_1}}{dx_1}\varphi_{01} = \frac{\nabla_{x_1}}{dx_1}(\varphi_{04} - \varphi_{14}) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{x_1}\varphi_{01} - \frac{\alpha_2}{x_1 - x_2}\varphi_{12} - \frac{\alpha_3}{x_1 - x_3}\varphi_{13}$$

となる. $\lim_{x_1 \rightarrow 0} x_1 \frac{\nabla_{x_1}}{dx_1}\varphi_{01} = (\alpha_0 + \alpha_1)\varphi_{01}$ より, φ_{01} が W_{10} の固有値 $\alpha_0 + \alpha_1$ の固有ベクトルと対応している. 固有空間の直交性については, Theorem 4 より $\langle \varphi_{24}, \varphi_{01} \rangle = \langle \varphi_{34}, \varphi_{01} \rangle = 0$ となることから従う^{*37}. 他の W_{ij} については演習 (演習問題 10). $\square$

Remark 3. Remark 2 と同様に, W_{ij} の 0 でない固有値の固有ベクトルに対応する 1-form は $x_i - x_j \rightarrow 0$ のときの vanishing form とみなすことができる.

Proposition 6. $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ に関する交点行列は, $2\pi\sqrt{-1}C$ である. ここで,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_3\alpha_4} & \frac{-1}{\alpha_3} & \frac{-1}{\alpha_3} \\ \frac{-1}{\alpha_3} & \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1\alpha_3} & \frac{1}{\alpha_3} \\ \frac{-1}{\alpha_3} & \frac{1}{\alpha_3} & \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2\alpha_3} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Proof. Theorem 4 により, Theorem 2 の公式で計算できる. 具体的な計算は演習問題とする (演習問題 11). $\square$

Proposition 7. 3 次行ベクトル v_{ij} を $\varphi_{ij} = v_{ij}^t(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ で定めると,

$$W_{ij} = (\alpha_i + \alpha_j)C^t v_{ij}(v_{ij}C^t v_{ij})^{-1}v_{ij} = \frac{\alpha_i\alpha_j}{2\pi\sqrt{-1}}C^t v_{ij}v_{ij}$$

^{*37} あるいは, $\varphi, \varphi' \in \sum_{i,j} \mathbb{C} \cdot \varphi_{ij}$ に対して, $0 = d_x \langle \varphi, \varphi' \rangle = \langle \frac{\nabla_{x_1}}{dx_1} \varphi, \varphi' \rangle + \langle \varphi, \frac{\nabla_{x_1}^\vee}{dx_1} \varphi' \rangle$ となることと, Lemma 3 と同様の議論を使う.

である*38.

Proof. 上記の右辺を W'_{ij} とすると, $v_{ij}W'_{ij} = (\alpha_i + \alpha_j)v_{ij}$ であり, また, $v'C^t v_{ij} = 0$ なる v' に対して*39, $v'W'_{ij} = 0$ をみたす. ゆえに $W'_{ij} = W_{ij}$ である. $\square$

v_{ij} および W_{ij} は以下のようになる:

$$\begin{aligned} v_{01} &= \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_0}, \frac{-\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0}, -\frac{\alpha_2}{\alpha_0} \right), & v_{12} &= (0, 1, -1), & v_{13} &= (0, 1, 0), \\ v_{02} &= \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_0}, -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{-\alpha_0 - \alpha_2}{\alpha_0} \right), & v_{23} &= (0, 0, 1); \\ W_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & b_2 - c & -b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & W_{20} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & -b_1 & b_1 - c \end{pmatrix}, \\ W_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c - a - b_1 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}, & W_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & c - a - b_2 \end{pmatrix}, \\ W_{12} &= W_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_2 \\ 0 & b_1 & -b_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

具体的な計算は演習問題とする (演習問題 12, 13).

結局, ベクトル値関数*40

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= {}^t \left(\int_1^\infty u(t, x) \varphi_0, \int_1^\infty u(t, x) \varphi_1, \int_1^\infty u(t, x) \varphi_2 \right) \\ &= {}^t \left(F_1(a, b_1, b_2, c; x), \frac{x_1 - 1}{b_1} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(a, b_1, b_2, c; x), \frac{x_2 - 1}{b_2} \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(a, b_1, b_2, c; x) \right) \end{aligned}$$

についての Pfaffian 方程式 $d_x \mathbf{f} = W \mathbf{f}$ の接続行列 W は, 前記の W_{ij} を用いて

$$\begin{aligned} W &= W_{10} \frac{dx_1}{x_1} + W_{12} \frac{dx_1}{x_1 - x_2} + W_{13} \frac{dx_1}{x_1 - 1} + W_{20} \frac{dx_2}{x_2} + W_{21} \frac{dx_2}{x_2 - x_1} + W_{23} \frac{dx_2}{x_2 - 1} \\ &= W_{10} \frac{dx_1}{x_1} + W_{13} \frac{dx_1}{x_1 - 1} + W_{20} \frac{dx_2}{x_2} + W_{23} \frac{dx_2}{x_2 - 1} + W_{12} \frac{dx_1 - dx_2}{x_1 - x_2} \\ &= W_{10} d_x \log x_1 + W_{13} d_x \log(x_1 - 1) \\ &\quad + W_{20} d_x \log x_2 + W_{23} d_x \log(x_2 - 1) + W_{12} d_x \log(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

*38 交点形式の立場からは ${}^t v_{ij}$ の部分はいずれも ${}^t v_{ij}^\vee$ とすべきであるが, 後述の表示から v_{ij} は ${}^\vee$ の作用 ($\alpha_i \mapsto -\alpha_i$) で不変なことがわかるので, ${}^\vee$ が省略されている.

*39 v' に対応する 1-form を φ' としたとき, $\langle \varphi', \varphi_{ij} \rangle = 0$ に対応している.

*40 $(1, \infty)$ の積分としているが, 正確にはねじれサイクルを用いる (作り方は Gauss の場合と同じ).

と表示できる^{*41}.

Theorem 3 と同様にして, ∇_x の基底によらない表示が得られる.

Theorem 5. $\varphi \in \sum_{i,j} \mathbb{C} \cdot \varphi_{ij}$ に対して,

$$\nabla_x(\varphi) = \sum_{0 \leq i \leq 3} \frac{\alpha_1 \alpha_i}{2\pi\sqrt{-1}} \langle \varphi, \varphi_{1i} \rangle \varphi_{1i} \frac{dx_1}{x_1 - x_i} + \sum_{0 \leq j \leq 3} \frac{\alpha_2 \alpha_j}{2\pi\sqrt{-1}} \langle \varphi, \varphi_{2j} \rangle \varphi_{2j} \frac{dx_2}{x_2 - x_j}.$$

演習問題 10. (6) 内の W_{ij} の固有値と固有ベクトルを求めて, Proposition 5 の証明を完成させよ.

演習問題 11. $\varphi_0 = \varphi_{34}$, $\varphi_1 = \varphi_{13}$, $\varphi_2 = \varphi_{23}$ に関する交点行列が $2\pi\sqrt{-1}C$ であることを示せ. ここで, C は (7) で定義された行列.

演習問題 12. $\varphi_{01}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{02}, \varphi_{23}$ を $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ の 1 次結合で表せ.

演習問題 13. $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ の $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ を基底とする Pfaffian 方程式の具体形を求めよ.

演習問題 14. (6) 内の W_{ij} と (7) 内の C は $W_{ij}C + C {}^tW_{ij}^\vee = O$ をみたすことを示せ. ここで, $W_{ij}^\vee$ は W_{ij} のパラメーターの符号を変えたもの.

演習問題 15. m 変数超幾何微分方程式系 $\mathcal{F}_D(a, b_1, \dots, b_m, c)$ の Pfaffian 方程式を求めよ.

研究問題 1. 合流型超幾何微分方程式系 の Pfaffian 方程式と交点形式との関係を解明せよ.

References

- [ApKa] Appell P. and Kampé de Fériet M. J., *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques: polynômes d'Hermite*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [AoKi] Aomoto K. and Kita M., translated by Iohara K., *Theory of Hypergeometric Functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, Tokyo, 2011.

^{*42}

^{*41} 2 個目の等号は, $W_{12} = W_{21}$ を用いて, $W_{12} \frac{dx_1}{x_1 - x_2}$ と $W_{21} \frac{dx_2}{x_2 - x_1}$ をまとめて $W_{12} \frac{dx_1 - dx_2}{x_1 - x_2}$ とした.

^{*42} 日本語版は「青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994」

- [BG] Berenstein C.A. and Gay R., *Complex Variables: An Introduction*, (Graduate Texts in Mathematics), Springer Verlag, New York, 1997.
- [CFH] Chern S.S., 藤木明, 本多宣博 訳, *Complex Manifolds without Potential Theory* - 複素多様体講義, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.
- [CM] Cho K. and Matsumoto K., Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations I, *Nagoya Math. J.*, **139** (1995), 67–86.
- [H] 原岡喜重, 超幾何関数, 朝倉書店, 2002.
- [KN] Kita M. and Noumi M., On the structure of cohomology groups attached to the integral of certain many-valued analytic functions, *Japan. J. Math.*, **9** (1983), 113–157.
- [M1] Matsumoto K., Intersection numbers for logarithmic k -forms, *Osaka J. Math.*, **35** (1998), 873–893.
- [M2] Matsumoto K., Monodromy and Pfaffian of Lauricella's F_D in terms of the intersection forms of twisted (co)homology groups, *Kyushu J. Math.* **67** (2013), 367–387.
- [M3] 松本圭司, 多変数超幾何関数の Pfaffian 方程式とモノドロミー 1 (超幾何学校 2013 の講義録), *Rokko Lectures in Mathematics* **23** (2015), 23–35.
- [O] 小木曾啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.
- [Y1] Yoshida M., *Fuchsian Differential Equations*, Aspects of Mathematics E11., Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987.
- [Y2] Yoshida M., *Hypergeometric functions, my love, -Modular interpretations of configuration spaces-*, Aspects of Mathematics E32., Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.^{*43}

^{*43} 日本語版は「吉田正章, 私説 超幾何関数 — 対称領域による点配置空間の一意化, 共立出版, 1997」

PFAFFIAN OF LAURICELLA'S HYPERGEOMETRIC SYSTEM F_A

KEIJI MATSUMOTO

ABSTRACT. We give a Pfaffian system of differential equations associated with Lauricella's hypergeometric series $F_A(a, b, c; x)$ of m -variables. This system is integrable of rank 2^m . To express the connection form of this system, we make use of the intersection form of twisted cohomology groups with respect to integrals representing solutions of this system.

1. INTRODUCTION

Lauricella's hypergeometric series $F_A(a, b, c; x)$ of m -variables $x = (x_1, \dots, x_m)$ with parameters $a, b = (b_1, \dots, b_m)$ and $c = (c_1, \dots, c_m)$ is defined as

$$F_A(a, b, c; x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^m} \frac{(a, \sum_{i=1}^m n_i) \prod_{i=1}^m (b_i, n_i)}{\prod_{i=1}^m (c_i, n_i) \prod_{i=1}^m (1, n_i)} \prod_{i=1}^m x_i^{n_i},$$

where $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $n = (n_1, \dots, n_m)$, $c_1, \dots, c_m \notin -\mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\}$, and $(c_i, n_i) = c_i(c_i+1) \cdots (c_i+n_i-1) = \Gamma(c_i+n_i)/\Gamma(c_i)$. It is known that Lauricella's hypergeometric system $F_A(a, b, c)$ of differential equations satisfied by $F_A(a, b, c; x)$ is of rank 2^m with the singular locus

$$\{x \in \mathbb{C}^m \mid \prod_{i=1}^m x_i \prod_{v \in \mathbb{Z}_2^m} (1 - v \cdot x) = 0\},$$

where $v = (v_1, \dots, v_m)$ and $v_i \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$. In this paper, we give a Pfaffian system of $F_A(a, b, c)$ under the non-integral conditions (2.2) for linear combinations of parameters a, b and c . The connection form of the Pfaffian system is expressed in terms of logarithmic 1-forms of defining equations of the singular locus, see Corollary 4.3. When the number of variables is two, this system is called Appell's F_2 , of which Pfaffian system is studied by several authors; refer to [K] and the references therein.

To express the connection form of this system, we study linear transformations $\mathcal{R}_0^i$ and $\mathcal{R}_v$ representing local behaviors of the connection form around the components $S_0^i = \{x \in \mathbb{C}^m \mid x_i = 0\}$ and $S_v = \{x \in \mathbb{C}^m \mid 1 - v \cdot x = 0\}$ of the singular locus. They can be regarded as linear transformations of the twisted cohomology groups with respect to integrals representing solutions of this system. We show that they have two eigenvalues for generic parameters. It is a key property for characterizing $\mathcal{R}_0^i$ and $\mathcal{R}_v$ that eigenspaces of each of them are orthogonal to each other with respect to the intersection form of the twisted cohomology groups. By using the intersection form, we express $\mathcal{R}_0^i$ and $\mathcal{R}_v$ without choosing a basis of the twisted cohomology group, see Lemma 4.4 and Theorem 4.1. Their representation matrices in Corollary 4.2 imply the Pfaffian system of Lauricella's F_A .

Date: September 21, 2016.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 33C65; Secondary 58A17.

Key words and phrases. Pfaffian system, Lauricella's hypergeometric differential equations, Twisted cohomology group.

The monodromy representation of this system is studied in [MY]. Its circuit transformations are expressed in terms of the intersection form of twisted homology groups, which are dual to the twisted cohomology groups.

Refer to [M2] for the study of a Pfaffian and the monodromy representation of Lauricella's system F_D in terms of the intersection form of twisted (co)homology groups.

2. LAURICELLA'S HYPERGEOMETRIC SYSTEM F_A

In this section, we collect some facts about Lauricella's hypergeometric system F_A of differential equations, for which we refer to [AK], [L], [MY] and [Y]. Lauricella's hypergeometric series $F_A(a, b, c; x)$ converges in the domain

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{i=1}^m |x_i| < 1 \right\}$$

and admits the integral representation

$$(2.1) \quad \left[\prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(c_i)}{\Gamma(b_i)\Gamma(c_i-b_i)} \right] \int_{(0,1)^m} u(a, b, c; t, x) \frac{dT}{t_1 \cdots t_m},$$

where $dT = dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_m$,

$$u(t, x) = u(a, b, c; t, x) = \left[\prod_{i=1}^m t_i^{b_i} (1-t_i)^{c_i-b_i-1} \right] \left(1 - \sum_{i=1}^m t_i x_i \right)^{-a},$$

and parameters b and c satisfy $\operatorname{Re}(c_i) > \operatorname{Re}(b_i) > 0$ ($i = 1, \dots, m$).

Differential operators

$$x_i(1-x_i)\partial_i^2 - x_i \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} x_j \partial_i \partial_j + [c_i - (a+b_i+1)x_i] \partial_i - b_i \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} x_j \partial_j - ab_i$$

for $i = 1, \dots, m$ annihilate the series $F_A(a, b, c; x)$, where $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. We define Lauricella's hypergeometric system $F_A(a, b, c)$ by differential equations corresponding to these operators.

We define the local solution space $\operatorname{Sol}(U)$ of the system $F_A(a, b, c)$ on a domain U in $\mathbb{C}^m$ by the $\mathbb{C}$ -vector space

$$\{F(x) \in \mathcal{O}(U) \mid P(x, \partial) \cdot F(x) = 0 \text{ for any } P(x, \partial) \in F_A(a, b, c)\},$$

where $\mathcal{O}(U)$ is the $\mathbb{C}$ -algebra of single valued holomorphic functions on U . The rank of $F_A(a, b, c)$ is defined by $\sup_U \dim(\operatorname{Sol}(U))$. It is known that the rank of $F_A(a, b, c)$ is 2^m and 2^m functions $F_A(a, b, c; x)$ and $\partial_I F_A(a, b, c; x)$ are linearly independent, where $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ runs over the non-empty subsets of $\{1, \dots, m\}$ and $\partial_I = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_r}$.

If the rank of $F_A(a, b, c)$ is greater than $\dim(\operatorname{Sol}(U_x))$ for any neighborhood U_x of $x \in \mathbb{C}^m$ then x is called a singular point of $F_A(a, b, c)$. The singular locus of $F_A(a, b, c)$ is defined as the set of such points. It is also shown in [MY] that the singular locus is

$$\left(\bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^m} S_v \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^m S_0^i \right),$$

where

$$\begin{aligned} S_v &= \{x \in \mathbb{C}^m \mid v^t x = \sum_{i=1}^m v_i x_i = 1\}, \quad v \in \mathbb{Z}_2^m, \\ S_0^i &= \{x \in \mathbb{C}^m \mid x_i = 0\}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

and we regard $S_{(0, \dots, 0)}$ as the empty set. We set

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{C}^m - \left[\left(\bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^m} S_v \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^m S_0^i \right) \right], \\ S &= (\mathbb{P}^1)^m - X = \left(\bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^m} S_v \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^m S_0^i \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^m S_\infty^i \right), \end{aligned}$$

where $S_\infty^i = \{x \in (\mathbb{P}^1)^m \mid x_i = \infty\}$.

We define a partial order and a total order on $\mathbb{Z}_2^m$.

Definition 2.1. For $v = (v_1, \dots, v_m), w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{Z}_2^m$,

- (i) $v \succeq w$ if and only if $w_i = 1 \Rightarrow v_i = 1$;
- (ii) $v \succ w$ if and only if $v \succeq w$ and $v \neq w$;
- (iii) $v > w$ if and only if $v \neq w$ and they satisfy one of
 - (1) $|v| > |w|$,
 - (2) $|v| = |w|$ and $v_i < w_i$, where i is the minimum index satisfying $v_i \neq w_i$.

Here

$$|v| = \sum_{i=1}^m v_i.$$

It is easy to see that

$$\begin{aligned} v \succ w &\Rightarrow v > w, \\ (0, \dots, 0) &\prec e_i \prec e_i + e_j \prec e_i + e_j + e_k \prec \dots \prec (1, \dots, 1), \\ (0, \dots, 0) &< e_1 < e_2 < \dots < e_m < e_1 + e_2 < e_1 + e_3 < \dots < (1, \dots, 1), \end{aligned}$$

where e_i is the i -th unit row vector, and i, j, k are mutually different. Note that the cardinality of the set $\{w \in \mathbb{Z}_2^m \mid v \succeq w\}$ for a fixed $v \in \mathbb{Z}_2^m$ is $2^{|v|}$. By the bijection

$$\mathbb{Z}_2^m \ni v \mapsto I_v = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid v_i = 1\} \in 2^{\{1, \dots, m\}}$$

between $\mathbb{Z}_2^m$ and the power set $2^{\{1, \dots, m\}}$ of $\{1, \dots, m\}$, the partial order $\succeq$ on $\mathbb{Z}_2^m$ corresponds to the partial order $\supset$ on $2^{\{1, \dots, m\}}$.

We set

$$\begin{aligned} (\beta_{0,1}, \dots, \beta_{0,m}) &= (b_1, \dots, b_m), \\ (\beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,m}) &= (c_1 - 1 - b_1, \dots, c_m - 1 - b_m), \\ \gamma_v &= a - v^t c + |v| \quad (v \in \mathbb{Z}_2^m). \end{aligned}$$

We regard these parameters as indeterminates. Throughout this paper, we assume that

$$(2.2) \quad \beta_{0,i}, \beta_{1,i}, \gamma_v \notin \mathbb{Z}$$

for any $i \in \{1, \dots, m\}$ and $v \in \mathbb{Z}_2^m$, when we assign complex values to them.

3. TWISTED COHOMOLOGY GROUPS

In this section, we regard vector spaces as defined over the rational function field $\mathbb{C}(\alpha) = \mathbb{C}(a, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m)$ when we do not specify a field. We denote the vector space of rational k -forms on $\mathbb{C}^m$ with poles only along S by $\Omega_X^k(*S)$. Note that $\Omega_X^0(*S)$ admits the structure of an algebra over $\mathbb{C}(\alpha)$. We set

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \{(t, x) \in \mathbb{C}^m \times X \mid (1 - \sum_{i=1}^m t_i x_i) \prod_{i=1}^m t_i (1 - t_i) \neq 0\} \subset (\mathbb{P}^1)^{2m}, \\ \tilde{S} &= (\mathbb{P}^1)^{2m} - \tilde{X}.\end{aligned}$$

We define projections

$$\text{pr}_T : \tilde{X} \ni (t, x) \mapsto t \in \mathbb{C}^m, \quad \text{pr}_X : \tilde{X} \ni (t, x) \mapsto x \in X.$$

Note that

$$\text{pr}_T(\text{pr}_X^{-1}(x)) = \{t \in \mathbb{C}^m \mid (1 - \sum_{i=1}^m t_i x_i) \prod_{i=1}^m t_i (1 - t_i) \neq 0\} = \mathbb{C}_x^m$$

for any fixed $x \in X$.

Let $\Omega_{\tilde{X}}^k(*\tilde{S})$ be the vector space of rational k -forms on $\tilde{X}$ with poles only along $\tilde{S}$ and $\Omega_{\tilde{X}}^{p,q}(*\tilde{S})$ be the subspace of $\Omega_{\tilde{X}}^{p+q}(*\tilde{S})$ consisting elements which are p -forms with respect to the variables $t_1, \dots, t_m$.

We set

$$\begin{aligned}\omega_T &= \sum_{i=1}^m \omega_{T_i} dt_i \in \Omega_{\tilde{X}}^{1,0}(*\tilde{S}), \quad \omega_{T_i} = \frac{\beta_{0,i}}{t_i} + \frac{\beta_{1,i}}{t_i - 1} + \frac{ax_i}{1 - t \cdot x}, \\ \omega_X &= \sum_{i=1}^m \omega_{X_i} dx_i \in \Omega_{\tilde{X}}^{0,1}(*\tilde{S}), \quad \omega_{X_i} = \frac{at_i}{1 - t \cdot x}, \\ \omega &= \omega_T + \omega_X \in \Omega_{\tilde{X}}^1(*\tilde{S}).\end{aligned}$$

We define a twisted exterior derivation on $\tilde{X}$ by

$$\nabla_T = d_T + \omega_T \wedge,$$

where d_T is the exterior derivation with respect to the variable t , i.e.,

$$d_T f(t, x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial t_i}(t, x) dt_i.$$

We define an $\Omega_X^0(*S)$ -module by

$$\mathcal{H}^m(\nabla_T) = \Omega_{\tilde{X}}^{m,0}(*\tilde{S}) / \nabla_T(\Omega_{\tilde{X}}^{m-1,0}(*\tilde{S})).$$

It admits the structure of a vector bundle over X . We define two sets $\{\varphi_v\}_{v \in \mathbb{Z}_2^m}$ and $\{\psi_v\}_{v \in \mathbb{Z}_2^m}$ of 2^m elements of $\Omega_{\tilde{X}}^{m,0}(*\tilde{S})$ as

$$(3.1) \quad \varphi_v = \frac{dT}{\prod_{i=1}^m (t_i - v_i)}, \quad \psi_v = \frac{(1 - v \cdot x) dT}{(1 - t \cdot x) \prod_{1 \leq i \leq m} (t_i - v_i)}$$

where $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Z}_2^m$. To express ψ_v as a linear combination of φ_v 's, we give some Lemmas.

Lemma 3.1. *We have*

$$\psi_v = \frac{1 - v \cdot t x}{1 - t \cdot t x} \varphi_v = \varphi_v + \sum_{j=1}^m \frac{x_j dT}{(1 - t \cdot t x) \prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (t_i - v_i)}.$$

Proof. A straightforward calculation implies this lemma. $\square$

Lemma 3.2. *We have*

$$\frac{ax_j dT}{(1 - t \cdot t x) \prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (t_i - v_i)} = \begin{cases} -\beta_{0,j} \varphi_v - \beta_{1,j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} & \text{if } v_j = 0, \\ -\beta_{0,j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} - \beta_{1,j} \varphi_v & \text{if } v_j = 1, \end{cases}$$

as elements of $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$, where

$$\sigma_j : \mathbb{Z}_2^m \ni v \mapsto \sigma_j \cdot v \in \mathbb{Z}_2^m, \quad \sigma_j \cdot v \equiv v + e_j \pmod{2}.$$

Proof. Put

$$\check{\varphi}_v^j = (-1)^{j-1} \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{j-1} \wedge dt_{j+1} \wedge \cdots \wedge dt_m}{\prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (t_i - v_i)} \in \Omega_{\tilde{X}}^{m-1,0}(*\tilde{S})$$

for $1 \leq j \leq m$ and $v \in \mathbb{Z}_2^m$. Since

$$\begin{aligned} dt_i \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \check{\varphi}_v^j \right) &= 0 \quad (1 \leq i \leq m), \\ dt_i \wedge (\omega_{T_i} \check{\varphi}_v^j) &= 0 \quad (1 \leq i \leq m, i \neq j), \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} \nabla_T(\check{\varphi}_v^j) &= \omega_{T_j} dt_j \wedge \check{\varphi}_v^j \\ &= \frac{\beta_{0,j} dT}{t_j \prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (t_i - v_i)} + \frac{\beta_{1,j} dT}{(t_j - 1) \prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (t_i - v_i)} + \frac{ax_j dT}{(1 - t \cdot t x) \prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (t_i - v_i)}. \end{aligned}$$

If $v_j = 0$ then the first and second terms of the last line are $\beta_{0,j} \varphi_v$ and $\beta_{1,j} \varphi_{\sigma_j \cdot v}$, respectively; if $v_j = 1$ then they are $\beta_{0,j} \varphi_{\sigma_j \cdot v}$ and $\beta_{1,j} \varphi_v$. Note that $\nabla_T(\check{\varphi}_v^j) = 0$ as an element of $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$. $\square$

Proposition 3.1. *For any $v \in \mathbb{Z}_2^m$, the form*

$$a\psi_v = a \frac{1 - v \cdot t x}{1 - t \cdot t x} \varphi_v \in \Omega_{\tilde{X}}^{m,0}(*\tilde{S})$$

is equal to

$$\left[a - \sum_{j=1}^m \beta_{v_j, j} \right] \varphi_v - \sum_{j=1}^m \beta_{1-v_j, j} \varphi_{\sigma_j \cdot v}$$

as an element of $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$.

Proof. Rewrite the right hand side of the identity in Lemma 3.1 by Lemma 3.2. Then we have

$$a\psi_v = a\varphi_v - \sum_{1 \leq j \leq m}^{v_j=0} (\beta_{0,j} \varphi_v + \beta_{1,j} \varphi_{\sigma_j \cdot v}) - \sum_{1 \leq j \leq m}^{v_j=1} (\beta_{0,j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} + \beta_{1,j} \varphi_v).$$

Note that

$$\sum_{1 \leq j \leq m}^{v_j=0} \beta_{0,j} \varphi_v + \sum_{1 \leq j \leq m}^{v_j=1} \beta_{1,j} \varphi_v = \left(\sum_{j=1}^m \beta_{v_j, j} \right) \varphi_v,$$

and that

$$\beta_{1-v_j, j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} = \begin{cases} \beta_{1, j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} & \text{if } v_j = 0, \\ \beta_{0, j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} & \text{if } v_j = 1, \end{cases}$$

for $1 \leq j \leq m$. □

We consider the structure of the fiber of $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$ at x . Let $\Omega_{\mathbb{C}_x^m}^p(*x)$ be the pull-back of $\Omega_{\tilde{X}}^{p,0}(*\tilde{S})$ under the map $\iota_x : \mathbb{C}_x^m \rightarrow \tilde{X}$ for a fixed $x \in X$. Each fiber of $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$ at x is isomorphic to the rational twisted cohomology group

$$H^m(\Omega_{\mathbb{C}_x^m}^\bullet(*x), \nabla_T) = \Omega_{\mathbb{C}_x^m}^m(*x) / \nabla_T(\Omega_{\mathbb{C}_x^m}^{m-1}(*x))$$

on $\mathbb{C}_x^m$ with respect to ∇_T induced from the map ι_x . We denote the pull-back of φ_v under the map ι_x by $\varphi_{x,v}$.

Fact 3.1 ([AK]). (i) *The space $H^m(\Omega_{\mathbb{C}_x^m}^\bullet(*x), \nabla_T)$ is 2^m -dimensional and it is spanned by the classes of $\varphi_{x,v}$ for any $v \in \mathbb{Z}_2^m$.*
(ii) *There is a canonical isomorphism j_x from $H^m(\Omega_{\mathbb{C}_x^m}^\bullet(*x), \nabla_T)$ to*

$$H^m(\mathcal{E}_c^\bullet(x), \nabla_T) = \ker(\nabla_T : \mathcal{E}_c^m(x) \rightarrow \mathcal{E}_c^{m+1}(x)) / \nabla_T(\mathcal{E}_c^{m-1}(x)),$$

where $\mathcal{E}_c^k(x)$ is the vector space of smooth k -forms with compact support in $\mathbb{C}_x^m$.

By Fact 3.1, we have the following.

Proposition 3.2. *The $\Omega_X^0(*S)$ -module $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$ is of rank 2^m . The classes of φ_v ($v \in \mathbb{Z}_2^m$) in $\Omega_{\tilde{X}}^{m,0}(*\tilde{S})$ form a frame of the vector bundle $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$ over X .*

Set

$$\mathcal{H}^m(\nabla_T^\vee) = \Omega_{\tilde{X}}^{m,0}(*\tilde{S}) / \nabla_T^\vee(\Omega_{\tilde{X}}^{m-1,0}(*\tilde{S})),$$

where $\nabla_T^\vee = d_T - \omega_T \wedge$. This $\Omega_X^0(*S)$ -module can be regarded as vector bundles over X . The classes of φ_v ($v \in \mathbb{Z}_2^m$) also form a frame of this vector bundle. Each fiber of $\mathcal{H}^m(\nabla_T^\vee)$ at x is the rational twisted cohomology group $H^m(\Omega_{\mathbb{C}_x^m}^\bullet(*x), \nabla_T^\vee)$ on $\mathbb{C}_x^m$ defined by the coboundary $\nabla_T^\vee$ instead of ∇_T . We define the intersection form between $H^m(\Omega_{\mathbb{C}_x^m}^\bullet(*x), \nabla_T)$ and $H^m(\Omega_{\mathbb{C}_x^m}^\bullet(*x), \nabla_T^\vee)$ by

$$\mathcal{I}(\varphi_x, \varphi'_x) = \int_{\mathbb{C}_x^m} j_x(\varphi_x) \wedge \varphi'_x \in \mathbb{C}(\alpha),$$

where $\varphi_x, \varphi'_x \in \Omega_{\mathbb{C}_x^m}^m(*x)$, and j_x is given in Fact 3.1. This integral converges since $j_x(\varphi_x)$ is a smooth m -form on $\mathbb{C}_x^m$ with compact support. It is bilinear over $\mathbb{C}(\alpha)$.

For $w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{Z}_2^m$ with $|w| = r$, we have a sequence of $w^{(r)}, w^{(r-1)}, \dots, w^{(1)} \in \mathbb{Z}_2^m$ such that $|w^{(j)}| = j$ and

$$w = w^{(r)} \succ w^{(r-1)} \succ w^{(r-2)} \succ \dots \succ w^{(1)} \succ (0, \dots, 0).$$

Let $\mathfrak{S}_w$ be the set of such sequences $(w, w^{(r-1)}, \dots, w^{(1)})$ for given $w \in \mathbb{Z}_2^m$. Note that its cardinality is $r!$. We put

$$A_w = \sum_{(w, w^{(r-1)}, \dots, w^{(1)}) \in \mathfrak{S}_w} \frac{1}{\prod_{j=1}^r \gamma_{w^{(j)}}}.$$

For example,

$$\begin{aligned}
A_{(1,1)} &= \frac{1}{\gamma_{(1,1)}} \times \left(\frac{1}{\gamma_{(1,0)}} + \frac{1}{\gamma_{(0,1)}} \right) = \frac{1}{a - c_1 - c_2 + 2} \times \left(\frac{1}{a - c_1 + 1} + \frac{1}{a - c_2 + 1} \right), \\
A_{(1,1,1)} &= \frac{1}{\gamma_{(1,1,1)}\gamma_{(1,1,0)}} \left(\frac{1}{\gamma_{(1,0,0)}} + \frac{1}{\gamma_{(0,1,0)}} \right) + \frac{1}{\gamma_{(1,1,1)}\gamma_{(1,0,1)}} \left(\frac{1}{\gamma_{(1,0,0)}} + \frac{1}{\gamma_{(0,0,1)}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma_{(1,1,1)}\gamma_{(0,1,1)}} \left(\frac{1}{\gamma_{(0,1,0)}} + \frac{1}{\gamma_{(0,0,1)}} \right) \\
&= \frac{1}{a - c_1 - c_2 - c_3 + 3} \times \left[\frac{1}{a - c_1 - c_2 + 2} \left(\frac{1}{a - c_1 + 1} + \frac{1}{a - c_2 + 1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a - c_1 - c_3 + 2} \left(\frac{1}{a - c_1 + 1} + \frac{1}{a - c_3 + 1} \right) + \frac{1}{a - c_2 - c_3 + 2} \left(\frac{1}{a - c_2 + 1} + \frac{1}{a - c_3 + 1} \right) \right].
\end{aligned}$$

Proposition 3.3. *We have*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\varphi_{x,v}, \varphi_{x,v'}) &= (2\pi\sqrt{-1})^m \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}_2^m} A_w \prod_{1 \leq i \leq m}^{w_i=0} \frac{\delta(v_i, v'_i)}{\beta_{v_i, i}} \right], \\
\mathcal{I}(\varphi_{x,v}, \psi_{x,v'}) &= (2\pi\sqrt{-1})^m \begin{cases} \frac{1}{\prod \beta_v}, & \text{if } v = v', \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\
\mathcal{I}(\psi_{x,v}, \psi_{x,v'}) &= (2\pi\sqrt{-1})^m \begin{cases} \frac{a - \Sigma \beta_v}{a \prod \beta_v}, & \text{if } v = v', \\ \frac{-1}{a \prod_{1 \leq i \leq m}^{v_i=v'_i} \beta_{v_i, i}}, & \text{if } \#(v \cap v') = m-1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}
\end{aligned}$$

where $v = (v_1, \dots, v_m)$, $v' = (v'_1, \dots, v'_m) \in \mathbb{Z}_2^m$, δ denotes Kronecker's symbol,

$$\Sigma \beta_v = \sum_{i=1}^m \beta_{v_i, i}, \quad \prod \beta_v = \prod_{i=1}^m \beta_{v_i, i},$$

and we regard

$$\prod_{1 \leq i \leq m}^{w_i=0} \frac{\delta(v_i, v'_i)}{\beta_{v_i, i}} = 1$$

for $w = (1, \dots, 1)$. The matrix

$$C = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \mathcal{I}(\varphi_{x,v}, \varphi_{x,v'})_{v, v' \in \mathbb{Z}_2^m}$$

satisfies

$$\det(C) = \frac{a^{2^m}}{(\prod_{w \in \mathbb{Z}_2^m} \gamma_w) (\prod_{i=1}^m (\beta_{0,i} \beta_{1,i})^{2^{m-1}})},$$

where we array $v, v' \in \mathbb{Z}_2^m$ by the total order in Definition 2.1. When we assign the parameters to complex values under the assumption (2.2), each intersection number is well-defined and $\det(C) \neq 0$; the matrix C is invertible.

Proof. Since the pole divisor of $\psi_{x,v'}$ is normal crossing in $\mathbb{C}^m$, we can evaluate the intersection numbers $\mathcal{I}(\varphi_{x,v}, \psi_{x,v'})$ and $\mathcal{I}(\psi_{x,v}, \psi_{x,v'})$ by using results in [M1]. To compute $\mathcal{I}(\varphi_{x,v}, \varphi_{x,v'})$, we blow up the space $(\mathbb{P}^1)^m$ to $\tilde{\mathbb{P}}^m$ so that the pole divisor of $\omega_{x,T} = i_x^*(\omega_T)$ in $\tilde{\mathbb{P}}^m$ becomes normal crossing. Then the pole divisor of $\omega_{x,T}$ in $\tilde{\mathbb{P}}^m$ consists of $\ell_{0,i}, \ell_{1,i}$ ($1 \leq i \leq m$) and ℓ_w ($w \in \mathbb{Z}_2^m$) with correspondence

$$\begin{aligned} \ell_{0,i} &\leftrightarrow \{t \in \mathbb{C}^m \mid t_i = 0\}, & \ell_{1,i} &\leftrightarrow \{t \in \mathbb{C}^m \mid t_i = 1\}, \\ \ell_{(0,\dots,0)} &\leftrightarrow \{t \in \mathbb{C}^m \mid t^t x = 1\}, & \ell_w &\leftrightarrow \infty(\mathbb{P}_w^r) \times \mathbb{P}_{\sigma \cdot w}^{m-r} \quad (|w| = r > 0), \end{aligned}$$

via natural bi-rational maps, where $\mathbb{P}_w^r$ is the projective space of $\mathbb{C}^r$ coordinated by t_i with $w_i = 1$, $\infty(\mathbb{P}_w^r)$ is the hyperplane at infinity in $\mathbb{P}_w^r$ and $\sigma \cdot w = (1, \dots, 1) - w$. The residues of $\omega_{x,T}$ in $\tilde{\mathbb{P}}^m$ along these components are

$$\beta_{0,i}, \quad \beta_{1,i}, \quad -\gamma_{(0,\dots,0)}, \quad \gamma_w \quad ((0, \dots, 0) \neq w \in \mathbb{Z}_2^m),$$

respectively. We consider conditions that m components of the pole divisor of $\varphi_{x,v}$ in $\tilde{\mathbb{P}}^m$ intersect only at a point. Here note that $\ell_{(0,\dots,0)}$ is not its component. For fixed r ($0 \leq r \leq m$), let $w^{(1)}, \dots, w^{(r)}$ be elements of $\mathbb{Z}_2^m$ satisfying

$$(0, \dots, 0) \prec w^{(1)} \prec w^{(2)} \prec \dots \prec w^{(r)} = w = (w_1, \dots, w_m), \quad |w| = r,$$

and let $I_{\sigma \cdot w}$ be a subset of $\{1, \dots, m\}$ given by $I_{\sigma \cdot w} = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid w_i = 0\}$. Then m components $\ell_{w^{(1)}}, \dots, \ell_{w^{(r)}}, \ell_{v_i,i}$ ($i \in I_{\sigma \cdot w}$) intersect only at a point. We can show that the converse holds true. Figure 1 indicates the pole divisor of $\varphi_{x,(1,1)}$ in $\tilde{\mathbb{P}}^2$. In this case, there are five intersection points of two components; one can easily check the above fact. This fact

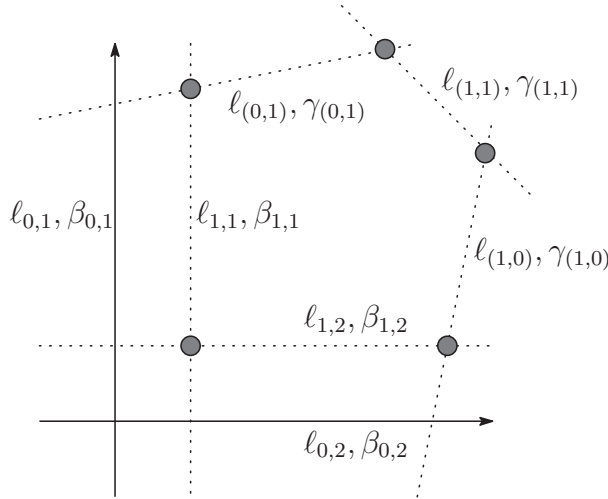


FIGURE 1. Pole divisor of $\varphi_{x,v}$ in $\tilde{\mathbb{P}}^2$

together with results in [M1] enables us to compute $\mathcal{I}(\varphi_{x,v}, \varphi_{x,v'})$. Note that

$$A_w \prod_{1 \leq i \leq m}^{w_i=0} \frac{\delta(v_i, v'_i)}{\beta_{v_i,i}} = \begin{cases} A_{(1,\dots,1)} & \text{if } w = (1, \dots, 1), \\ \prod_{i=1}^m \frac{\delta(v_i, v'_i)}{\beta_{v_i,i}} & \text{if } w = (0, \dots, 0), \end{cases}$$

$A_{(1,\dots,1)}$ is the contribution for intersection points in $\ell_{(1,\dots,1)}$ and $\prod_{i=1}^m \frac{\delta(v_i, v'_i)}{\beta_{v_i, i}}$ is that in $\mathbb{C}^m$.

It is easy to see that

$$\det \left(\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \mathcal{I}(\varphi_{x,v}, \psi_{x,v'})_{v,v' \in \mathbb{Z}_2^m} \right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (\beta_{0,i} \beta_{1,i})^{2^{m-1}}}.$$

By following the method in Appendix of [MY], we have

$$\det \left(\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \mathcal{I}(\psi_{x,v}, \psi_{x,v'})_{v,v' \in \mathbb{Z}_2^m} \right) = \frac{\prod_{w \in \mathbb{Z}_2^m} \gamma_w}{a^{2^m} \prod_{i=1}^m (\beta_{0,i} \beta_{1,i})^{2^{m-1}}}.$$

These imply the value of $\det(C)$. □

By this fact, we can regard the intersection form $\mathcal{I}$ as that between $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$ and $\mathcal{H}^m(\nabla_T^\vee)$. It is bilinear over $\Omega_X^0(*S)$ and the intersection matrix C is defined by the frame $\{\varphi_v\}_{v \in \mathbb{Z}_2^m}$. Let $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T^\vee)$) be the linear span of φ_v ($v \in \mathbb{Z}_2^m$) over the field $\mathbb{C}(\alpha)$ contained in $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$ (resp. $\mathcal{H}^m(\nabla_T^\vee)$). We have

$$\psi_v \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$$

for any $v \in \mathbb{Z}_2^m$ by Proposition 3.1.

4. CONNECTIONS

We introduce operators

$$\nabla_k = \partial_k + \frac{at_k}{1 - t^t x}, \quad (k = 1, \dots, m),$$

then we have

$$(4.1) \quad \partial_k \int_{\text{reg}(0,1)^m} u(t, x) \varphi = \int_{\text{reg}(0,1)^m} u(t, x) (\nabla_k \varphi),$$

where $\text{reg}(0,1)^m$ is the regularization of the domain $(0,1)^m$ of integration defined in [AK]. Thanks to the regularization, the integral converges whenever we assign complex values to parameters under the condition (2.2), and the order of the integration and the operator ∂_k can be changed. We set

$$\nabla_X = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge \nabla_i = d_X + \omega_X \wedge,$$

where d_X is the exterior derivation with respect to x :

$$d_X f = \sum_{i=1}^m (\partial_i f) dx_i, \quad f \in \Omega_{\tilde{X}}^0(*\tilde{S}).$$

It is easy to see that

$$(4.2) \quad \nabla_T \circ \nabla_X + \nabla_X \circ \nabla_T = 0.$$

We set

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{m,1}(\nabla_T) &= \Omega_{\tilde{X}}^{m,1}(*\tilde{S}) / \nabla_T(\Omega_{\tilde{X}}^{m-1,1}(*\tilde{S})), \\ \mathcal{H}^{m,1}(\nabla_T^\vee) &= \Omega_{\tilde{X}}^{m,1}(*\tilde{S}) / \nabla_T^\vee(\Omega_{\tilde{X}}^{m-1,1}(*\tilde{S})). \end{aligned}$$

Proposition 4.1. *There is a natural map $\nabla_X : \mathcal{H}^m(\nabla_T) \rightarrow \mathcal{H}^{m,1}(\nabla_T)$ induced from the derivation ∇_X .*

Proof. We have only to show that if $\psi \in \nabla_T(\Omega_{\tilde{X}}^{m-1,0}(*\tilde{S}))$ then

$$\nabla_X(\psi) \in \nabla_T(\Omega_{\tilde{X}}^{m-1,1}(*\tilde{S})).$$

For any $\psi \in \nabla_T(\Omega_{\tilde{X}}^{m-1,0}(*\tilde{S}))$, there exists $f \in \Omega_{\tilde{X}}^{m-1,0}(*\tilde{S})$ such that $\nabla_T(f) = \psi$. By (4.2), we have

$$\nabla_X(\psi) = \nabla_X \circ \nabla_T(f) = -\nabla_T \circ \nabla_X(f) = \nabla_T(-\nabla_X(f)),$$

which belongs to $\nabla_T(\Omega_{\tilde{X}}^{m-1,1}(*\tilde{S}))$. $\square$

By this proposition, we can regard the map ∇_X as a connection of the vector bundle $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$ over X . It is characterized as follows.

Proposition 4.2. *Let $v = (v_1, \dots, v_m)$ be an element of $\mathbb{Z}_2^m$. If $v_k = 0$ then*

$$\nabla_k(\varphi_v) = \frac{1}{x_k}(-\beta_{0,k}\varphi_v - \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v});$$

if $v_k = 1$ then

$$\nabla_k(\varphi_v) = \frac{1}{x_k}(-\beta_{0,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v} - \beta_{1,k}\varphi_v) + \frac{1}{1 - v^t x} \left[\left(a - \sum_{j=1}^m \beta_{v_j, j} \right) \varphi_v + \sum_{j=1}^m \beta_{1-v_j, j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} \right].$$

Proof. Since $\partial_k \cdot \varphi_v = 0$, we have

$$\nabla_k(\varphi_v) = \omega_k \cdot \varphi_v = \frac{at_k}{1 - t^t x} \cdot \frac{dT}{\prod_{i=1}^m (t_i - v_i)}.$$

If $v_i = 0$ then

$$\nabla_k(\varphi_v) = \frac{1}{x_k} \cdot \frac{ax_x dT}{(1 - t^t x) \prod_{\substack{i \neq k \\ 1 \leq i \leq m}} (t_i - v_i)} = \frac{-\beta_{0,k}\varphi_v - \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}}{x_k}$$

by Lemma 3.2. If $v_i = 1$ then

$$\begin{aligned} \nabla_k(\varphi_v) &= \frac{a(t_k - 1) + a}{1 - t^t x} \cdot \frac{dT}{\prod_{i=1}^m (t_i - v_i)} = \frac{a dT}{(1 - t^t x) \prod_{\substack{i \neq k \\ 1 \leq i \leq m}} (t_i - v_i)} + \frac{a dT}{(1 - t^t x) \prod_{i=1}^m (t_i - v_i)} \\ &= \frac{-\beta_{0,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v} - \beta_{1,k}\varphi_v}{x_k} + \frac{a\psi_v}{1 - v^t x} \end{aligned}$$

by Lemma 3.2. Rewrite the last term by Proposition 3.1. $\square$

Corollary 4.1. *For any $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Z}_2^m$, we have*

$$\left(\prod_{1 \leq i \leq m}^{v_i=1} x_i \nabla_i \right) \cdot \varphi_{(0, \dots, 0)} = \sum_{w \leq v} \left[\prod_{1 \leq i \leq m}^{v_i=1} (-\beta_{w_i, i}) \right] \varphi_w.$$

Proof. Use the induction on $|v|$ and Proposition 4.2. $\square$

We give some examples:

$$\begin{aligned}
(x_1 \nabla_1) \cdot \varphi(0,0,0) &= -\beta_{0,1} \varphi(0,0,0) - \beta_{1,1} \varphi(1,0,0), \\
(x_1 x_2 \nabla_1 \nabla_2) \cdot \varphi(0,0,0) &= \beta_{0,1} \beta_{0,2} \varphi(0,0,0) + \beta_{1,1} \beta_{0,2} \varphi(1,0,0) + \beta_{0,1} \beta_{1,2} \varphi(0,1,0) + \beta_{1,1} \beta_{1,2} \varphi(1,1,0), \\
(x_1 x_2 x_3 \nabla_1 \nabla_2 \nabla_3) \cdot \varphi(0,0,0) &= -\beta_{0,1} \beta_{0,2} \beta_{0,3} \varphi(0,0,0) - \beta_{1,1} \beta_{0,2} \beta_{0,3} \varphi(1,0,0) \\
&\quad - \beta_{0,1} \beta_{1,2} \beta_{0,3} \varphi(0,1,0) - \beta_{0,1} \beta_{0,2} \beta_{1,3} \varphi(0,0,1) \\
&\quad - \beta_{1,1} \beta_{1,2} \beta_{0,3} \varphi(1,1,0) - \beta_{1,1} \beta_{0,2} \beta_{1,3} \varphi(1,0,1) \\
&\quad - \beta_{0,1} \beta_{1,2} \beta_{1,3} \varphi(0,1,1) - \beta_{1,1} \beta_{1,2} \beta_{1,3} \varphi(1,1,1).
\end{aligned}$$

To express ∇_X restricted to $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$ by the intersection form $\mathcal{I}$, we give some lemmas and a proposition.

Lemma 4.1. *Let φ be an element of $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$ and φ' be that of $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T^\vee)$. Then we have*

$$\mathcal{I}(\nabla_i \varphi, \varphi') + \mathcal{I}(\varphi, \nabla_i^\vee \varphi') = 0,$$

where $1 \leq i \leq m$ and $\nabla_i^\vee = \partial_i - \frac{at_i}{1-t} \frac{\partial}{\partial x}$.

Proof. It is clear by Proposition 3.3 that

$$\partial_i \mathcal{I}(\varphi, \varphi') = 0$$

for $1 \leq i \leq m$. For any compact set K in $\mathbb{C}_x^m$, we have

$$\begin{aligned}
\partial_i \int_K \varphi \wedge \varphi' &= \int_K \partial_i \varphi \wedge \varphi' + \int_K \varphi \wedge \partial_i \varphi' \\
&= \int_K \partial_i (u(t, x) \cdot \varphi) \wedge \frac{\varphi'}{u(t, x)} + \int_K u(t, x) \cdot \varphi \wedge \partial_i \left(\frac{\varphi'}{u(t, x)} \right) = \int_K (\nabla_i \varphi) \wedge \varphi' + \int_K \varphi \wedge (\nabla_i^\vee \varphi').
\end{aligned}$$

We can show that the commutativity of J_x and $\nabla_i^\vee$ by following results in [M2]. These imply this lemma. $\square$

We define maps

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k &: \mathcal{H}^m(\nabla_T) \ni \varphi \mapsto \text{Res}_{x_k=0}(\nabla_X(\varphi)) \in \mathcal{H}^m(\nabla_T), \\
\mathcal{R}_{k,v} &: \mathcal{H}^m(\nabla_T) \ni \varphi \mapsto \text{Res}_{x_k=S_v \cap L_k}(\nabla_X(\varphi)) \in \mathcal{H}^m(\nabla_T),
\end{aligned}$$

where $\text{Res}_{x_k=0}(\eta)$ and $\text{Res}_{x_k=S_v \cap L_k}(\eta)$ are the residues of $\eta \in \Omega_{\tilde{X}}^{m,1}(*\tilde{S})$ with respect to the variable x_k at 0 and at the intersection point $S_v \cap L_k$ of S_v and the line L_k in X fixing the variables $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m$.

Proposition 4.3 (Orthogonal Principle). (i) *For $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$ and $\varphi' \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T^\vee)$, we have*

$$\mathcal{I}(\mathcal{R}_k(\varphi), \varphi') + \mathcal{I}(\varphi, \mathcal{R}_k^\vee(\varphi')) = 0, \quad \mathcal{I}(\mathcal{R}_{k,v}(\varphi), \varphi') + \mathcal{I}(\varphi, \mathcal{R}_{k,v}^\vee(\varphi')) = 0,$$

where $\mathcal{R}_k^\vee$ and $\mathcal{R}_{k,v}^\vee$ are naturally defined by $\nabla_X^\vee = \sum_{i=1}^m dx_i \nabla_i^\vee$ and the residue.

(ii) *Let φ and φ' be eigenvectors of $\mathcal{R}_k$ and $\mathcal{R}_k^\vee$ (resp. $\mathcal{R}_{k,v}$ and $\mathcal{R}_{k,v}^\vee$) with eigenvalues μ and μ' , respectively. If $\mu + \mu' \neq 0$ then $\mathcal{I}(\varphi, \varphi') = 0$.*

Proof. (i) We have only to see coefficients of $1/x_k$ and $1/(1 - v^t x)$ of the identity in Lemma 4.1.

(ii) Note that

$$\mathcal{I}(\mathcal{R}_k(\varphi), \varphi') + \mathcal{I}(\varphi, \mathcal{R}_k^\vee(\varphi')) = \mathcal{I}(\mu\varphi, \varphi') + \mathcal{I}(\varphi, \mu'\varphi') = (\mu + \mu')\mathcal{I}(\varphi, \varphi').$$

By (i), we have $(\mu + \mu')\mathcal{I}(\varphi, \varphi') = 0$. $\square$

Lemma 4.2. (i) Suppose that $c_k \neq 1$ when we assign a complex value to it. The eigenvalues of the map $\mathcal{R}_k$ are 0 and $-\beta_{0,k} - \beta_{1,k} = 1 - c_k$. The eigenspace W_k of the map $\mathcal{R}_k$ with eigenvalue 0 is 2^{m-1} -dimensional and expressed as

$$W_k = \langle \varphi_v - \varphi_{\sigma_k \cdot v} \mid v \in \mathbb{Z}_2^m(0_k) \rangle,$$

which is the linear span of $\varphi_v - \varphi_{\sigma_k \cdot v}$ for elements v in

$$\mathbb{Z}_2^m(0_k) = \{v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Z}_2^m \mid v_k = 0\}.$$

The eigenspace of the map $\mathcal{R}_k$ with eigenvalue $1 - c_k$ is 2^{m-1} -dimensional and

$$W_k^\perp = \langle \beta_{0,k}\varphi_v + \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v} \mid v \in \mathbb{Z}_2^m(0_k) \rangle.$$

(ii) Suppose that $\Sigma\beta_v - a \neq 0$ for a given $v \in \mathbb{Z}_2^m$ when we assign complex values to them. The eigenvalues of the map $\mathcal{R}_{k,v}$ are $\Sigma\beta_v - a$ and 0. The eigenspace W_v of the map $\mathcal{R}_{k,v}$ with eigenvalue $\Sigma\beta_v - a$ is spanned by ψ_v , and that with eigenvalue 0 is its orthogonal complement

$$W_v^\perp = \{\varphi \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T) \mid \mathcal{I}(\varphi, \psi_v) = 0\},$$

which is spanned by φ_w for $w \neq v$.

Proof. (i) Let v be an element of $\mathbb{Z}_2^m(0_k)$. Proposition 4.2 implies that

$$\mathcal{R}_k(\varphi_v - \varphi_{\sigma_k \cdot v}) = (-\beta_{0,k}\varphi_v - \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}) - (-\beta_{0,k}\varphi_{\sigma_k \cdot (\sigma_k \cdot v)} - \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k(\beta_{0,k}\varphi_v + \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}) &= \beta_{0,k}(-\beta_{0,k}\varphi_v - \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}) + \beta_{1,k}(-\beta_{0,k}\varphi_{\sigma_k \cdot (\sigma_k \cdot v)} - \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}) \\ &= (-\beta_{0,k} - \beta_{1,k})(\beta_{0,k}\varphi_v + \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}). \end{aligned}$$

Thus $\varphi_v - \varphi_{\sigma_k \cdot v}$ is an eigenvector of $\mathcal{R}_k$ with eigenvalue 0, and $\beta_{0,k}\varphi_v + \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}$ is an eigenvector of $\mathcal{R}_k$ with eigenvalue $1 - c_k$ for each $v \in \mathbb{Z}_2^m(0_k)$. Hence these eigenspaces are 2^{m-1} -dimensional.

(ii) Propositions 3.1 and 4.2 imply that

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{k,v}(a\psi_v) &= \mathcal{R}_{k,v} \left[\left(a - \sum_{j=1}^m \beta_{v_j,j} \right) \varphi_v - \sum_{j=1}^m \beta_{1-v_j,j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} \right] \\ &= - \left(a - \sum_{j=1}^m \beta_{v_j,j} \right) \left[\left(a - \sum_{j=1}^m \beta_{v_j,j} \right) \varphi_v - \sum_{j=1}^m \beta_{1-v_j,j} \varphi_{\sigma_j \cdot v} \right] = (\Sigma\beta_v - a)(a\psi_v). \end{aligned}$$

Note that the image of $\mathcal{R}_{k,v}$ is spanned by ψ_v . Proposition 4.2 also implies that $\mathcal{R}_{k,v}\varphi_w = 0$ for $w \neq v$. By Proposition 3.3, they are orthogonal to ψ_v with respect to the intersection form $\mathcal{I}$. $\square$

Lemma 4.3. Suppose that $c_k \neq 1$ when we assign a complex value to it. Then the projection $\text{pr}_k : \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T) \rightarrow W_k$ is expressed as

$$\text{pr}_k(\varphi) = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^m(0_k)} \frac{\beta_{1,k} \Pi \beta_v}{(2\pi\sqrt{-1})^m (\beta_{0,k} + \beta_{1,k})} \mathcal{I}(\varphi, (\psi_v - \psi_{\sigma_k \cdot v})) (\varphi_v - \varphi_{\sigma_k \cdot v}).$$

Proof. By Proposition 3.3, we have

$$\frac{\beta_{1,k}\Pi\beta_v}{(2\pi\sqrt{-1})^m(\beta_{0,k} + \beta_{1,k})}\mathcal{I}((\varphi_w - \varphi_{\sigma_k \cdot w}), (\psi_v - \psi_{\sigma_k \cdot v})) = \delta(v, w)$$

for $w \in \mathbb{Z}_2^m(0_k)$. Since

$$\mathcal{I}((\beta_{0,k}\varphi_v + \beta_{1,k}\varphi_{\sigma_k \cdot v}), (\psi_v - \psi_{\sigma_k \cdot v})) = 0,$$

we have

$$\mathcal{I}(\varphi, (\psi_v - \psi_{\sigma_k \cdot v})) = 0$$

for any element $\varphi \in W_k^\perp$. The restriction of the expression of pr_k to W_k is the identity, and that to $W_k^\perp$ is the zero map. $\square$

Lemma 4.4. (i) *The map $\mathcal{R}_k : \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$ is expressed as*

$$\varphi \mapsto (1 - c_k)\varphi + \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^m(0_k)} \frac{\beta_{1,k}\Pi\beta_v}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \mathcal{I}(\varphi, (\psi_v - \psi_{\sigma_k \cdot v}))(\varphi_v - \varphi_{\sigma_k \cdot v}).$$

(ii) *The map $\mathcal{R}_{k,v} : \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$ is expressed as*

$$\varphi \mapsto \frac{-a\Pi\beta_v}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \mathcal{I}(\varphi, \psi_v)\psi_v.$$

Proof. (i) At first, we assume that $c_k \neq 1$ when we assign a complex value to it. The projection from $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$ to the eigenspace $W_k^\perp$ of $\mathcal{R}_k$ with eigenvalue $1 - c_k$ is expressed as $\varphi \mapsto \varphi - \text{pr}_k(\varphi)$. Thus we have

$$\mathcal{R}_k(\varphi) = (1 - c_k)(\varphi - \text{pr}_k(\varphi)) = (1 - c_k)\varphi + (\beta_{0,k} + \beta_{1,k})\text{pr}_k(\varphi).$$

Lemma 4.3 implies the expression. Note that this expression is valid even in the case $c_k = 1$.

(ii) At first, we assume $\Sigma\beta_v - a \neq 0$ for a given $v \in \mathbb{Z}_2^m$ when we assign complex values to them. By Lemma 4.2 (ii), $\mathcal{R}_{k,v}$ is characterized as

$$\varphi \mapsto (\Sigma\beta_v - a)\mathcal{I}(\varphi, \psi_v)\mathcal{I}(\psi_v, \psi_v)^{-1}\psi_v.$$

By Proposition 3.3, we have

$$\mathcal{I}(\psi_v, \psi_v) = (2\pi\sqrt{-1})^m \frac{-(\Sigma\beta_v - a)}{a\Pi\beta_v},$$

which gives the expression. This expression is valid even in the case $\Sigma\beta_v - a = 0$. $\square$

Theorem 4.1. *Suppose that (2.2) when we assign complex values to the parameters. The restriction of ∇_X to the space $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$ is expressed as*

$$\begin{aligned} \varphi \mapsto & \sum_{k=1}^m (1 - c_k) \frac{dx_k}{x_k} \wedge \varphi + \sum_{k=1}^m \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^m(0_k)} \frac{\beta_{1,k}\Pi\beta_v}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \mathcal{I}(\varphi, (\psi_v - \psi_{\sigma_k \cdot v})) \frac{dx_k}{x_k} \wedge (\varphi_v - \varphi_{\sigma_k \cdot v}) \\ & + \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^m} \frac{-a\Pi\beta_v}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \mathcal{I}(\varphi, \psi_v) \frac{d(1 - v^t x)}{1 - v^t x} \wedge \psi_v, \end{aligned}$$

where φ_v and ψ_v are given in (3.1), $\Pi\beta_v = \prod_{i=1}^m \beta_{v_i, i}$ for $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Z}_2^m$, and we regard $d(1 - v^t x)$ as 0 for $v = (0, \dots, 0)$.

Proof. By Proposition 4.2, we see that the connection ∇_X admits simple poles only along $S \subset (\mathbb{P}^1)^m$. Thus it is expressed as

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\mathcal{R}_k}{x_k} - \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^m} \frac{\mathcal{R}_{k,v}}{1 - v^t x} \right) dx_k.$$

Use the expressions of $\mathcal{R}_k$ and $\mathcal{R}_{k,v}$ in Lemma 4.4. □

By using our frame $\{\varphi_v\}_{v \in \mathbb{Z}_2^m}$ of $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$, we represent the connection ∇_X by matrices. We set a column vector Φ by arraying φ_v 's by the total order in Definition 2.1:

$$\Phi = {}^t(\varphi_{(0,\dots,0)}, \varphi_{(1,0,\dots,0)}, \varphi_{(0,1,0,\dots,0)}, \dots, \varphi_{(1,\dots,1)}).$$

Let e_v ($v \in \mathbb{Z}_2^m$) be the unit row vectors of size 2^m satisfying $\varphi_v = e_v \Phi$. Put

$$f_v = \frac{a - \sum \beta_v}{a} e_v - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_{1-v_j, j}}{a} e_{\sigma_j \cdot v},$$

then we have

$$\psi_v = f_v \Phi$$

by Proposition 3.1.

Corollary 4.2. *Suppose that (2.2) when we assign complex values to the parameters. The map ∇_X is represented by the frame $\{\varphi_v\}_{v \in \mathbb{Z}_2^m}$ of $\mathcal{H}^m(\nabla_T)$ as*

$$\nabla_X \Phi = \Xi_\Phi \wedge \Phi,$$

$$\begin{aligned} \Xi_\Phi &= \sum_{k=1}^m (1 - c_k) \text{id}_{2^m} \frac{dx_k}{x_k} + \sum_{k=1}^m \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^m(0_k)} (\beta_{1,k} \Pi \beta_v) C {}^t(f_v - f_{\sigma_k \cdot v})(e_v - e_{\sigma_k \cdot v}) \frac{dx_k}{x_k} \\ &+ \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^m} (-a \Pi \beta_v) C {}^t f_v f_v \frac{d(1 - v^t x)}{1 - v^t x}, \end{aligned}$$

where id_{2^m} is the unit matrix of size 2^m and the intersection matrix C is given in Proposition 3.3.

Proof. We identify a row vector $z = (\dots, z_v, \dots) \in \mathbb{C}(\alpha)^{2^m}$ with an element $\varphi = z \Phi \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}(\alpha)}^m(\nabla_T)$. Then the intersection form is expressed as

$$\mathcal{I}(\varphi, \psi_v) = (2\pi\sqrt{-1})^m z C {}^t f_v.$$

Thus we have our representation Ξ_Φ of ∇_X by Theorem 4.1. □

We define a vector valued function $F(x) = {}^t(\dots, F_v(x), \dots)$ in $\mathbb{D}$ by

$$F_{(0,\dots,0)}(x) = \left(\prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(b_i) \Gamma(c_i - b_i)}{\Gamma(c_i)} \right) F_A(a, b, c; x), \quad F_v(x) = \left(\prod_{1 \leq i \leq m}^{v_i=1} x_i \partial_i \right) \cdot F_{(0,\dots,0)}(x),$$

where $F_v(x)$ ($v \in \mathbb{Z}_2^m$) are arrayed by the total order in Definition 2.1.

Corollary 4.3 (Pfaffian system of $F_A(a, b, c)$). *Suppose that (2.2) when we assign complex values to the parameters. The vector valued function $F(x)$ satisfies a Pfaffian system*

$$d_X F(x) = (P \Xi_\Phi P^{-1}) F(x),$$

where Ξ_Φ is given in Corollary 4.2 and $P = (p_{vw})_{v, w \in \mathbb{Z}_2^m}$ is defined by

$$p_{vw} = \begin{cases} \prod_{1 \leq i \leq m}^{v_i=1} (-\beta_{w_i, i}) & \text{if } v \succeq w, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. By the integral representation (2.1) of $F_A(a, b, c; x)$ and the equation (4.1), we have

$$F_v(x) = \int_{\text{reg}(0,1)^m} u(t, x) \left(\prod_{1 \leq i \leq m}^{v_i=1} x_i \nabla_i \right) \cdot \varphi_{(0, \dots, 0)}.$$

Corollary 4.1 implies

$$F(x) = P \int_{\text{reg}(0,1)^m} u(t, x) \Phi.$$

Since P is a lower triangular matrix with non-zero diagonal entries, it is invertible. Hence $F(x)$ satisfies the Pfaffian system. $\square$

Remark 4.1. *The (v, w) -entry of P^{-1} is*

$$\begin{cases} \prod_{1 \leq i \leq m}^{v_i=1, w_i=0} \beta_{0, i} / \prod_{1 \leq i \leq m}^{v_i=1} (-\beta_{1, i}) & \text{if } v \succeq w, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

REFERENCES

- [AK] K. Aomoto and M. Kita, translated by K. Iohara, *Theory of Hypergeometric Functions*, Springer Verlag, New York, 2011.
- [CM] K. Cho and K. Matsumoto, Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations I, *Nagoya Math. J.* **139** (1995), 67–86.
- [K] M. Kato, Connection formulas and irreducibility conditions for Appell's F_2 , *Kyushu J. Math.* **66** (2012), 325–363.
- [L] G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **7** (1893), 111–158.
- [M1] K. Matsumoto, Intersection numbers for logarithmic k -forms, *Osaka J. Math.* **35** (1998), 873–893.
- [M2] K. Matsumoto, Monodromy and Pfaffian of Lauricella's F_D in terms of the intersection forms of twisted (co)homology groups, *Kyushu J. Math.* **67** (2013), 367–387.
- [MY] K. Matsumoto and M. Yoshida, Monodromy of Lauricella's hypergeometric F_A -system, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **13** (2014), 551–577.
- [Y] M. Yoshida, *Fuchsian Differential Equations*, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987.

E-mail address: matsu@math.sci.hokudai.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO 060-0810, JAPAN

Macdonald 多項式とその周辺

野海正俊 述

渋川元樹, 宮永愛子 記

2015.9.1 – 9.2

はじめに

神戸大学の野海です。「超幾何学校の講師をしてくれ」と頼まれたので、ま、やることにしたんですけど、タイトルは「Macdonald 多項式とその周辺」ということにさせてもらいました。Macdonald 多項式って聞いたことがある方、実は良く知っている方とか、逆に初めて、全く聞いたことがないという方も居られると思いますが、「超幾何学校」ということなので、超幾何函数に関係していなければいけないですね。

超幾何函数というのは色々なものがあって、一番普通に、単に「超幾何」といったら Gauss の超幾何函数だと思いますが、その拡張というのは様々で、色々なものがあります。普通「超幾何函数」というときには微分方程式をベースにして、もちろん色々な側面がありますけれども、例えば多変数であれば Lauricella の A, B, C, D とか、あるいは Gelfand とか青本流の超平面配置に対応する超幾何函数とか、あるいはもっと一般にするならば A 超幾何函数とか、そういうような流れが一つあります。

多変数の超幾何にも色々あって、表現論に関係するところでは Heckman–Opdam の超幾何函数というものがあります。これは対称空間の球函数の一般化で、微分作用素の可換な族があって、その同時固有函数になっているようなものなんですけれども、そういうものがある。それから行列変数の超幾何函数というものがあって、例えば統計においては、そういう超幾何が大事になったりします。そういうものが色々あって、それらはお互いに intersection をもっていて、だから一口に「超幾何函数」といっても色々なものがあるわけです。

ここで言っている Macdonald 多項式というのは、多項式って言ってますけれども、要は微分方程式ではなく q 差分方程式をベースにする超幾何函数の一つです。さっきの例で言うと、Heckman–Opdam の超幾何微分方程式に相当する q 差分方程式があって、その同時固有函数になっていて、特に多項式解になる場合が Macdonald 多項式と呼ばれているものです。それで、タイトルには「その周辺」ってつけてし

まったんだけど、**「周辺」**をどこまで話すかって言うと、またそれも色々あるんです。

ともかく Macdonald 多項式というものを一言で言うと、多変数の q 直交多項式の一族で、広義には

ルート系 (+ 付加的データ) に付随する Weyl 群不変な q 直交 Laurent 多項式の総称です。狭義の意味では、

ルート系の意味で A 型 GL 版の場合

を指して、 $P_\lambda(x; q, t)$ とか $P_\lambda(x|q, t)$ と書きます。ここで、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ は n 変数で、 x_i は $\mathbb{C}^*$ の変数と思うのが普通ですけど、 n 次元の代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の座標になっています。それから $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ っていうのは λ_i は整数で、状況によって色々ですけど、

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

という風に大きい順にならんでいて、全部 0 以上の整数とします。こういうのは「分割」って言いますが、普通「分割」というときは、自然数を $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ と無限に並べて広義の意味で減少して、十分先は 0 としたものを指します。こういうのは Young 図形を使って表します。一行目に箱を λ_1 個並べて、二行目に λ_2 個並べて、っていう風に描いて、その行数、つまり 0 でない成分の個数を、分割 λ の成分数といいます。今の場合 $P_\lambda(x; q, t)$ は、成分数が n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ でパラメータ付けられた、適当な体 $\mathbb{K}$ の上の多項式で、対称群の作用で不変なもの。で、分割 λ を動かすと対称多項式環 $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底をなす、そういうものが Macdonald 多項式です。どういうものかは、今からだんだん説明していきます。 q と t はパラメータなので、実際には係数体として有理函数体 $\mathbb{Q}(q, t)$ をとるのが標準的かな。ただ状況によって q と t は実数だったり、複素数だったり、色んなものに読み替えてやります。

それで今回の講義で話したいことは、一番として、

Macdonald 多項式 (A 型 GL 版) とはどんなものか。

ということを説明します。定義と、まあ「超幾何函数」の一種ですから色々な公式が沢山あるんですけど、種々の特徴的な性質としてどういうことが知られているかを紹介するというのが、一つの目標。Macdonald 多項式の基本事項として知っておいてほしいこととして、どんな性質があるかを紹介します。

二番目は、…… この Macdonald 多項式が登場したのは大体、さっきの Heckman-Opdam の超幾何函数も 1987, 8 年の頃なんですけれども、恰度同じ頃です。Macdonald 自身は p -adic の球函数の理論を出発点にしたんだと思いますが、Heckman-Opdam の場合で言えば、特にその固有函数が Laurent 多項式になっている場合、Heckman-Opdam の場合は基本函数は指数函数なので指数函数の Laurent 多項式

になつてる場合を念頭に置いている訳ですけれども、その乗法的な variation っていうか、 q -analogue を作ろうというので、大体 1987,8 年頃に Macdonald がこういうものを導入しました。その後色々な進展があつて、90 年代の前半には Macdonald 多項式って、彼は……。ああ、そうか。おしゃべりを始めると色々関係する話があればこれも出てくるんですけれど(笑)。 q 直交多項式の重みになるような函数を指定して、それをトーラス上の函数として Laurent 展開したとき (Fourier 展開って言うてもいいですけれども) の定数項の値を決めようという問題があつて、定数項を予想したり、対応する直交多項式 (適当な q 差分作用素の固有函数になる) について、内積値に関する予想をいっぱい立てました。いくつかの場合については本人もやっていたと思います。

で、……。何を言いたかったのかな？ えっと、まあとにかくそういうようなことがあつて、1987,8 年頃に Macdonald は、ルート系拡張も含めて、多変数 q 直交多項式の一族、今でいうところの Macdonald 多項式を導入しました。彼が提出した予想というのが沢山あつて、そういうのが色々な人の貢献で徐々に解かれていったんですけれども。

それで、90 年代の前半になってから、Cherednik っていう人が、Macdonald の q 直交多項式に対して、アフィン Hecke 環 (あるいはもっというときには二重 (double) アフィン Hecke 環) によるアプローチを始めました。要するにアフィン Hecke 環の構造論を基礎にして、ルート系に付随するこういう種類の q 直交多項式の理論を組み立て直すことができるという訳です。それをここでは、Macdonald-Cherednik 理論 (まあ Cherednik がそういうことをやりはじめただけけれども) と称することにします。あ、元々 Cherednik 自身は Macdonald 多項式とかそれに対応する q 差分方程式よりは、いわゆる共型場理論の基礎方程式である KZ 方程式¹ っていうのがありますけれども、その q 版を Cherednik 流に構成したのがあつて、そちらがメインなんですけど、それを Macdonald 多項式の理論と関連づけることができる訳です。そういったストーリーを Macdonald 自身が定式化し直したものがあつて、それを今ここではアフィン Hecke 環からのアプローチと称しています。

という訳で、前半では Macdonald 多項式はどんなものかを紹介して、後半は、これも A 型 GL 版に限って、その場合にアフィン Hecke 環によるアプローチがどういう理論構成になるかということを紹介できればと思っています。以上を話のメインにしたいと思います。

その他にも色々あつてどこが「周辺」かよくわからないけれども、「周辺」も色々あります。ルート系と言っても被約 (reduced) なものに限って考えるか、被約でないもの (BC 型) に拡張して考えるかということもあつて、その場合は Macdonald 多項式に相当する多項式は Koornwinder 多項式と言います。普通、Gauss の超幾何函数が多項式に退化する場合って Jacobi 多項式ですよ。で、Jacobi 多項式っていうのは次数 n と α, β っていう重み函数に出てくるパラメータがある直交函数系の一族ですけれど。あんまり微分の場合との対応は事細かには言いませんけれど、A

¹Knizhnik-Zamolodchikov 方程式。

型 GL 版の Macdonald 多項式で言うと、二変数の A_1 型の場合が、Jacobi 多項式の特別な場合に対応します……。あの、Jacobi 多項式ってご存知ということでもいいですか？ 普通、重みも色々なとり方がありますけれども、 $[0, 1]$ 区間でやるんだったら $x^\alpha(1-x)^\beta$ を重み関数にするし、 $[-1, 1]$ でもいいですけども、 $\alpha = \beta$ の場合は Gegenbauer 多項式、もしくは超球 (ultra spherical) 多項式って言いますね。 A_1 型の Macdonald 多項式は、Gegenbauer 多項式の q -analogue に対応します。 Gauss に対応する一般の Jacobi 多項式まで含めようと思ったら、こういう話を BC 型に拡張する必要があります。 q 差分の世界では一変数なら Askey–Wilson 多項式、多変数なら Koornwinder 多項式ということになって、こういうのも「周辺」ですが、今回はそういうところまではお話しできません。

で、色々なやり方があるとは思いますが、今回は q 差分作用素の可換族のことを中心にお話ししようと思っています。話は A 型 GL 版に限ることにして、

1. Macdonald 多項式とはどんなものか。
定義と種々の特徴的な性質を述べる。
2. アフィン Hecke 環からのアプローチ (Macdonald-Cherednik 理論)。
アフィン Hecke 環の構造論から Macdonald 多項式の性質をとらえ直す。

を通じて、Macdonald 多項式を特徴付ける q 差分作用素の可換族が中心的なテーマです。差分作用素の可換族という意味では、楕円関数を係数とする Ruijsenaars 差分作用素の可換族というものもあります。BC 型の場合や楕円の場合まで含めれば「その周辺」が大分充実すると思いますが、そういうところまでは二コマの講義では無理なので、とにかく上の 1., 2. をお話するということを目指にします。これでも詳しくやるとキリがないんですけど、時間の許す限りで話をしたいと思っています。

ここまでで何か質問がある人は？ 大体皆さんの超幾何関数のイメージのどの辺りって感じでハマりました？

聴講者 A：すいません Jacobi 多項式っていうものの定義をちゃんと黒板に書いていただけますか？

重み関数 $x^\alpha(1-x)^\beta$ について、実係数の多項式の正定値内積を

$$(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)x^\alpha(1-x)^\beta dx$$

で定め、これを下の次数から順に直交化して得られるのが Jacobi 多項式です。これぐらいでいい？

聴講者 A：次数の下の方を具体的に書いてもらえると・・・.

定数倍の決め方は色々ありますが, $[-1, 1]$ 区間の函数として

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t) := \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix}; \frac{1-t}{2} \right)$$

で定義するのが普通でしょうか. $[0, 1]$ 区間でみるときは更に $t = 1 - 2x$ としたものがそうです. つまり Gauss の超幾何函数で二階にいる人が一人負の整数になる, つまり多項式になる場合が Jacobi 多項式です. 実際に直交関係式を書くと, $\alpha, \beta > -1$ とすると

$$\begin{aligned} (P_m^{(\alpha, \beta)}, P_n^{(\alpha, \beta)}) &:= \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \int_{-1}^1 P_m^{(\alpha, \beta)}(t) P_n^{(\alpha, \beta)}(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt \\ &= \frac{1}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!} \delta_{mn} \geq 0 \end{aligned}$$

となります.

また Jacobi 多項式は Gauss の超幾何函数の特別な場合なので, 二階の微分方程式

$$(1-t^2) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t\} \frac{dy(t)}{dt} + n(n + \alpha + \beta + 1)y(t) = 0$$

を満たすことがわかり, この微分作用素 (を $t = 1 - 2x$ と変数変換したもの) は上で定めた内積に関して自己共役になっていて, 多項式の次数を上げない. つまり次数に関する三角性を持っているので, Jacobi 多項式はこの作用素で対角化したものと思ってもいいです. 特に $\alpha = \beta$ としたのが Gegenbauer 多項式です. A 型の Macdonald 多項式というのは, この Gegenbauer 多項式を適当な変数の読み替えをして q -差分化したもの (A_1 型) です.

ともかくこの手の一変数のことに関してもいくらでも詳しくやってもいいけど, もう一コマ必要です (笑).

落合：適当に内積をいれて, 適当に直交化しようとする, その直交多項式の係数は大抵書けないと思うんですけども, Jacobi 多項式の場合には超幾何で書ける理由というのは何ですか?

それはですね, 今の場合はベータ積分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^\beta dx$$

の素性が良いということと, この内積に関するモーメント

$$(x^k, x^l) = \int_0^1 x^{\alpha+k+l} (1-x)^\beta dx$$

がそのベータ積分になっていて具体的に書けるからでしょうね. 直交多項式っていうのは, 色々なやり方はあるけれども, そういうモーメントの行列が決まればそこから機械的に直交多項式を作る方法があつて, 係数とかそういうのがみんな計算できてしまうので, そこからこういう超幾何的な表示が出てくる. と言って良いのではないのでしょうか?

落合: その事情は多変数でも同じなんですか?

それはそうではありません. そういうクラスもあるでしょうが, モーメントの計算は普通は大変です. そんなに簡単ではないと思います. あと n 変数の多項式の中に (辞書式順序でも何でもいいけど) 全順序を入れて下から重みについて直交化するというそういう考え方もあるんですけど, 今言っているやつはそういうものではなくて, 最初から対称多項式の範囲に限定して物事を考えている. そういうものの中に決まる内積に関して直交函数系のようなものをつくる, っていう風になってます. だからモーメントって言っても, この場合は対称函数の基底に関するモーメントの計算をしなければならない. こういうのは難しくて, closed には書けないのが普通じゃないのでしょうか. と, 思いますけど.

聴講者: そうすると, 上述した f と g は対称多項式なんですか?

違います. これは一変数の普通の微分の場合なのでこっちはまた別の話です. 今の場合, 上述の (f, g) で対称内積を定めると, 次数を制限するごとに非退化なので, 下から順番に直交化できるっていうそういうことです. こういう考え方は多変数でも大事なので, そういうのをあらかじめコメントしておくのは講義にとっても有益なのですけど. ああ, 良かった. まあ, 「知ってますね」で済まされるよりはの方が良いですね.

良いのでしょうか. ああ, これで 30 分経ったのか. 済みません, 段々ペースを上げます.

1 Macdonald 多項式 (A 型 GL 版)

Macdonald 多項式っていうのは q で, 「普通の微分方程式の直交多項式もあるのになんでわざわざ q 差分なんかなんでやるの?」って思う人もいるかもしれないけど, それは q 差分の世界の直交多項式っていうのはそれなりに微分の場合とはかなり違った事情で, 色々, まあ表現論的な構造とか, 組合せ論的構造とか, あるいは最近だと代数幾何のある種の母函数にもいっぱい出てくるようになってるので, 色んなところで数学に出てくるようになりました. だから... ここで一番若い人は何年生まれですか? 80 年代の終わりか, 90 年前半くらい? だけどその間に

Macdonald 多項式も物凄い成長した (笑), ヒトです. だから皆さんが生まれるより前からあった.

で正直言うと, Macdonald 多項式って分かってないこともまだあるんですけど, それは (知ってる人のために言うと) (q, t) -Kostka 多項式の組み合わせ論的構造とかそういう問題になると, まだ分かってないこと結構沢山あるんですけど, その辺のことを除くと「もう知られてないことはない」ぐらいに色んなことが良くわかっている... って言ったら言い過ぎかな... そんなことを言うと異論を挟む人がいるかもしれないけど, かなり沢山色んなことが知られています.

1.1 記法と準備

とにかくまず, A 型 GL 版の Macdonald 多項式の話をしてします. この辺はレクチャーだから基本的なところを少しやった方が良いでしょうね.

で, A 型の場合は Weyl 群不変っていうのは対称群不変なので対称多項式を考えることになって, 後では対称な Laurent 多項式を相手にした方が良いでしょうけど, 当面「対称多項式環を考えればよからう」ということで対称多項式環の話をしてします.

対称多項式環 ちょっと記号とか色々使いますので, $\mathbb{K}$ を係数体とします. で状況に応じて, さっきは q と t っていう二つのパラメータをもつ有理数係数の有理函数体だったり, あるいは場合によっては複素数体にとったり, まあ色んなことしますが, だからパラメータがみんな入っている係数体のことを $\mathbb{K}$ と書く, そういうふうに思ってください.

それで n 変数なので $x_1, \dots, x_n$ っていう n 個の変数があつて, $\mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ っていうのが多項式環ですね. これが n 変数の多項式環で, その中に $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ っていうのが入っていて, これを n 変数の対称多項式環とします. ここで, $\mathfrak{S}_n$ っていうのは n 次対称群. 要するに n 次の対称群が n 変数の多項式環に作用していて, $\mathbb{K}[x]$ は $\mathbb{K}$ 代数ですから $\mathbb{K}$ 代数の自己同型群として作用する. だから $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とするとき, $\mathbb{K}$ 代数の自己同型群だから, x_i という変数にどう作用するかが指定されれば決まるわけですけど, これは $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x]$ に対し添え字の置換として作用する:

$$\sigma(f) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

こういう状況になっています.

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{S}_n & \curvearrowright & \mathbb{K}[x] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{K}[x] \\ \psi & & \psi & & \psi \\ \sigma & \curvearrowright & f & \mapsto & \sigma(f) \end{array}$$

これに関して不変なところが不変式環

$$\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n} := \{f \in \mathbb{K}[x] \mid \sigma(f) = f\} \subseteq \mathbb{K}[x]$$

で, これを n 変数対称多項式環と呼ぶわけです.

これも余計なことだけど, 僕は自分の趣味として, 包含関係を書くとき, 等号が許される場合にはなるべく横線を入れるようにしています. この場合は $n = 1$ のときは等号になるのでこう書いてます. たまに不等号の等号を忘れるかもしれないけど, それは「絶対に等号にはならない」という意味ではないかもしれないので注意してください.²

多重指数の記法 以下, 多重指数の記号というのを盛んに使いますので, そういうのを少し話をしておきます. 多重指数っていうのは, $\mathbb{N}$ を非負整数の全体として, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ としたもので, n 変数 $x := (x_1, \dots, x_n)$ に対しては多重指数 μ に対応する単項式を単に

$$x^\mu := x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$$

と書きます. それからその次数を

$$\deg x^\mu = |\mu| := \mu_1 + \cdots + \mu_n$$

と定めます.

で, 今変数の方には「対称群 $\mathfrak{S}_n$ が作用する」って言ったんだけど, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は多重指数の空間 $\mathbb{N}^n$ (or $\mathbb{Z}^n$) にも作用します. それはどうするかというと,

$$\sigma \cdot \mu := (\mu_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \mu_{\sigma^{-1}(n)})$$

という風に成分の添え字の番号が inverse で入れ替えるっていう風にすると, これが左作用になります. ようするに成分を入れ替えるのか, 場所を入れ替えるのかの違いで, 「場所を入れ替える」方が普通なんですけど, 「成分の入れ替える」方には inverse がつくことに注意してください. とにかくこういう風に定めると,

$$\sigma(x^\mu) = x_{\sigma(1)}^{\mu_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\mu_n} = x_1^{\mu_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots x_n^{\mu_{\sigma^{-1}(n)}} = x^{\sigma \cdot \mu}$$

となって $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{K}[x]$ への作用と, 多重指数の作用が compatible になって互いに移りあうことができます.

単項式型 (monomial) 対称式 今ここで改めて $L := \mathbb{N}^n$ として更に, さっきは「分割」って言いましたけど,

$$L^+ := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in L \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

²普通は不等号って等号がついてる方 $\leq$ がメインで, 等号がつかないのは特別な場合. こっちの方が一般的な記号なのに, 集合の包含関係だけ等号がないやつを標準にしたのは Bourbaki が悪いと思います. 悪いかどうかは知りませんが, 記号に一貫性がないと思います. 半順序なんだから普通の不等号に合わせるべきですよ.

と書くことにします. すると任意の L^+ の元 λ は, 成分数が n 以下の分割で, この λ に対して単項式型対称式を

$$m_\lambda(x) := \sum_{\mu \in \mathfrak{S}_n \cdot \lambda} x^\mu$$

で定めます. ここで $\mathfrak{S}_n$ は多重指数の集合 L に作用していたわけですが, この左側からの作用で軌道分解するとちょうど任意の多重指数っていうのは, 大きい順に並べ替えをすることができて, 大きい順に並んだやつはただ一つですから, L^+ というのが軌道分解の完全代表系になります. で対称関数っていうのは, そういう軌道毎に同じ係数が並んでいるっていうのが対称関数なので, こいつら $\{m_\lambda(x)\}_{\lambda \in L^+}$ が対称関数の基底を作ってるっていうことです. 記号で書くと,

$$\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K} m_\lambda(x) \subseteq \mathbb{K}[x] = \bigoplus_{\lambda \in L} \mathbb{K} x^\lambda.$$

「どういうことが問題になるか」ということは結構デリケートなこともあるので, ちょっと例を挙げましょう.

• $\lambda = (l, 0, \dots, 0) =: (l) = \underbrace{\square \square \square \square}_l$

$$m_{(l)}(x) = x_1^l + \dots + x_n^l =: p_l(x) \quad (\text{冪和対称式}),$$

• $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_{l \text{ 個}}, 0, \dots, 0) =: (1^l) = \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\}_l$

$$m_{(1^r, 0, \dots, 0)}(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_r} =: e_r(x) \quad (\text{基本対称式}),$$

• $\lambda = (2, 1, 0, \dots, 0) = \square \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$

$$m_{(2, 1, 0, \dots, 0)}(x) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i^2 x_j.$$

優順序 (dominance ordering)³ 順序についての注意を少し. Macdonald なんかをやるときは色々精密なことがあるので, 辞書式順序 $\underset{\text{lex}}{\geq}$ ではなく, 次の優順序 (dominance ordering)⁴ がよく使われます.

$$\mu \geq \lambda \iff \begin{cases} \mu_1 \geq \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2 \\ \vdots \\ \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \\ \mu_1 + \dots + \mu_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad (|\mu| = |\lambda|) \end{cases}$$

⁴いい訳分かりませんが, ここでは dominance ordering を「優順序」と呼ぶことにします.

優順序は、辞書式順序とは違い、全順序ではありません。たとえば、 $(3, 3)$ と $(4, 1, 1)$ は

$$3 \leq 4, \quad 3 + 3 > 4 + 1$$

となつてしまい優順序による大小関係の比較はできない。しかし半順序であつて、辞書式順序との整合性があります (問 1.2 (1) 参照)。以下特に断らない限り、 $\mu, \lambda \in L$ に関する順序 $\geq$ は優順序とします。

ここで $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in L^+$ と $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathfrak{S}_n \cdot \lambda$ を比べてみましょう。まず、 λ_1 は λ の成分の中で一番大きい数で、 μ_1 は λ の成分の中のどれかなので、 $\lambda_1 \geq \mu_1$ 。次に二番目の成分を考えると、 $\lambda_1 + \lambda_2$ は $\mu_1 + \mu_2$ 以上になりますね。つまり μ_1 から μ_n は、 λ_1 から λ_n の並べ替えで、 $\lambda_1 + \lambda_2$ は λ_1 から λ_n までの大きい方から二つを取ってきて足したものなので、勝手に二つもってきて足したもの $\mu_1 + \mu_2$ はそれ以下ですよ。だからこれを繰り返していくと、次がわかります。

命題 1.1. $\lambda \in L^+$ の $\mathfrak{S}_n$ 軌道 $\mathfrak{S}_n \cdot \lambda$ の任意の元 μ に対し、 $\lambda \geq \mu$ 。

つまり軌道というのは優順序で下がっていくわけです。

ルート系 後で表現論的記号を使わなきゃいけないので、ここでまとめておきます。 $\varepsilon_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $P := \mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \varepsilon_i$ としましょう。これらを用いると、多重指数 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ も

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \varepsilon_i$$

と書くことができます。それで色んな記号があるんですけども、まず

$$\alpha_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0, \overset{j}{-1}, 0, \dots, 0) \quad (i < j)$$

とおき、こういうのを普通正ルートと呼びます。また

$$\alpha_i := \alpha_{ii+1} = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{-1}, 0, \dots, 0) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

を単純ルートといいます。もう少しちゃんと言うと、A 型 GL 版の正ルートと単純ルートはこういうものになります。あと見ればすぐ分かりますが、

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}.$$

のように正ルートは単純ルートの和に書くことができます。ここで少し問題を出しておきましょう。

問 1.2. $\mu, \nu \in P$ のとき

(1) $\mu \geq \nu$ なら $\mu \geq_{\text{lex}} \nu$.

(2) $\mu \geq \nu \iff \mu - \nu \in Q^+ \iff \mu - \nu = \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_{ij} \alpha_{ij} \quad (k_{ij} \in \mathbb{N})$.

但し, 単純ルートを用いて, ルート格子 Q を

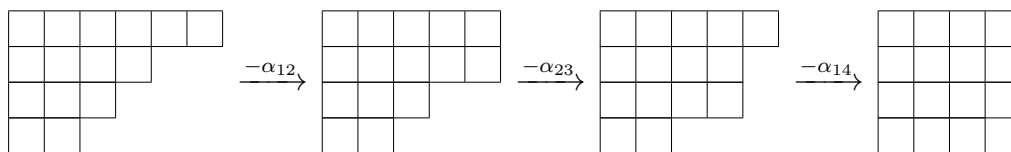
$$Q := \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z} \alpha_i$$

で定め,

$$Q^+ := \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{N} \alpha_i$$

とします.⁵

(2) の最右辺の同値関係は, λ を Young 図形で表示したときに α_{ij} が i 行目の一番端の箱を一つ取って, j 行目の一番端に一つ付け加える操作だと考えるとわかりやすいです. 言い換えると, 優順序というのは分割の上の方にある箱から下の方に一つ移すという操作を何回かやって別の多重指数に移るっていうのと同じです. たとえば $(6, 4, 3, 2)$ と $(4, 4, 4, 3)$ については, $(6, 4, 3, 2) \geq (4, 4, 4, 3)$ が成り立っていますが, これは



と箱を上から順に移していくことで移ります. 優順序はオリジナルの定義でも良いのですが, 状況によってはこのような見方も有用なので, 演習問題として紹介しました.

1.2 Schur 多項式

まだ今日の話す予定の三分の一しか話してない... ちょっとやめるかなあ. だけどやっぱり Schur 関数とか知らない困るので, Schur 多項式, この辺しようがないですね. 全然経験ないと話が始まらないので, Schur 多項式のことを少し話をします.

Macdonald 多項式っていうのは, 単項式型の対称式とか, Schur 関数とかを特別な場合として含むような対称多項式なので, 色んな性質を考えるとときに Schur 関数を持っている性質を思い描きながら色々考えるので, Schur 関数知ってないとちょっとマズイんです. Schur 関数を知らずして, Macdonald 多項式をやろうなんて人がいたら, 「そんな人数学辞めてください」 と思うよね (笑).

⁵ P の方はウェイト格子と呼びます.

それで Schur 多項式は今書いた、成分数が n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in L^+$ に対して $s_\lambda(x)$ っていうのがあって、これは定義は色々あるんですけども、行列式を使って

$$s_\lambda(x) := \frac{\det (x_i^{\lambda_j + n - j})_{i,j=1}^n}{\Delta(x)} \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}.$$

で定義します。ここで $\Delta(x)$ は差積、つまり Vandermonde の行列式

$$\Delta(x) = \Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \det (x_i^{n-j})_{i,j=1}^n$$

で、分子 $\det (x_i^{\lambda_j + n - j})_{i,j=1}^n$ の方も行列式で交代式です。なので、これは差積 $\Delta(x)$ で割り切れて、 $s_\lambda(x)$ は $\mathbb{K}[x]$ の中の対称多項式になっている。

で、Schur 関数っていうものは色々コメントを言い出すと、Schur 関数だけで一日講義しても、一週間講義しても、ひょっとしたら一年講義しても話すことはあるぐらいのテーマですけど、ちょっとだけ言っておきます⁶。

一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現の既約指標 一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現は、分割 P^+ でパラメータ付けられるような一族があって、その既約指標と呼ばれるものが Schur 多項式になっています。

半標準盤のウェイトの母関数 半標準盤 T っていうのは Young 図形 λ に 1 から n までの数を書き込んでいくんですが、下の方にみるときは必ず増加 (狭義単調増加)、横の方にみるときは等号も許して増加 (単調非減少) するように書き込んでいったものです。たとえば、 $\lambda = (2, 1)$ を例に考えると、

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

は半標準盤ですが、

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

等は半標準盤ではありません。SSTab _{n} (λ) は分割 $\lambda \in L^+$ を Young 図形とみなしたときの、半標準盤の集合で

$$\mu_i = \mu_i(T) := T \text{ に現れる } i \text{ の個数}$$

として、半標準盤 T のウェイトを $\text{wt}(T) = \mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)$ とします。これも $\lambda = (2, 1)$ を例にすると、

$$\text{SSTab}_2((2, 1)) = \left\{ T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right\}$$

⁶ こういうコメントって、知ってる人には言わずもがなで、知らない人には何を言われてるんだかわからないから、言うまでもないのかもしれないけれど、一回ぐらい聞いたことがあればそれで何かのヒントになるかもしれないので言います。

で,

$$\mu_1(T_1) = 2, \quad \mu_2(T_1) = 1, \quad \mu_1(T_2) = 1, \quad \mu_2(T_2) = 2,$$

に注意すると

$$\text{wt}(T_1) = (2, 1), \quad \text{wt}(T_2) = (1, 2),$$

となるわけです. このとき, このウェイトに関する単項式を足し挙げていったものを考えるとそれが Schur 関数になります.

$$s_\lambda(x) = \sum_{T \in \text{SSTab}_n(\lambda)} x^{\text{wt}(T)}$$

これが Schur 関数の一つの組み合わせ論的表示です. 実際, 定義より

$$s_{(2,1)}(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}}{x_1 - x_2} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2.$$

他方,

$$\sum_{T \in \text{SSTab}_2((2,1))} x^{\text{wt}(T)} = x^{\text{wt}(T_1)} + x^{\text{wt}(T_2)} = x^{(2,1)} + x^{(1,2)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$$

で確かに Schur 関数に一致することがわかります.

ここで注意して欲しいのは, 優順序に関して

$$\lambda \geq \text{wt}(T) \quad (T \in \text{SSTab}_n(\lambda))$$

ということです. というのも, 半標準盤は下の行へ書き込んでいく数は必ず増えるので, 1 が現れるのは 1 行目までだから, T に書き込まれる 1 の数 $\mu_1(T)$ は $\lambda \in L^+$ の 1 行目の箱の数 λ_1 以下になります. 同様にして 2 が現れるのも 2 行目まで, なので T に書き込まれる 1 の数と 2 の数の和 $\mu_1(T) + \mu_2(T)$ は, $\lambda \in L^+$ の 1 行目と 2 行目の箱の数 $\lambda_1 + \lambda_2$ 以下です. これを繰り返せばよいわけです.

GL_n の表現を GL_{n-1} の表現に制限したときのウェイトとか, そういうのを並べてみるのを Gelfand–Tsetlin パターンっていうんですけど, その Gelfand–Tsetlin パターンでもって既約表現の基底を決めてそれで指標を計算するとこの式が出てくる. これがこの式の表現論的な意味です.⁷

Kostka 数との関連 Schur 多項式 $s_\lambda(x) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K} m_\lambda(x)$ を単項式型対称式 $m_\lambda(x)$ で展開し直しましょう.

$$s_\lambda(x) = \sum_{\substack{\mu \in L^+ \\ \lambda \geq \mu}} K_{\lambda, \mu} m_\mu(x) = \sum_{\substack{\mu \in L \\ \lambda \geq \mu}} K_{\lambda, \mu} x^\mu.$$

⁷初めて聞いた人は忘れてください. 知ってる人はみんな知ってるから, 「そういうのがあるらしい」ということだけわかればいいので.

この展開係数 $K_{\lambda,\mu}$ は、自然数なんですけど、形が λ の半標準盤 T でウェイト $\text{wt}(T)$ がちょうど μ のものを数えた個数です。

$$\begin{aligned}\text{SSTab}_n(\lambda)_{\text{wt}=\mu} &:= \{T \in \text{SSTab}_n(\lambda) \mid \text{wt}(T) = \mu\} \\ K_{\lambda,\mu} &:= \#\text{SSTab}_n(\lambda)_{\text{wt}=\mu}.\end{aligned}$$

これもちよつと書いてみると、 $\lambda = (2, 1)$ について、さっき計算したように、

$$\text{SSTab}_2((2, 1))_{\text{wt}=(2,1)} = \left\{ T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right\}, \quad \text{SSTab}_2((2, 1))_{\text{wt}=(1,2)} = \left\{ T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right\},$$

でそれ以外の $\mu \in L$ については全て空になります。なので、 $K_{(2,1),(2,1)} = K_{(2,1),(1,2)} = 1$ でそれ以外は全て 0 となり、

$$\sum_{\substack{\mu \in L^+ \\ (2,1) \geq \mu}} K_{(2,1),\mu} m_\mu(x) = K_{(2,1),(2,1)} m_{(2,1)}(x) = m_{(2,1)}(x) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = s_{(2,1)}(x),$$

あるいは

$$\sum_{\substack{\mu \in L \\ (2,1) \geq \mu}} K_{(2,1),\mu} x^\mu = K_{(2,1),(2,1)} x^{(2,1)} + K_{(2,1),(1,2)} x^{(1,2)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = s_{(2,1)}(x)$$

となるわけです。これは Kostka 数っていうんですけど、組み合わせ論では大事な数です。

1.3 Macdonald 多項式

それで A 型 GL 版の Macdonald 多項式って何か、これから定義します。 q, t っていうパラメータを二つもってきて、これ導入の仕方も色々あるんですけど、「次の q 差分作用素 (Macdonald 作用素) を考える」っていうところから出発します。⁸

$$D_x := \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}.$$

ここで、 T_{q,x_i} は i 番目の変数についての q -差分

$$T_{q,x_i}(f)(x) := f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n)$$

です。

⁸たとえば Jacobi 多項式を定義するのに、超幾何微分方程式を書いて「この解で多項式になるよ」っていうような定義の気持ちで、 q 差分作用素を定義して「その固有函数になるよ」という形で Macdonald 多項式を定義します。

ここで D_x の各 T_{q,x_i} の係数に x の有理式が出てきていますが, これは差積 $\Delta(x)$ の t -差分 T_{t,x_i} が x_i が関係するところ以外は $\Delta(x)$ と同じなので

$$\frac{T_{t,x_i}(\Delta)(x)}{\Delta(x)} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}$$

となります. なので D_x は

$$D_x = \sum_{i=1}^n \frac{T_{t,x_i}(\Delta)(x)}{\Delta(x)} T_{q,x_i},$$

つまり全部通分すると分母が差積になることに注意しておきます.

で, 補題を述べましょう.

補題 1.3. (1) $D_x(\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}) \subseteq \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$.

(2) D_x は $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の優順序に関して三角性をもつ. すなわち,

$$D_x(m_\lambda(x)) = \sum_{\substack{\mu \in L^+ \\ \lambda \geq \mu}} m_\mu(x) d_{\mu\lambda} = m_\lambda(x) d_\lambda + \sum_{\substack{\mu \in L^+ \\ \lambda > \mu}} m_\mu(x) d_{\mu\lambda}.$$

但し, $d_\lambda := d_{\lambda\lambda}$ で,

$$d_\lambda = \sum_{i=1}^n t^{n-i} q^{\lambda_i}.$$

さっき, 重み函数に関して自己共役な作用素が多項式に作用するときに「次数を上げない」という三角性があることによって対角化できる, ということを説明しました. ちょうどそれに対応することを優順序で考えているわけです. 証明は演習にまわそうかな. でも, これは基本的なことです. つまり D_x の固有函数 (Macdonald 多項式) が本当にあって, 固有値がどうなってるっていうのをみるためには大事なところ, しかもあんまり当たり前ではないので説明します.

まず (1) ですが, $f(x) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ について, $D_x(f(x))$ は有理函数ですけど, D_x は定義から添え字の入れ替えに関して不変なので不変性は明らか. 同時にさっき注意したことから $D_x(f(x))$ の分母は差積しかないですね. なので

$$D_x(f(x)) = \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{i=1}^n T_{t,x_i}(\Delta)(x) T_{q,x_i}(f)(x) \in \mathbb{K}(x)^{\mathfrak{S}_n} \cap \frac{1}{\Delta(x)} \mathbb{K}[x]$$

となります. だから, ある多項式 $h(x)$ が存在して,

$$D_x(f(x)) = \frac{h(x)}{\Delta(x)}$$

となりますが, 今, 全体が対称式なので, $h(x)$ は交代式です. だからこれは差積で割り切れて, ある多項式 $g(x)$ があって $h(x) = \Delta(x)g(x)$ という形に書けます. よって $D_x(f(x)) = g(x)$ で, これは対称多項式になります.

(2) については, Macdonald の本でも凄い苦勞して証明してるんですが,⁹ こうやればいいんです. D_x の i 番目の項を,

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i} &= \frac{(tx_i - x_1) \cdots (tx_i - x_{i-1})(tx_i - x_{i+1}) \cdots (tx_i - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} T_{q, x_i} \\ &= t^{n-i} \prod_{1 \leq j < i} \frac{1 - tx_i/x_j}{1 - x_i/x_j} \prod_{i < j \leq n} \frac{1 - t^{-1}x_j/x_i}{1 - x_j/x_i} T_{q, x_i} \end{aligned}$$

と変形しましょう. これを x^μ にあてて, 等比級数の和の公式を使って形式的 Laurent ベキ級数環の中で展開すると,

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i}(x^\mu) &= t^{n-i} q^{\mu_i} x^\mu \prod_{1 \leq j < i} \frac{1 - tx_i/x_j}{1 - x_i/x_j} \prod_{i < j \leq n} \frac{1 - t^{-1}x_j/x_i}{1 - x_j/x_i} \\ &= t^{n-i} q^{\mu_i} x^\mu \\ &\quad \cdot \prod_{1 \leq j < i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - t \frac{x_i}{x_j}\right) \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^k \prod_{i < j \leq n} \sum_{l=0}^{\infty} \left(1 - t^{-1} \frac{x_j}{x_i}\right) \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^l \end{aligned}$$

となり, 結局

$$x^\mu \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{k_{ij}}$$

という形の単項式の和になります.

ここでさっきやった間 1.2 (2) より,

$$\mu \geq \nu \iff \mu - \nu = \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_{ij} \alpha_{ij} \quad (k_{ij} \in \mathbb{N})$$

なので, $x^\mu = x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$ と $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$ について, $\mu \geq \nu$ のとき

$$x^\nu = x^\mu \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{k_{ij}}$$

となり, また逆に x^μ と x^ν にこの関係があるとき, $\mu \geq \nu$ となります. これに注意すると, さっきの和は (無限和ですが) 優順序 $\leq$ について x^μ より lower な和になります. つまり,

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i}(x^\mu) = t^{n-i} q^{\mu_i} x^\mu + (\text{lower})$$

で, これを i に関して足しあげると,

$$D_x(x^\mu) = \left(\sum_{i=1}^n t^{n-i} q^{\mu_i} \right) x^\mu + (\text{lower}).$$

⁹後でやる Macdonald 作用素の母関数を単項型対称式への作用を計算して示す.

更に μ を $\mathfrak{S}_n \cdot \lambda$ に関して走らせて足しあげると、左辺は $D_x(m_\lambda(x))$ になるわけですが、命題 1.1 より右辺の和はいずれも λ より lower な和になることがわかり、またさっき証明した補題 1.3 の (1) よりこれは $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K} m_\lambda(x)$ の元なので、無限和ではなく λ より lower な項の有限和になり、結局

$$D_x(m_\lambda(x)) = \left(\sum_{i=1}^n t^{n-i} q^{\lambda_i} \right) m_\lambda(x) + \sum_{\substack{\mu \in L^+ \\ \lambda > \mu}} m_\mu(x) d_{\mu\lambda}.$$

という形になることがわかるわけです。

以上の準備を基に Macdonald 多項式の定義ができます。

定理 1.4. $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q, t)$ とする. 任意の $\lambda \in L^+$ に対し,

$$P_\lambda(x) = \sum_{\lambda \geq \mu} p_{\mu\lambda} m_\mu(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\lambda > \mu} p_{\mu\lambda} m_\mu(x) = x^\lambda + (\text{lower terms}), \quad (1.1)$$

$$D_x P_\lambda(x) = P_\lambda(x) d_\lambda, \quad d_\lambda = \sum_{i=1}^n t^{n-i} q^{\lambda_i}. \quad (1.2)$$

を満たす対称多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t)$ が一意に存在する. これを分割 λ に付随する (A 型 GL 版の) Macdonald 多項式とよぶ.

証明についてはさっきの補題 1.3 で大体終わってるんですが、一応言っておきます. まず存在については、 $\lambda \in L^+$ を固定して、優順序で λ 以下の単項式型対称式 $m_\mu(x)$ 達で生成される有限次元 $\mathbb{K}$ -ベクトル空間¹⁰

$$\mathbb{K}[x]_{\leq \lambda}^{\mathfrak{S}_n} := \bigoplus_{\substack{\mu \in L^+ \\ \mu \leq \lambda}} \mathbb{K} m_\mu(x)$$

を考えよう. D_x を $\mathbb{K}[x]_{\leq \lambda}^{\mathfrak{S}_n}$ 上の線型写像とみなし、基底 $\{m_\mu(x)\}_\mu$ を適当に並べて行列表示すると、補題 1.3 の (2) より、

$$D_x(\dots, m_\mu(x), \dots, m_\lambda(x)) = (\dots, m_\mu(x), \dots, m_\lambda(x)) \begin{pmatrix} \ddots & & * \\ & d_\mu & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_\lambda \end{pmatrix}$$

という半順序で上三角な行列が得られます. ここで $\lambda \neq \mu$ とすると、有理関数として $d_\lambda \neq d_\mu$ で、 D_x の固有値が全て異なるので、特に d_λ に関する固有ベクトルが存在することがわかります.

¹⁰ $m_\mu(x)$ は $m_\lambda(x)$ と次数は同じで、Young 図形の意味で下に下げていけるヤツって意味だったので、有限個しかないから有限次元.

もっと顕わに作りたければ, こうすればできます. ずるいやり方ですが, 今 D_x の固有値は全てわかっているので,

$$P_\lambda(x) := \prod_{\substack{\mu \in L^+ \\ \mu < \lambda}} \frac{D_x - d_\mu}{d_\lambda - d_\mu} m_\lambda(x) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$$

とすればいいです.

どうしてかという, まず補題 1.3 の (2) より,

$$P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\substack{\mu \in L^+ \\ \mu < \lambda}} p_{\mu\lambda} m_\mu(x) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$$

となることはよいです. 更に D_x の特性多項式は

$$\det(z \cdot \text{id}_{\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}} - D_x) = \prod_{\substack{\mu \in L^+ \\ \mu \leq \lambda}} (z - d_\mu)$$

なので, Cayley–Hamilton の定理から

$$(D_x - d_\lambda)P_\lambda(x) = 0$$

となるわけです.

一意性については $\tilde{P}_\lambda(x)$ が (1.1), (1.2) を満たしているとする, (1.1) から,

$$d_\lambda \tilde{P}_\lambda(x) = \sum_{\nu \leq \lambda} d_\lambda p_{\nu\lambda} m_\nu(x).$$

また (1.2) と補題 1.3 の (2) より,

$$\begin{aligned} d_\lambda \tilde{P}_\lambda(x) &= D_x \tilde{P}_\lambda(x) \\ &= \sum_{\nu \leq \lambda} p_{\nu\lambda} D_x m_\nu(x) \\ &= \sum_{\nu \leq \lambda} p_{\nu\lambda} \sum_{\mu \leq \nu} d_{\mu\nu} m_\mu(x) \\ &= \sum_{\mu \leq \lambda} d_\mu p_{\mu\lambda} m_\mu(x) + \sum_{\mu < \nu \leq \lambda} d_{\mu\nu} p_{\nu\lambda} m_\mu(x). \end{aligned}$$

$\{m_\nu(x)\}_\mu$ が $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{K}$ 基底なので,

$$(d_\mu - d_\nu)p_{\mu\lambda} = \sum_{\mu < \nu \leq \lambda} d_{\mu\nu} p_{\nu\lambda}, \quad p_{\lambda\lambda} = 1.$$

となって結局 $\tilde{P}_\lambda(x)$ の展開係数 $p_{\mu\lambda}$ はこの漸化式から一意に決まってしまうので, 一意性もわかるわけです.

色んなやり方はありますが, これで一応 Macdonald 多項式の導入はできたことになります. どんな性質があるかとかは今日の話の後半でやるつもりだったんだけど...

高山: 何か一問ぐらい演習問題で性質を...

あ, それなら問題あげますね.

問 1.5 (2 変数の Macdonald 多項式).

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^k$$

で,

$$D_x \varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) (tq^{\lambda_1} + q^{\lambda_2})$$

の解となるものを求めよ.

これが一変数の場合の $(q-)$ Gegenbauer に相当するものです.

問 1.6. 一行型 $P_{(r)}(x)$ と, 一列型 $P_{(1^r, 0, \dots, 0)}(x)$ の n 変数 Macdonald 多項式を具体的にもとめよ.

2 文献紹介と予定変更と一日目の復習

昨日の講義では文献の紹介をしなかったのですが, ちょっと今あげておきます. 元々 Macdonald 多項式っていうのが導入された定番の本はこれです.

[M1] I. G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition, Oxford University Press, 1995.

こういう分厚い本で我々は bible と呼んでいますけど, この 6 章に q, t について二つのパラメータが入っている A 型 GL 版の直交多項式の, Macdonald 流のアプローチのことが書いてあります.

それから二番目が

[M2] I. G. Macdonald: *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, University Lecture Series, **12** American Mathematical Soc., 1998.

53 ページぐらいの薄っぺらい本です. どっかの大学でやった講義録をベースにしてまとめた本で [M1] のダイジェスト版と [M3] のダイジェスト版を合本にしたよ

うな本です.

[M3] I. G. Macdonald: *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge Tracts in Math. **157** Cambridge University Press, 2003.

Cherednik 流のアフィン Hecke 環をベースにした直交多項式の理論を Macdonald が自分でまとめた本がこれです.

で, 昨日は A 型 GL 版について

1. Macdonald 多項式とはどんなものか.
2. アフィン Hecke 環からのアプローチ (Macdonald-Cherednik 理論).

を講義ではお話したい, と言いました. で, 昨日の話を色々しているうちに, 2. の話は来年するんですか (笑)? アフィン Hecke 環的アプローチも僕はしたかったんだけど, でも超幾何学校としては大分「代数寄り」になりすぎるかなっていうところもあるので...

高山: いや, それは何も関係ないですが...

まあ, 1. で用意したことが二コマでは消化できない可能性も高いので, とにかく普通に, ペースを上げずに, 「分かってもらうことはちゃんと分かってもらう」という趣旨で超幾何と関係するところを割合重点的に話をすることにして, 「余裕があれば少しそっちに触れるかも」ぐらいにします.

高山: ま, 今回足りなくなったら来年で...

ふふ (笑). それからアフィン Hecke 環の方は, 本格的に勉強したい人は [M3] を読めばいいし, [M2] の後ろの方にもちょっと解説が書いてあります.

それから僕自身も解説的な記事を書いているのがあって,

[野海 1] 野海正俊: Hecke 環と対称多項式 — Macdonald 多項式入門 —, 数理科学 2013 年 2 月号 量子化の発想, 2013.

6 ページぐらいの薄いヤツですけど, 全体的なストーリーはこれをみれば (細かい証明を別にすれば), アフィン Hecke 環がどういう風に関係するかは書いてあるので「それをみてください」ということですね.

それから講義録があって,

[野海 2] 野海正俊: アフィン Hecke 環と多変数直交多項式 — Macdonald – Cherednik 理論 —, 1997 年前期東北大学集中講義, 長谷川浩司 記.

百数十ページありますかね、結構長いですよ。で色んなことが書いてあって、A 型の話、BC 型の Koornwinder の話、Hecke 環的アプローチの話とか、それからこの手の q 直交多項式にまつわる話、色々入っているのでもし興味のある方はご覧ください。今は数理研の柳田伸太郎さんのホームページに入ってます¹¹。2. で話したいことはある意味でもっと詳しく書いてありますので、「それで勉強してもらえればいいかな、興味を持った人は」、というぐらいの軽い気持ちになりました。

それで昨日の続きで宜しいですか。一応昨日説明したことがどういうことだったかという、

$$P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$$

と書かれる n 変数の対称多項式で、

$$\lambda \in L^+ := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

という成分数が n 以下の分割でパラメータづけられた直交多項式の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda \in L^+}$ が存在し、優順序についての三角性と、次の q 差分方程式を満たすということでした。

$$D_x P_\lambda(x) = P_\lambda(x) d_\lambda$$

但し、 D_x は、

$$D_x = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \right) T_{q, x_i}$$

という q 差分作用素です。また d_λ は固有値で、

$$d_\lambda = \sum_{i=1}^n t^{n-i} q^{\lambda_i} = t^{n-1} q^{\lambda_1} + t^{n-2} q^{\lambda_2} + \dots + q^{\lambda_n}$$

というものです。つまり、 $(t^{n-1} q^{\lambda_1}, t^{n-2} q^{\lambda_2}, \dots, q^{\lambda_n})$ という n 個のパラメータが決まって、 d_λ はこれの総和なので、1 次の基本対称式になっています。このパラメータのことを簡単に、 $t^\delta q^\lambda$ とよく書いたりします。この δ は Macdonald がよく使っている記号で、

$$\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$$

というもの。これを staircase と言っていますが、要は階段状の分割に対応するパラメータです。

3 Macdonald 多項式 (続き)

3.1 q 超幾何級数

昨日練習問題で $n=2$ の場合の計算をしてもらおうという話をしましたが、直接に普通の超幾何のようにでてくるのはどんなところかというのを先に言っておき

¹¹<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yanagida/others-j.html>

ましょう. q 超幾何級数, つまり, q の世界での超幾何級数にあたるものを考えます. やはり超幾何学校ですから, こういうことを話しておいた方がいいですね.

${}_2\phi_1$ とよく言われる q 超幾何級数があり, Gauss の超幾何級数のある意味での q -analogue になっているものですが, これは次のようなものです.

$${}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k (b; q)_k}{(q; q)_k (c; q)_k} z^k \quad (|q| < 1, |z| < 1)$$

但し,

$$(a; q)_k = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

というのは階乗の q -analogue です. また, 無限項のものもよく使います.

$$(a; q)_{\infty} = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i a)$$

これは $|q| < 1$ で無限積が絶対収束して, a の正則函数として意味があります. こういうのが定番の記号です.

$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ を Pochhammer symbol といい, $(a; q)_k$ を q -Pochhammer symbol と呼ぶことが多いのですが, Askey によると Pochhammer は記号 $(\alpha)_k$ を Pochhammer symbol の意味で使ったことはないそうです. 彼は二項係数をあんな風にかけていて, 我々が言う Pochhammer symbol の意味では使ったことがないらしい. 世の中にはそういう, 名前がついているけれどもそれはちょっと違うんじゃないかということが結構ありますね. Askey は shifted factorial つまりずらし階乗函数と呼ぶのがいいと盛んに言っています.

q -shifted factorial $(a; q)_k$ が, どうして shifted factorial $(\alpha)_k$ の q -analogue かということですが, 全く聞いたことがないという人はいないでしょうから, 詳しく説明はせずに簡単な説明だけにしておきます. $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ というのを考えて, 例えば $q \in \mathbb{R}$ で, q が 0 から 1 に向かって増大していくと思うと, $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ は α に近づいていきます. だから, $a = q^\alpha$ とすると

$$\frac{(a; q)_k}{(1-q)^k} = \frac{(q^\alpha; q)_k}{(1-q)^k} \rightarrow (\alpha)_k$$

となる. ${}_2\phi_1$ の場合は, $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ と書いて, 各項の分母分子を $1-q$ の適当な冪で割って極限をとったと思うと, q -shifted factorial の部分から普通の shifted が出てきて, 形式的には ${}_2\phi_1$ から Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$ が出てくる. そういう意味で q -analogue です.

それから, これもついでに話しておきます. 多変数の超幾何級数の q -analogue というのは q の世界の人にはあまり使わないので定番の記号がありませんが, ここでは ϕ_D と書いておきましょう. 多重指数で書くことにします.

$$\phi_D \left(\begin{matrix} a, b_1, \dots, b_n \\ c \end{matrix}; q, z_1, \dots, z_n \right) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} \frac{(a; q)_{|\mu|} (b_1; q)_{\mu_1} \cdots (b_n; q)_{\mu_n}}{(c; q)_{|\mu|} (q; q)_{\mu_1} \cdots (q; q)_{\mu_n}} z_1^{\mu_1} \cdots z_n^{\mu_n}$$

(Lauricella の) F_D の q -analogue を作るとすると, 一番安直に考えるとこのような感じになります.

今回, Macdonald 多項式とか, q 差分方程式の解として考えているような超幾何関数というのは, 普通の意味で皆さんが想像するようなこういう超幾何関数はごく一部分で, 一般のものは顕わに超幾何級数的に書くことはできないのが普通です. それでも特別な場合にはこういうものがでてくるという状況になっています.

注意 3.1. n 変数の場合の例をあげましょう.

(1) 1 列の場合

$$\varpi_r = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0) = (1^r) = \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}_r$$

とします. また,

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \quad \alpha_n = \varepsilon_n$$

というのが単純ルートです. 本当は α_{n-1} までが単純ルートですが, GL 版の時は次元を 1 つ上げて考えているので, α_n を付け加えて考える方が便利なこともあります. すると,

$$\langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

が成り立ちます. このように, 単純ルートとウェイト格子の中で双対になっているものを基本ウェイトと言います. 基本ウェイトは表現論では非常に大事なもので, というのは, 基本ウェイトの非負整数係数の一次結合をドミナントな正ウェイトと言って, そういうものに対しては既約表現が 1 つずつ決まります. そういうものを生成するので, 基本ウェイトに対応する表現が分かると, そのテンソル積を分解していけば, 一般の既約表現が構成できる, といった文脈があります.

今の場合, 図形で考えるとすぐに分かりますが, 上から下に分割であることを保ったまま箱を動かすことはできないので, 分割で (1^r) より優順序で下にあるものは存在しません. つまり (1^r) というのは分割の中で, 優順序において minimal な元です. なのでこの場合の Macdonald 多項式は,

$$P_{(1^r)}(x; q, t) = m_{(1^r)}(x) = e_r(x)$$

であることがわかります. ただ, 基本ウェイトが優順序で minimal になるというのは A 型特有の事情で, 他のルート系では基本ウェイトだからといってそれほど簡単にはなりません.

(2) 1 行の場合

$$\lambda = (l, 0, \dots, 0) = (l) = \underbrace{\square \square \square \square}_l$$

のときは l 次の多項式です. Schur 函数の場合は l 次の完全同次対称式と言って, l 次の単項式を係数 1 で全て足し上げたものですが, これに対応するものが Macdonald 多項式の場合はどうなるかという, 次のようになります.

$$P_{(l)}(x; q, t) = \text{const.} \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n = l} \frac{(t; q)_{\mu_1} \cdots (t; q)_{\mu_n}}{(q; q)_{\mu_1} \cdots (q; q)_{\mu_n}} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$$

$\mu_1 + \dots + \mu_n = l$ をみたす多重指数のうち優順序で一番大きいのは $(l, 0, \dots, 0)$ なので,

$$\sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n = l} \frac{(t; q)_{\mu_1} \cdots (t; q)_{\mu_n}}{(q; q)_{\mu_1} \cdots (q; q)_{\mu_n}} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$$

の主要項は $\frac{(t; q)_l}{(q; q)_l} x_1^l$ です. Macdonald 多項式は主要項の係数が 1 になるように規格化したものなので, 結局次のようになります.

$$P_{(l)}(x; q, t) = \frac{(q; q)_l}{(t; q)_l} \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n = l} \frac{(t; q)_{\mu_1} \cdots (t; q)_{\mu_n}}{(q; q)_{\mu_1} \cdots (q; q)_{\mu_n}} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$$

これは n 次元の格子の中での和ですが, l で一定となるところで和をとっているの
で, 実際は $n - 1$ 次元の和です. 1 つだけ他のもので表すことにしてこの式を書き
直します. x_1^l を前に出し, $\mu_1 = l - \mu_2 - \dots - \mu_n$ を用いて q -shifted factorial をう
まく読み替え, 残りを μ_2 から μ_n で書くのが一番自然なのでそのようにすると, 次
のように書き直せます.

$$P_{(l)}(x; q, t) = x_1^l \sum_{\mu_2, \dots, \mu_n \geq 0} \frac{(q^{-l}; q)_{\mu_2 + \dots + \mu_n} (t; q)_{\mu_2} \cdots (t; q)_{\mu_n}}{(q^{1-l} t^{-1}; q)_{\mu_2 + \dots + \mu_n} (q; q)_{\mu_2} \cdots (q; q)_{\mu_n}} \left(\frac{qx_2}{tx_1} \right)^{\mu_2} \cdots \left(\frac{qx_n}{tx_1} \right)^{\mu_n}$$

これは先ほどの ϕ_D を用いて,

$$P_{(l)}(x; q, t) = x_1^l \phi_D \left(q^{-l}, t, \dots, t; q; \frac{qx_2}{tx_1}, \dots, \frac{qx_n}{tx_1} \right)$$

と書けます. これが 1 行の場合の Macdonald 多項式です. これは F_D の有限項の
場合に対応します. 1 行のときくらいは, 確かに先ほどの作用素 D_x の固有函数に
なっているなということが証明できたうれしいですが, そのためには何をすれば
いいかということを経験問題にしておこうと思います (問 5.1). すぐに固有函数が
具体的に書けたり, それが固有函数であることが具体的に証明できたりというこ
とはあまりないので, こういう場合は実際に証明してみるというのは教育的だと思
います. $n = 2$ の場合を昨日練習問題で出しましたが, その場合は ${}_2\phi_1$ です. 一般の
場合はもっと複雑になります.

聴講者: D_x という作用素を無限積のようなもので根本から理解することはできな
いのですか?

後で見るように, Macdonald 多項式は直交多項式系をなすのですが, 重み関数は無限積で書けていて, D_x の主要項は重み関数と関係しています. もう一つ無限積が重要な役割を果たすのは母関数 (核関数) との関係です. m 変数と n 変数の Macdonald 多項式の積を適当な係数で足し上げるとその和が, 無限積で表されるという構図になっていますが, これは古典型に特有な現象かも知れません. BC 型の場合にも, そういうものがありますが, 例外型のルート系でそういう核関数を無限積の形で決められるかというのは難しい問題で, よく分かりません.

聴講者: 一般には固有函数と言った場合には定数倍の差があると思いますが, そこは何故上手くいっているのですか?

今の場合は二項展開で係数が全部わかるからと言えいいのでしょうか. 何らかの方法で固有函数を構成したとすると, 何れにしても主要項を決めなければいけません. その話もあとで少し出てきます.

4 Macdonald 多項式の基本性質

ここでは, Macdonald 多項式の基本性質をいくつか挙げておきます.

今までと同様 $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ 上で考えますが, 単項式型対称式はこの対称多項式環のベクトル空間としての基底になっていて, Macdonald 多項式はその基底についての優順序における三角性をもっています. つまり, 単項式型対称式と Macdonald 多項式は互いに三角行列で基底変更でき, Macdonald 多項式もまた対称多項式環の基底となっています.

$$\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K}P_\lambda(x)$$

これは, D_x という作用素が $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ に作用するときの固有空間分解ができていて, 各固有値ごとに固有空間が 1 次元になっている, という状況です.

4.1 (パラメータの) 特殊化

パラメータ q, t を特殊化したときの Macdonald 多項式は以下ようになります.

- $t = 1$ のとき ($t = q^\kappa, \kappa = 0$ のとき)

$$D_x = \sum_{i=1}^n T_{q, x_i} \text{ より, } P_\lambda(x; q, 1) = m_\lambda(x) \text{ 単項式型対称式}$$

- $t = q$ のとき ($t = q^\kappa, \kappa = 1$ のとき)

$$P_\lambda(x; q, q) = s_\lambda(x) \text{ Schur 多項式}$$

$\kappa = \frac{1}{2}$ や $\kappa = 2$ のときは, 量子群の球函数などに出てくる場合になります.

- $q = 0$ のとき Hall–Littlewood 多項式
- $t = 0$ のとき q -Whittaker 多項式

無限変数だと q と t は duality があるので Hall–Littlewood 多項式と q -Whittaker 多項式は似たようなものですが, 有限変数だと q と t は役割が違います.

何故 $q = 0$ のときを q -Whittaker 多項式と呼んでいるかということ, dual をとると Whittaker だからですかね. 物理の人は最近をよくこのように呼んでいます.

- $t = q^\kappa$, $q \rightarrow 1$ のとき $\lim_{q \rightarrow 1} P_\lambda(x; q, q^\kappa) = P_\lambda(x; \kappa)$ Jack 多項式

先ほどと同様に, $\kappa = 0$ のときは単項式型対称式, $\kappa = 1$ のときは Schur 多項式です. また, $\kappa = \frac{1}{2}$ のときを zonal 多項式, もしくは帯球函数と呼びます. 統計をやっている方々が使う zonal 函数です. なので, 先ほど $t = q^{\frac{1}{2}}$ としたものは, zonal 多項式の q -analogue になっていると思ってください. $\kappa = 2$ のときに名前がついているかどうかは分かりませんが, $\kappa = \frac{1}{2}$ のときは SO に関係するもので, $\kappa = 2$ のときは Sp に関係するものです. Macdonald の q 差分方程式がちょうど A 型の Heckman–Opdam の超幾何微分方程式に対応していて, その対称多項式解がでてくる場合を Jack 多項式と呼んでいます. つまり, Heckman–Opdam の A 型に対応する広義の Jacobi 多項式が Jack 多項式です. また, 行列変数の ${}_2F_1$ なんかを統計の人たちがよく使っていますが, あれは BC 型にいかないと出てこないもので, A 型の範疇では見えてこないものです.

聴講者: Jack 多項式というのはもともと最初は統計で出てきたのですか?

そうですね. Jack や James とか. 表現論的に言えば, GL_n の既約表現の行列要素で, 両側 SO 不変になっているものの radial part をとれば, それが zonal 多項式です. おそらく SO 不変性ということで統計的な意味があるのでしょう.

4.2 q 差分作用素の可換族

Macdonald 多項式を定義するときは D_x という作用素 1 つだけを用いましたが, 実際にはこの D_x という作用素と可換な, 高い階数の q 差分作用素の族が存在しま

す. $r = 0, 1, \dots, n$ に対して,

$$D_x^{(r)} = t^{\binom{r}{2}} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=r} \left(\prod_{i \in I, j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \right) \prod_{i \in I} T_{q, x_i}$$

とします. するとこれは r 階の作用素ですが,

$$T_{q, x}^I = \prod_{i \in I} T_{q, x_i}$$

という記法で

$$A_I(x; t) = \frac{T_{t, x}^I \Delta(x)}{\Delta(x)} = t^{\binom{r}{2}} \prod_{i \in I, j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}$$

と書くと, 上の $D_x^{(r)}$ 次のように書き換えられます.

$$D_x^{(r)} = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=r} A_I(x; t) T_{q, x}^I$$

階数は高くなっていますが, 構造としては前の D_x と同様なので, 対称関数を対称関数に, 対称多項式を対称多項式にうつすことや, 三角性をもっているというようなことはこの表示をみればすぐに分かります. 具体的には,

$$D_x^{(0)} = 1, D_x^{(1)} = D_x, D_x^{(2)}, \dots, D_x^{(n)} = t^{\binom{n}{2}} T_{q, x_1} \cdots T_{q, x_n} \quad (\text{Euler 作用素})$$

となっています. 普通の微分のときは 0 階から数えると 1 階のところに Euler 作用素がきて, 次の 2 階の微分作用素が重要な訳ですが, 1 階のところに大事な作用素があって, 一番次数の高いところに Euler 作用素がきているのは少し違和感がありますね. また場合によってはパラメータをいれて母関数をつくっておいた方が便利なことも多いので次も書いておきましょう.

$$D_x(u) := \sum_{r=0}^n (-u)^r D_x^{(r)}$$

このとき, 次が成り立ちます.

定理 4.1 (Ruijsenaars, Macdonald). (1) 作用素の可換性:

$$D_x^{(r)} D_x^{(s)} = D_x^{(s)} D_x^{(r)} \quad (r, s = 0, 1, \dots, n),$$

$$D_x(u) D_x(v) = D_x(v) D_x(u).$$

(2) Macdonald 多項式は $D_x^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) の同時固有函数である:

$$D_x^{(r)} P_\lambda(x) = P_\lambda(x) e_r(t^\delta q^\lambda), \quad t^\delta q^\lambda = (t^{n-1} q^{\lambda_1}, \dots, t q^{\lambda_{n-1}}, q^{\lambda_n}),$$

$$D_x(u) P_\lambda(x) = P_\lambda(x) \prod_{i=1}^n (1 - u t^{n-i} q^{\lambda_i}).$$

つまり、先ほどまでは Macdonald 多項式について作用素 1 つで話をしてきましたが、実際には n 個の独立な互いに可換な q 差分作用素があって、Macdonald 多項式はそれらの同時固有函数になっている、ということをこの定理は述べています。

これまでの議論で $D_x = D_x^{(1)}$ という 1 階の作用素の固有空間分解が分かっている、固有空間はすべて 1 次元となっています。 $D_x^{(r)}$ がそれと可換ということが示せれば、 $D_x^{(r)}$ の作用は D_x の固有空間の中にとどまるしかない。だから Macdonald 多項式は $D_x^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) 全ての同時固有函数になっているはずである、ということが分かるでしょう。本当はそこがデリケートなので、どこからこういう描像に辿り着くかはいろいろな論法があります。

今は可換であることが証明できたとすればという筋で説明しましたが、実際に Ruijsenaars は 1987 年にこの可換な作用素の族を導入しています。今扱っているのは三角版で、彼が導入したのは楕円版からやっているの、楕円版、三角版、有理版全て含まれています。彼は実際にこの r と s の作用素を掛けて差分作用素としての積を計算し、両辺が等しいことを、作用素の係数の函数に対する恒等式に帰着して直接証明しています。大変おもしろい論文なので興味がある人は是非一度読んでみるか、もしくは、簡単ではないが挑戦してみてもよいと思います。

聴講者：共同研究ですか？

違います。Ruijsenaars はこういう作用素の可換族を構成した訳ですが、Macdonald は独立にその三角版を考え、彼の理論の中で結果として可換であるということを出したということで、多分かわりはないでしょう。Ruijsenaars はいわゆる量子可積分系といって、relativistic な量子可積分系の楕円函数係数版、そういったものを Ruijsenaars model と言いますが、Calogero-Moser の差分版にあたるものを研究していました。

聴講者：楕円版も可換性が言えるのですか？

Ruijsenaars は楕円版で可換性を証明していて、三角版は Corollary です。証明もあまり簡単ではないんですが、Macdonald 多項式とは独立に楕円版の可換性が直接証明されていたというのは驚きですね。

一方 Macdonald は、 $D_x^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) が三角性をもつことと、次に話す直交性の重み函数について自己共役であることを証明して、それで結局対角化されて、 D_x の固有函数が同時固有函数になる、ということを証明しました。そこからの帰結として $D_x^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) が可換になることが分かります。なので少し筋は違いますが、結果的にはこの定理が成り立つということになります。

4.3 直交函数系としての Macdonald 多項式

簡単のため $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とし, $q, t \in \mathbb{R}, 0 < q < 1, 0 < t < 1$ と仮定しましょう. $\mathbb{R}[x]$ 上の内積を次で定めます. $f, g \in \mathbb{R}[x]$ について,

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x^{-1})g(x)w(x) \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}$$

但し,

$$\mathbb{T}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{*n} \mid |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\} : n \text{ 次元トーラス}$$

とします. q -analogue というと積分は Jackson 積分じゃなければいけないと思う人もいるかもしれませんが, Macdonald 多項式というのは, 普通は Jackson 積分に関する直交函数系と思うのではなく, 本当の n 次元トーラスの上での積分です.

聴講者: 複素共役はとらないのですか?

対称内積のままで扱えるようにこの定義にしましたが, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ で, Hermite 内積にして正值性を持たせたければ, $f(x^{-1})$ の部分を $\overline{f(x)}$ に置換えて下さい. どちらにしても Macdonald 多項式の係数は q, t の $\mathbb{Q}$ 係数有理函数なので, $q, t \in \mathbb{R}$ であれば, 係数は全て実数で, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で考えれば十分ですね.

また重み函数は,

$$w(x) = \underbrace{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(x_i/x_j; q)_\infty}{(tx_i/x_j; q)_\infty}}_{w_+(x)} \underbrace{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(x_j/x_i; q)_\infty}{(tx_j/x_i; q)_\infty}}_{w_-(x)}$$

とします. $x_i/x_j = x^{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ というのは多重指数の記号で $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ に対応していて, これが正ルートでした. つまり, 正ルートに対応する単項式が x_i/x_j です ($i < j$). 従って $w_+(x)$ が正ルートに対応する部分で, $w_-(x)$ が負ルートに対応する部分です. $\frac{1}{(x; q)_\infty}$ は $|x| < 1$ で正則だから, x がトーラス上で $\text{Re}(t) < 1$ ならば $w(x)$ は正則なので, 積分は正則にできます.

この $w(x)$ を重み函数とする内積について, $D_x^{(r)}$ ($r = 0, \dots, n$) は自己共役です. ここで自己共役とは単に, $\langle Af, f \rangle = \langle f, A^*g \rangle$ とかくと $A^* = A$ となる, という意味で用いています. 自己共役であることは次のようにして確認できます. $\varpi_r = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r$ を基本ウェイトとし, $w_+(x)$ のところだけをみます.

$$\frac{T_{q,x}^{\varpi_r}(w_+(x))}{w_+(x)} = \text{const.} \prod_{1 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq n} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}$$

を考えます. これは普通の微分だと対数微分にあたるものだと思ってください. 自己共役と言っていますが, 普通の微分で考えるときは, 微分作用素を部分積分で相

手側に移すわけですね. ここでは q -shift で移します. ある変数を q だけシフトすると, トーラスの半径が少し大きくなったり小さくなったりしますが, その間に極が出てこなければ, Cauchy の積分定理で元に戻せるので, 積分値は変わりません. 大事なものはその意味の q -shift に関する不変性と, $D_x^{(r)}$ の $\mathfrak{S}_n$ 不変性です. 細かい説明はここでは省きますが,

$$f(x^{-1})g(x)w(x) = f(x^{-1})w_+(x^{-1})g(x)w_+(x)$$

と分解して $T_{q,x}^{\varpi_r}$ の共役作用素を計算することで, $D_x^{(r)}$ の自己共役性が示せます. $r = 1$ のとき, つまり D_x がこの内積に関して自己共役であることを各自確認してみてください (問 5.2). これより,

$$\langle D_x P_\lambda(x), P_\mu(x) \rangle = \langle P_\lambda(x), D_x P_\mu(x) \rangle$$

$$d_\lambda \langle P_\lambda(x), P_\mu(x) \rangle = d_\mu \langle P_\lambda(x), P_\mu(x) \rangle$$

となります. 従って,

$$d_\lambda \neq d_\mu \Rightarrow \langle P_\lambda(x), P_\mu(x) \rangle = 0$$

です. つまり, 添え字についている分割が違う Macdonald 多項式同士は直交するので, この内積に関して Macdonald 多項式は直交関数系になっています. 昨日質問をされましたが, これに対応する Jackson 積分版を考えることができ, きっと Jackson 積分に関しても直交関数系になっているはずです. なってはいるはずですが, こちらのトーラス上での積分でやるのが普通ですので..., これは考えてみます.

この内積はトーラス上積分するので留数をとることになっていて, 積分の中身を Laurent 展開したときの 1 の係数, つまり定数項に等しいです. この内積について $\langle 1, 1 \rangle$ の値を定数項予想と言い, 実際はもう解決しているので予想ではないですが, 次のようになることが分かっています.

$$\langle 1, 1 \rangle = \prod_{i=1}^n \frac{(t; q)_\infty (qt^{i-1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty (t^i; q)_\infty}$$

いろいろとやり方はありますが, 証明は簡単ではありません. また内積値 $\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle$ の明示公式も存在します. 内積値の証明をしたのは Kadell だったはずです. 何故こういった計算ができるかということは考え始めると, いろいろと面白いですね. ルート系バージョンがいろいろあるので, 色々な人が色々なやり方で定数項予想や内積値予想を解いて, Cherednik の理論が出てくるころには, E_8 型くらいがまだ残っていたかもしれませんが, それ以外は殆ど出来ていたのだらうと思います. Cherednik によるアフィン Hecke 環のアプローチが出来たことによって, ルート系の言葉で系統的に証明できるようになったというのは確かなんですが, 内積値予想の解決としては, 内容として本当に新しかったのは E_8 型のときくらいかなと言う風に思っています.

聴講者：単に見通しが良くなったというだけで、何も無かったのですか？

それは違います。内積値予想に関してはそうかもしれませんが、それ以外の部分ではご利益は山ほどあったと思います。ただ Cherednik の理論が全てという訳ではないということも言っておきたかったので。

4.4 特殊値と双対性 (双スペクトル性)

先ほど、 $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$ というのが出てきました。固有値を考えるときの、 $\lambda = 0$ の場合の $t^\delta q^\lambda$ の値、 $t^\delta = (t^{n-1}, t^{n-2}, \dots, 1)$ はある意味での基準点になっています。 δ は A 型の場合の Macdonald 式の記法で、表現論の人にとっては「いつもの ρ 」(正ルートの和の半分) と実質的に同じものです。

- (特殊値) $P_\lambda(t^\delta) = t^{n(\lambda)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(t^{j-i+1}; q)_{\lambda_i - \lambda_j}}{(t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \lambda_j}} \left(\text{但し, } n(\lambda) := \sum_{i=1}^n (i-1)\lambda_i \right)$

超幾何関数で言うと、これは 1 での値の Gauss の和公式に相当します。Macdonald の本にはもう少し組み合わせ論的なヤング図形の言葉で書いてありますが、いろいろやっているとこちらの記法の方が便利なのでこちらを紹介しておきます。

- (双対性) $\frac{P_\lambda(t^\delta q^\mu)}{P_\lambda(t^\delta)} = \frac{P_\mu(t^\delta q^\lambda)}{P_\mu(t^\delta)} \quad (\lambda, \mu \in L^+)$
 $\widetilde{P}_\lambda(x) := \frac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(t^\delta)}$ として基準点での値が 1 になるように規格化し直すと、
 $\widetilde{P}_\lambda(t^\delta q^\mu) = \widetilde{P}_\mu(t^\delta q^\lambda)$ ともかけます。 λ というのは固有値のパラメータで、 x というのは空間のパラメータですが、その空間のパラメータを $t^\delta q^\mu$ に置き換えると、位置のパラメータとスペクトル (運動量) のパラメータを交換できるというのが双スペクトル性です。今は全て分割をパラメータとしているので、これは離散的な点に関する双スペクトル性です。この話のときにはいつも

$$\partial_x(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}, \quad \partial_\lambda(e^{\lambda x}) = x e^{\lambda x}$$

を思い描くのですが、これが双スペクトル性ですね。dual な変数に対して対称性があるというわけです。

この双スペクトル性は q の世界にいつかはじめて成り立つことだと思います。Jacobi 多項式の場合には、 x についての Gauss の微分方程式と n 次の n についての漸化式だったものが、パラメータを読み替えると本質的に同じものになる、というのが Macdonald 的な世界です。微分方程式の時には、片側は微分的な構造になっ

ていて、もう片側は差分的な構造になっているという風に分かれています、 q 差分の時には、スペクトル側の変数と空間側の変数が同じに見えるというのが非常に特徴的なことです。

4.5 Pieri 公式、分岐則、タブロー表示

Macdonald 多項式同士の積はまた対称関数であるので、Macdonald 多項式の和に展開できます。

$$P_\mu(x)P_\nu(x) = \sum_{\lambda} c_{\mu,\nu}^{\lambda} P_{\lambda}(x)$$

と書いたときに、この係数 $c_{\mu,\nu}^{\lambda}$ がどうなるかというのは興味深い問題です。表現論で言うと、例えば一般線型群で考えることにして、 μ に対応する既約表現と、 ν に対応する既約表現のテンソル積をもってくると、それを既約表現に分解したときに、重複をこめてどのように既約分解するかという問題を考えて、それを character に移せば、Schur 関数の場合のこの式になります。係数 $c_{\mu,\nu}^{\lambda}$ を Littlewood-Richardson 係数などと呼びます。

聴講者：それが Cherednik 流の表現論と関係する理由ですか？

違います。そこは直接は関係ありません。

この係数は簡単には書けないのが普通ですが、明示公式が存在する場合もあります。片側が 1 列のとき、

$$e_r(x)P_{\mu}(x) = \sum_{\substack{\mu \subseteq \lambda \in L^+ \\ \lambda - \mu: \text{vertical } r\text{-strip}}} \varphi'_{\lambda/\mu} P_{\lambda}(x)$$

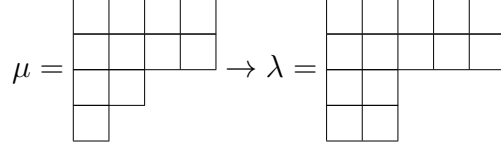
片側が 1 行のとき、

$$P_{(l)}(x) P_{\mu}(x) = \sum_{\substack{\mu \subseteq \lambda \in L^+ \\ \lambda - \mu: \text{horizontal } l\text{-strip}}} \varphi_{\lambda/\mu} P_{\lambda}(x)$$

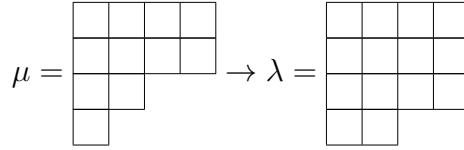
と書くと、各係数 $\varphi'_{\lambda/\mu}$ と $\varphi_{\lambda/\mu}$ の明示公式が存在します。この片側が 1 列の場合の式を Pieri 公式と言います。但し、 $\lambda - \mu : \text{vertical } r\text{-strip}$ とは、 λ が μ に、各行につき 0 個または 1 個の箱を、計 r 個付け加えたヤング図形になっていることで、horizontal l -strip とは、 λ が μ に、各列につき 0 個または 1 個の箱を、計 l 個付け加えたヤング図形になっていることを意味します。日本語に訳すなら「垂直 r 片」と「水平 l 片」というところでしょうか。

例：

$\lambda - \mu$: vertical 3-strip



$\lambda - \mu$: horizontal 3-strip



また, $m+n$ 変数の Macdonald 多項式があったときに, 変数を x 変数 (m 変数) と y 変数 (n 変数) にわけ, x 変数側の Macdonald 多項式と y 変数側の Macdonald 多項式の積の和に書け, というのを分岐則と言います.

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu, \nu}^\lambda P_\mu(x_1, \dots, x_m) P_\nu(y_1, \dots, y_n)$$

Schur 関数の場合で言うと, これは GL_{m+n} の既約表現を部分群 $\mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ の表現として既約分解すると, どのような既約表現がどのような重複度で現われるか, という問題に対応します.

ここで特に重要なのは, n 変数の Macdonald 多項式を最後の変数で展開したときに係数がどうなるかということですが, この係数の明示公式が分かっています.

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\mu \subseteq \lambda \in L^+ \\ \lambda - \mu: \text{horizontal-strip}}} P_\mu(x_1, \dots, x_{n-1}) \psi_{\lambda/\mu} x_n^{|\lambda| - |\mu|}$$

$$\psi_{\lambda/\mu} = \prod_{i < j} \frac{(q^{\mu_i - \lambda_j + 1} t^{j-i+1}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}{(q^{\mu_i - \lambda_j} t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \mu_i}} \prod_{i \leq j} \frac{(q^{\mu_i - \mu_j} t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}{(q^{\mu_i - \mu_j + 1} t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \mu_i}}$$

この 1 ステップの分岐則というがあると, これを繰り返し適用することにより n 変数の Macdonald 多項式の明示公式が得られます. それがよくタブロー表示と呼ばれるもので, 次のようにかけます.

$$P_\lambda(x) = \sum_{\phi = \mu^{(0)} \subseteq \mu^{(1)} \subseteq \dots \subseteq \mu^{(n)} = \lambda} \prod_{k=1}^n \psi_{\mu^{(k)}/\mu^{(k-1)}} x_k^{|\mu^{(k)}| - |\mu^{(k-1)}|}$$

但し, 各 $\subseteq$ は horizontal strip とします. この horizontal strip の増大列は, 形が λ の半標準版 $T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ に対応させることが出来ます. これは T で 1 が入っているところを $\mu^{(1)}$, 2 以下が入っているところを $\mu^{(2)}$, ... というように思うと, ϕ か

ら λ に至る分割の増大列 $\phi = \mu^{(0)} \subseteq \mu^{(1)} \subseteq \mu^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \mu^{(n)} = \lambda$ で、各ステップが horizontal strip になっているものが作れて、これが 1 対 1 対応になります。このやり方で、上の式は、 $\text{SSTab}_n(\lambda)$ に属する半標準版毎に係数と x の単項式が定めて、それら足し上げたものと思うことが出来て、恰度 Schur 関数のタブロー表示の Macdonald 多項式版になっています。これは Macdonald の本 (bible) に載っています。

4.6 母関数 (Cauchy 型核関数)

最後にひとつ母関数を紹介しておきます。これはさっき練習問題 (問 5.1) として計算してもらったものに関係があります。問題では n 変数の Macdonald 多項式で 1 行の場合の計算をするのに、 x を n 変数 y を 1 変数にしました。これを一般にすると、 m 変数の $x = (x_1, \dots, x_m)$ の Macdonald 多項式と n 変数の $y = (y_1, \dots, y_n)$ の Macdonald 多項式について次の形の式が成立します。

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{(tx_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty} = \sum_{l(\lambda) \leq \min\{m, n\}} b_\lambda P_\lambda(x_1, \dots, x_m) P_\lambda(y_1, \dots, y_n)$$

先ほどは片方が 1 変数という特別な場合を考えましたが、その一般的な場合です。この係数 b_λ も計算は大変ですが、明示公式が存在します。

こういう母関数的な構造に注目すると、Macdonald 多項式で変数を分割することと、同じ変数をもつ Macdonald 多項式の掛け算をするということが、母関数でぱたぱたと移りあって、実は分岐係数と Littlewood-Richardson 係数が互いに dual になっているということが分かったりもします。これは Schur 関数でいうときの Cauchy の補題

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{l(\lambda) \leq \min\{m, n\}} s_\lambda(x_1, \dots, x_m) s_\lambda(y_1, \dots, y_n)$$

にあたるものです。

5 練習問題

問 5.1. (1) q 二項定理

$$\frac{(ax; q)_\infty}{(x; q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} x^k$$

を示せ。(但し $|q| < 1$, $|x| < 1$.)

(2) n 変数の $x = (x_1, \dots, x_n)$ と 1 変数の y について

$$\prod_{i=1}^n \frac{(tx_i y; q)_\infty}{(x_i y; q)_\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(x; q, t) y^l$$

としたときの $g_l(x; q, t)$ を求めよ.

(3) 次を示せ.

$$D_x \prod_{i=1}^n \frac{(tx_i y; q)_\infty}{(x_i y; q)_\infty} = \left(t^{n-1} T_{q,y} + \frac{1-t^{n-1}}{1-t} \right) \prod_{i=1}^n \frac{(tx_i y; q)_\infty}{(x_i y; q)_\infty}$$

問 5.2. 作用素 D_x が自己共役作用素であることを確認せよ.

(コメント)

問 5.1.

(1) 左辺は x の正則関数なのでこの式は原点で Taylor 展開である. 係数を求めるには x についての q 差分方程式を考えればよい.

$$(2) \quad g_l(x; q, t) = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n = l} \frac{(t; q)_{\mu_1} \cdots (t; q)_{\mu_n}}{(q; q)_{\mu_1} \cdots (q; q)_{\mu_n}} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}.$$

(3) こういうものをよく核関係式という. 実際に作用素を作用させて出てくる有理関数の恒等式を示す.

以上より $P_{(l)}(x)$ の明示公式が導ける.

(1) で $a = q^\alpha$ として, $q \rightarrow 1$ の極限を考えると, これは Newton の二項展開

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(1)_k} x^k$$

に対応する. (2) において $t = q^\kappa$ とすると, 左辺は $q \rightarrow 1$ では二項式の冪積 $\prod_{i=1}^n (1 - x_i y)^{-\kappa}$ に対応する. 二項式の冪積を展開して y について整理すると

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i y)^{-\kappa} = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(x) y^l, \quad g_l(x) = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n = l} \frac{(\kappa)_{\mu_1} \cdots (\kappa)_{\mu_n}}{(1)_{\mu_1} \cdots (1)_{\mu_n}} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}.$$

展開係数は

$$g_l(x) = \text{Res}_{y=0} \left(y^{-l-1} \prod_{i=1}^n (1 - x_i y)^{-\kappa} dy \right) \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

と表されるが, y に関する積分は Jordan-Pochhammer 積分である. $x = (x_1, \dots, x_n)$ の関数としては, 実質的に F_D の積分表示を考えることと同じなので, 展開係数 $g_l(x)$ が F_D で表されるのは自然なことである.

(終)

合流型 A -超幾何関数とトーリックコンパクト化

竹内潔 述, 武田裕康 記

この文章は 2015 年 9 月 1~3 日に神戸大学で行なわれた「超幾何学校 2015」の竹内潔先生 (筑波大学) による講義「合流型 A -超幾何関数とトーリックコンパクト化」の講義録である。

1 1 日目

竹内です。よろしくお願いします。合流型 A -超幾何関数の話をしたいのですが、合流型 A -超幾何関数の話は A -超幾何系の話なのですが、色々 $\mathcal{D}$ -module とか背景に使うこともありますし、今日はなるべく $\mathcal{D}$ -module はあまり出さないようにやりたいと思うのですが、connection くらいは知らないとちょっとまずいと思われるので Basic なことをちょっと話してからスタートしたいと思います。

1.1 $\mathcal{D}$ -加群と connection

(ここでは、この後の議論の基礎となる $\mathcal{D}$ -加群や connection について確認する。)

これもたぶん皆さんご存知のことだと思うのですが、学生さんがいると思うのでちょっと易しい話からしたいと思いますが。

1.1.1 $\mathcal{D}$ -加群の定義

X は complex manifold としまして、この上には $\mathcal{O}_X$ という正則関数の層があるわけですが、それからあと Θ_X というのは正則ベクトル場のなす sheaf でございまして、(次を黒板に書く)

$$\Theta_X = \left\{ \sum a_i(x) \partial_i \right\}$$

正則関数を係数に持つベクトル場の sheaf のことを Θ_X と書きます。この両者を含んでいる非可換環の層として $\mathcal{D}_X$ があるのですが、その話からしたいと思います。 X の開集合 U に対して (次を黒板に書く)

$$\mathcal{D}_X(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha \right\}$$

こういう正則関数係数の偏微分作用素で、先程野海先生の話で多重指数とか出てきましたが、 $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ となります。 $a_\alpha(x)$ は holomorphic on U というように書けるものなのですが、これは局所座標の取り方によって色々な表示の仕方があるのですが、積は…これも高山先生の学生さんは皆ご存知だと思いますが、右側に正則関数 f があると思って

$$(P \circ Q)(f) := P(Q(f))$$

が成り立つように積 $\circ$ を定義します。ライプニッツルールというのはご存知だと思いますが、この $\circ$ の積で言いますと

$$\partial_i \circ x_i = x_i \partial_i + 1$$

という、こういう差が出てきます。こういうわけで、非可換環の層ですね、non commutative algebra の層というのが、非可換環の層というのができました。この $\mathcal{D}_X$ は正則関数の層と同じで接続性というのがありまして、環の層として接続的になっています。

こういうのを考えることは佐藤先生が1960年くらいのときに東大の談話会のときに話して、その当時誰もこれがわからなかったという話が伝わっておりますが。たぶん話はだいたいわかるのですが、たぶんどういう風にそれが展開するか、というのがわからなかったということではないか思います。こういう非可換環の層を導入して、その上の加群の層をこれから導入するのですが、そういうのをやって形式的なお遊びというか代数的な言い換えぐらいなことはすぐにわかるのですが、それが本質的に、飛躍的に発展していくということについて誰も当時そういうことがうまくいくとは思わなかった、ということが「わからなかった」ということの意味なのだと私は思うのですが。

定義 1. いくつか言葉を準備します。 $\mathcal{R}$ は位相空間 X 上の環の層とします。

- (1) $\mathcal{M} : X$ 上のアーベル群の層が、ここでは左 $\mathcal{R}$ 加群しか使わないのですが、左 $\mathcal{R}$ 加群、もしくは左 $\mathcal{R}$ 加群の層であるとは

任意の $U \subset X : \text{open}$ に対して、 $\mathcal{M}(U)$ が $\mathcal{R}(U)$ 加群であって、この action が開集合の restriction と可換、つまり $V \subset U : \text{open}$ として

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(U) \times \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \downarrow & \circ & \downarrow \\ \mathcal{R}(V) \times \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

が成り立つときに言います。

- (2) $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} : \mathcal{R}$ 加群 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ の間の (普通の意味での) 層準同型が $\mathcal{R}$ -linear であるとは、アーベル群の準同型

$$\mathcal{M}(U) \xrightarrow{\phi(U)} \mathcal{N}(U)$$

が $\mathcal{R}(U)$ -linear for $\forall U$ であることです。

それで、

$$\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) := \{\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} : \mathcal{R}\text{-linear}\}$$

はアーベル群になるわけでございます。こんなものを色々やって、非常に複雑で本当にこんなものを計算できるんかいな、と思うかもしれませんが、あとでやる簡単なやつだとマニプレータブル (*manupulatable*) といふかちゃんと使えるということがわかってくるといいます。

- (3) 最後、 $\mathcal{M}, \mathcal{N} : \mathcal{R}$ 加群の層としたとき、今度は柔らかい $\mathcal{H}om$ です。まあ私は元々こういう分野の人ですのでアウェー感半端ないですが…。まあこういう話を少ししたほうが後の話が少しでもわかりやすくなると思うのでわざわざやっているわけなのですが、こういう話をすっぱり切ってしまうてもいいのですが、まあちょっとお付き合いください。これは先程固い $\mathcal{H}om$ を導入しましたので、これを用いて

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})(U) := \mathcal{H}om_{\mathcal{R}|_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U)$$

こうすると、右辺がアーベル群になりますから、各開集合にこういうアーベル群が定まって、 $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ は X 上の *sheaf* になります。アーベル群の *sheaf* になっています。

今 $\mathcal{D}_X$ が上に出てきたわけですが、 $\mathcal{D}_X$ 加群の一番基本的な例として、次のようなものがあります。

Example 2. X は複素多様体として $\mathcal{O}_X$ は左 $\mathcal{D}_X$ 加群になっています。 $P \cdot f = Pf$ として自然に微分作用素としての作用があるのですが、たとえばこれを利用して自然な全射 $\mathcal{D}_X$ -linear 準同型

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_X & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & 0 \\ \wr & & \wr & & \\ P & \mapsto & P \cdot 1 & & \end{array}$$

が定まります。実際、1 に色々な偏微分作用素をぶつけてやりますと、 $\mathcal{O}_X$ 全体が生成されますので、この準同型は全射になっていまして、 $\mathcal{D}_X$ 加群の完全列ができているわけですが、もう一段つなげていくことができ、この *kernel* を考えますと、局所座標を使って書くと

$$\mathcal{D}_X / (\mathcal{D}_X \partial_1 + \cdots \mathcal{D}_X \partial_n) \simeq \mathcal{O}_X$$

こういう風に、こうなっている。これは左 $\mathcal{D}_X$ 加群の層の同型になっています。

これだけだとほとんどお遊びのようなことであんまり面白くないと思いますが、1960 年東大の談話会で佐藤先生が話された基本的な考えとして、これは誰の用語かわかりませんが、谷崎先生の用語か堀田先生の用語かとかよくわからないんですが、『佐藤の哲学』というのがありまして、あとで、接続性とは何かについて説明しますが、(次を黒板に書く)

$$\{\text{接続的 } \mathcal{D}_X \text{ 加群}\} \longleftrightarrow \{\text{linear PDE の system}\}$$

一対一で対応しているわけではないのでこれは模式的に書いているだけなのですが…。

ちょっとと接続性に慣れていない方もいらっしゃると思うので、ちょっとどういう例があるのかお話しします。この意味はこれから説明しますが、(次を黒板に書く)

$$\mathcal{D}_X^{N_0}/\mathcal{D}_X^{N_1}P \longleftrightarrow P\vec{u} = 0$$

が対応するんですが、これについて説明したいと思います。これ、1960年の東大の談話会で話して誰もわからなかったからといってですね、皆さんがわからないという可能性はありませんので安心して聞いてください。誰にでも現在では分かる話なんですね。わからなかった、という意味はその後の発展が、こういうことやって何の意味があるのか、と皆さんが思ったでしょうから、わからなかったわけであって、これから述べることは簡単なんですが、対応の意味、左辺の意味をちょっと説明しますが、(次を黒板に書く)

$$\mathcal{D}_X^{N_1} \xrightarrow{\text{左 } \mathcal{D}_X\text{-linear}} \mathcal{D}_X^{N_0} \twoheadrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{D}_X^{N_0}/\mathcal{D}_X^{N_1}P \longrightarrow 0$$

$\mathcal{D}_X$ が N_1 個横に直和をとって並んでいるわけですが、 $\mathcal{M}$ と書きますが、ここに右側から $P = (P_{ij})$ という N_1 行 N_0 列の $\mathcal{D}_X$ を係数に持つ行列型の偏微分作用素が右側からぶつかっていると考えます。この横ベクトル $\mathcal{D}_X$ の直和から $\mathcal{D}_X$ の直和への $\mathcal{D}_X$ 線形な、今右側からぶつけているので左 $\mathcal{D}_X$ -linear、この cokernel として局所的にこういう形に書けるものは $\mathcal{D}_X^{N_0}/\mathcal{D}_X^{N_1}P$ の形になります。local にこの商の形として書けるものを、連接 $\mathcal{D}_X$ 加群といいます。これがですね、 $P\vec{u} = 0$ と対応する、というわけですが、佐藤先生が考えたのは次のようなことをございまして、この上の完全列に、(先程 Hom というものをやりましたが、) 左完全関手 $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(*, \mathcal{O}_X)$ を apply すると、次のような完全列を得ることができます。

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^{N_0}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X^{N_0} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^{N_1}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X^{N_1}$$

この*のところに列を代入しますので、左完全ということは列の左側が完全ということなのですが、ここに入れると矢印の向きが全てひっくり返ります。次に $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^{N_0}, \mathcal{O}_X)$ なんですけど、ここはちょっと考えて見れば分かる通り、 $\mathcal{O}_X$ の N_0 個の直和になります。 $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X$ なので、ちょっと考えてください。普通の環の場合、 $\text{Hom}_R(R, M)$ は1の行き先を考えればすぐに全部わかってしまいますので、実は M と同型だという原理がありますので。 $\mathcal{O}_X^{N_0}$ は縦ベクトルだと思っていて、 P という matrix 型の微分作用素を左からぶつけたものの kernel がこれになる、完全列になっているわけでありまして。つまり、 $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ というのは、 $\vec{u} \in \mathcal{O}_X^{N_0}$ であって、kernel ですから $P\vec{u} = \vec{0}$ となりますね。よろしいでしょうか。この層準同型の kernel が同型になるので

$$\mathcal{D}_X^{N_0}/\mathcal{D}_X^{N_1}P \longleftrightarrow P\vec{u} = 0$$

が得られます。

これを完全列を使ってやってみましたけど、こういう風に考えることもできるわけですね。今日は夏の学校なのでこういうことも丁寧にやってみますが、 $\mathcal{M}$ は local にはこういう $(\mathcal{D}_X^{N_0}/\mathcal{D}_X^{N_1}P)$ 形だということを使ってやって、この¹ $(1, 0, 0, 0, \dots)$ とか $(0, 1, 0, 0, \dots)$ の行き先を見てやって、それらが何を満たさなければならないのかというのをこの分母か

¹ノート注. 以上は黒板での動きがないとわかりにくいですが、雰囲気伝えるためにそのまま掲載した。

ら来る部分が vanish しなければならないということを考えると、この商からここへ層準同型があるためには、生成元の行き先が条件を満たさなければならないということを考えますと、こういう風に書くこともできます。

まあ、そういう風に手作業で考えてもいいし、こういう風に functor を使ってやってもいいわけですが、いずれにせよこういう偏微分作用素、偏微分方程式の正則関数解という、皆さん非常に、解析の人が知りたい対象がこの方程式系を代表する $\mathcal{D}_X$ 加群から関数空間 $\mathcal{O}_X$ への Hom を考えてやることで回復されました。で、佐藤先生が考えたのはここ ($\mathcal{O}_X$) を hyperfunction ですとか他に C^∞ 級関数とか色々なものに取り替えるごとに解が出てくる、と。要するに偏微分方程式を考えるのに大事なものはその背景にある接続 $\mathcal{D}_X$ 加群であって、接続 $\mathcal{D}_X$ 加群を考えておけばそこから関数空間の成す層への Hom を考えること、 $\mathcal{D}_X$ -linear の Hom を考えることで、その関数空間の中での解が得られる、そういう構想を当時考えられたわけなんです。

で、まあ単なる言い換えであって、1960 年当時はこういうことが確かにできるよね、という感じでこれ以後劇的に進歩するのは 1970 年代とか 80 年代とかになる、でその後色々な所に使われるようになるというわけですが、まあこういうことです。

1.1.2 connection の定義

今何分経ったんですか？20 分、はい。ペースを上げていかないといけませんね。
これもよく知られた補題ですが、(次を黒板に書く)

Lemma 3.

$\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が左 $\mathcal{D}_X$ の構造を持つ

$$\Leftrightarrow \exists \nabla : \Theta_X \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (\nabla(\theta, s) = \nabla_\theta(s)) \text{ s.t.}$$

- (1) $\nabla_{f\theta}(s) = f\nabla_\theta(s), (\theta \in \Theta_X, f \in \mathcal{O}_X, s \in \mathcal{M})$
- (2) $\nabla_\theta(fs) = (\theta f) \cdot s + f \cdot \nabla_\theta(s), (\theta \in \Theta_X, f \in \mathcal{O}_X, s \in \mathcal{M})$
- (3) $[\nabla_{\theta_1}, \nabla_{\theta_2}](s) = \nabla_{[\theta_1, \theta_2]}(s), (\theta_1, \theta_2 \in \Theta_X, s \in \mathcal{M})$

なんか ∇ と、あと $\theta \in \Theta_X$ が作用すればいいんですが、こういう action があって、上の 3 つを満たすと。これも $\mathcal{D}$ 加群の本ならだいたい必ず書いてあることで、最初の方に書いてあることですが。これ、(3) は二つの正則ベクトル場の Lie bracket の action がそれぞれの action の bracket になっている、ということですね。

それで、代表的な例としてはですね、この Lemma が何を言っているのか、というと、 $\mathcal{O}_X$ の action とこの Θ_X の action があって、この 3 つの公理を満たすとちゃんと $\mathcal{D}_X$ の action に上っていきますよ、ということを主張しているわけでございます。で、最初の 1 番目と 2 番目はよく微分幾何の方で接続と言われているものに対応して、3 番目はちょっと特殊な条件で完全積分可能条件と言われているものでございます。ちょっと例として、簡単な場合にやってみたいと思います。

Example 4. $\mathcal{M} \stackrel{\text{locally}}{\simeq} \mathcal{O}_X^N$: 局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群が左 $\mathcal{D}_X$ 加群になるとする、でこのときですね、(次を黒板に書く)

$$\begin{array}{ccc}
\nabla_{\partial_i} : \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\
\wr & & \wr \\
\mathcal{O}_X^N & & \mathcal{O}_X^N \\
\wr & & \wr \\
\vec{u} & \longmapsto & \partial_i \vec{u} + A_i(x) \vec{u}
\end{array}$$

∇_{∂_i} がなんかあるわけですよ。 ∂_i という局所座標を定めたときの ∂_i 、 i 番目の変数についての偏微分が $\mathcal{M}$ にどう作用するのかわかるんですが、これは実際には $\vec{u} \mapsto \partial_i \vec{u} + A_i(x) \vec{u}$ と書けるというわけなんです。1 番目と 2 番目というのを使いますと、普通に各成分 $\vec{u}$ というのを偏微分して、なんか $A_i(x)$ というのは、正則関数を成分と持つような N 次正方行列であります。こんな風に書けるというのが (1) と (2) から出てくるわけですが、これ $A_i(x)$ のことを局所座標に対する *connection matrix* といいます。この、(1) と (2) ですね。それで、あの、(3) から何が出てくるか、というと、この ∂_i と ∂_j というのは i と j に関して、局所座標をとって考えればですね、この *Lie bracket* は 0 ですから $[\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}] = 0$ でなければならぬんですが、これを計算しますと、この *operator* ですね、(3) $\Rightarrow [\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}] = [\partial_i + A_i(x), \partial_j + A_j(x)]$ $\partial_i + A_i(x)$ という $\vec{u}$ に *act* するやつと $\partial_j + A_j(x)$ の *bracket* が 0 になるわけですよ。これを計算していくと、これは $\partial_i A_j(x) - \partial_j A_i(x) + [A_i(x), A_j(x)] = 0$ というのが 3 番目の条件から出てきます。で、これは任意の i と j で成り立ちます。これがいわゆる *Pfaff* 系とか超幾何微分方程式を多変数で考えるときに必ず遭遇する完全積分可能条件というのがこの条件でございます。

だから、ランクが有限な局所自由 $\mathcal{O}_X$ -加群が左 $\mathcal{D}_X$ -加群であつたら、まずその接続、古典的な意味での正則ベクトル束の接続という、微分幾何的な意味での接続というものになっていて、さらに完全積分可能条件を満たしているというわけですね。だから、局所自由 $\mathcal{O}_X$ -加群 with $\mathcal{D}_X$ -加群 structure は、こういうものはちょうど、ここは超幾何の業界なので、*Pfaff* 系という風に昔から言っているものと思いますが、*Pfaff* 系と対応しているわけですね。

局所自由 $\mathcal{O}_X$ -加群 with $\mathcal{D}_X$ -加群 structure $\xleftrightarrow{1:1}$ *Pfaff* 系 (integral connection)

Pfaff 系のことをちゃんとした言葉で書くと、integrable connection とか可積分接続とか言っているものですが、そういうものになっているわけですよ。それで、この接続 ∇ を言い換えるためにちょっと簡単な定義を。

定義 5. (*sheaf* のテンソル積) $\mathcal{R}$ を非可換環の層 on X 、 $\mathcal{M}$: 右 $\mathcal{R}$ 加群、 $\mathcal{N}$: 左 $\mathcal{R}$ 加群に対して、次の前層が作れるわけですが、(次を黒板に書く)

$$U \mapsto (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{N})'(U) := \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{N}(U)$$

前層だから「'」をつけておきますが、素朴に考えてこういうテンソル積を取ると、実はこれは前層にしかならないということが色々な例で確認されるわけですよ。で、この前層をですね、これに同伴するとか層化してできる、前層があればそこから層を作ることができるわけですが、これを $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{N}$ という風に書きます。このように *sheaf* のテンソル積を定義しました。

それで、先ほどの $\mathcal{M}$ が左 $\mathcal{D}_X$ 加群 だと

$$\mathcal{M} : \text{左 } \mathcal{D}_X \text{ 加群} \Rightarrow \exists \nabla : \mathcal{M} \xrightarrow{\mathbb{C}_X\text{-linear}} \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

こうなるわけですが、先ほどの ∇ という意味をちょっとよく考えていくとですね、先ほどのナブラと同じ記号で書いちゃいますが、こういう $\mathbb{C}_X$ -linear ですね、これは $\mathbb{C}_X$ -linear にしかならないんですが、 $\mathbb{C}_X$ は定数層でございしますが、こういうものがある、ということになります。先程 Θ_X とのペアリングでやっていましたが、ここは正則 1 形式の層というものを使っていますので同じことになるのですが、よろしいですか？これ。こういう ∇ を考えることは ∇ は $\mathcal{M}$ と Θ_X のペアから $\mathcal{M}$ への積、マップでしたけど、今はこちらに繰り込んであるから、こういうマップとして言い換えることもできるんですが。これをよく考えるわけですね。これは実は延長することができて、de Rham complex というのが出てまいります。

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \cdots \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \cdots$$

$\mathcal{M}$ はどう理解していくかといいますと、 $\mathcal{M} = \Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ ですね。0 次微分形式 Ω_X^0 とは $\mathcal{O}_X$ のことですから、 $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ と理解します。こう理解するのですが、 Ω_X^p にしますか、こう延長するのですが、この延長はどうするのかというと、これをこういう風に局所座標を使って書くと

$$\nabla : \omega \otimes s \longmapsto d\omega \otimes s + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge \omega) \otimes \partial_i s$$

とこういう、一見するとややこしく見えるかもしれませんが、こういう action で上に延ばしていくことができて、実はこれ二回作用させると 0 になるということがわかります。これいわゆる複体というものになっていまして、2 度層準同型を合成すると 0 になるので層の複体というものになっているわけです。これ、shift 付きで通常の記号とは違うんですが、これを、ここは入門的なやつなんで、 $DR_X(\mathcal{M})$ と書いて、ドラーム複体と呼びます。

それで、これもこういうことは皆さんこういうことはよくご存知で、釈迦に説法だと思うのですが、(次を黒板に書く)

Theorem 6.

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X^N \text{ が integrable connection、すなわち } \mathcal{D}_X \text{ 加群の構造を持つ} \\ & \Rightarrow \mathcal{L} := \text{Ker}[\mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}] \cdots (\star) \text{ は rank } N \text{ の局所系 } (\mathcal{L} \overset{\text{locally}}{\simeq} \mathbb{C}_X^N) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ を水平切断の層という風に名付けるのですが、(☆) の、この ∇ という共変微分をかまして 0 になる切断ですね、いろんな ∂_i に関して $\nabla_i (= \nabla_{\partial_i})$ というのを施して全部 0 になる、という意味ですが。そういうものっていうのは水平切断と言うのですが、これ $(\mathcal{M}, \nabla)$ の水平切断の層というのですが、層は rank N の局所系というものになっています。

$\mathcal{O}_X$ 加群とこの水平切断の rank が一致するというのが非常に大事なことです、local に定数層の N 個の直和になるというわけですね。これはあの、Frobenius の定理と通常言われているもの…これは私がやる必要もないので…From Gauss to Painlevé [16] に易しい

証明が書いてありますね。もしくはコーシー問題を順々に解いていってやるやり方もありますし、色々なやり方ありますが、ちょっとここでは私はやりませんが、これは非常に有名な結果で、可積分条件があったらその $\mathcal{O}_X$ 加群としての rank だけの次元の水平切断があるということを言っているわけです。

それで、たとえば、そうですね、このときにたとえば、 $\mathcal{M}$ はこういうこともわかって、(次を黒板に書く)

$$\mathcal{M}^{\mathcal{D}_X\text{-linear}} \simeq \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X^N$$

水平切断をテンソルして、これに $\mathcal{D}_X$ 加群を first factor だけに施すことで、自然に $\mathcal{D}_X$ 加群になるんですが、 $\mathcal{D}_X$ 加群として、こっちの第一成分 ($\mathcal{O}_X$) にだけ普通に偏微分が非自明に作用するようにして、こっち側 ($\mathcal{L}$) には作用させないようにしてあげますと、これが $\mathcal{D}_X$ -linear で同型になっておりまして、これは $\mathcal{O}_X$ の標準的な直和で、local に見るとさっきの接続 $\mathcal{D}_X$ 加群の直和というものに、実は変更するというか、見ることができます。こうやって、可積分接続は接続 $\mathcal{D}_X$ 加群だ、ということの証明ができる。

ちょっと大事な例を一つだけやって、すぐに次に行きたいと思います。

Example 7. (次を黒板に書く)

$$g: X \rightarrow \mathbb{C}: \text{ holomorphic}$$

g というのはなんかこう、なんか大丈夫ですかね、すっ飛ばしちやって、大丈夫ですかね。はい。正則関数 g を一つ考えて、基本的な例としてこういうものがございます。(次を黒板に書く)

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_X g = \mathcal{O}_X$$

今 *symbolic* にこういう風に、 $\mathcal{O}_X \times$ 正則関数と書いているわけですが、実際としては $\mathcal{O}_X$ そのものでございます。しかしここに接続を入れて、 $\mathcal{D}_X$ 加群としての構造を入れるわけですが、 g は *symbol* なんですけど、普通に考えたら

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f\partial_i g$$

こういう風にしたいと、ライプニッツルールで。だけど g を右側から吐き出さないといけないから、

$$= \left(\partial_i f + \frac{\partial_i g}{g} f \right) g \in \mathcal{E}$$

ですね。こうやってやると右側のやつも $\mathcal{E}$ という $\mathcal{O}_X g$ の形に g を吐き出して、ですね。要するに $\mathcal{O}_X$ の部分に

$$f \mapsto \partial_i f + \frac{\partial_i g}{g} f \quad (\star)$$

f が $(\star)$ のようにチェンジするような $\mathcal{D}_X$ 加群の構造といいますか、接続の構造を入れることができるわけでございます。

これで見ると、 f が ∂_i の *action* で以下のように

$$f \mapsto \partial_i f + \frac{\partial_i g}{g} f$$

と行っているわけですね。 g の $\log$ 微分が出てまいりまして、こういう風にチェンジしているような、こういう接続の構造を入れることができます。これは、これに関する水平切断を考えると、すぐおわかりになると思いますが、 $f = \frac{1}{g}$ のときが水平切断の条件になっております。こういうときにこの、こうやって、 $(\mathcal{E}, \nabla)$ の接続ができるわけですが、水平切断は、 ∂_i で全て零化されるものは何かといいますと、 $\mathcal{L} = \mathbb{C}_X \left(\frac{1}{g} \right)$ というものが ∇ で消されるものです。何故かという、この $\frac{1}{g}$ の定数倍が f だったら、 g と掛けて1になっちゃうから、1は全ての ∂_i で消されますね。というわけで。まあ、これ基本的な例ですけど、こうやって作ったちょっと捻った connection の水平切断は実はこういう風に水平切断を持っている。

ということで、これが使う全てというか、まああんまり複雑なことは使わないようにしますが、ちょっと半分経っちゃったんで、そろそろ A 超幾何関数に入りたいと思います。

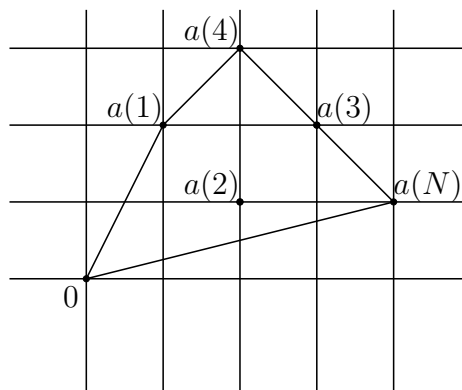
1.2 Adolphson による合流型 A 超幾何関数の定義

これを使って、confluent A 超幾何関数というのを考えていきたいわけなんですけど、まず A は

$$A = \{a(1), \dots, a(N)\} \subset \mathbb{Z}^n$$

という lattice point の有限個の集まりなんですけど、ここで述べる A -hypergeometric function の形式は GKZ[7] という基本的なもののあとに一般化があつて、Adolphson によって一般化された形式というがありまして、これは Duke math. 1994 [1] の、私もこれに影響を受けているわけですが、基本的な論文、一般化があつて、その Adolphson の流儀に合わせてちょっとお話をしたいと思います。

$a(1), \dots, a(N)$ というのは n の rank を持つ lattice の中の N 個の点です。ちょっとこれ、 n と N が同じ記号でよく叱られるのですが、これ Adolphson の論文と同じなのでたぶんいいのではないかと思います。 $\mathbb{R}^n$ の中で考えて、こうして格子点があつてですね。たとえば、 $a(1), a(2) \dots$ 。これから述べる多変数超幾何関数というのはこういう Lattice point から決まるものなのですが、原点はどこか。あの、層の話でちょっと辟易された方もここから先はよく分かるのではないかと思います。たとえば…このくらいにしますか。(次を黒板に書く)



これを考えるときに、 A のデータはちょっと次の条件を。これもあとでちょっと技術的なことを入れるのですが、(次を黒板に書く)

$$\sum_{j=1}^N \mathbb{Z}a(j) = \mathbb{Z}^n$$

この $a(j)$ という lattice vector たちが full lattice を生成するという条件をつけておきます。この条件があると $\Delta = \text{conv}(\{0\} \cup A)$ 、この conv はフランス語だと間違いとか馬鹿という意味なんです、馬鹿じゃなくて convex hull でございます。0 と A の lattice の convex hull をとるとこれは n 次元のポリトープになる。これからこの Δ をよく使います。 Δ というのはこういう風に…あんまりうまくないな。 A という点集合と 0 の凸包をとったものです。でまあ、これから述べる超幾何微分方程式はあとパラメータベクトルというものが大事になるのですが

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

この A と $\vec{c}$ というパラメータベクトルを使って何か微分方程式系が定義できるのですが、それを書きたいと思います。で、 A をですね、これ初めて見る方はちょっとまあ、あれですね。いろんな方がいると思うので、完全な specialist の方もいると思うのですが、これ(次を黒板に書く)

$$A = ({}^t a(1) | {}^t a(2) | \cdots | {}^t a(N)) = (a_{ij}) \in M(n, N; \mathbb{Z})$$

$a(1), \dots, a(N)$ という lattice vector を縦に並べて、横ベクトルたち $a(1), \dots, a(N)$ の転置をとって縦に並べまして、 n 行 N 列の整数係数の行列ができるわけでございます。で、このさっきの A とこの行列は同じ情報を共有していますから、しばしばこの行列のことをこの lattice point の集合と同一視するので、同じ記号 A を使ってやります。いいでしょうか。この A というのはさっきのこれ (lattice point の集合) と同じ情報を持っているので、同じ記号を使って、この行列を A と書くことにしましょう。で、この同一視をするのですが、このとき A という有限の格子点の集合と $\vec{c}$ に付随する、以下 $X = \mathbb{C}^N$ としますが、これは A という点の個数なので時たま $\mathbb{C}^A$ と書いたりもしますが、 X 上の confluent A -hypergeometric system を次で定めることにいたします。

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + c_i \right) u(z) = 0 & (1) \\ \left(\prod_{\mu_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{\mu_j} - \prod_{\mu_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{-\mu_j} \right) u(z) = 0 \quad (\mu \in \text{Ker } A \cap \mathbb{Z}^N) & (2) \end{cases}$$

二つ微分方程式がありまして、一番最初 (1) は A という行列の各行の係数 a_{ij} を見ていつて定義されます。 $u(z)$ は X 上の未知関数でございます。要するに A という行列の各行ごとにこういう (1) の operator が、偏微分作用素が定まります。これを P_i と呼ぶことにしましょうか。

とりあえず最初の system がこれで、二番目の system が、これもあとで説明しますが、さっきと同じ $u(z)$ がこういう方程式 (2) を満たしていますが、ここで μ というのは $\text{Ker } A \cap \mathbb{Z}^N$

の元でございます。この $\mathbb{Z}^N$ に A は左から作用します。これ、 $\mathbb{Z}$ 係数のベクトルですね、 N 次ベクトルに A というのは左から行列として act しますから、 A を左からぶつけて零化される縦ベクトル、横に書いておきますが、そういう μ を全て考えておいてですね。 μ をすべて考えて、正である μ_j の方は $\prod_{\mu_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{\mu_j}$ をとって、負の方は $\prod_{\mu_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{-\mu_j}$ をとって、(2) のような偏微分作用素を考えます。こういう二つの偏微分方程式系を、連立偏微分方程式を満たす $u(z)$ を考えることにいたします。まあ、これ、(2) は片方が積、もう片方も積になっていて引いているから、ultrahyperbolic、双曲型作用素の高次元版のような感じに見えるので、ultrahyperbolic operator と言ったりもしますが、こういう ultrahyperbolic type の方程式と普通の Euler type の方程式を mix したものでございます。

で、まああとちょっと注意としては、たとえばこういう $\mu (\in \text{Ker } A \cap \mathbb{Z}^N)$ は無限個ある、というご質問もよくあるわけですね。一般に A を普通にとると、こういう A で消される $\mathbb{Z}$ vector なんていうのは無限個あるから、無限個あって全然うまくいかないんじゃないかと思うかもしれません。しかし、定数係数微分作用素環はネーター環になっているので、その中で (2) らで生成されるイデアルというのを考えてやると実は有限生成ですから、実は有限個取ってくれば同値な方程式になっている、という言い方もできます。

こっちは実際の幾何学的な構成の背景にあるトーリックイデアルというものに実は対応しているんですが、今日はあんまりそこに深入りする時間がないので申し訳ないですが…。

先程せつかく $\mathcal{D}_X$ -module のことをやったので、対応する連接 $\mathcal{D}_X$ 加群というを考えます。まず、

$$P_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + c_i$$

と置きます。(2) も名前を、 $\square_\mu$ という風につけますね。

$$\square_\mu = \left(\prod_{\mu_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{\mu_j} - \prod_{\mu_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{-\mu_j} \right)$$

これらを用いて、次の $\mathcal{D}_X$ -加群を定義します。

$$\mathcal{M}_{A,c} = \mathcal{D}_X / \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{D}_X P_i + \sum_{\mu \in \text{Ker } A \cap \mathbb{Z}^N} \mathcal{D}_X \square_\mu \right)$$

こういう、未知関数一個なので $\mathcal{D}_X$ をなんかのイデアルで割った形をしているわけです。これをこれから考えていこうというわけなんですよね。これの正則関数解のことを confluent A -hypergeometric function という風に言います。なぜ、confluent なのかということについてこれから説明しますが、これの正則関数解、holonomic solution は最初にやったように、

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_{A,c}, \mathcal{O}_X) = \{u \in \mathcal{O}_X \mid P_i u = 0, \square_\mu u = 0\} \subset \mathcal{O}_X$$

これが正則関数解でございますが、これの切断を合流型の A -hypergeometric function と呼ぶ。これは何分までだったんでしたっけ。

(聴講者:45 分まで)

45 分、あと 35 分ですか。

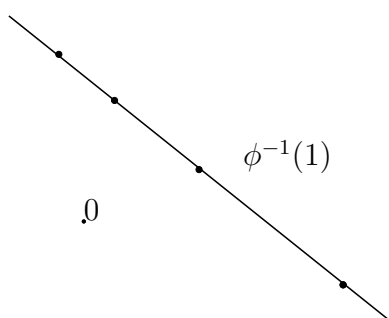
で、この方程式の解、正則関数解のことを合流型 A 超幾何関数というのですが、なぜこういう修飾詞 (confluent, 合流型) がついているのか、という簡単な説明を一つします。

Remark 8. (次を黒板に書く)

$$\text{linear } \phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{s.t. } \phi(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}$$

s.t. の条件は要するに ϕ が $\mathbb{Z}$ 係数の operator ということですね。このような ϕ が存在して、 $\phi^{-1}(1) \subset A$ であるとき、 $\mathcal{M}_{A,\vec{c}}$ は *regular holonomic* ということが、堀田先生によって証明 ([14]) されています。堀田の定理といますが、*regular holonomic* というのは、今日はちょっとそういうことをやる時間がないのですが、 $\mathcal{D}_X$ -module であって、確定特異点型の常微分方程式の高次元版に相当するような、要するに古典的な Gauss の超幾何関数とかそういう言葉で言うと、合流する前の確定特異点型のものだということですね。

で、この条件は、 $\mathbb{R}^n$ があって、原点があつて、 $\phi^{-1}(1)$ がこうあるのですが、(次を黒板に書く)



この条件はよく homogeneous 条件と呼ばれるもので、 A が原点から離れた affine plane の上に乗っているという条件ですね。この条件をです、元々 GKZ は仮定していたわけなんです。GKZ はこの仮定付きで理論を展開しました。それで、Adolphson は何をしたかというと、この条件なしでも基本的な性質が綺麗に成り立ちますよ、ということを可換環論とかを使って、いろんな美しい定理を得ているわけですが。この GKZ はこういう最初、最初の開拓者によくありがちな、なんか technical condition というのがあって、その中でうまくいくようなことをやっていました。が、後知恵でこういうことは実際いらなくなって、不確定特異点の場合も扱えるので、この条件を外したものについて「合流型」という、非常に変な、何か確定特異点型のものを合流させて不確定なもの getting 得られているわけでは全然ないんですけど…。なんかこういう古典解析と現代数学が入り混じった不思議なセンスの名前ですね。confluent という名前がついてしまいました。

まあ、そういうわけで。

(高山: どうしてそんな名前をつけたんですかね?)

それは、高山先生ではないんですか? (会場笑い) Adolphson なんですかね。もう定着しちゃったから変えようが無いですよ、もう。ナンセンスだけど…。私も confluent というのが楽しくなっちゃったので、これでいいのではないかと思いますけどね。

それで、これについて詳しく性質をこれから少しだけ述べていきたいと思います。

(聴講者:すみません、堀田先生の定理よりも前に GKZ というものがあったんですよね) はい。

(聴講者:そのときにあれですか、その条件 $A \subset \phi^{-1}(1)$ をつけていたんですかね)

ええ、GKZ は holonomic ということだけを証明していて、それが regularity を持つということについては堀田先生の対称空間に関する研究の、equivariant $\mathcal{D}$ -module に関する何かを使ってですね。

(聴講者:じゃあとりあえず、holonomic ということを用いるためにそういう条件をつけたわけなんですか?)

うーん、よくわかりませんねえ。まあ、天才の直感というか…ですね。どうして homogeneous の場合だけを考えるようになったというのは…わかりますか?

(聴講者:Koszul resolution とか考えてたから…でもあんまり関係ないはずだよね)

どうしてこれを考えると楽になると思ったのか、いまいち…。 $\mathbb{C}^*$ -homogeneity を持つというのが GKZ で使われていることで、homogeneity があると monodromic $\mathcal{D}$ -module と専門的な言葉で言いますが、 $\mathbb{C}^*$ -homogeneity な $\mathcal{D}$ module のフーリエ変換は再び regular になるというか、homogeneity がないとフーリエ変換は regularity を保たないということが良く知られていまして、その辺の technical な色々なことが交錯して homogeneity があるといろいろ楽だということがあるわけですが。はい。

$z \in X = \mathbb{C}^N$ に対してこれから使う algebraic torus $T = (\mathbb{C}^*)^n$ 上の Laurant 多項式 $h_z(x)$ を次で定めることにします。これはあとで使う大事な Laurant 多項式なんです。

$$h_z(x) := \sum_{j=1}^N z_j x^{a(j)}$$

先程の z の成分が係数にあって、ここ (x_i の指数) は負になるかもしれないので、本当に Laurant 多項式になるわけです。これを考えることにしましょう。この Laurant 多項式があとで非常に大事なことになるのです。

まずですね、超幾何関数を考えるときは、大事なのは微分方程式が connection になっているいい部分というか、smooth part というか、singularity の外というか、singular set 以外の部分が open dense にあるわけですが、それをちゃんと決めないといけません。

$z \in \mathbb{C}^N$ が Adolphson の意味で非退化²を次のように定義することにしましょう。

定義 9. Laurant 多項式 $h_z(x)$ が Adolphson の意味で非退化というのは、全ての $0 \notin \Gamma$ となる Δ の face Γ に対して、 $h_z^\Gamma(x) = \sum_{a(j) \in \Gamma} z_j x^{a(j)}$ (*Gamma part* という) の零点

$$\{x \in T \mid h_z^\Gamma(x) = 0\}$$

で $\exists i$ s.t. $\frac{\partial h_z^\Gamma}{\partial x_i} \neq 0$ であることをいいます。

これ、 Δ という原点を含む polytope があって、その中の原点を含まない面 Γ を全て考えてまして、 $h_z(x)$ の *Gamma part* というのが定める超曲面が全て smooth かつ reduced というのが non degenerate の定義でした。

²これも特異点論の意味か代数幾何の意味か、人によって全然 non degenerate の定義が異なるのですが。

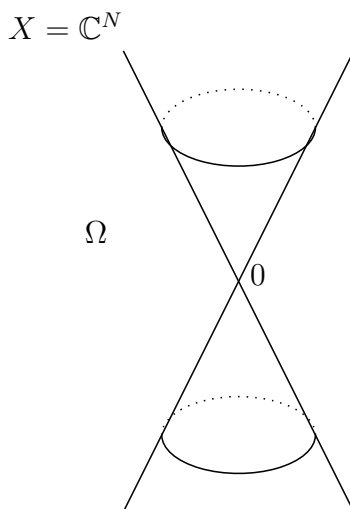
(聴講者:codimension が1のものだけ考えるんですか?)

いや、全てですね。これは非共鳴条件と違って、非共鳴条件は codimension が1 だけでいいですけど、この場合は全部考えます。

これ、この条件は要するに $h_z(x)$ という多項式の係数は z で決まっているわけですけど、この辺の係数の条件で決まっていて、この条件は z に関して実は generic な条件ですから、

$$\Omega := \{z \in X = \mathbb{C}^N \mid h_z(x) \text{ が non degenerate}\} \underset{\text{open dence}}{\subset} X$$

になりますね。この上で実は先程の $\mathcal{D}_X$ -module が connection になっているのがわかるんですが、絵で模式的に書くと (次を黒板に書く)



$X \setminus \Omega$ というのは cone になっているわけで、これは色んな連結成分に分解していて、 A -discriminant variety というものの合併になっています。私はこの研究からこれを幾何学的に知りたいというところからこっちに入ってきて、何故かこういうことをやることになっちゃったのですが…。この集合自体が割りと色んな角度から研究されていて、GKZ の有名な本 ([8]) では中心的なテーマになってて、これについて非常に多くの論文が書かれているわけで、これが微分方程式の singular set にこれからなっていくわけです。

Adolphson の定理をちょっと述べます。(次を黒板に書く)

Theorem 10 (Adolphson, 1994[1]). (i) $\mathcal{M}_{A,\vec{c}}$ は常に holonomic³

かつ、 $\mathcal{M}_{A,\vec{c}}|_{\Omega}$ は integrable connection になっている。つまり、 $\mathcal{O}_{\Omega}$ の直和になる非常に易しい $\mathcal{D}$ 加群になっていると。それから

(ii) $\vec{c} \in \mathbb{C}^n$ が non resonant⁴、generic なパラメータに対しては

$$\text{rank}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_{A,\vec{c}}|_{\Omega}) = \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta) := n! \times \text{Vol}(\Delta)$$

³これはそうですね、holonomic の定義を全然やらないで申し訳ないですけど、特性多様体を定義するには時間がかかるので今日はお断りください。あの、私今 $\mathcal{D}$ -module の易しい本を執筆しているのでそれを読めば多分誰でもわかるように書いてあるので、一、二年以内に出版するのでそれを読んでいただければ、「ああ、あのときこんなことを言っていたけど、ちゃんとやっているんだな」ということがわかると思うんですよ。説明、本で解答しますので。

⁴これもちょっと今日は略そうと思って来たんですがこれは非共鳴条件、generic condition なんですが

さっきの多面体ですけど、ここは普通の lattice を基準として普通の体積とか取ると、有理数にしかならないので、それに dimension の factorial $n!$ を掛けてやるとちゃんと整数にできるということがよく知られていて、 $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta)$ は Δ の正規化体積という幾何学的な量になっておりまして、その幾何学的な量が rank になっているということを Adolphson は証明している。

この定理と integrable connection の性質を組み合わせると、水平切断の層というのは (次を黒板に書く)

$$\mathcal{L} := \text{Ker}[\mathcal{M}_{A,\vec{c}}|_{\Omega} \rightarrow \Omega_{\Omega}^1 \otimes_{\Omega} \mathcal{M}_{A,\vec{c}}|_{\Omega}] \stackrel{\text{locally}}{\simeq} \mathbb{C}^{\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta)}$$

これ、(微分形式の) Ω と同じ記号で今気づいたんですが…新幹線の中で準備をするところというわけのわからないことになるのですが…ここでは Ω は領域です。rank は先程のフロベニウスの定理から $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta)$ に local に、なるわけですね。だから、 Ω の補集合の超局面というか、codimension の低いところもあり得るんですけど、 Ω の中で考えると各点で $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta)$ だけの解があると。

じゃあ、 $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta)$ 個の解を具体的にどうやって幾何学的に実現するのかとか、その monodromy はどうなるのかとか、asymptotic expansion はどうなるのかとか、そういったことが全部 A と $\vec{c}$ ごとに問題になるわけですが、そういうのも少しずつ分かるようになってきているので、ちょっとその話もしたいと思います。

それで、何を話すんだっけ。

一つ、積分表示というのがあるんですけど、最初の目標として積分表示を得るというのが大事なことになると思うのですが、この合流型 A 超幾何関数の積分表示がどういう風に得られるのか、ということで。これは Adolphson もこういう形で論文に書いていたんですけど。(次を黒板に書く)

$$u(z) = \int_{\gamma^z} \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j x^{a(j)}\right) x_1^{c_1-1} \cdots x_n^{c_n-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

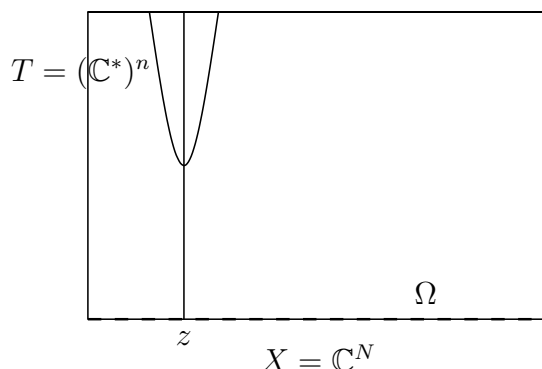
$\sum_{j=1}^N z_j x^{a(j)}$ は先程の Laurant 多項式 $h_z(x)$ ですね。Laurant 多項式を $\exp$ に代入してやって、先ほどのパラメータベクトル $\vec{c}$ を入れて、こういう風になるだろうと Adolphson はやっていました。Adolphson の論文を見てみると、これを演習問題にしますか。

Exercise 1. 上の $u(z)$ が先程の *confluent A-hypergeometric systems* (1), (2) を満たすことを確かめよ。Hint: $u(z)$ が (1) を満たすことを示すために、次を証明する。

$$x_i \partial_i \left\{ x^c \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j x^{a(j)}\right) \right\} \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_1 \cdots x_n} \text{ は完全形式である。}$$

これは専門家にとってはよく知られていることですけど、一回やってみるといいと思うので、あえてこれを出しますけど。

積分表示の意味をもう少し説明します。



$T = (\mathbb{C}^*)^n$ という代数的トーラスがあつて、それから $X = \mathbb{C}^N$ という直積空間があつて、 T と X の積を考えて、 x が T の変数ですね。 z が X の変数です。 z と x の二種類の変数がある関数を x 方向にだけ積分しているのですが、まあ、いずれにせよ Ω の外、singular set の上で何もできないですから、(上の図の破線) の部分が Ω だとして、 X 中の open set Ω の上で話を考えることにして、各点 z に対して、トーラスの中に γ^z という real n -dimensional cycle、 T は複素次元が n ですから、実次元では $2n$ なのですが、そのちょうど半分の実次元を持つような cycle を γ^z として、 T があるところの中の半分の次元の chain であつて、この無限遠方に行ったときに、被積分関数が急減少してくれるような chain を考えてやるというわけです。あと、 $u(z)$ が z の関数になるためには γ^z という chain が z に関する continuous family として動いていることを要請しています。こういう急減少 chain の continuous family に関して積分を行うと先ほどの confluent A -hypergeometric systems (1), (2) を満たすということがわかるのですが、(2) が一番簡単でたぶん今夜でもやったらすぐできると思うのですが、(1) はちょっと少し工夫が必要なのですが、あとで説明しますが。

Adolphson は論文の中で $u(z)$ が解になるということを言っているだけで、こうやって全ての confluent A -hypergeometric function が得られるとは何も言っていないわけですね。私はそれを最初に Esterov さんと一緒にそれをやろうと思って、「任意の confluent A -hypergeometric function は何かある rapid decay chain に関する積分で得られる」ということを [5] で証明しました。

(聴講者: その γ^z は少なくとも一つは存在することを示すのは簡単ですか? 難しい?)

今や全部わかってしまったので、どうなのでしょうね。その前の気持ちというのはよくわからないですね。私もたまたま、別の問題から無心に、全然こういうことをやろうと思っていなかったのだから…なんて言うんですかね。よくわからないですね。例えば $n = 1$ くらいだと色々ちょっとやってみればこうなるだろうとか。それを高次元化できるという枠組みは、Hien という人の理論をこれからちょっと紹介しますが、Hien の Invent. Math. に出た有名な論文 [12] が数年前にあるんですけど、Hien の論文に関して私の友人が筑波に来たときに「こういう論文が Invent. Math. に出て、すごいね」とヒューと言っていた。イタリア人の友人がすごい結果だなと言ってるのを聞き流していたのだけど、ヒューというのが気になって、ちゃんと読んでみようと思つたわけです。で、読んでみたらちょうどこれに枠組みを与えるということがわかつたわけで。口笛を吹いたイタリア人の友達が示唆してくれた、という…。

1.3 Hien の rapid decay cycle

じゃあ、時間がちょっと押しているのですが、Hien の rapid decay homology 群を紹介したいと思います。これがメインツールと言いますか、ここで考える急減少 cycle というのは、Hien の rapid decay homology 群の element でございます。

で、ここでは

$$U : \mathbb{C} \text{ 上の smooth (affine) algebraic variety}^5$$

$$(\mathcal{E}, \nabla) : U \text{ 上の algebraic connection, } \mathcal{E} \overset{\text{locally}}{\simeq} \mathcal{O}_U^{N6}$$

代数多様体の場合も構造層というものがあって、こういう connection を考えることができます。algebraic な ∇ を考えることができます。

この時、 $H_{\text{dR}}^p(U, \mathcal{E}, \nabla)$ というのが

$$H_{\text{dR}}^p(U, \mathcal{E}, \nabla) = H^p[0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{E}) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(U, \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{E}) \xrightarrow{\nabla} \cdots]$$

と定義できます。(algebraic) de Rham complex の global section をとって定義される p 番目の cohomology、これを algebraic de Rham cohomology といいます。で、こういうものを超越的な real structure で捉える、というのが非常に数論幾何の人とか参加してこういう研究が実はあったのですが、そうですね。これ、今 U を affine としたのはこういう風に見えるようにするためで、 U が affine でないときはこれは先ほどの algebraic de Rham complex の hypercohomology という風に理解していただければできるのですが。具体的に書くために affine を用意しましたが、よくわかっている方は affine を消しても algebraic de Rham complex の hypercohomology にすればいいんだなと思ってください。

これ、 $\mathcal{D}$ -module の本でもよくあることですが、 U の下にある analytic variety U^{an} から、これ set-theoretic では全単射なのですが、スキームとしての U とその下にある解析空間 U^{an} の間に自然な射 $U^{\text{an}} \xrightarrow{j} U$ があって、

$$j^{-1}\mathcal{O}_U \hookrightarrow \mathcal{O}_{U^{\text{an}}}$$

という環の準同型があるわけですね。これ要するに構造層の regular function を holomorphic function と思うような map があまして。この $\mathcal{E}^{\text{an}}$ を

$$\mathcal{E}^{\text{an}} = \mathcal{O}_{U^{\text{an}}} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_U} j^{-1}\mathcal{E}$$

と定義して、 ∇^{an} というのが

$$\nabla^{\text{an}} : \mathcal{E}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{an}} \otimes_{\mathcal{O}_{U^{\text{an}}}} \Omega_{U^{\text{an}}}^1$$

となり、これから horizontal section

$$\mathcal{L} := \text{Ker}(\mathcal{E}^{\text{an}} \xrightarrow{\nabla} \Omega_{U^{\text{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{U^{\text{an}}}} \mathcal{E}^{\text{an}})$$

⁵affine もつけておいた方がいいと思いますが、入門のために affine をつけているだけです。

⁶ただしここでいう locally は Zariski locally ですが。

が定義できます。

リーマン=ヒルベルト対応でもそうですが、algebraic の中だけで $\mathcal{D}$ -module に関する定理はうまく機能しません。一旦 analytic variety に降りないと、正則関数解が十分豊富にないので、たとえ algebraic $\mathcal{D}$ -module の理論でも analytic variety の上に落として analytic $\mathcal{D}$ -module の解を考えないと綺麗な対応が得られないことが知られています。従って、ここでも connection が特別な場合ですけど、水平切断は analytify してからとるんです。

これに関して歴史的なことを述べて、Hien がしたことをちょっと述べて終わりにしたいと思います。Grothendieck-Deligne の比較定理と通常呼ばれているものを紹介します。

Theorem 11 (Grothendieck-Deligne⁷).

$$(\mathcal{E}, \nabla) \text{ が } \textit{regular connection}^8 \Rightarrow H^p(U; \mathcal{E}, \nabla) \simeq H^p(U^{\text{an}}; \mathcal{L})$$

$H^p(U; \mathcal{E}, \nabla)$ はさっきも言いましたけど、hypercohomology と思えば algebraic de Rham cohomology という風に思うことができ、 $H^p(U^{\text{an}}; \mathcal{L})$ は一旦 analytify したあとの analytic variety の上の analytic de Rham complex の hypercohomology と理解されますから、要するに「Zariski topology で計算されたものがその背後にある analytic な、transcendental(超越的) な cohomology と実は一緒」ということを主張しているわけです。

これはこれで大定理なわけですね。特に $\mathcal{E} = \mathcal{O}_U$ の場合でも、Publication IHES[9] に 1960 年台に出ていて、当時の人々にとってはこれは割と衝撃的な結果というかですね、analytic な状況と Zariski 位相に関する状況が実は比較定理で一緒だということなのですが。この証明はうまくコンパクト化を使って、その上の Serre の GAGA というものを徹底的に何回も何回も使って、敷衍してどんどんやっていくことでできる証明が面白いんですが。この connection まで一般化したのは Deligne[4] でございます。これは非常に深い結果ですが。これを最近一般化しようという動きが色々ありまして、まず Bloch-Esnault[3] が $\dim U = 1$ の場合にやって、最終的に Hien がまず $\dim U = 2$ の場合を発表して、 $\dim U \geq 3$ のときは別の論文で解決したんですが、その結果を述べておきましょう。

少し言い換えましょう。

$$\mathcal{L}^* = \text{Hom}_{U^{\text{an}}}(\mathcal{L}, \mathbb{C}_{U^{\text{an}}})$$

は $\mathcal{L}$ の dual local system で、 $(\mathcal{E}, \nabla)$ の dual connection $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$ があって、もう一回 analytify しないとイケないですが、 $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$ の水平切断ですね。こういう $\mathcal{L}^*$ を使ってみると、Grothendieck-Deligne の定理というのは、次と同値ですね。これは超幾何の皆さんは私よりも随分とご存知だと思いますが、(次を黒板に書く)

$$H^p(U; \mathcal{E}, \nabla) \xleftrightarrow{\text{dual}} H_p(U^{\text{an}}, \mathcal{L}^*)$$

⁷ ノート注. Grothendieck が [9] で外微分の場合を、Deligne が [4] で connection の場合を示した。後述参照

⁸ regular connection とは何かについて説明していませんが、堀田-谷崎-竹内の三人で書いた英語の本 [15] を読んでいただくと「曲線でテストして無限遠点まで込めて regular だ」という条件が書いてあるので、それを参照に。

これが互いに双対、perfect pairing と言ってもいいですが、これが互いに dual になっている、という statement に書き換えられるというわけです。この irregular version をこれから説明したいと思います。regular という条件はきついので、これを外して似たような感じの duality theorem というのが考えられました。

時間が段々と押してきているので、あと5分くらいで終わりますが。

Theorem 12 (Hien. 2009[12]⁹). $(\mathcal{E}, \nabla)$ が *regular connection* でなくても、うまく rapid decay homology 群 $H_p(U; \mathcal{E}^*, \nabla^*)$ が (この構成は後ほどやりますが、) 定義できて

$$H^p(U; \mathcal{E}, \nabla) \xleftarrow{\text{dual}} H_p(U; \mathcal{E}^*, \nabla^*) \quad (\forall p \in \mathbb{Z})$$

となります。これは U のうまいコンパクト化をしないと定義できないんですが。この定義は徐々にやりますが、このような duality theorem が成り立ちます。

それで、一般的には構成をうまく説明するのは難しいですが、これが証明できた理由は Sabbah-Mochizuki による最近の発展があつて (次を黒板に書く)

$\exists i : U \hookrightarrow Z$ w.r.t. $(\mathcal{E}, U)$ s.t. $(i_*\mathcal{E}, i_*\nabla)$ は $D = Z \setminus U$ の各点で good formal model を持つ

つまり、ある good compactification $i : U \hookrightarrow Z$ があつて、 U を compact な、proper な variety Z に $(\mathcal{E}, \nabla)$ を respect する形で埋め込むことができて、順像をとって得られる meromorphic connection $(i_*\mathcal{E}, i_*\nabla)$ があつて、 $D = Z \setminus U$ は normal crossing であることを仮定するのですが、遠方にある normal crossing divisor の各点で good formal model を持つ、という。これを説明するだけでまた一時間以上掛かりそうな、非常に説明しがたいのですが。福原-Turrittin の理論の高次元版を実は与えています。高次元で、普通の meromorphic connection の一次元の場合だと、原点の周りでの puncture disk での微分方程式を formal な標準形を考えてあげて、それを formal な冪級数環に上げてやると、非常に標準形が綺麗になるというのが福原-Turrittin の理論なんです。そういうことが、Sabbah-Mochizuki によって最近解決されて、実はその理論全体を使う必要はなくて、非常に特殊な場合だけ使えば良い、ということになります。こういう難しいことが仮に間違っていたとしても、手作業でやれて、Hien の論文も自分で読めて、確認できるところでできるということをしています。

今日は、5分超過しているので、終わりですね。

1.4 聴講者からの質問

(聴講者:confluent A -hypergeometric function の積分表示のときに、この大結果 (比較定理とその non regular 版) はどこでも使わないんですよね?)

要するに $T \times X$ の上の $\mathcal{D}$ -module を X に $\mathcal{D}$ -module として direct image を取るときに、要するに direct image だとその relative de Rham complex を取ることに対応します。あの、

⁹2009 年ですかね。これ、よくわからないんですが 2010 年くらいにイタリア人 Marco, Hien という人の友達の人が来て、たぶん「ヒュー、すごい結果だ」って風なことを言って、2010 年位に真面目に読んでみようかなと思って、その次の年くらいに震災が起きて、震災が終わってやることがないからこれをなんか使えないかな、と思ったのがこの仕事の始めなんですけど。

$\mathcal{D}$ -module に対する direct image は高山先生とか神戸の方よくご存知でしょうけど、この垂直方向に relative de Rham complex を取るということで、それが algebraic な de Rham cohomology なんですよ。 $\mathcal{D}$ -module として射影する、ということはですね。それと解の方の対応を取るときに relative setting で結果を fiberwise に使うとですね。出てくるわけですよ。

Hien-Roucairol という論文 [13] がありまして、その方法をだいたい真似することによって relative duality というかですね、明日その結果を紹介しますが、その結果の証明には今おっしゃったように、fiber の上で今の duality theorem を、だから今回は私 algebraic $\mathcal{D}$ -module の話は全然できないんですけど、スキーム上の $\mathcal{D}$ -module の方で色々やると実の世界で色々汚いことをやることを相互に行き来しながら、やらないとうまくいかないんですが。このスキーム上でなにかやる時はさっき言ったとおりのやつを analytic の話に翻訳し直すために比較定理をどこかで使っているわけなんです。

(聴講者:古典群の場合の合流まで込めた多変数の超幾何関数の、その辺りはどう捉えているんですか?)

あの、残念なことに例えば熊本大学の先生方がやられているような、木村-高野-原岡という論文 [17] がありますが、あれは普通の一変数の場合の合流と似たようなことをやって irregular な system を作るんですけど、実はそういうものが入らない可能性があるわけなんです。それに出てくるような積分表示は得られないようなものもあるけど、まあ得られているものもある、という。だから、Adolphson とか GKZ とかの思想圏の中で考えていることはできるけど、それ以外に本当に古典的な意味で confluent させたものというものはできない可能性がありますね。

(聴講者:じゃあ、実際にそっちのほうで rapid decay homology の cycle で作るというのは open problem として残っているということ、ですか?)

そうですね。これがその後どれくらい発展しているのかはよく知らないんですけど、真似してやれば色々できる可能性もあると思います。私が一番頼りにしていたのは Hien-Roucairol の論文 [13] でありまして、だいたいこれを見れば、私がこれを真似したということもわかると思うのですが。この論文は積分表示を色々系統的に得るときに非常に参考になるもので、これを真似していけば色々な状況で色々な積分表示を自由に得られると思います。

2 2日目

2.1 Rapid decay homology 群

2.1.1 Rapid decay cycle の構成法

昨日は途中まで話していたんですけど、典型的には代数的トーラス $U = T = (\mathbb{C}^*)^n$ の場合に使おうと思って話をしているわけ。積分表示の積分路を T の上に (T の実次元の) 半分の次元のサイクルをとります。

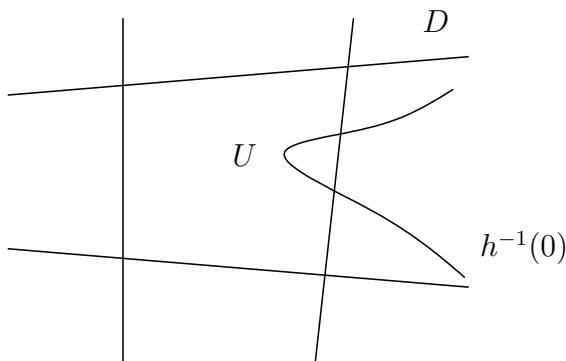
U は algebraic variety で、たとえば $\mathcal{E} = \mathcal{O}_U g$ 、ただし $g(x) = \exp(h(x))g_0(x)$ 、こういう形になっている場合は good compact 化というのが割と簡単に説明できます。それ以外

の場合は Hien の論文を見ていただければいいと思うのですが、その場合は複雑なので、まあこういうときにどういう条件を満たせばいいのかを考えます。

$i: U \hookrightarrow Z$ は次の条件 (※※) を持つとします。

- $D = Z \setminus U$ が normal crossing divisor

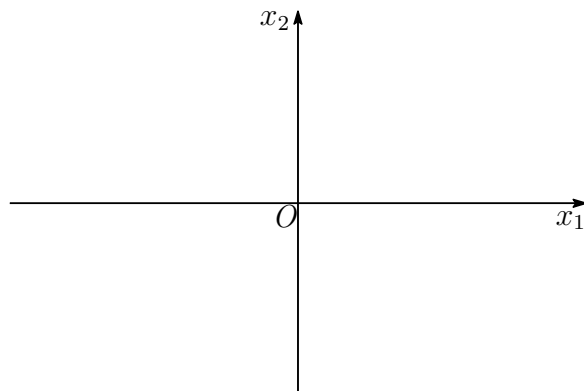
だから次の図のように D がなっているわけですね。



- $h(x)$ の pole $\subset D$ で、 U の中では regular function になっていると、それから $h(x)$ は Z 上の meromorphic function として不確定点を持たない
- D の各点の周りで $g_0(x) = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$

大変都合がいい仮定なんですけど、rank 1 の connection の formal な標準形としては、不確定点とは零点と pole が重なるところです。

Example 13. たとえば、 $h(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^m}$ のとき、よくご存知でしょうけど、このとき、 $x_1 = 0$ が pole になっていまして、 $x_2 = 0$ が零点ですので、



この図のように、零点と極が出合っているところ、原点が不確定点 (point of indeterminacy) といいます。

こういう不確定点はうまく blow up して外すというかですね、これがどういう風に我々が考えている状況でこの空間を $U = T$ に対して作っていくのかは後で説明したいと思いますが、ちょっと抽象的な setting でお話をさせていただきます。とりあえず零点は pole とぶつか

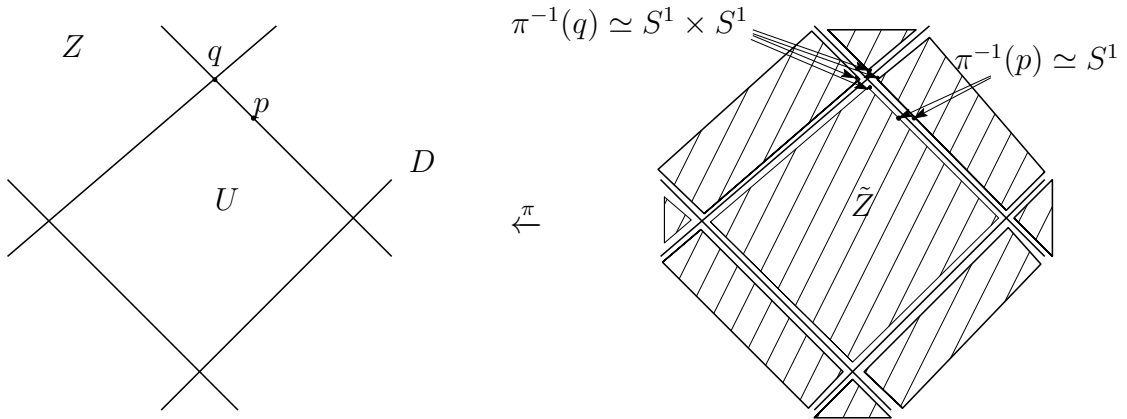
らないように離れていて、これから $\mathcal{E}$ の dual connection $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$ の rapid decay homology とは何かについて説明したいと思います。Dual connection は

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{O}_U \left(\frac{1}{g} \right)$$

というものになるわけです。一つ注意しますと、たとえば $\exp$ みたいな transcendental function があると、これは algebraic variety の上の regular function ではないわけなんですけど、 ∇ というのを自然に前回とったように g の log 微分が connection matrix に出るようになってやりますとこの $h(x)$ が algebraic function であれば一応 connection matrix は algebraic function になりますので代数多様体の connection としてちゃんと意味を持っているということになります。

こういう風になりますと horizontal section(水平切断) は昨日計算しましたけど、 U を analytify してその上で horizontal section を取ると $\mathcal{L} = \mathbb{C}_{U^{\text{an}}} \times g$ となるわけです。

これからやるのは、 Z の中で無限遠因子の D に沿って、これは超幾何の用語では「土管工事」というんですか？なんですかね。真島-Malgrange 流の real blow up を Z に対して行います。



こういう絵は、これたぶん皆さんよくご存知のことだと思います。Real blow up で境界付きの C^∞ 多様体 $\tilde{Z}$ を定義します。境界を含めた斜線部が $\tilde{Z}$ で、 $\tilde{Z}$ から Z という U の compact 化の上に写像 π がありまして、たとえば、 p 上の fiber は S^1 になっている、要するに complex の divisor ですから、(実次元では)codimension 2 で blow up して、私いい加減に書いているわけではなくて、これ組織的にきちっと定義できる方法もあって、Sabbah の本 [19] を見るとちゃんと真島-Malgrange 流の blow up の定義が書いてあります¹⁰。で、例えばこの点 q を考えますと、図のように4点で、 $\pi^{-1}(q) \simeq S^1 \times S^1$ とトーラスになっているわけです。こういう膨らませた空間を作ってあげます。それで、 $\tilde{D} = \pi^{-1}(D) \subset \tilde{Z}$ とします。 $\tilde{Z}$ を「 D に沿った Z の real oriented blow-up」と Hien は言っています。色々不確定点を扱う場合も必ず出てくるのですが、それで、どうするかというところでですね。

$\iota: U \hookrightarrow \tilde{Z}$ で U は $\tilde{Z}$ の中に open set として入っていて、その補集合が $\tilde{D}$ になっております。

$$\mathcal{C}_{\tilde{Z}, \tilde{D}}^p \otimes_{\mathbb{C}_{\tilde{Z}}} \iota_*(\mathcal{L})$$

¹⁰ ノート注. [19] §8 『Real blow-up spaces and moderate de Rham complexes』 参照

sheaf で書いてあるから、Hien はこういう記号を使いますが $\mathcal{C}_{\tilde{Z}, \tilde{D}}^p$ は $\tilde{Z} \bmod \tilde{D}$ に対する空間対上の piecewise smooth、まあ略して p-chain と書きますが、real p-chain のなす sheaf というわけですね。まあ、何でも sheaf でやるというのが Sabbah とか外国の人たちのやり方ですが。これに $\mathbb{C}_{\tilde{Z}}$ という定数層を掛けて、 $\mathcal{C}_{\tilde{Z}, \tilde{D}}^p$ を作ります。

この extension $\iota_*(\mathcal{L})$ は local system on $\tilde{Z}$ になることがわかります。ちょっとだけ境界に extend しているのですが、自然に伸びるんですね。sheaf の順像の定義は

$$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

こういう風にやることで、 $\mathcal{F}$ の direct image をとることができて、この記号を使っているわけですが。

ここで考えるのはその中で rapid decay なものだけ、というわけなんですよ。要するに

$$\mathcal{R}_{\tilde{Z}, \tilde{D}}^p \subset \mathcal{C}_{\tilde{Z}, \tilde{D}}^p \otimes_{\mathbb{C}_{\tilde{Z}}} \iota_*(\mathcal{L})$$

$\mathcal{R}_{\tilde{Z}, \tilde{D}}^p$ の元は $c \otimes s$ というものの一次結合になっているわけなんですけど、 s は c の無限遠方で rapid decay、こういうことを考えるわけです。 c という chain があって超幾何の方で twisted homology を考えるときに、chain だけでなく、chain とその上の関数を組にして考えるわけなんですけど、関数が急減少している。これは Hien の論文を読むとちゃんと無限遠方の normal crossing divisor の上でこれこれという不等式を満たすというちゃんとした estimate が書かれているのでここでは正確にはやりたくないのですが、subsheaf ですね、chain の一部分というのを定義して、それで皆さんわかると思うのですが、

$$H_p[0 \leftarrow \Gamma(\tilde{Z}; \mathcal{R}^0) \xleftarrow{\partial} \Gamma(\tilde{Z}; \mathcal{R}^1) \xleftarrow{\partial} \cdots] =: H_p(U; \mathcal{E}^*, \nabla^*)$$

これを Hien の意味での rapid decay homology という風に定義したわけです。こんなもの計算出来ないのではないか、という気がするわけですが、我々が必要とする場合は非常に計算ができるというか、特別な場合しか使っていないというのもあるのですが、我々の場合は計算できるので、その紹介をしたいと思います。

Lemma 14. (※※) の状況下で

$$P = \overline{\{x \in U \mid \operatorname{Re}(h(x)) \geq 0\}} \cap \tilde{D}, \quad Q = \tilde{D} \setminus \{P \cup \pi^{-1}(D')^{\text{an}}\} \subset \tilde{D}$$

とおくと、

$$H_p(U; \mathcal{E}^*, \nabla^*) \simeq H_p(U^{\text{an}} \cup Q, Q, \iota_*(\mathbb{C}_{U^{\text{an}} g_0})) \text{ for } \forall p \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

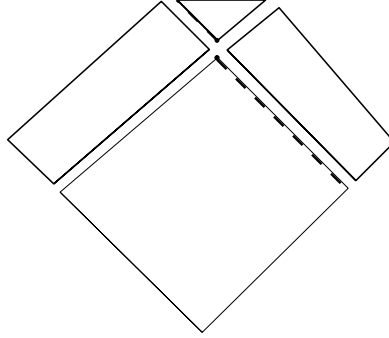
$\tilde{D}$ の上で rapid 増大の部分 P というのをまず定義します。 $\operatorname{Re}(h(x)) \geq 0$ というのは $\exp$ の肩に $h(x)$ が乗っていますから、rapid 増大の方向を $\tilde{D}$ の上で見ているわけですね。

rapid に増大する方向を除かないといけないので、 $\tilde{D}$ から P を除くわけですね。

$$Q = \tilde{D} \setminus \{P \cup \pi^{-1}(D')^{\text{an}}\} \subset \tilde{D} : \exp(h) \text{ の rapid decay direction}$$

これが $\tilde{D}$ の open set として定まるわけです。ここで D' は、 D が $D = \cup D_i$ と既約因子に分解されるのですが、その中で h の pole にならない因子 (irrelevant という風に呼びます) の合併です。

だから、本当に pole になっているところの上空でだけ考えるのです。pole にならない部分の上空は除いたので、あとは rapid 増大の部分はカットして、本当にさっきの土管工事した中では



このような open set Q が定義できて、この設定のもとで

$$H_p(U; \mathcal{E}^*, \nabla^*) \simeq H_p(U^{\text{an}} \cup Q, Q, \iota_*(\mathbb{C}_{U^{\text{an}} g_0})) \text{ for } \forall p \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

一言言ったほうがいいですね。 s というのは $\iota_*(\mathcal{L})$ の切断ですから、さっき $\mathcal{L}$ の計算をしたように g の定数倍となっています。

だから、 $g = \exp(h(x))g_0(x)$ というものが rapid に減少するような関数を担った積分路、chain 全体を考えて homology 理論を構成するのですが、こうやって定義したものは実は普通の rapid decay direction を付け加えた相対 homology になります。¹¹

Hien もある程度似たようなことをやっていて、はっきりと書いているわけではないのですが、ほぼ同じことをやっているようで、ホモトピーを使ってアイデアとしては chain をうまく連続的に変形して、rapid decay chain があつたら、rapid decay direction に terminate するように変形できますよ、ということを使っていくわけです。こういう風にしますと、これ自体はわーっと驚くかもしれませんが、これ $H_p(U^{\text{an}} \cup Q, Q, \iota_*(\mathbb{C}_{U^{\text{an}} g_0}))$ は計算しにくいと思うかもしれませんが、calculatable というか、よくある、たぶんこういう手法は幾何学の方で発展していると思うのですが、青本先生、喜多先生の本 [2] を見てもいいですし、服部晶夫先生の『位相幾何学 III』というのがありまして、そこに local system という言葉は当時はっきりと出ていないんですけど、こういう局所係数の homology たちが服部先生の『位相幾何学 III』という本¹²に書いてありまして、その計算方法を使っていくとこれを topological に計算できます。

で、これを confluent A -hypergeometric function に応用してみましょう。

(聴講者:あの、簡単な質問ですけど、例えば一変数で $\exp(x^n)$ というのがありますね。) はい。

¹¹ ノート注. Lemma 14 の右辺は空間対のホモロジー。係数が local system でない基本的な場合は、[10] §2.3 『空間対のホモロジーとホモロジー完全系列』を参照。

¹² ノート注. [11] のこと。 §6 『局所系と無限チェーンのホモロジー』を参照。

(聴講者:そうすると、無限遠のときに $2n$ 個の山と谷に分かれて、どっちかの谷から降りてきて有限からまた別の谷に行く道は、rapid decay cycle なんですか?)

その通りです。

(聴講者:それを位相的に捉えることになっているのですか?)

まさしくそうですね。今ちょっと例を出したいと思いますが。しばらく一般的に述べたあと、ちょっと簡単な例を。一変数では確かに聴講者先生のおっしゃるとおりです。Airy 関数なんかを積分するときに、こういう3つの方向に積分路を取ったりとか、要するに rapid decay を結ぶように取ってあげると、自然にだいたいこういうことを古典解析でもやっているわけで、その高次元版というか、はい。Bessel 関数でもいいんですけど、はい。

2.1.2 Confluent A-hypergeometric function への応用

具体的にどうなるのかやってみたいと思いますが、 $T = (\mathbb{C}^*)^n$ 上で connection を考えてやるのですが、 $z \in \Omega \subset X = \mathbb{C}^N$ として、まず $g_z(x)$ を

$$g_z(x) := \exp(h_z(x)) x_1^{c_1-1} \cdots x_n^{c_n-1}$$

と定義します。まさに積分核というか、これが実際の T 上の関数になっていまして、

$$(\mathcal{E}_z := \mathcal{O}_T \cdot g_z, \nabla_z)$$

という connection を定めて、dual を取ると

$$\left(\mathcal{E}_z^* := \mathcal{O}_T \left(\frac{1}{g_z} \right), \nabla_z^* \right)$$

という風になって、これの horizontal section は

$$\mathcal{L} = \mathbb{C}_{T^{\text{an}}} \cdot g_z$$

という g_z の定数倍になっています。

こうするとだいたい昨日とった γ^z という積分路の正体は、Hien の定めた $H_n(T; \mathcal{E}_z^*, \nabla_z^*)$ です。 T は complex dimension ですから実次元 $2n$ で、その半分の次元のサイクルを取ってくれば話がだいたいうまくいきそうだとということになります。

Hien-Roucairol は、昨日紹介した 2008 年の論文 [13] ですが、この議論を用いると、 Ω^{an} 上にある local system $\mathcal{H}_n^{\text{rd}}$ (rd というのは rapid decay の意味で使っています) rapid decay local system が存在して、

$$(\mathcal{H}_n^{\text{rd}})_z \simeq H_n(T; \mathcal{E}_z^*, \nabla_z^*)$$

$\mathcal{H}_n^{\text{rd}}$ の z という点での stalk が rapid decay homology に一致するようなものをうまく semi-global に構成することができます。これは論文と完全に同じようにしています。

というわけで、昨日企てた $T \times X$ の上で積分をするときに、 Ω の上ではうまく積分路の family が切断になるように何か良い local system がとれた、というわけです。

口で言うと、この local system $\mathcal{H}_n^{\text{rd}}$ の切断は Ω のある点での rapid decay n -cycle の family である、というわけですが。これ完全に Hien-Roucairol の真似ですが。その結果次の定理が得られます。

Theorem 15 (Esterov-T[5]). $\vec{c} \in \mathbb{C}^n$ が *non resonant* ならば

$\exists \Omega^{\text{an}}$ 上の *local system* の同型

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n^{\text{rd}} & \simeq & \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X^{\text{an}}}}(\mathcal{M}_{A, \vec{c}^{\text{an}}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ [\gamma^z]_{z \in \Omega^{\text{an}}} & \mapsto & \left\{ \Omega^{\text{an}} \ni z \mapsto \int_{\gamma^z} \exp(h_z(x)) x_1^{c_1-1} \cdots x_n^{c_n-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \right\} \end{array}$$

前回はわざわざ X^{an} と付けませんでしたけど、*analytic variety* に戻りましたよ、とちゃんと書きたかったので上では X^{an} と書いています。

rapid decay cycle の family $[\gamma^z]_{z \in \Omega^{\text{an}}}$ に対して、 $z \in \Omega^{\text{an}}$ から *confluent A-hypergeometric system* の解

$$u(z) = \int_{\gamma^z} \exp(h_z(x)) x_1^{c_1-1} \cdots x_n^{c_n-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

を取る $\mathcal{D}_{X^{\text{an}}}$ 上の準同型を対応させると、この対応が同型であるということがここでメインにやったことです。

だから、任意の Ω^{an} 上の local な confluent A-hypergeometric function、昨日の複雑な偏微分方程式系の正則関数解はなにかその上に *rapid decay cycle* の family があって、その積分として実現されているということを言っているわけです。

簡単な例を挙げますと、

Example 16. $n = 1$, $N = 2$, $A = \{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ の場合で次の積分を考えます。

$$\int \exp\left(\frac{t}{2}x - \frac{t}{2}x^{-1}\right) x^{-\nu-1} dx$$

ちょっと定数が付きますけど、これが *Bessel* 関数というもので、*Bessel* 関数の積分表示には色々ありますが、*Laplace* 変換を使うやつその他にこういう有名なやつもございます。*A*-超幾何関数は非常に何もかも一般化して飲み込むように広い世界を作った割りには、こういう *Bessel* 関数とそっくりというか、よく古典解析で見た *Bessel* 関数の積分表示というものを自然に高次元化した形態をしているわけですね。ここ $(\frac{t}{2}x - \frac{t}{2}x^{-1})$ を一般の *Laurant* 多項式に置き換えただけで、*A* 超幾何関数が得られ、これは *Bessel* 関数に非常にそっくりな格好をしている、まあ安直なんで驚いたんですけど。

(聴講者: その場合は γ^z はどうなっているんですか?)

あ、 γ^z ですか。それはちょっとあとで、すぐやりたいと思います。もう一個漸近展開に関することを述べてからやりたいと思います。

2.1.3 積分路の作り方

積分路の作り方はたぶんいちばん興味のあるところですけど、積分路を一般の generic parameter に対して作ることもできるんですけど、二つ方法がありまして、今日は何分からスタートしましたっけ? 15分? 30分位経ったんですか。

1. $0 \in \text{Int}(\Delta) \Rightarrow$ asymptotic expansion at ∞ が精密に、無限遠方での合流型 A -超幾何関数の漸近展開がどこまでも詳しくわかるような積分路を作れるのがこの場合です。
2. 一般に $\vec{c}$ が generic parameter の場合、 Δ の仮定がないときにもできますが、その場合には A -超幾何関数の monodromy at ∞ の計算が順調にできます。

それぞれメリットがありますが、今回は 1. の場合をお話したいと思います。

このケースというのは私よりむしろ共著者の Esterov 先生によっている部分が多くて、次のような補題が成立します。

Lemma 17. Ω_0 を Ω の中に作るのですが、

$$\Omega_0 = \{z \in \Omega \mid h_z(x) \text{ が } non \ degenerate \text{ かつ } Morse \ critical \ point \text{ しか } T \text{ 上に持たない}\}$$

が Ω の中で open dence である。

というのが私の共著者のやったことで。だから、ほとんどの z に対して $h_z(x)$ というやつは T の上で holomorphic Morse type の標準形に critical point の周りで変形できるということを主張しています。

これも conic になっていて、 $\mathbb{C}^*$ の action について閉じていて、 X の中で conic ですが、これも conic open subset になっています。

Lemma 18. 先ほどの付帯条件 $0 \in \text{Int}(\Delta)^{13}$ を仮定すると、 $z \in \Omega_0$ だと

$$\sharp\{h_z(x) \text{ の } critical \ point\} = \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta) = l$$

ということが証明できます。この critical point の数に着目してこれをうまく伸ばして積分路を作ろうというわけですが、以下、 $0 \in \text{Int}(\Delta)$ を仮定し、 $z \in \Omega_0$ を fix することにいたします。それで、記号もあんまり良くないかもしれませんが、 $\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(l) \in T$ を $h_z(x)$ という Laurant 多項式の Morse critical point となっているとしましょう。

この i 番目に着目して、 $\alpha(i) \in T$ の周りではある holomorphic Morse coordiante $y = (y_1, \dots, y_n)$ 、この辺のやっているところでは、我々がやる前に Pham とかですね、原岡先生も似たような論文を書かれているみたいですし、まあ色々なところから出てくるアイデアで、新しくないんですけど、 y というのが存在して、critical value $h_z(\alpha(i))$ と y の各成分の 2 乗の和

$$\begin{aligned} h_z(x) &= h_z(\alpha(i)) + y_1^2 + \dots + y_n^2 \\ &= h_z(\alpha(i)) + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 - \eta_1^2 - \dots - \eta_n^2 + \sqrt{-1}(\xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n) \quad (y_i = \xi_i + i\eta_i) \end{aligned}$$

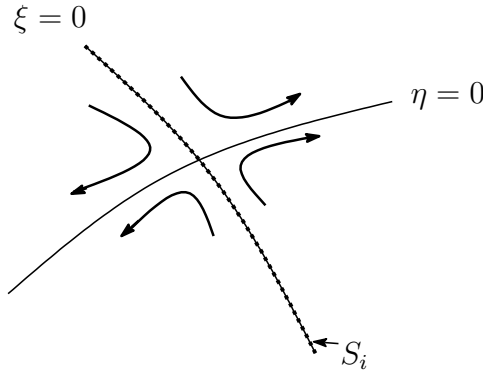
¹³この論文のレフェリーは二年くらいやっていたんですけど、こういう条件を我々が見たのは初めて、とレフェリーの人は言っていました。割と、高山先生みたいなやり方、普通の環論やグレイブナー基底を使ってやるようなやり方だと、原点がむしろ端っこにある pointed という場合がよく研究されているみたいで、あんまりこういう状況を取り上げて研究するということがなかったみたいですが。我々の場合は逆にこういう条件が必要になっちゃうんですけど…。

とするとこれは Morse の補題¹⁴というもので、Hessian が非退化であればこういう形の holomorphic chart が complex category でもこういう風に変形することができて…この式の全体の Real part を取りましょう。つまり、

$$\operatorname{Re}(h_z(x)) = \operatorname{Re}(h_z(\alpha(i))) + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 - \eta_1^2 - \cdots - \eta_n^2$$

ですね。失礼しました。

何が言いたいかというと、 $h_z(x)$ の real part を取ってやるとこの辺 $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \sum_{i=1}^n \eta_i^2$ が効いてきますので、 $\operatorname{Re}(h_z(x))$ の gradient の flow の様子を critical point の周りで見たいと思います。



これは T 中の絵で、 $\xi = 0$ と $\eta = 0$ が平面を 4 つに分けます。gradient flow の絵を書きますと、ここ ($\xi = 0$) では集積していて、stable manifold になっていて、こっち側 ($\eta = 0$) には expand していて、外側では図のように流れているわけですね。この (図の太い鎖線 S_i) 部分が $\operatorname{grad} h_z(x)$ の stable manifold ですが、ここを延長して rapid decay chain が作れるわけなんです。

$\exists \gamma_i^z \in H_n(T; \mathcal{E}_z^*, \nabla_z^*)$ s.t. $\alpha(i)$ の近傍で $\gamma_i^z \equiv S_i$ ($1 \leq i \leq l = \operatorname{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta)$)

$$u_i(z) = \int_{\gamma_i^z} \exp(h_z(x)) x_1^{c_1-1} \cdots x_n^{c_n-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (1 \leq i \leq l = \operatorname{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta))$$

これが超幾何関数の解空間の数の分だけあって、こうやって定義できまして、これについて漸近展開の式を述べることができます。

Theorem 19. $r \rightarrow +\infty$ のとき、これまでは z を固定して議論していたのですが、正の数 r 倍を掛けて、定数倍しても同じ積分路を取って計算するのですが、次の漸近展開が成り立ちます。

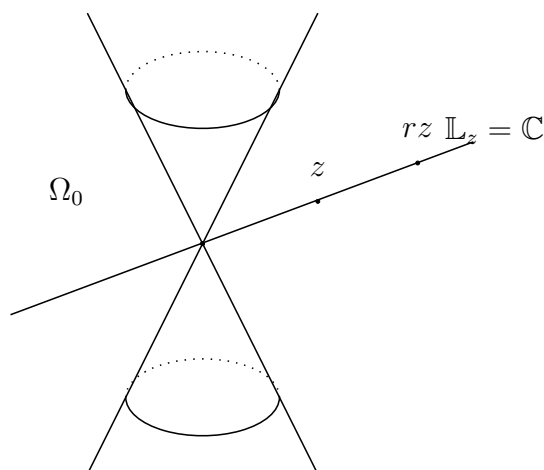
$$u_i(rz) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} (\sqrt{-1})^n \alpha(i)_1^{c_1-1} \cdots \alpha(i)_n^{c_n-1} \times \underline{h_z(rh_z(\alpha(i)))} \times \left\{ \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{H(\alpha(i))}} \times \frac{1}{r^{\frac{n}{2}}} + \frac{b_1}{r^{\frac{n}{2}+1}} + \cdots \right\}$$

critical value が下線部に出てきて、 $H(\alpha(i))$ は *Hessian* というものなんですけど、これは $h_z(x)$ の $\alpha(i)$ での *Hesse* 行列式のルートです。 $b_1, b_2, \dots$ も式が与えられれば計算できます。

¹⁴ ノート注. Morse の補題を含む Morse 理論については例えば [18] 参照。

これもたぶん私がやることではないと思うのですが、 $\text{Re}(h_z(x))$ の gradient の stable manifold の小さい部分で計算して、いわゆる高次元鞍点法、先ほどの Morse coordinate を使って具体的に計算していくとこれが出てくる、というわけで。昔からあるんですけど、原岡先生とか、私が無知なだけなんですけど色々あって、たとえば Varchenko の KZ 方程式の本 [20] なんかはちょっと読んでみるとこういうことをやっていたりしますね。Varchenko の、量子群の表現と関係していて、Varchenko が本を出しているわけなんですけど、Varchenko の薄っぺらい AMS の本ですが、ここでも同じようなことをやっていて、高次元 steepest descent method というんですかね？

これを見てみると、

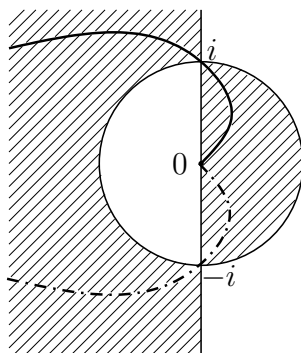


要するに、 $\mathbb{C}^N$ の中にこうなんか algebraic variety があって、その補集合の Ω_0 の上だったら何をやってもよくて、そこの中に例えば z という点があって、 z で生成される complex line を考えると、その上には無限遠方に行ったときの漸近展開の格好というのは、だいたい Bessel 関数によく似ていて、Bessel 関数は無限遠点の Poincare rank が 1 になりまして、こういった項が Bessel 関数の漸近展開というか、Hankel 関数の漸近展開の公式とか、皆さん全員ご存知だと思うのですが、そういうものと大変良く似ている。この辺を实际計算してみると同じようなものになっていて、この $n = 1$ の場合だと Bessel と同じものになります。ちょっとご質問があったので、一つ例を。

Example 20. $n = 1$, $N = 2$, $z = (z_1, z_2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $A = \{-1, 1\}$ の場合

$$h_z(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x}$$

の critical point は、微分すればいいだけなので $x = \pm i$ になりまして、critical value は $x = \pm i$ で計算すれば $h_z(x) = \pm i$ となります。絵を描きましょう。



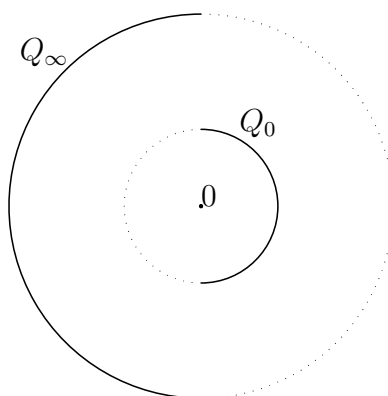
原点があつて、 i と $-i$ があるんですけど、領域 $\text{Re}(h_z) \leq 0$ は、つまり $\frac{p(p^2+q^2-1)}{2(p^2+q^2)} \leq 0$ ($x = p + qi$) は上の図の斜線部となります。たとえば、 $x = i$ の近傍で Morse 座標 y を計算すると、

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} (x - i) + O((x - i)^2)$$

となるものが取れます。したがって、さっき話した安定多様体は *critical point* $x = i$ の周りでは図の太線のようになります。これを伸ばしていくと最終的には図の太線で表した原点から出発して i を通り、無限遠点へ行く積分路が作れます。同様にして、図の鎖線で表した原点から出発して $-i$ を通して、無限遠点へ行く積分路も出来上がります。この周りで計算すると *Hankel* 関数の漸近展開と同じものが出てきますけどややこしいので、今日はやりません。

(聴講者: それで cycle になっているんですか?)

$U = T = \mathbb{C}^*$ を compactify した $Z = \mathbb{P}^1$ に原点と無限遠点に方向を表す S^1 をくっつけて real blow up $\tilde{Z}$ を作ります。ここで $\tilde{D} = S^1 \sqcup S^1$ となりますが、ここから $\text{Re}(h_z) \geq 0$ となる方向を取り除いたのが次の図¹⁵の $Q = Q_0 \sqcup Q_\infty$ となります。



先ほど作った二つの積分路はどちらも Q_0 方向、 Q_∞ 方向を始点と終点としており、Lemma 14 の境界 Q に入っています。 Q 内の点は modulo して 0 になるので、二つの積分路は H_1 の元、つまり cycle になっています。

(聴講者:そこでの boundary は 0 ですか?)

¹⁵ ノート注. 次の図はあくまでイメージである。

はい。これは見かけ上 boundary があるように見えますけど、rapid decay direction Q modulo では cycle になっているという、だから relative twisted homology 群の元としてはちゃんと cycle になっています。よろしいですか。貴重なご質問ありがとうございます。

(聴講者: cycle の次元はいくつなんですか?)

これは、2 個ですね。 A が 1 次元 $\{-1, 1\}$ で原点との凸包 Δ は



こうなつて、normalized volume $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Delta)$ は 2 なので、2 次元の解空間を持っていて、という。はい。

(聴講者: 今やった 2 つのやつが独立なんですか?)

一般論で言えばそうなので、それをどうやってやるのかは難しくてあんまりやりたくないんですけど、これも、私も古典的にこういうことはよく知られているんですけど、自分でやってみるまでよく知らなかったんですけど、やってみて twisted Morse theory というか、relative twisted Mose theory というか、local system 係数で、Morse 関数に沿って徐々に、Morse 関数のレベルの低いところから高いところに込めて homology 群を発展させて、critical point のところで次元がジャンプする、というわけで、そのジャンプするところを作っていく、というものであります。

(聴講者: 漸近展開を見ると解が独立だということがわかるんですか?)

そうですね、ええ。そういう使い方も色々あって、さっきのこの条件 () が外れても rapid decay n -cycle を critical point の個数だけは作ることができて、それぞれの漸近展開が一次独立になっていると、解のほとんどの部分を漸近展開がわかる、という使い方もありますし、この仮定は全部の解が一斉に積分表示できるための条件ですけど、もしこれが破れても解の一部はこのようなやり方ができて、漸近展開を調べて、漸近展開係数が一次独立であれば解として一次独立ですから、割と解のいい部分がわかる、ということはありません。

あと一つ remark すると、これの dominance ordering について i が色々動いたときにこれらの real part の order を調べることで先ほどの complex line の上の無限遠点の前の Stokes line とか Stokes 係数もある程度はわかるんですが、Stokes line は完全にわかって、Stokes 係数も数値計算のレベルでは安藤さんによるとできるんだ、ということで少しやっていたこともあったんですけど、Stokes 係数の明示式もできるかもしれないですね、将来的には、Stokes line はすぐわかっちゃうので、Stokes line は $\mathbb{L}_z$ の中で、

$$\mathbb{C}_s \ni \zeta \mapsto \zeta \cdot z \in \mathbb{L}_z$$

とすると、Stokes line は

$$\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\zeta(h_z(\alpha(i)) - h_z(\alpha(j)))) = 0, i \neq j\}$$

これが複素平面のいくつかの line の合併になっていて、それに沿ってこうやるときに 漸近展開がチェンジする、ということもわかります。

2.2 トーリックコンパクト化

それで、こういうのは compact 化の細かいことを調べてわかるので、Toric variety の入門も兼ねてそういう話もしようとおもいます。夏の学校なので、気楽なのかどうかわかりませんが…。

定義 21. $\mathbb{R}^n$ の *rational strongly convex polyhedral cones* の集まり…これトーリック幾何に出てくることですが、*polyhedral cone* というのはすぐにわかると思うのですが、半空間の *intersection* のことで、次元が低くてもいいんですけど、 $\mathbb{R}^n$ 中の *cone* が *rational* というのは、各一次元の辺に有理点があつて、遠方の方には必ず整数点があるということです。*strongly convex* というのは *line* を含まない、ということです。

こういう *cone* の集まり $\Sigma = \{\sigma\}$ が扇 (*fan*) とは、

1. $\sigma \in \Sigma, \tau \prec \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$
2. $\sigma, \tau \in \Sigma, \sigma \cap \tau \neq \emptyset \Rightarrow \sigma \cap \tau \prec \sigma, \tau$

ということです。ここで $\tau \prec \sigma$ とは τ が σ の *face*¹⁶ であることを意味します。

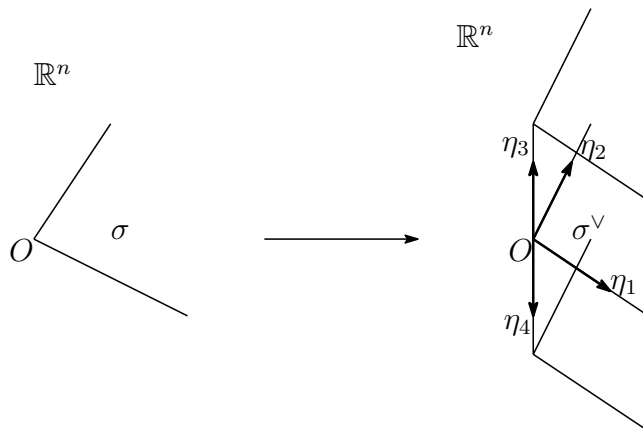
位相幾何では単体複体というものがあつて、fan は単体複体の定義の cone version です。ね。位相幾何の単体複体だと、単体の境界も含まれるとか、二つの単体の共通部分があると、その共通部分は二つの単体の面になっているとかですね、そういうことの cone version になっています。

それで、 $\mathbb{R}^n$ 内の扇があつて、これに対してうまい variety を構成する、というのがトーリック多様体の理論なんです。

cone σ に対して、これ strongly convex という条件があるのですが、これに対して、dual cone を定義します。(次を黒板に書く)

$$\sigma \in \Sigma \Rightarrow \sigma^\vee = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \geq 0, \forall u \in \sigma\}$$

これ正確に言うと、 $\mathbb{R}^n$ は元々の Σ がある空間の dual space で、それを横着して同じように書いているわけですけど、入門だからそれでいいと思いますが、dual space 中で σ と内積が正になっている cone だけが dual cone です。(次を黒板に書く)



¹⁶ ノート注. face の定義は G.Ziegler, Lectures on Convex Polytopes 等の教科書を参照.

$\mathbb{R}^n$ 内にこういう cone σ があると、dual space で双対 cone というのは右のように屏風
 ようなものになって、その内側が dual cone $\sigma^\vee$ です。こういうのを理解する時は、私、実
 は専門が hyperfunction だったということは少しだけ、ほんの僅かだけここで役に立った
 部分もありますが、笑える人は割と優秀な方だと思うんですが…。

これに対してさらに、 $\mathcal{S}_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$ と定義します。dual space の中に標準的な
 lattice があって、 $\sigma^\vee$ の中にある lattice だけをとるとこれ、subsemigroup になっています。
 Gordan の定理というのがあって、トーリック幾何をやっていると最初の方に出てくるの
 ですが $\mathcal{S}_\sigma$ は実は有限生成 semigroup で、いくつかの $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ をとると、実はこれら
 の一次結合ですべて書けます。つまり、Gordan の定理より

$$\mathcal{S}_\sigma = \sum_{i=1}^N \mathbb{N} \cdot \eta_i$$

となる、ということです。

これが何を意味するか、というと今度は $\mathcal{S}_\sigma$ の、ちょっとこっちに書きますか。(次を黒
 板に書く)

$$\mathbb{C}[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$$

このような半群環の全射がある、ということになるのですが、この $\mathcal{S}_\sigma$ からなる半群環
 $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ を考えますと、

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] = \left\{ \sum_{v \in \mathcal{S}_\sigma} c_v \cdot e(v) \mid c_v \in \mathbb{C} \right\}$$

となります。 $v \in \mathcal{S}_\sigma$ に対して、 $e(v)$ と書く習慣がありますが¹⁷、これは v の形式 symbol
 で、 $e(v) \cdot e(w) = e(v+w)$ という一次結合に対応する自然な積があります。群環をご存知
 だと思いますが、半群だってこのように積を定義してやれば、あとは係数は $\mathbb{C}$ -linear に自
 然に拡張してやれば積構造を持つ $\mathbb{C}$ -linear space、つまり $\mathbb{C}$ -algebra になっていることが
 わかるのですが、 $\mathcal{S}_\sigma$ は有限生成なので、

$$\Phi : T_i \mapsto e(\eta_i)$$

という対応を与えてやりますと、実はこれが全射になる、ということがわかります。だか
 ら $\mathbb{C}$ -algebra として半群環 $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ は有限生成であることがわかります。そうすると、代数
 幾何をご存知の方は、Spec を考えたくなると思います。ここでは $\mathbb{C}$ 上有限生成 algebra を
 座標環に持つ variety をこういう流儀でやりたいと思います。

で、 $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ を空間と思いたいのですが、以下の Hom を考えます。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma], \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]/I, \mathbb{C})$$

$\mathrm{Ker} \Phi = I$ と置きますと、

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] \simeq \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]/I$$

¹⁷たとえば Fulton の本 [6]

多項式の商をとった $\mathbb{C}$ -algebra、通常代数幾何では座標環と言われているもののなのですが、座標環から $\mathbb{C}$ への Hom を取るわけです。これは、こういう風になるわけですね。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]/I, \mathbb{C}) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(z_1, \dots, z_n) = 0, \forall f \in I\} =: U_\sigma$$

これはですね、例えば $\mathbb{C}$ -algebra の Hom を考えたかったら、 T_i の行き先を決めてこの I の行き先が 0 になるようにコントロールすればいい、と。だから、 T_i の行き先を z_i としますと、 $T_1, \dots, T_n$ の $\mathbb{C}$ 上の行き先が定まって、それを $z_1, \dots, z_n$ と書くと、 I の部分が 0 に送られる、ということから、こうなるわけです。こうやって見ると「 I というイデアルで定まる代数多様体」というものになっています。ところで、私が学生の時、佐藤先生の講究録を読んでですね、微分方程式の話で色々 K -valued point という話が $\mathcal{D}$ -module の発想の起源になったということが書いてありました。分母の部分が 0 に行く、ということで $\mathcal{D}$ -module の Hom が解になっている、そういう着想をするにあたって、代数幾何の初等的な議論が佐藤先生の頭のなかにあって、佐藤先生の時代には Weil の Foundation[21] という本があって、それで知識を得られたのだと思いますが、似たような構成が $\mathcal{D}$ -module の種になったような話がここにも出てきます。

さて、こうやって、代数多様体、 $\mathbb{C}$ の中の affine 代数多様体というのが得られるわけですね。で、こっちの $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma], \mathbb{C})$ 、これもトーリック幾何の本でよくやるのですが、これは

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma], \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\text{semigroup}}(\mathcal{S}_\sigma, \mathbb{C})$$

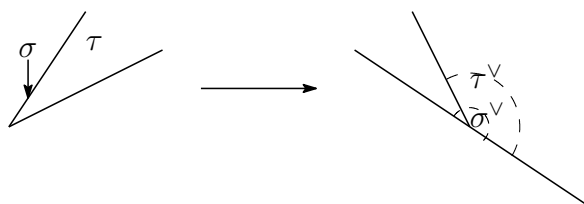
右辺の $\mathbb{C}$ は積による semigroup と思ってください。こうすると、積に関する semigroup の間の射で、0 は 1 に対応していると思って、semigroup の Hom と $\mathbb{C}$ -algebra の Hom が対応する、ということになっています。

これで variety みたいなものができたんですけど、なかなかこれをすぐ直感的に理解するのは難しいと思うのですが、少し抽象論を進めてみようと思います。

さて、cone には

$$\sigma \prec \tau \Rightarrow \sigma^\vee \succ \tau^\vee$$

と dual cone を取ると膨らむという性質があります。例えば、二次元で書くと



strongly convex という条件があるので、 $\sigma^\vee, \tau^\vee$ は共に n 次元となるわけですが、こういう包含関係がありますが、こう書くわけですね。 U_σ の定義をしていませんでしたが、 σ という cone に対応する代数多様体だから U_σ と書くことにします。佐藤先生は、代数多様体そのものが本体ではなくて、その上にある可換環そのものがあって、本地垂迹というか…仏教用語ですけど、代数多様体がこの本質ではなくて、有限生成 $\mathbb{C}$ -algebra こそが本地垂迹というか、代数多様体の基本的な、本質を定めているわけですね。で、

$$U_\sigma = \mathrm{Hom}_{\text{semigroup}}(\mathcal{S}_\sigma, \mathbb{C}) \hookrightarrow U_\tau = \mathrm{Hom}_{\text{semigroup}}(\mathcal{S}_\tau, \mathbb{C})$$

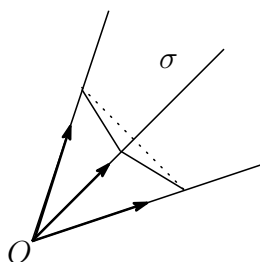
と実はより広い $\mathcal{S}_\sigma$ からの semigroup 射を狭い $\mathcal{S}_\tau$ に制限すると、単射になることがすぐにわかります。次元が一緒であることを使うと、実は単射になっていて、例えば、 $\sigma \succ \rho \prec \tau$ とすると、 $U_\rho \subset U_\sigma, U_\tau$ になっていて、今の cone の集まりから次のように U_σ たちを貼り合わせて、 X_Σ を構成します。

$$\Sigma = \{\sigma\} \rightsquigarrow X_\Sigma = \coprod_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma / \sim$$

ただし、 $\sim$ は貼り合わせで重なるものを同値とするという意味です。貼りあわせは $\sigma \succ \rho \prec \tau \Rightarrow U_\rho \subset U_\sigma, U_\tau$ によって定めます。例えば、 ρ が σ の辺になっていて、また τ の辺にもなっていると、上の包含関係があつて、 U_ρ を U_σ と U_τ の open set とみなすことができ、正確に言うと主開集合という由緒正しい物に書けるのですが、この全体を貼りあわせていって、 Σ に付随する toric variety X_Σ というものができました。

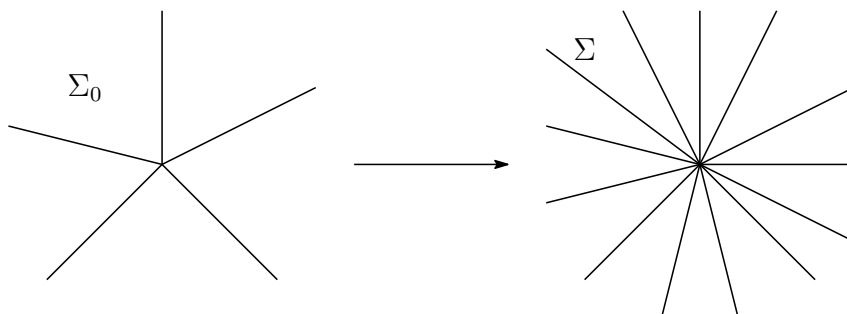
次に、smoothness をやった方がいいですね。

定義 22. cone $\sigma \in \Sigma$ が *smooth* とは σ は *simplicial*、単体的であるということです。simplicial は厳密には定義しませんが σ の 1-dim face の数 = $\dim \sigma$ になっていることで、これは絵を描いてごまかします。



たとえば上の図では σ が 3 次元 cone で、3 本の 1-dim face があります。さて、smooth を定義するための 1-face 上の primitive vectors を取ります。 $\mathbb{Z}^n$ の格子点に入っていて、 $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ に入っている一番短い vector のことを primitive vector と呼びます。 σ の 1-dim face 上の primitive vectors が元の空間 $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ -basis の一部になる。要するに、一次独立なものを足してやると $\mathbb{Z}^n$ の基底になる、こういう風になるという条件が成り立つ時に、smooth cone といいます。

任意の fan があつたら、smooth な cone だけからなるように細分を取ったりできるんです。このアルゴリズムもあるのですが、二次元グラフの連分数展開と関係していて面白いんです。うまく分割して smooth cone だけにできて、toric variety は smooth とは限らないのですが、 Σ_0 という fan を一旦細かく、smooth cone に分解すると X_Σ は X_{Σ_0} の特異点解消になっています。



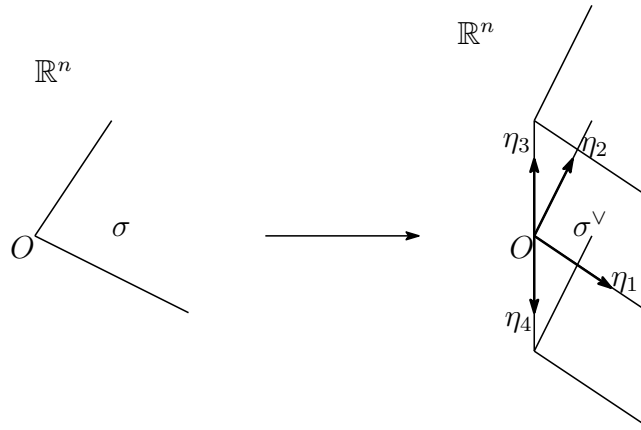
つまり、 Σ_0 が元々こういう smooth とは限らない cone からなる fan として、ここから出発しても細分を取って Σ という smooth fan (smooth cone だけからなる fan) を取りますと、 Σ_0 から Σ への fan の射があつて、toric variety の全射

$$X_\Sigma \twoheadrightarrow X_{\Sigma_0}$$

が得られて、これは singular な toric variety を特異点解消して smooth な空間にする、ということができます。

どうして smooth が大事なのか、例を見ないとわからないと思うので、簡単な例を。

Example 23. $n = 3$ で $\dim \sigma = 2$ とします。



まず 2 次元の cone はいつも単体的になっているわけです。2 次元の cone で 2 個の一次元面があるから単体的になっている、あと smoothness condition というのはちょっと条件がいりますね。この二つの primitive vector が $\mathbb{Z}^3$ の基底の一部になっているというのが smooth の条件としていります。σ が smooth とした場合に、この dual を取ると、先ほどの図のように屏風みたいになっています。(semigroup S_σ の生成元が) $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ という風になっていて、 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ の構造を見てみると

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[T_1, T_2, T_3^{\pm 1}]$$

という風になるわけですね。 T_1 は η_1 に対応するもので、 T_2 が η_2 に対応してて、 $T_3^{\pm 1}$ が η_3, η_4 に対応しているという、こういうことがあつて、partial Laurent polynomial というものになっています。ここから、

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

T_1 と T_2 の行き先は何の制約条件もなく、 T_3 の行き先は可逆なものでなければならないので、このように $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ という smooth なものになっています。よろしいでしょうか。

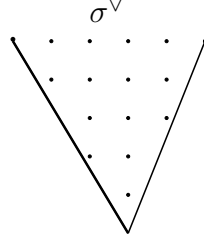
X_Σ はこういう smooth なものの貼り合わせでできています。 smooth な cone だけからなるような fan を考えると smooth な variety が上空にできて特異点解消を与える、ということになります。

それで、あとちょっと一つ補題。一般の場合の構造を一つ述べておきます。

Lemma 24. $\forall \phi \in U_\sigma = \text{Hom}_{\text{semigroup}}(\mathcal{S}_\sigma, \mathbb{C})$ に対して

$$\exists! \Gamma \prec \sigma^\vee \text{ s.t. } \{v \in \mathcal{S}_\sigma \mid \phi(v) \neq 0\} = \Gamma \cap \mathcal{S}_\sigma$$

これも教科書に載っていることですが (次を黒板に書く)



σ の dual $\sigma^\vee$ があると、 $\mathcal{S}_\sigma$ はこの中の lattice point (黒点) です。ここから $\mathbb{C}$ への semigroup hom ϕ を勝手に考えると、 ϕ の行き先が 0 でない黒点というのは、ある $\sigma^\vee$ の一つの面 Γ の上にある、ということがわかります。ここで考えてみてもいいですけど、これは演習にしましょう。

しかも、このとき $\mathbb{R}\Gamma \cap \mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^{\dim \Gamma}$ 、 $\mathbb{R}\Gamma$ は Γ の $\mathbb{R}$ -span として、

$$\mathbb{R}\Gamma = \mathbb{R}^{\dim \Gamma}$$

となります。つまり、 $\phi \in \text{Hom}_{\text{semigroup}}(\mathbb{Z}^{\dim \Gamma}, \mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C}^*)^{\dim \Gamma}$ になります。

Exercise 2. 補題 24 を示せ。

この補題は簡単なんですけど、これは何を一体意味しているのか、というと、次の分解を得るのに使います。

$$U_\sigma = \coprod_{\Gamma \prec \sigma^\vee} (\mathbb{C}^*)^{\dim \Gamma}$$

このように U_σ が σ の双対 cone によって、torus の disjoint union に分解する、と言っているわけですね。 $(\mathbb{C}^*)^{\dim \Gamma}$ を (代数的)torus と呼びますが、要するにこの空間 U_σ に対して $\sigma^\vee$ の face でパラメライズされるような良い torus 分解があるということを主張しているわけです。これを torus decomposition と呼びます。

それで、このやり方を逆で見るのがよくあって、

$$\begin{array}{ccccc} \{\sigma \text{ の faces}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\sigma^\vee \text{ の faces}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{U_\sigma \text{ 内の torus}\} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ \tau & \longleftrightarrow & \sigma^\vee \cap \tau^\perp & \longleftrightarrow & (\mathbb{C}^*)^{n-\dim \tau} =: T_\tau \end{array}$$

という対応関係があります。よろしいですか。 σ の face があると、その直交補空間と σ の双対 cone $\sigma^\vee$ の共通部分を取ることで $\sigma^\vee$ の face が得られて、これらの次元の関係は complimentary で、足して n になるというふうになっているわけです。次元は complimentary、相補的になっているわけですね。だから、これに対応する小 torus は、その次元は $n - \dim \tau$ になっていて、これを T_τ と名づけますと、

$$U_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} T_\tau \quad (T_\tau \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-\dim \tau})$$

と σ の面でパラメトライズされる分割ができて、 T_σ は complimentary な次元を持つことがわかります。これを X_Σ の各 cone に対してやると、

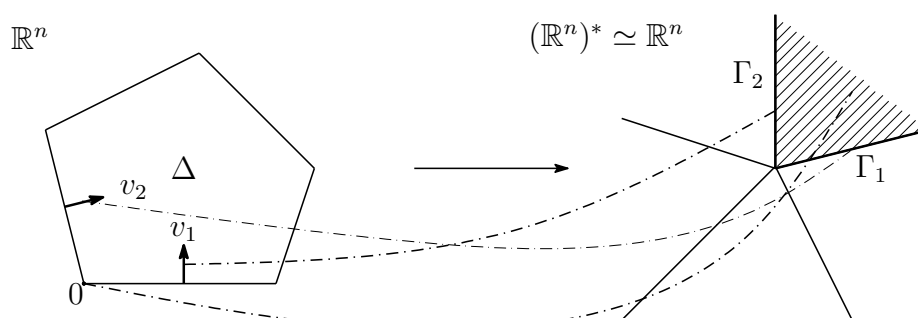
$$X_\Sigma = \coprod_{\sigma \in \Sigma} T_\sigma \quad (T_\sigma \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-\dim \sigma})$$

と、toric variety が小 torus に分解される、という基本的な結果を得ることができました。こういうことですね。cone の次元とは complimentary な次元を持つような小 torus に一般の toric variety が分解されます。また、この U_σ のことを affine toric variety と呼びます。

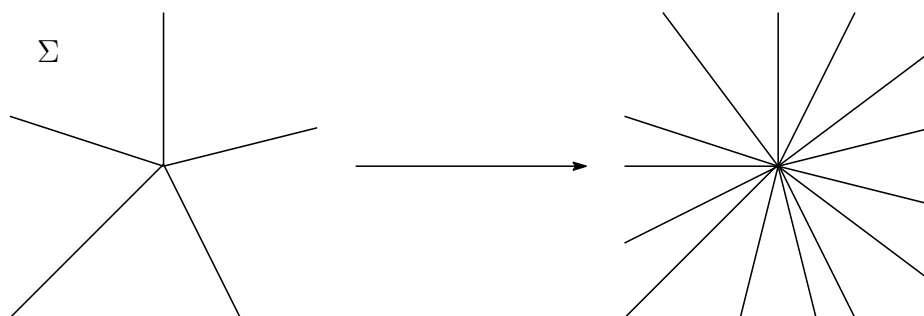
2.3 Confluent A-hypergeometric function への応用

それで、もうだいたい押してきたのかな。A-超幾何にどう使うのか概略を話して終わりにします。

2.1.3 の積分路の作り方で、予告した二番目の作り方の説明には、先ほどの $\mathcal{E} = \mathcal{O}_U g$, $g(x) = \exp(h(x))g_0(x)$ の場合の good compactification をどうやって作るのかの概要を述べる必要がありますが、まず



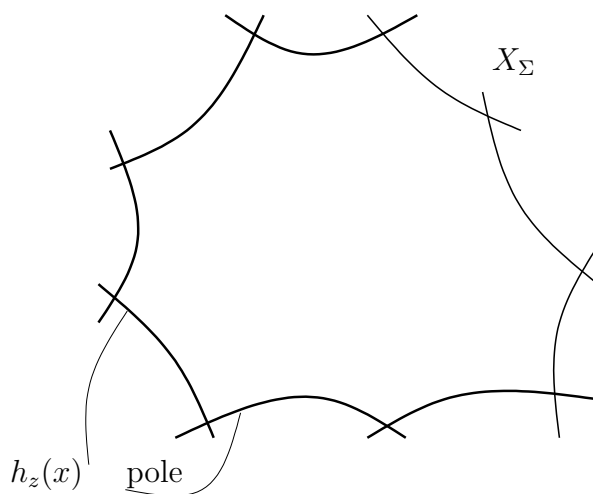
$\mathbb{R}^n$ 内に Δ という polytope があって、これの dual space の上に Δ から標準的に決まる dual fan というのが存在します。要するに、inner conormal vector が生成される方向とかいうのを考えて、この inner conormal vector が生成する 1-dim cone を考えます。例えば、この face Γ_1 とこの vector v_1 が、この面 Γ_2 とこのベクトル v_2 が対応して、この斜線の面とは 0 が対応する、という風に、自然に対応させて Δ の dual fan Σ が作れます。今日はあんまりこれをやる時間はないかもしれませんが、ちょっと演習問題もう一個出すかもしれないけど、どうしようかな。



dual fan Σ に対して、細分というのを行うんですね。細分して smooth な fan というのを、dual fan を smoothing して作るわけですね。細かく分けて。

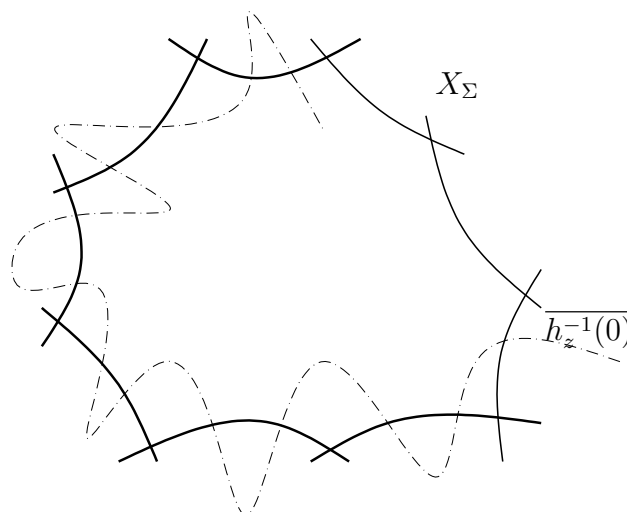
さっき一言言い忘れていましたが、 X_Σ は U_0 を必ず含んでいるわけです。0 という cone はちょっと考えてみると、先ほどの torus $T = (\mathbb{C}^*)^n$ になっていることがわかります。0 の dual cone は全体になりますので、 $\mathcal{S}_0 = \mathbb{Z}^n$ でそれで、 U_0 の構造を調べてみると、 $U_0 \simeq T = (\mathbb{C}^*)^n$ がわかるので、代数的トーラス T の compactification に必ずこの状況でなっているわけです。

それで、こうやって作った $U_0 = T$ を open に含むような X_Σ というのが smooth toric compactification です。compact 化が得られました。さっき言いましたけど、この上で Laurent 多項式 $h_z(x)$ がどう見えるのか考えるのですが、それもちょっと職人芸的なことがあって、段々慣れてくるんですけど。 X_Σ の構造はこうになっているんですね。



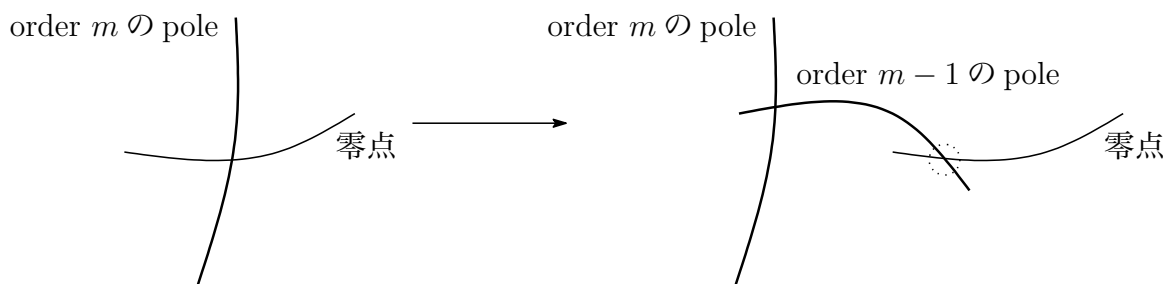
こういう風 (太線部) に pole が出てきて、Adolphson の意味で、太線部と細線部の合併が無遠因子 $D = X_\Sigma \setminus T$ で、これは原点 0 以外の正の次元の cone τ に対応する torus T_τ の合併と思ってもいいわけですね。 $T_0 = U_0$ は取っちゃましたから、要するに次元が 1 次元以上の cone に対する torus の合併がこの補集合 D になっていて、 $h_z(x)$ の pole はこの一部というか、例えば、こういった部分 に対応して出てくるのですが、この部分に対して pole part があって、そこに対応する 1-dim cone に対応する torus の合併というものになっているのです。

で、non degeneracy があると、さらに

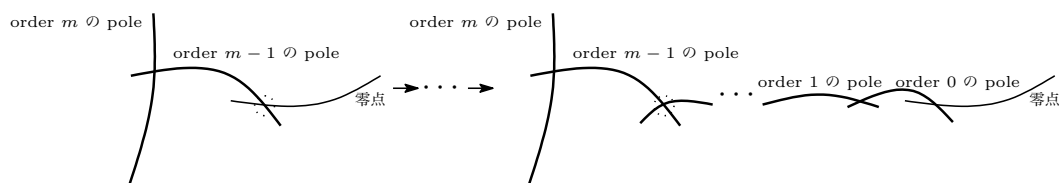


こういう風になっているんですね。 $z \in \Omega$ 、すなわち、 $h_z(x)$ が Adolphson の意味で non degenerate という仮定は、 $h_z(x)$ の pole がこうなっていて、pole と $\overline{h_z^{-1}(0)}$ の閉包 $\overline{h_z^{-1}(0)}$ (鎖線部) が絵のように transversal に交わっているという風になります。

これ別の geometric な研究で出てきた設定で、私はこれを愛用していました。



零点と pole があつたら、pole の多重度が例えば m として、ここ (交点) に沿って一旦 blow up、普通の意味で codimension 2's blow up というものを行いますと、pole の order が m で横に $m-1$ の order の例外因子が出てきて、零点がこうなって、ここ (図の丸の部分) で不確定点が出るので、blow up を図のように繰り返して (次を黒板に書く)

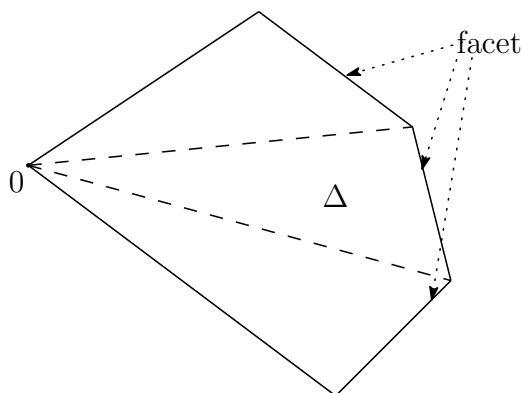


不確定点を $m, m-1, \dots$ とずっと解消していった、最後 order 0 というのと pole の order 1 というのがあって、最後零点があって、零点と pole を綺麗に引き離すことができるわけでありす。

(聴講者:じゃあこの段階では特異点解消は toric のカテゴリでやるわけではないんですね。)

はい。で、この上でさっきの relative twisted chain の計算を慎重にやっていった、twist があると local system に捻りがあるって、generic parameter になっていると、この辺の影響

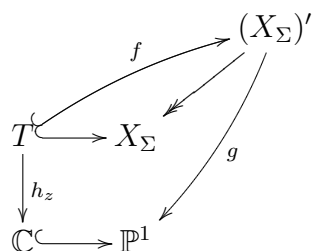
というのは全部 cohomology が全部 vanish してしまうということがわかるので、要するに blow up する前の状況の上で、ちょうど…そうですね。もうだいたいこれでやめようと思うのですが、最終的には何ができるかというのは、体積を (次を黒板に書く)



こういう風に分解する、要するにこの体積を自然に無限遠にある原点を含まない codimension 1 face、これを facet といいます。facet とこの高さというふうに、要するに体積を 3 つの部分の体積に分解するような感じを幾何学的に実現するような cycle construction というのが一般にできます。それで、それを使うと無限遠点の、前にちょっと述べた monodromy の公式も Δ という多面体の言葉で closed formula で書くことができますけど、全体の monodromy はよくわかりません。無限遠点の前の monodromy は綺麗な式があるのですが、全体の monodromy structure はまた未解明なことが多いです。以上です。

(聴講者: さっきの、最初の方の例に出してた $\frac{x_1}{x_2^m}$ かな。この形が局所的に現れたら、これだけ blow up をやらないといけないわけですね。)

ええ、pole が m 重だと、一回やってみるとわかると思うのですが。これもどこかの本に書いてあるわけではなくて、たまたま前の別の仕事でこれをやらざるを得ないはめに、 $\mathcal{D}$ -module の何かですね、多項式写像の monodromy の motivic Milnor fiber を使った研究を別途やっていまして、たまたまこれをやらないと $\mathcal{D}$ -module というか mixed Hodge module の枠組みにならない状況があつて、これをやらないといけないところまで追い込まれたことが一回ありました。はい。(次を黒板に書く)



だから、図のように X_Σ に h_z を伸ばすと、不確定点があるから、 $\mathbb{P}^1$ 上に伸びないわけなんです。伸びないんだけど、うまく blow up して、上の図の outer square が可換になるようにして、空間の改変というのができるというわけで、これを別の仕事で実は使い始めていて、それが今回のサイクルの構成にピッタリ当てはまりました。

ということで、どうも。¹⁸

¹⁸ ノート注. 以上の準備のもと、[5] では confluent A -hypergeometric function についての H_n^{rd} の次元

参考文献

- [1] A. Adolphson: Hypergeometric functions and rings generated by monomials: Duke Math. J. 73 (1994), 269-290
- [2] 青本和彦, 喜多通武: 超幾何関数論: シュプリンガー・ジャパン, シュプリンガー現代数学シリーズ, 2012
- [3] S. Bloch, H. Esnault: Local Fourier Transforms and Rightly for D-Modules: Asian J. Math., Volume 8, no. 4(2004), 587-606
- [4] P. Deligne: Equations Differentielles a Points Singuliers Reguliers: Springer, Lecture Notes in Mathematics, 163, 1970
- [5] A. Esterov, K. Takeuchi: Confluent A -hypergeometric functions and rapid decay homology cycles: Amer. J. Math., 137(2) (2015), 365-409
- [6] W. Fulton: Introduction to Toric Varieties: Annals of Mathematics Studies, 131 (1993)
- [7] I.M. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky: Hypergeometric functions and toral manifolds: Funct. Anal. Appl., 23 (1989), 94-106
- [8] I.M. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky: Discriminants, resultants and multi-dimensional determinants: Birkhäuser, 1994.
- [9] A. Grothendieck: On the de Rham cohomology of algebraic varieties: Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. (1966), no. 29, 95—103
- [10] 服部晶夫: 位相幾何学 I: 岩波書店, 岩波講座 基礎数学 幾何学 ii, 1977
- [11] 服部晶夫: 位相幾何学 II: 岩波書店, 岩波講座 基礎数学 幾何学 ii, 1978
- [12] M. Hien: Periods for flat algebraic connections: Invent. Math., 178 (2009) 1-22
- [13] M. Hien, C. Roucairol: Integral representations for solutions of exponential Gauss-Manin systems: Bull. Soc. Math. France, 136, no. 4 (2008). 505-532
- [14] R. Hotta: Equivariant $\mathcal{D}$ -modules: arXiv: math/980521v1
- [15] R. Hotta, K. Takeuchi, T. Tanisaki: D-modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory: Birkhäuser, 2008.
- [16] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida: From Gauss to Painlevé A Modern Theory of Special Functions:

や基底を詳しく調べている。

- [17] H. Kimura, Y. Haraoka, K. Takano: On confluences of the general hypergeometric systems: Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 69, no. 5(1993), 99-104
- [18] J. W. Milnor, 志賀浩二訳: モース理論-多様体上の解析学とトポロジーとの関連-: 吉岡書店, 数学叢書 8, 1968
- [19] C. Sabbah: Introduction to Stokes Structures: Springer, Lecture Notes in Mathematics, 2013
- [20] A. N. Varchenko: Special Functions, KZ Type Equations, and Representation Theory: Amer. Math. Soc., 98 (2002)
- [21] A. Weil: Foundations of Algebraic Geometry: Amer. Math. Soc., 1946

超幾何恒等式をめぐって

岩崎克則 述

蛭子彰仁 記

2015.9.2.10:40–12:10

2015.9.3.10:40–12:10

昨日の2つのお話 (Macdonald 多項式とその周辺 (野海 正俊さん), 合流型 A-超幾何関数とトーリックコンパクト化 (竹内 潔さん)) では超幾何関数から発展していった内容をテーマにされていましたが, 今日では元祖 Gauss の超幾何関数に立ち戻りたいと思います. 今日のお話は, 超幾何方程式研究会で蛭子さんがここ数年お話されている内容に影響を受けて考えたことを基にしています. Gauss の超幾何関数は超幾何関数の中でも一番の大元なので, 新しいことをするのは中々難しいのですけれども, それでも分からないことはまだまだ沢山あります. 私の方も何か新しいことが出来るとは思ってもいなかったのですが, 蛭子さんの講演をきっかけに, 色々考えていくと, 幾つか結果が得られたのでそのことについてお話したいと思います. また, 反田さん, 青木さんも最近 Gauss の超幾何関数について研究されています. 完全 WKB 解析で Voros 係数とかですね, そういう新しい概念が最近出てきたのですが, 反田さん達はそういうものに対してオリジナルな研究をされています. 反田さん達の研究で扱う関数の形が私の研究で出てくるものと似ているので, 何らかの関連があればいいなあと思っています.

さて, そろそろ本題に入りましょう. 話のテーマは,

Hypergeometric Sum(超幾何和)=Gamma Product(ガンマ乗積)

という公式がいつ成り立つかということです. こういう等式が成り立つということは滅多にありません. それではどういう制約条件の下でこういう等式が成り立つのでしょうか. 今日はその必要条件の方を求めていくことが目標となります. 今まで, (超幾何和)=(ガンマ乗積) となる公式を見つけていくことが研究の中心となっていました. 一方, 逆向きといいますか, 新しい公式を見つけていくのではなく, 公式というものはこれくらいしかありませんよ, という外から絞っていく研究は行われてこなかったようです. そこで今日はそちらの方向から考えていきたいと思います. まず, (超幾何和)=(ガンマ乗積) という等式が成り立っていたらどうなるでしょう. 右辺のガンマ関数は算術的な性質を持つ関数なので, こういう等式が成り立つということは, 超幾何和に算術的な条件が付加されていると予想されますね. こ

のことを深く考えていくことで、等式が成り立つ必要条件が得られていくわけです。

1 歴史を振り返って

まず超幾何関数の定義から始めて下さい、というのが聴講者 A さんからの要請なので、それから始めたいと思います。Gauss の超幾何関数は、

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k$$

と定義されます。ここで、 $(\alpha)_k$ はいわゆる Pochhammer 記号と呼ばれるもので以下のように定義されます：

$$(\alpha)_k = \begin{cases} 1 & (k = 0), \\ \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1) & (k \geq 1). \end{cases}$$

さて、本題に入る前に超幾何恒等式の歴史を振り返っていきましょう。それは、Gauss による次の公式に始まります：

$$\text{Gauss (1812)} \quad F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}. \quad (1)$$

これは 1812 年の Gauss の論文 [Ga] ^{*1} に書かれています。本当は左辺の級数が収束するようなパラメータ (α, β, γ) に条件を加えなければなりませんが、細かいことは省略します。それから時代を少し下りますと、Kummer による

$$\text{Kummer (1836)} \quad F(\alpha, \beta; 1 + \alpha - \beta; -1) = \frac{\Gamma(1 + \alpha - \beta)\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2} - \beta)}. \quad (2)$$

という公式が出てきます。この公式 (2) は 1836 年の論文 [Kum] に載っています。Kummer はこれをどのように求めたかといいますと、超幾何関数の二次変換公式

$$F(\alpha, \beta; 1 + \alpha - \beta; z) = (1 - z)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1 + \alpha}{2} - \beta; 1 + \alpha - \beta; -\frac{4z}{(1 - z)^2}\right) \quad (3)$$

に $z = -1$ を代入したわけです^{*2}。そうしますと、右辺の独立変数の部分はちょうど 1 になってしまいますね。すると Gauss による公式 (1) が使えて、式 (3) の右辺はガンマ乗積で表されます。そこから式 (2) が出てくるという仕組みになっています。このように、Kummer は

^{*1} Gauss は隣接関係式を使ってこの式を得ている。また本稿では述べられていないが、超幾何関数の積分表示式からも得られる。

^{*2} 式 (3) にいきなり $z = -1$ を代入する操作は実は危ない。式 (3) はあくまで $z = 0$ の近傍で成り立つ式なので、 $z = 0$ を始点とし $z = -1$ を終点とする道に沿って両辺の超幾何関数を解析接続していかなければならない。

二次変換公式を見つけ、それらを使って超幾何恒等式を得てきたわけです。同じような路線で、Goursat は三次変換公式とか或いは六次変換公式というもうちょっと高次の変換公式を色々見つけて、リストにまとめています。そしてそれらを使って、やはり同じ考え方で色々公式を導いています。例えば、

$$\text{Goursat (1881)} \quad F\left(w, w + \frac{1}{2}; 4w; \frac{8}{9}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{3}\right)^w \frac{\Gamma\left(w + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(w + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(w + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(w + \frac{2}{3}\right)} \quad (4)$$

という公式があります。これは 1881 年の Goursat の論文 [Gour] に本質的に出ているものです。式 (4) を導くにはどうするかといいますと、

$$\begin{aligned} F\left(w, w + \frac{1}{2}; 4w; z\right) &= (1-z)^{2w-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{3z}{4}\right)^{-3w+\frac{1}{2}} \\ &\times F\left(w - \frac{1}{6}, w + \frac{1}{6}; 2w + \frac{1}{2}; \frac{27z^2(1-z)}{(4-3z)^3}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

という三次変換公式をまず作ってですね、これに $z = \frac{8}{9}$ を代入します。そうすると、式 (5) の右辺の独立変数はまたまた 1 になりますから、右辺は Gauss の和公式 (1) を使うことでガンマ乗積で表されて、式 (4) が導かれるわけです。こういう高次の変換公式まで込めてもつと完備化したものが、2009 年くらいに Vidunas さんによって出版されています [V1]。

このように (式 (1), (2), (4) 参照)、パラメータ (α, β, γ) が特別なところで、また独立変数にも特別な値を入れた超幾何関数は、ガンマ乗積の形で書けることもあるんですね。そして、このような公式を見つける、そういう分野が Gauss の超幾何関数が導入された当初である 19 世紀からあったわけです。さて、今日我々がテーマとするのは、式 (4) の左辺のような超幾何関数ですね、つまりパラメータ (α, β, γ) の中に一個だけ自由変数 w が入っていて、独立変数 z は固定されている Gauss の超幾何関数です。これがいつガンマ乗積表示を持つかということを論じたいわけですが、もう少し歴史を辿ることにします。

今までは、元祖 Gauss の超幾何関数について見てきたわけですが、

聴講者 A:

すみません。先ほどの二次変換とか三次変換の公式は微分方程式を使って見つけるのですか？

岩崎:

大体いわゆる Belyi map とかいう、あのアレですね。0, 1, ∞ の三点で分岐する有理的な被覆を考えて、Gauss の微分方程式を上を持ち上げたら、またまた Gauss の微分方程式で書けたりする場合を考えるんです。… あ、だからそうです。微分方程式を使って考えて、そのあと細かい係数の調整をするというのが一つのやり方です。

聴講者 A:

他にやり方は無いんでしょうか。古典的な方法以外で、何か良いやり方は無いんで

すか.

岩崎:

ええと、そこまでは分からないです. 普通は微分方程式を使うと思います.

話を戻します. 今まで元祖 Gauss の超幾何関数に関する恒等式を見てきましたが, これを一般化した関数に関する恒等式も 19 世紀以来色々と研究されてきました. 特に, 一般超幾何関数

$${}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_{p-1} \end{matrix}; z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_{p-1})_k} \frac{z^k}{k!} \quad (6)$$

についての恒等式がよく知られています. これをもっと一般化した

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix}; z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_q)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (7)$$

でも構わないのですが, $q = p - 1$ の場合には, その級数が満たす微分方程式が確定型になりますので, 特によく調べられているわけです. 例えば,

$$\text{Saalschütz (1890)} \quad {}_3F_2\left(\begin{matrix} \alpha, \beta, -n \\ \gamma, 1 + \alpha + \beta - \gamma - n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(\gamma - \alpha)_n (\gamma - \beta)_n}{(\gamma)_n (\gamma - \alpha - \beta)_n} \quad (8)$$

(ここで, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) といった公式が知られています. これは Saalschütz の公式と呼ばれています*³. 式 (8) の左辺の級数は, Pochhammer 記号の定義から, 有限級数になっていることにご注意下さい. 本来は無有限級数である一般超幾何関数ですが, このように有限級数に退化している場合を terminating といいます. 式 (8) のように terminating な特別な超幾何関数は, ガンマ関数でなくて, Pochhammer 記号のような有限積で書けるわけです. つまり, 式 (8) は

有限和=有限積

という形になっているわけですね. こういう形の公式については非常によく研究されてきて, 19 世紀から 20 世紀にかけて色々な人が色々な公式を見つけてきました. ${}_3F_2$ だけでなく, ${}_4F_3$ とか ${}_7F_6$ に関する公式も見つけられています. そういった古典的な公式は, 1935 年の Bailey の本 [Ba] に集約されています.

その後 1950 年代 60 年代とかなり細々と研究が続けられていたようですが, 1980 年くらいになると Gosper がコンピュータを使って多くの公式 (Gosper's strange evaluations) を見つけていきます. 奇妙な evaluations とでも言いましょうか. 特別なところの特別な値を正確に計算することを evaluation というんですね. さて, この Gosper ですが, かなり特殊

*³ Pfaff-Saalschütz の公式とも呼ばれている. [AAR] 参照.

な才能を持った人のようで、証明を付けるより前に発見してしまうというか、コンピュータで実験したかどうかは分かりませんが、当たりをつけて色々奇妙な公式を発見していきます。そして得られた公式を「どうだ」という感じで、周りの皆さん*⁴ に手紙で伝えたみたいです。手紙に書かれた公式は周りの人たちによって証明が付けられています*⁵。このように特殊な才能を持った人のようで、書いている論文も非常に少ないのですけれど、コンピュータの分野では有名な人らしいですね。

岩崎:

高山さん、ご存知ですか？

高山:

ええ、知っています。

岩崎:

Gosper のアルゴリズムとかあって、中々有名な人らしいですね。

さて、Gosper による発見をきっかけに、今度は、今まで得られた公式をコンピュータを使って機械的に証明していこう、という機運になりました。式 (8) のような「有限和=有限積」の公式ならコンピュータに乗りますからね。こういう terminate する超幾何関数に関する公式を機械的に厳密に証明するためのアルゴリズムが出てきたわけです。例えば Wilf-Zeilberger 法や Zeilberger のアルゴリズムといったもの*⁶ で、開発されたのは 1990 年代に入ってからのことです。これらのアルゴリズムは、Gosper の考えた Gosper のアルゴリズムを下敷きにした方法となっています。さて、この方法で今まで知られている公式のかなりの部分 (特に terminate している場合) がコンピュータを使って再証明出来ます。つまり、データを入力すればコンピュータが自動的に証明してくれて、「証明しましたよ」という証明書を発行してくれるわけです。そういったわけで、これらのアルゴリズムは色々な人によって盛んに研究されているようで…,

岩崎:

高山さん、今でも盛んに研究されているんですか？

高山:

ええ、やられています。最近ですと、lattice path か何かに関する有名な combinatorial な恒等式を、計算機で強引に差分方程式を探して証明しましたね。

岩崎:

ははー。例えば、昔、父親の方の Apéry は $\zeta(3)$ の値が無理数となることを証明するために、差分方程式を作って何かやってみましたね。あの辺りの証明もこういう方法で証

*⁴ G.E.Andrews, R.Askey, R.Schroeppel, D.Stanton, B.Trager, R.Zippel

*⁵ 例えば, [GS] 参照.

*⁶ Gosper のアルゴリズムやこれらのアルゴリズムについては, [Ko], [PWZ] を参照せよ.

明出来るようになっていましたね.

そういうわけでこれらの方法は盛んに使われているわけですがけれども、基本的には、既に見つかっている公式とか、或いは証明は無いけれど予想は付いている公式とかがあったら、それを放り込めば証明をしてくれるものなわけです. 一方で、新しく公式を発見するということに関しては、ええと不得手と言ったら怒られるかもしれませんが、わりと不得手なんです. 勿論、場合によってはそれらを援用することで新たな公式を発見することも出来ますけれども、また、既に予想がついたものに対しては非常に強力だけれども、やはり新たに発見することが得意だとは中々言えないと思うんですね.

野海:

ちょっといいですか. W-Z アルゴリズムって、日本人だと佐藤先生や青本先生の仕事で、例えば D 加群の De Rham コホモロジーとか、差分の De Rham コホモロジーがあって、高山さんたちの仕事でも、そのコホモロジーの計算にグレブナー的な考え方を導入できることは、W-Z 以前からよく知られているわけです. だから W-Z の話が出てくるといつも「日本人の仕事は知らないの？」と僕は思うのですけれども. 「日本人ならそちらも認識してほしい」というのが個人的な感想です. だから ….

岩崎:

ええ.

高山:

まあまあ. 基本的なことって、色々な場所で …

野海:

ええ、はい. 独立だとは思うんだけど. ええ. あの …

岩崎:

発想自身は、単純といえば単純な発想をしているので.

野海:

積分であつたら部分積分であつたり、無限和だつたら和の添字をシフトしても不変であるとか ….. まあ、ちょっと佐藤流とか青本流とかもあるんだよ、というのを心の何処かに置いてもらつたらと思います.

岩崎:

分かりました. どうもありがとうございます.

話を戻しますと、こういう状況だったわけです.

それから割と最近になって、隣接関係式の方法というものが出てきました. 隣接関係式自体はもともと Gauss の時代からあるわけで、そういう意味で implicit には昔からあった考え方だと思うのですがけれども. 組織的に公式を新しく発見する方法の一つとして、蛭子さん

によって導入されたわけです。方法についての詳しいことは後で説明します。私は、蛭子さんの講演を聞いていて、それに刺激を受けて、今回のような話を考えたというわけです。

あと、こういう超幾何関数の公式は、元祖超幾何関数だけでなく、一般超幾何関数のものもありますし、多変数化したものについても考えられつつありますし、あとは q -類似もありますね。そういった公式を色々な人が色々な動機で考えられているかと思います。例えば、野海さんの還暦記念の研究集会で、野海さんがお話されていたことも、こういったことと関係しているように感じました。

野海:

ああ、和公式とか変換公式とかですね。そうです。

ええ、だから色々な version があるようです。日本ではこういった公式自身の専門家というのは余りいないようですが、色々な動機で色々と考えていらっしゃる方は沢山いるかと思います。

野海:

Dougall の和公式というものが上にありますけど、その q -類似もあって、退化させていくことで色々な公式が得られます。

岩崎:

だから、 q -類似の公式に対して連続的な極限を取ることで、古典的な公式が色々出てきたりするわけですね。

以上、超幾何関数の恒等式に関する歴史的な流れを振り返ってきました。

2 ガンマ乗積表示を持つ Gauss の超幾何関数: 問題設定

2.1 問題の設定

これからは、またまた Gauss の時代に戻りまして、元祖超幾何関数を考えることにします。考える関数は、先ほど出てきた Goursat の公式 (4) のような自由変数が一個だけ入っている場合です。つまり、データ

$$\lambda = (p, q, r; a, b, c; x)$$

を与えたときに、 w に関する関数

$$f(w; \lambda) := F(pw + a, qw + b; rw + c; x)$$

を考えるわけです。これは、 w に関して $\mathbb{C}$ 上有理型となっています。それでデータですが、一般の複素数にしますとまだ私には難しいので、とりあえず実数で考えることにします。つまり、 $p, q, r, a, b, c, x \in \mathbb{R}$ とします。

データ λ をもう少し限定していきましょう。まず, $r = 0$ である場合ですけれども…。このとき, $c \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ であれば意味を持たなくなるので, そういう場合を避けますと, w に関する関数 $f(w; \lambda)$ は極が無くなって整関数となってしまいます。こういう特別なときは別途考えることにして, $r \neq 0$ と仮定します。このとき (つまり $r \neq 0$ であれば), $c = 0$ として一般性を失いません。というのも $r \neq 0$ だとすると,

$$w \mapsto w - \frac{c}{r}$$

と平行移動することで, 結局は $c = 0$ である場合の $f(w; \lambda)$ を考えていることになるからです。ですから, 最初から $c = 0$ として, データ λ も c を除いたものを考えます。それを改めて

$$\lambda = (p, q, r; a, b; x)$$

と書くことにします。あと, 級数 $f(w; \lambda)$ がとにかく収束しなければいけませんから, $-1 < x < 1$ とします。ただし $x = 0$ の場合は, 定義より $f(w; \lambda) = 1$ となり自明ですから, この場合は除外しましょう。こういったことを考慮しまして, 結局次の領域で関数を考えていくことにします。

考える領域と考える関数:

$$p, q \in \mathbb{R}; r > 0; a, b \in \mathbb{R}; -1 < x < 0 \text{ または } 0 < x < 1$$

を満たすデータ $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ に対して, w に関する関数

$$f(w; \lambda) := F(pw + a, qw + b; rw; x) \quad (9)$$

を考える。

それでは, 考えるべき問題を二つ設定しましょう。一つ目は次のような問題です。

問題 I: $f(w; \lambda)$ がガンマ乗積表示 (GPF) を持つような, すなわち

$$f(w; \lambda) = C \cdot d^w \cdot \frac{\Gamma(w + u_1) \cdots \Gamma(w + u_m)}{\Gamma(w + v_1) \cdots \Gamma(w + v_n)} \quad (10)$$

となるようなデータ $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ を見つけよ。ただし,

$$C, d \in \mathbb{C}^\times; m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; u_1, \dots, u_m \in \mathbb{C}; v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$$

とする。

これをそのまま考えるのはちょっと難しいので, より易しい問題を足掛かりにして考えることにしたいと思います。その足掛かりにする問題が次です。

問題 II:

$$\frac{f(w+1; \lambda)}{f(w; \lambda)} =: R(w; \lambda) \in \mathbb{C}(w) \quad (11)$$

となるようなデータ $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ を見つけよ.

つまり, w を 1 ずらした f と元々の f の比 $R(w; \lambda)$ は, 一般には超越関数になるのですが, これが偶々有理関数になるようなデータを探せ, というわけです. このように $R(w; \lambda)$ が有理関数になるとき, $f(w; \lambda)$ を of closed form とか hypergeometric と業界では呼んでいるそうです.

さて, 問題 I と問題 II の関係ですが, λ が問題 I の解ならば, それは問題 II の解にもなります. そのときの $R(w; \lambda)$ は,

$$R(w; \lambda) = d \cdot \frac{(w + u_1) \cdots (w + u_m)}{(w + v_1) \cdots (w + v_n)}$$

となります. これは, ガンマ関数の漸化式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ から出てきます. つまり, 問題 I の解は常に問題 II の解を与えるわけです. そこで問題 II を足掛かりに, 或いは問題 I と問題 II を行ったり来たりしながら, 両者を考えるという戦略を取ります.

問題 I と問題 II は, terminate する $f(w; \lambda)$ に絞って考えることも出来ます. つまり, 問題 I は有限和=有限積となるデータを探せという問題になるわけです. この場合, 問題 I と II は同値です. それは, 問題 II の差分方程式も離散的になりますので. つまり, 初期値問題から始めて, ワーって順番に解いていけば Pochhammer 記号を使って解けちゃいますからね. ところが一般の場合には, 問題 I と問題 II の間にはかなりのギャップがあります.

以上の問題 I, II が主な問題となります.

2.2 問題 I と問題 II から生じる問題達

問題 I, II が主な問題なんですけれども, これらの問題から色々な問題が生じてくるので, それらを挙げていくことにしましょう.

問題 1: 問題 II の解は必ずしも問題 I の解となるわけではない. それではいつ, 問題 II の解は問題 I の解となるのだろうか?

問題 I の解は常に問題 II の解となっていました, これはその逆を問う問題です. この問題は非常に解析的な問題となります. というのも, 問題 II の解が問題 I の解に持ち上がるというのは解析的な話になりますから, それを示すためには漸近解析など解析的手法が主な手段となるわけです; w を large parameter と思ってそれに関する漸近挙動とか, そういう解析的なことを考えて, いつ問題 II の解が問題 I の解に持ち上がるのかという議論をすることになります. あと, 青木さんや反田さんが考えられているのもちょうどこの形で, 私は w と

いう文字を使っていますが、青木さん達は η を large parameter として、Stokes geometry や WKB 解析といった解析をしておられます [Ao], [AT], [ATT], [Ta]. また、青木さん達の研究に出てくる変わり点の式とかが、全然別のやり方 (つまり後で詳しく述べる隣接関係式の方法を使うやり方) から出てくる式と一致していたりですね、そういうことが起こっています*7.

概念設定を徐々にしていきます. まず elementary solution というものを定義します:

定義 (elementary solution): λ を問題 I または問題 II の解であるとする. このとき, λ が elementary であるとは, w に関する有理型関数 $f(w; \lambda)$ の極の個数が有限個である場合のことをいう. そうでない λ を non-elementary であるという.

そうしますと、問題 1 に続いて次の問題が出てきます:

問題 2: elementary solutions を全て書き上げよ.

なぜ elementary solutions だけ別扱いするかということですが、そのためには non-elementary solutions (要するに極が無限個あるもの) を考えるときにどういう戦略を取るかということを述べなければなりません. non-elementary solution には極がズラズラっと無限個並びますね. 極の上には留数が載っているの、それらの漸近挙動を考えることにするわけです. 僕は力学系というか dynamics が好きなので、これを一種の離散的な dynamics と思って、無限に飛んだときの漸近挙動、無限に行き着いた先にどういう dynamics があるだろうと、そういうことを考えるわけです. 大体漸近解析というのは、無限の方に行くと細かいことは何処かに飛んでしまって、本質的なデータだけが残ることが期待されますね. そうすると、極が無限大に飛んだときの行き着く先でどのようなデータが残っているだろうということを考えることで、問題に対して何らかの解答を与えるのではないだろうか、というのがそもそもの発想です.

超幾何和がガンマ乗積表示を持つときの p, q, r, a, b, x の満たさなければならない条件は割と算術的、diophantine 的な条件だろうと期待されます. 実際過去の例を見ると、 p, q, r は (半整数のときもありますが) 大体整数ですし、 a, b も大体有理数の場合しか出てきてないです. それでは、何故そういう算術的な条件を持つのだろう、ということが疑問になるわけです. そういったことを見ようと思ったら、上の発想に思い至ったわけです.

それで、無限遠方での極の漸近挙動を見ますと、確かに diophantine 的な条件が出てくるのが分かります. 特に p, q, r がある領域に入っていると、漸近挙動は torus 上の直線運動になっていて、それは dynamics で一番基本的なものなんですけれども、そういう構造が見えてきます. このことから、 p, q, r が半整数とか整数でなければならないといったことが見えてきたりするわけです. ところが elementary solution というのは、こういった手法が使

*7 3.1 節も参照せよ.

えないのであらかじめ除外しておこうということです。

2.3 隣接関係式の方法

次にちょっと話題を変えまして、問題 II の解を発見的に見つけようと思ったらどういうことをすればいいのかという話に入ります。

まず、Gauss の 15 個の隣接関係式 (The 15 contiguous relations of Gauss) についてお話しします。これは良く知られていて、例えば Erdélyi の本 [Erd] にリストアップされています。簡単のために、

$$\begin{aligned} F &:= F(\alpha, \beta; \gamma; z), & F(\alpha \pm) &:= F(\alpha \pm 1, \beta; \gamma; z), \\ F(\beta \pm) &:= F(\alpha, \beta \pm 1; \gamma; z), & F(\gamma \pm) &:= F(\alpha, \beta; \gamma \pm 1; z) \end{aligned}$$

と書くことにします。そして、元の F から一つのパラメータが 1 だけズレたものを F と隣接しているものと呼ぶことにします。 F と隣接しているものは $F(\alpha \pm), F(\beta \pm), F(\gamma \pm)$ の全 6 個ですね。それで、 F と、二つの隣接しているものの間に線型関係式が成り立つのですが、その線型関係式を隣接関係式と呼ぶわけです。隣接しているものを二つ選ぶ方法は $\binom{6}{2} = 15$ 通りあるわけですから、結局全部で 15 個の隣接関係式が出てきます。これらは 1812 年の Gauss の論文に書かれていますから、Gauss の 15 個の隣接関係式と呼ばれています。

これら隣接関係式を繰り返し適用していきまると、一般の三項間関係式 (three-term relations) が出てくるわけですが、その前に簡単のために記号を導入しましょう：

定義 (ベクトル表記): 記号の省略のために、パラメータ (α, β, γ) をベクトル表示する：

$$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha, \beta, \gamma).$$

そうすると、 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ は $F(\boldsymbol{\alpha}; z)$ と書ける。また、次のような整数ベクトルを導入する：

$$\boldsymbol{p} := (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3, \quad \mathbf{1} := (1, 1, 1).$$

このとき、次のような関係式が成り立つわけです：

三項間関係式: 与えられた $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^3$ に対して、

$$F(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{p}; z) = r(\boldsymbol{\alpha}; z)F(\boldsymbol{\alpha}; z) + q(\boldsymbol{\alpha}; z)F(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{1}; z) \quad (12)$$

を満たす有理関数の組 $(r, q) \in (\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}; z))^2$ が唯一つ存在する。この関係式 (12) を三項間関係式と呼ぶ。

問題 II を考えようとしているわけですが、ようやくそれに近づきつつあります。今、 $\lambda = (p, q, r; a, b, x)$ が与えられたとしたら、

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(w) := (pw + a, qw + b, rw), \quad z = x$$

として、式 (12) に代入するわけです。そうしますと式 (12) は、

$$f(w+1; \lambda) = R(w; \lambda)f(w; \lambda) + Q(w; \lambda)\tilde{f}(w; \lambda) \quad (13)$$

と書けます。ここで、 $R(w; \lambda) := r(\alpha(w); x)$, $Q(w; \lambda) := q(\alpha(w); x)$, $\tilde{f}(w; \lambda) := F(\alpha(w) + 1; x)$ です。こういう三項間関係式になるわけです。

それでは、隣接関係式の方法 (The method of contiguous relations), 略して MCR についてお話していきます。もし、 λ が非常に良いデータで、たまたま

$$Q(w; \lambda) \equiv 0 \text{ in } \mathbb{C}(w) \quad (14)$$

となったとしましょう。そうしたら、式 (13) において $Q(w; \lambda)$ が無くなっちゃうので、式 (13) はちょうど式 (11) になっています。つまり、

隣接関係式の方法: 式 (13) は条件 (14) を満たすような λ に対して二項間関係式に落ち、それは問題 II の解 (11) を与える。この手続きによって問題 II の解を求めることを隣接関係式の方法と呼ぶ。

これを隣接関係式の方法、あるいは簡単に蛭子法と呼ぶことにします。だから結局問題 II の解を見つけようと思ったら、条件 (14) を解析すればいいわけですね。条件 (14) は implicit な条件で見え難いですが、もし $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^3$ が与えられたのなら、それは $(a, b; x)$ に関する過剰決定代数方程式系になります。この過剰決定系が本当に解を持つかどうかというのは...

岩崎:

高山さん、出来るんですか?

高山:

はい。

ということでチェックできます。つまり、 $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^3$ を取ってきて、それをコンピュータに放り投げると、式 (14) を満たす λ があるかどうかというのが分かるわけですね。 λ が非常に happy だったらこれがちゃんと条件 (14) を満たして、そうであれば問題 II の解が一個出来るということになるわけです。アイデアは素朴で、粗筋はこの通りです。ただ今の段階では、例えば過剰決定系を使って、 a, b は有理数でないといけないとか、そういうことを議論するのは中々難しいです。しかし後で色々工夫することで、 $\mathbf{p}$ がある条件を満たしているときには、 a, b は有理数でなければいけないとか、そういうことが分かるようになります。

小原:

すみません。(過剰決定系を解く際に、) 解があるかどうかはチェック出来ると思うんですが、解が何であるかは分からないと思うんですが。

高山:

有理数なら、準素イデアル分解すればいいじゃない。

岩崎:

この段階では別に有理数かどうかは分かっていません。でも後で隣接関係式の方法に更に磨きをかけてやると、 p がある条件を満たしているときには、 a, b が必然的にどういう値を取らないといけないかという候補者が全部有限個リストアップ出来るんですね。つまり、 a, b の候補は p を使って完全に書けちゃうんです。だからその段階になると、とにかく候補者をコンピュータの中に放り込んでチェックするだけということになります。未だ全ての p に対しての議論は出来ていないんですけど、 p がある条件を満たしているときには、 a, b の値は理論的にこうでなければならないということが分かるわけです。

小原:

過剰決定の方程式そのものを解くわけではなくて、 a, b の候補を見つけてそれを過剰決定系に放り込むということですか。

岩崎:

ええ、ええ。過剰決定系そのものの段階では非常に implicit なのですが、もっと explicit に同値な条件を書き下すことが出来るんですね。それも蛭子さんの計算法を見ていると思いつくことです。どうするかと言いますと、まず二つの超幾何関数の積を取ってきたものにデータを放り込みます。勿論それは無限級数なんですけれど、有限で打ち切ってしまうと有限和にしたものを考えます。それが恒等的に 0 となるかという非常に限定的な条件にまで、過剰決定系の問題を落とすことが出来るわけです。こういったことが、 p がある領域に入っていたら出来ます。

高山:

ところで演習問題は出ないんですか？^{*8}

岩崎:

演習問題は……。これいつまででしたっけ？

高山:

ええと、12 時 10 分までです。

岩崎:

じゃあ、12 時を回った頃に一題出すことにします。だから、小原さんの質問にもう一度お答えしますと、今の段階ではそういうことまで言うのはまだ無理なので、それはまた別に考えるべきことになります。

落合:

^{*8} 超幾何学校では、講演者は演習問題を数題出さなければならない。この演習問題は別に設けられた演習の時間に参加者が解くことになっている。

計算機を回すと、 a, b として有理数でないものが見つかったりしないんですか？

岩崎:

それは (見つかったり) する可能性があります. 問題 II の解であるためには, p がある領域に入っているときには, a, b は有理数でないといけないというところまで分かっています. しかし, 過剰決定系 (14) に無理数解があるという可能性を排除することとは違います. そこには論理的なギャップがあります. *9

落合:

ええと, 具体的に計算機を回して, a, b が有理数でない解が一つはあるんですか? それとも今のところは無いですか?

岩崎:

ええと. 僕は計算機が苦手でちゃんと回したことは無いので, きちんとしたお答えは出来ませんが. 少なくとも論理的には, 問題 II の解であれば a, b は有理数でないといけないということが証明できます. つまり, 過剰決定系 (14) には無理数の解が出てくるということもあるかもしれないけれど... あ, そうか. ちょっと待ってね. それは無いかな. この後で言うことなんですけれども, 条件 (14) が成り立つためには a, b が有理数でないといけないことが言えますので, 無理数解は原理的に無いと思います. はい. だからコンピュータを回さなくてもそれは保証されるということです. 一方 x の方は本当に代数的数が出てきます. a, b の方は確かに有理数となりますが, x の方は有理数とは限りません.

以上が隣接関係式の方法となりますが, この方法について注意しなければならないことが二点あります. 一つ目は, この方法は p, q, r が整数である場合にのみ適用可能だということです. 二つ目は, p, q, r が整数であると限定しても, この方法で全ての問題 II の解が見つかるかどうかは要検討だということです. そこで次の問題を設定するわけです:

問題 3: 問題 II に対する integral 解はいつ隣接関係式の方法から来るだろうか?

ここで, integral とは次のような意味です:

定義 (integral, rational, irrational): データ $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ の前半部 (p, q, r) を主要部ということにする. このとき, データ λ を主要部の状態によって三種類に分ける:

$(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$ のとき, データ λ を integral と呼ぶ.

$(p, q, r) \in \mathbb{Q}^3$ のとき, データ λ を rational と呼ぶ.

$(p, q, r) \notin \mathbb{Q}^3$ のとき, データ λ を irrational と呼ぶ.

*9 岩崎後記: このあたりは質問に揺さぶられて, 受け答えに動揺がみられる. ある領域で (どの領域か明示的には言っていないが, あとで出てくる $\mathcal{D}^\pm$ を指す), λ が問題 II の解であることと過剰決定系 (14) の解であることは同値であり, かつそこにおける任意の解 λ に対して, a, b は必然的に有理数でなければならない.

問題 3 についてですけれども、隣接関係式の適用範囲より、 p, q, r は整数でないと問題自身意味を持たないわけですね。そこで、 p, q, r が整数であると限ったときに、いつ問題 II の解が隣接関係式の方法から得られるか、ということを問うているわけです。これも解析的な問題となります。もし解が隣接関係式の方法から来ることが分かったのなら、隣接関係式の方法の性質を色々使って、色々詳しい議論をすることが出来ますので、より嬉しい訳です。

ここで、ついでに multiplication という言葉の定義をしましょう。

定義 (multiplication): $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して、

$$n\lambda := (np, nq, nr; a, b; x)$$

と定める。 $n\lambda$ を λ の multiplication と呼ぶ。

ここも主要部だけに n が掛かっているわけです。そうしますと、rational な場合は適当に自然数倍すると、integral な場合に戻るので、これらの場合には割と関係があることが分かります。irrational な場合はいくら自然数倍しても integral な場合にも rational な場合にもならないので、ちょっと別問題になります。

2.4 演習問題

ここで問題を出しますか。

問題 π : λ を問題 I(or II) の解とする。このとき、 $n\lambda$ もまた問題 I(or II) の解となることを示せ。

ヒントをあげます。問題 I の場合には、Gauss によるガンマ関数の n 倍公式 (multiplication formula)

$$\Gamma(nz) = \frac{n^{nz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{j}{n}\right)$$

を使うと良いです。問題 II の場合に関しては、より初等的です。

もう一題くらい出しときます。これは今回のところで話さなかったことです。先ほど $f(w; \lambda)$ の留数の漸近挙動を調べると色々情報が出てくるという話をしましたね。そこで留数の計算をして下さい、というのが問題です。 $f(w; \lambda)$ の定義を見てみると、極が出てくる可能性があるのは $w = w_j$ に限られるわけです。ただし、 $w_j := \frac{-j}{r} (j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 。超幾何関数の係数の分母が 0 となる点で極が生じる可能性があるのです、その点での留数を計算して下さい、ということです。そうすると、留数自身がまたまた超幾何関数になることが分かります*10:

*10 [Iw1] の Lemma 4.1 参照。

問題 π' : w_j を

$$w_j := \frac{-j}{r}$$

(ただし, $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) と定める. このとき, $f(w; \lambda)$ の $w = w_j$ での留数は次で与えられることを示せ:

$$\text{Res}_{w=w_j} f(w; \lambda) = C_j \cdot F(a_j, b_j; j+2; x). \quad (15)$$

ここで,

$$\begin{aligned} a_j &:= pw_j + j + a + 1, \\ b_j &:= qw_j + j + b + 1, \\ C_j &:= \frac{(-1)^j}{r} \frac{(pw_j + a)_{j+1} (qw_j + b)_{j+1}}{j!(j+1)!} x^{j+1}. \end{aligned}$$

$f(w; \lambda)$ の留数の漸近挙動を調べるために, j を large parameter として見て式 (15) の右辺の漸近挙動を調べる必要が出てきます. その解析には鞍点法を使うわけです. さらに解析していくと, こういうところに p, q, r の算術的な性質が隠れていることが分かります.

また, 問題 I, II を解くために, 任意の p, q, r に対して $f(w; \lambda)$ の漸近挙動を調べる必要が出てきます. 僕は漸近解析の知識は余り無いので安直に鞍点法で出来る部分しか調べてないですが, もっと鞍点法について技術を持った人達ならやれると思います. 実際, 小池さんに具体的な例について計算をやってもらったこともあります. あと, 完全 WKB 解析の手法も使えるかどうかというところも興味あるところです. そういうわけで, 超幾何関数の large parameter に関する漸近解析は色々なところで必要になってくるわけです.

あと問題 3 についてですけれども, p, q, r がある領域に入っているときには, 全ての non-elementary な解は蛭子法で求まるということも証明出来ます. こういうことを考えだしたのは, 蛭子さんの話を聞いたのがきっかけです. しかし, 彼の方法はあくまで組織的に発見する方法であって, そうやって見つけたもので全て尽きるのかということには解答を与えていないんですね. 僕はそれで本当に尽きるのかどうか調べるために研究を始めたわけです. そして, その答えはある領域では yes となります. つまり, p, q, r がある領域に入っているときは, 漸近解析を用いることで p, q, r は整数か半整数でないといけないことが分かります. 半整数の場合でも multiplication を考えれば integral な場合に帰着出来ますから, 本質的には問題 3 を考えることになります. 更に問題 3 を考えていくと, 結局隣接関係式の方法から全ての non-elementary な解が出てくることが分かるわけです. そういう感じの story になっています. 時間ですので前半はこれで終わります.

3 ガンマ乗積表示を持つ Gauss の超幾何関数: 結果

昨日はまず歴史を振り返ったあと、問題設定をしました。今日はこれまでの研究で分かったことについてお話していきたいと思います。

3.1 超幾何関数の対称性

まず、古典的に知られている超幾何関数の変換公式から振り返っていきます。超幾何関数は次のように別の超幾何関数を用いて表せることが古くから知られています:

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= F(\beta, \alpha; \gamma; z) && (\text{trivial}) \\
 &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z) && (\text{Euler}) \\
 &= (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right) && (\text{Pfaff}) \\
 &= (1-z)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right). && (\text{Pfaff})
 \end{aligned}$$

これらを超幾何関数の古典的対称性と呼ぶことにします。まず一番上は超幾何関数の定義より trivial です。次に Euler 変換, Pfaff 変換ですが、これらも古来よりよく知られているものです。下の二つの Pfaff 変換を合成することで Euler 変換が得られるので、Euler 変換と Pfaff 変換は独立な変換というわけではないです。それでは何故 Euler 変換も Pfaff 変換として扱わないのだろうかと思われるかもしれません。これは、先ず Euler が Euler 変換を見つけて、その後で Pfaff が Pfaff 変換を見つけたという順序になっているためですね。Gauss がヘルムシュテット大学で学位を取ったときの指導教員が Pfaff です。そういうわけで、Gauss が超幾何関数に興味を持ったのはもしかしたら Pfaff の影響があったのかもしれませんが。

この対称性は問題 I, II と compatible になっていますから、

$$\begin{aligned}
 \lambda = (p, q, r; a, b; x) &\mapsto (q, p, r; b, a; x) && (\text{trivial}) \\
 &\mapsto (r-p, r-q, r; -a, -b; x) && (\text{Euler}) \\
 &\mapsto \left(p, r-q, r; a, -b; \frac{x}{x-1}\right) && (\text{Pfaff}) \\
 &\mapsto \left(r-p, q, r; -a, b; \frac{x}{x-1}\right) && (\text{Pfaff})
 \end{aligned}$$

というデータの変換が生じて、この変換で解が解に移り合うことになります。つまり、少なくともこういった対称性で移り合うものは同じものと見なして良いわけです。データの x について $-1 < x < 0$ または $0 < x < 1$ であるとしていましたが、 $-1 < x < 0$ であっても Pfaff 変換により $0 < x < \frac{1}{2}$, つまりは $0 < x < 1$ の中に移されることが分かります。ですから結局、次の領域で問題 I, II を考えていくことになります。

考える領域 (再): データ $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ に対して問題 I, II を考える. ただし,

$$p, q \in \mathbb{R}; \quad r > 0; \quad a, b \in \mathbb{R}; \quad 0 < x < 1. \quad (16)$$

データ $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ には沢山成分がありますが, 注目すべきは主要部 (p, q, r) です. r を固定して, pq 平面を書いてみます (図 1 参照). もうデータ λ の x は $0 < x < 1$ だとして

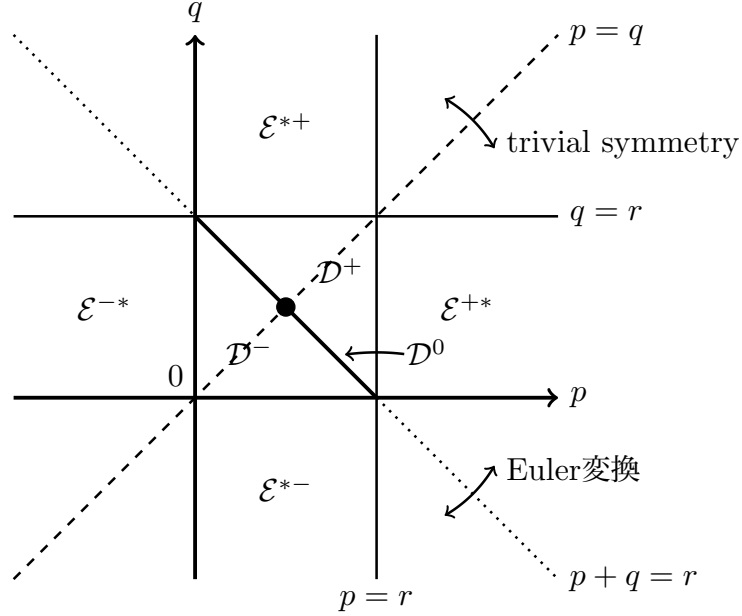


図 1 領域 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$

いますから Pfaff 変換は使えませんが, 自明な変換と Euler 変換を使うことで, ある程度領域を還元出来ることが分かります; 直線 $p = q$ に関する折り返しが自明な変換, 直線 $p + q = r$ に関する折り返しが Euler 変換に対応しています.

今, w を large parameter だと思って, $f(w; \lambda)$ の漸近展開を考えます. そうしますと, 変わり点や, あと変わり点と確定特異点を結ぶような Stokes 曲線といったものが出てきます. Stokes 曲線の配置のことを Stokes geometry といいます, その様子がですね, 図 1 の中にある直線, つまり $p = 0$, $q = 0$, $q = r$, $p = r$, $p = q$ や $p + q = r$ を境にして変わるんですね. ですから, 図 1(に似たもの) は青木さん・反田さんがやっている完全 WKB 解析でも出てきます. そういうわけで, Stokes geometry が変わる線と対称性から出てくる領域の分割というのが対応しているわけで, 何か関連がありそうです.

今言いましたように, $f(w; \lambda)$ の漸近解析を考えたとき, p, q の位置関係によって様子が変わるので領域ごとに物事を考えていくことにします. 領域 (16) を分割して, 次のように名付けます (図 1 も参照のこと):

$$\mathcal{D}^- := \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : p > 0, q > 0, p + q < r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\},$$

$$\mathcal{D}^+ := \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : p < r, q < r, p + q > r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^0 &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : p > 0, q > 0, p + q = r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{E}^{*-} &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : 0 < p < r, q < 0; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{E}^{*+} &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : 0 < p < r, q > r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{E}^{-*} &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : p < 0, 0 < q < r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{E}^{+*} &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : p > r, 0 < q < r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{D} &:= \mathcal{D}^- \cup \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^0, \\
\mathcal{E} &:= \mathcal{E}^{*-} \cup \mathcal{E}^{*+} \cup \mathcal{E}^{-*} \cup \mathcal{E}^{+*}.
\end{aligned}$$

また, $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ との境界にも名前を付けましょう:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{*-} &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : 0 < p < r, q = 0; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{I}^{*+} &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : 0 < p < r, q = r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{I}^{-*} &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : p = 0, 0 < q < r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{I}^{+*} &:= \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : p = r, 0 < q < r; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}, \\
\mathcal{I} &:= \mathcal{I}^{*-} \cup \mathcal{I}^{*+} \cup \mathcal{I}^{-*} \cup \mathcal{I}^{+*}.
\end{aligned}$$

ただもう少し分り易く名付け直します:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &: \text{中央キャンパス}, \\
\mathcal{E}^{*-} &: \text{南キャンパス}, & \mathcal{E}^{*+} &: \text{北キャンパス}, \\
\mathcal{E}^{-*} &: \text{西キャンパス}, & \mathcal{E}^{+*} &: \text{東キャンパス}.
\end{aligned}$$

さらに,

図 1 において西南方向にある領域 : 西南キャンパス,
 図 1 において東北方向にある領域 : 東北キャンパス,
 図 1 において東南方向にある領域 : 東南キャンパス,
 図 1 において西北方向にある領域 : 西北キャンパス.

と呼ぶことにします.

中央キャンパスを $\mathcal{D}^-$, $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}^0$ と分けました. そのうち Euler 変換で $\mathcal{D}^-$ と $\mathcal{D}^+$ が移り合うので, 結局 $\mathcal{D}^-$ と $\mathcal{D}^0$ を考えればよいわけです. 同じように東西南北キャンパス $\mathcal{E}$ も, 自明な対称性と Euler 変換から, 結局南キャンパスだけを考えれば良いことが分かります. ただ, 自明な対称性 (図 1 において直線 $p = q$ に沿って折り返す操作) はこのあと無視することにします. 我々の話では, Euler 変換は非常に重要になるわけですが, 一方で自明な対称性は今のところは重要では無いわけです. 例えば, 領域 $\mathcal{D}^-$ を自明な対称性を使うことでさらに半分の領域に還元すればよいように感じますが, 実はそんなに利かないんです. そういうわけで自明な対称性は考えないことにします. ただし, 完全 WKB 解析の方では自明な対称性と Euler 変換はどうも同じくらいの役割を占めているようです.

昨日、隣接関係式の方法についてお話ししましたが、あれにも対称性があることが分かります (3.3 節も参照のこと). これも蛭子さんが見つけたことで、僕は Ebisu symmetry と呼んでいます. これは、(隣接関係式から出てくる) 三項間関係式にある種の対称性があることを言っています. このことから、蛭子法から出てくる問題 II の解に対しては、Ebisu symmetry があることが分かるわけです. Ebisu symmetry の中でも特に私が重要視しているのは、duality と reciprocity という二つの対称性です:

duality と reciprocity:

$$\begin{aligned}\lambda = (p, q, r; a, b; x) &\mapsto \lambda' := (p, q, r; a', b'; x), \\ a' &:= 1 - \frac{2p}{r} - a, \quad b' := 1 - \frac{2q}{r} - b\end{aligned}\tag{17}$$

という変換を duality と呼ぶ. また,

$$\begin{aligned}\lambda = (p, q, r; a, b; x) &\mapsto \check{\lambda} := (\check{p}, \check{q}, \check{r}; \check{a}, \check{b}; \check{x}), \\ \check{p} &:= -p, \quad \check{q} := -q, \quad \check{r} := r - p - q; \quad \check{x} := 1 - x; \\ \check{a} &:= \frac{(r - q)(1 - a) - pb}{r - p - q}, \quad \check{b} := \frac{(r - p)(1 - b) - qa}{r - p - q}\end{aligned}\tag{18}$$

という変換を reciprocity と呼ぶ.

実はこういった対称性があると、解が解に移るということだけでなく*¹¹、もっと深いことが分かります. 昨日もちよつと質問に出てきましたが、 (p, q, r) を与えると a, b の候補が有限に限られてしまう、といったことを議論するときに、duality と reciprocity という対称性を使うということが本質的に利いてきます. そういう理論的なことにも二つの対称性は非常に影響を及ぼすわけです.

上記の議論をするために、問題 3 を考えることが非常に重要になってきます. というのも、Ebisu symmetry は隣接関係式の方法から来る解に対してのみ意味を持つものですからね. 問題 3 を解くことにより全ての integral 解が実は蛭子法から来ることが分かり、そして全ての integral 解が対称性を持つこと、更に漸近解析の結果を加えることで問題 II の全ての解は対称性を持っている、ということに繋がっていきます. こういったことのギャップを認識してちゃんと埋めていくことが非常に重要になります.

duality と reciprocity という対称性については後で詳しく述べるとして、Ebisu symmetry を一言で言うと、Kummer の 24 個の解*¹² 毎に対称性があるということです. 問題 I, II というのは元々元祖超幾何関数に関して述べられていますけれども、同じことを各 Kummer

*¹¹ 「解」とは隣接関係式の方法から出てくる問題 II の解のこと. ただし後で述べられるように、 (p, q, r) がある領域にあれば、問題 II の解は全て隣接関係式の方法から来ることが分かり、さらには問題 I と問題 II は同値であることも分かる. ここまで来ると、「 (p, q, r) が或る領域にあれば」という条件は付くが、問題 I の解は duality と reciprocity によって問題 I の解に移る、と言えるようになる.

*¹² [Erd] の 2.9 節参照.

の解に対しても述べられますね。つまり、元祖超幾何関数も Kummer の解の一つですけれども、それを別の解に取り替えても問題 I, II と同じ問題が考えられるわけです。それで、或る Kummer の解については問題 II の解になっているけれど、別の Kummer の解はもう問題 II の解になっていないというかという、そうではないんです。そうではなくて、同時に問題 II の解になってしまうんですね。それが Ebisu symmetry です。だから From Kummer to Ebisu ^{*13} という感じで、Kummer の解がある毎に対称性があることになります。もう一度おさらいしますと、対称性は蛭子法から来る問題 II の解に限られます。それが全ての解にイえるかということに対しては、先ほど言いましたようにギャップを埋める必要性が出てきます。その作業は解析的な問題です。あと、問題 I の方には対称性というものが元々無いわけです。ですから、問題 II の解が問題 I の解に持ち上がるか考える必要もあります。そういう感じで、対称性と解析的な問題が絡んでくるわけです。

落合:

すみません。Kummer の解で移り合えないという反例みたいなものはないんですか？

岩崎:

反例？

落合:

つまり、ある奴は問題 I とか問題 II の解なんだけど、移った奴は問題 I とか問題 II の解にならないというのはあるんですか？

岩崎:

あります、あります。というかそこが問題で、実は十字架領域 $\mathcal{D} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ では問題 I と問題 II が同値だということを今から述べます。また西南キャンパスでも、rational 解に関しては同値だと言えらるんですよ……。そういう質問ではないんですか？

落合:

あ、そうじゃなくて……。何処の誰かは分からないけど、ある奴は満たすけれど、Kummer の解で移した超幾何だと解にならないという感じの反例みたいのはあるんですか？

岩崎:

ああ、それについては考えたことがないので直ぐには答えられないです。^{*14}

ノート作成者注 (落合先生の質問について): 元祖超幾何関数については問題 I の解となるが、別の Kummer の解では問題 I の解とならないものの例を挙げる。ノート作成者は、問題

^{*13} 文献 [IKSY] の題名は "From Gauss to Painlevé."

^{*14} 岩崎後記: このあたりも質問と回答が噛みあっていない。このままでは何を言いあっているのか分からないので、本記事の最後に解説を挿入した。そこでは、当時の講演者のあたまの中を再現しつつ、質問の意図に沿った回答、およびノート作成者注との関係を書いたので、併せてお読みいただきたい。

II に関しての反例は知らない. そういう反例があるとしたら, それは隣接関係式の方法では捕まえられるものである.

元祖 Gauss の超幾何関数 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ の満たす微分方程式には, これ以外に 23 個 (自明な対称性を含めると 47 個) の超幾何解があることが知られている. それが Kummer の 24 個の解と呼ばれるものである. その中に

$$F(\alpha, \beta; \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x) \quad (19)$$

というものがある. $(p, q, r) = (-1, 2, 1)$ という点を与えると, 隣接関係式の方法により問題 II の解が見つかる. 式 (11) は一階線型差分方程式であるが, この場合は上手く解くことが出来て,

$$F\left(-w + \frac{4}{3}, 2w - \frac{5}{3}; w; \frac{1}{9}\right) = \frac{3^{w-\frac{4}{3}} \sqrt{\pi} \Gamma(w)}{2^{2w-\frac{7}{3}} \Gamma(\frac{2}{3}) \Gamma(w - \frac{1}{6})}$$

を得る. これについては [Eb2] の特殊値リスト (1,2,3-1)(ix) に載っている. これは問題 I の解を与えているわけである.

一方, 三項間関係式の対称性 (岩崎先生が Ebisu symmetry と呼ぶもの) から, 式 (19) に $(\alpha, \beta, \gamma; z) = (-w + \frac{4}{3}, 2w - \frac{5}{3}, w; \frac{1}{9})$ を代入したのもまた問題 II の解となることが分かる. そのときの式 (11) も上手く解くことが出来て, 解くと

$$F\left(-w + \frac{4}{3}, 2w - \frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{9}\right) = 2 \cdot 3^{w-\frac{4}{3}} \sin\left(\left(w - \frac{1}{2}\right) \pi\right)$$

を得る. これについては [Eb2] の特殊値リスト (1,2,3-1)(vii) に載っている. しかし, これは問題 I の解とはなっていない. 右辺はガンマ乗積表示 (式 (10) 参照) の範疇に収まっていないからである. このように元祖超幾何関数が問題 I の解であっても, Kummer の解で移した先が必ずしも問題 I の解になるとは限らない. これはガンマ乗積表示の定義が狭すぎる, すなわち三角関数因子 (trigonometric factor) が含まれていないことに起因する.

それで, 今のところ解析出来ている領域は中央キャンパス $\mathcal{D}$ です. この領域が一番詳しく分かっています. あと実は, reciprocity で $\mathcal{D}^-$ と西南キャンパスとが移り合うんですね. ですから, rational 解に関しては, 西南キャンパスは中央キャンパスと同じくらい分かります. 東西南北キャンパスについてもある程度は分かっています. そういうわけで, 今のところ一番分かっていないのは東南キャンパス, 西北キャンパスです. この辺りのキャンパスとなると, そもそも問題 I の設定が狭すぎてもうちょっと設定を広げないといけないんです. つまり, ガンマ乗積表示に trigonometric factor を付け加えたものを考えないといけないわけです (上記の, ノート作成者注も参照のこと). 昨日の演習の時間での, 蛭子さんと野海さんの議論中に出てきたような話ですね^{*15}. trigonometric factor というのは周期性がある, つま

^{*15} ノート作成者は, 演習中に隣接関係式の方法を使って, q-二項定理の導出を行おうとした. 有限和の場合に

り 1 だけずれても変わりません. このせいで, 差分方程式で見ている問題 II の段階では表に出てこなくなっちゃうんです. だけど問題 II から問題 I に持ち上げるときにそういった trigonometric factor を入れないといけないことがあるんですね. それは東南キャンパス, 西北キャンパスでは, trigonometric factor を含んだ具体例が実際に知られていますので, ですから問題 I の設定から考え直さないといけないということになります.

3.2 論文 [lw1] で得られている結果達

それでは得られた結果を見ていきましょう. 先ず, 十字架領域で次のことが分かっています:

定理 1(論文 [lw2] の定理 3.1 参照.): 十字架領域 $\mathcal{D} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ における任意の問題 II の解は問題 I の解に持ち上げることが出来る. すなわち, この領域において問題 I と問題 II は同値となる.

これは, 鞍点法を使い, $f(w; \lambda)$ の w についての漸近解析を行うことで証明出来ます. この辺りも昨日出てきた Carlson の定理とか使わずに^{*16}, 解析のところからちゃんと考え直して証明します. 一番安直に鞍点法が使えるのがこの十字架領域だったというところから, 定理 1 の制限が来ています. 他の領域で鞍点法を使うにはもっと工夫をしないとイケないようです.

以降では, 中央キャンパスに限定して, そこで分かっている結果についてお話していききたいと思います.

定理 2(論文 [lw2] の定理 3.2 参照.): 領域 $\mathcal{D}$ において次のことが成り立つ (定理 1 より問題 I と問題 II は同値なことに注意せよ). $\lambda = (p, q, r; a, b; x) \in \mathcal{D}$ とする.

- (1) 線分 $\mathcal{D}^0$ 中の解は全て elementary である. 他方, $\mathcal{D}^\pm$ 内の解は全て non-elementary となる. さらに, elementary 解は全て図 1 の黒丸上にあり, データ λ は

$$p = q = \frac{r}{2} > 0; a = i, b = j - \frac{1}{2} \quad (i, j \in \mathbb{Z}); 0 < x < 1 \quad (20)$$

で与えられる (ただし, r, x は自由変数である). このときの $f(w; \lambda)$ は次のように具体的に書ける:

$$f(w; \lambda) = S_{ij}(rw; x) \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2} \right)^{1-rw}. \quad (21)$$

は上手く導出出来たのであるが, それを無限和に持ち上げることの正当性が残念ながら出来なかった. これは, 問題 II の解を問題 I の解に持ち上げることが出来るかどうかの話に相当する.

^{*16} 脚注 15 で見たように, ノート作成者は演習の時間に q-二項定理の導出を試みた. q-二項定理の有限和 version を無限和 version に持ち上げる際, ノート作成者は Carlson の定理を使おうとしたが正当性までは議論出来なかった.

ここで, $S_{ij}(w; x)$ は w に関する有理関数であり, Appell の多変数超幾何関数

$$F_3(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma; u, v) := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_j (\beta_1)_i (\beta_2)_j}{(\gamma)_{i+j}} \frac{u^i v^j}{i! j!}$$

を用いることで次のように表せる:

$$S_{ij}(w; x) = (1-x)^{-\frac{i+j}{2}} F_3 \left(i+j, j-i; 1-i-j, 1+i-j; w; -\frac{1-\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}, \frac{1-\sqrt{1-x}}{2} \right)$$

(i, j は整数であるから, 上の F_3 は有限和となっている). このときの $f(w; \lambda)$ が Appell の F_3 を用いて式 (21) のように書けることは Vidunas によって示されている [V2].

- (2) 領域 $\mathcal{D}^\pm$ 内の解は次の何れかの条件を満たしていなければならない:
 - (A) $p, q, r \in \mathbb{Z}$ 且つ $r - p - q \equiv 0 \pmod{2}$.
 - (B) $p, q \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ 且つ $r \in \mathbb{Z}$.
- (3) 領域 $\mathcal{D}^\pm$ 内の任意の (A) 型の解は隣接関係式の方法から来る.
- (4) 領域 $\mathcal{D}^\pm$ 内の任意の (B) 型の解は, multiplication 2λ により (A) 型の解となる. 上記の定理 2(3) より, 結局領域 $\mathcal{D}^\pm$ 内の任意の (B) 型の解は本質的には隣接関係式の方法から来る事が分かる.

まず, 定理 2(1) から見ていきましょう. 昨日, $f(w; \lambda)$ の留数が超幾何関数で表せることを示せという演習問題を出しました. その留数が有限個を除いて全て 0 となってしまう場合が elementary 解に対応するわけです. 中央キャンパスに限りますと, 有限個の極しか無いという条件から λ は式 (20) を満たしていないといけないということが分かります. 逆に式 (21) は問題 I, II の解となっていますから, 結局 elementary 解は式 (21) というものしかないということが分かります. 証明についてもう少し詳しく言いますと, 留数が 0 となってしまうような点列がどのような配置をしているかということを考えるんですね. それで, 無限大に行くとき, その配置の密度を考えるわけです. 極が有限個しかないということは, この密度が 1 になるということですから, それを書き下しますと条件 (20) を満たさなければならないということが分かります.

定理 2(2), (3), (4) は主に漸近解析を使うことで得られます. これらの結果より, 中央キャンパスにおいてはすべての解は隣接関係式の方法から来る事が分かるわけです. そうすると, 三項間関係式の色々な性質を使って研究することが出来るようになります.

次の定理を見ていきましょう.

定理 3(論文 [Iw2] の定理 3.3 参照.): $\lambda = (p, q, r; a, b; x) \in \mathcal{D}^-$ を (A) 型の解 (定理 2(2) 参照) とする. また, (p, q, r) を $\mathbf{p}$ と書くことにしよう. そうすると, 次のことが成り立つ.

- (1) x は開区間 $(0, 1)$ 内にあり, 且つ代数方程式 $Y(z; \mathbf{p}) = Y(z) = 0$ の根でなければならない. ここで, $Y(z)$ は整数係数の多項式であり, 次のように定義される:

$$\begin{aligned}\Delta(z) &:= (p-q)^2 z^2 - 2[(p+q)r - 2pq]z + r^2, \\ Z_{\pm}(z) &:= [r + (p-q)z \pm \sqrt{\Delta}]^p [r - (p-q)z \pm \sqrt{\Delta}]^q \\ &\quad \times [(2r - p - q)z - r \mp \sqrt{\Delta}]^{r-p-q}\end{aligned}$$

と定めたとき, 次のように表される $(X(z), Y(z)) \in (\mathbb{Z}(z))^2$ が唯一通りに決まる:

$$Z_{\pm}(z) = X(z) \pm Y(z)\sqrt{\Delta}.$$

- (2) $f(w; \lambda)$ は次のようなガンマ乗積表示を持つ:

$$f(w; \lambda) = C \cdot d^w \cdot \frac{\prod_{i=0}^{r-1} \Gamma(w + \frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^r \Gamma(w + v_i)}. \quad (22)$$

ここで, C は 0 より大きな定数であり, d は,

$$d = \frac{r^r}{\sqrt{p^p q^q (r-p)^{r-p} (r-q)^{r-q} x^r (1-x)^{p+q-r}}} \quad (23)$$

で与えられる. また, v_i は次のような整除関係を持つ:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^r (w + v_i) &\mid \prod_{i=1}^{p-1} \left(w + \frac{i+a}{p}\right) \prod_{i=1}^{q-1} \left(w + \frac{i+b}{q}\right) \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{r-p-1} \left(w + \frac{j-a}{r-p}\right) \prod_{j=0}^{r-q-1} \left(w + \frac{j-b}{r-q}\right).\end{aligned} \quad (24)$$

定理 3(1) についてコメントしておきます. まず, Δ が何処から出てきたのかをお話したいと思います. 我々の文脈では, この Δ というのは三項間関係式をごちゃごちゃやると出てくる式です. しかし, WKB 解析の人にとってもお馴染みの式であります. これ, 変わり点が単純であるかどうかの一種の判別式なんです. $f(w; \lambda)$ を Euler 積分表示して, それを漸近解析しやすい形に書き換えますと, 大体次のような形になります:

$$f(w; \lambda) = (\text{ガンマ因子}) \int_{\text{路}} e^{-w\phi(t)} \eta(t) dt. \quad (25)$$

漸近解析をしようと思ったら, 変わり点が何処にあるかを見ますね. そこで, 式 (25) の右辺に鞍点法を用います. そうしますと, $t = t_0$ が鞍点であることと, それが phase function $\phi(t)$ を微分したものの根であることは同値になります. そしてさらに, それはある二次方程式の根であることと同値になるんです. 実はその二次方程式の判別式が $\Delta(t)$ となります. $\Delta(t) = 0$ が成り立つということは二つの鞍点が一致することを意味し, $\Delta(t) \neq 0$ が成り立つということは変わり点が単純になっていることをいってるわけです.

定理 3(1) より, x は代数的数になることが分かります. $Y(z)$ はかなりの高次の方程式となりますけど, 今までの実例を見てみると, 大体二次式くらいで因数分解されます. 実際, 今まで知られている解の具体例を見てみると, x は有理数か二次の無理数くらいしか出てきてないです.

次に, 定理 3(2) についてコメントします. 中央キャンパス内の問題 II の解にはガンマ乗積表示がちゃんとあることは, 定理 1 が保証しているわけですが, そのガンマ乗積表示はどんな形をしているかを述べているのがこの定理です. まず, 問題 I の設定では分子, 分母のガンマ関数の数はそれぞれ m, n 個とした上で考えてきましたけれど, 実は両者の数は等しくて, 分子分母ちょうど同じ数のガンマ関数が出てくることが分かります. また, d は p, q, r, x によってのみ決まって, a, b とは無関係に定まります. しかし, x は定理 3(1) で見たように p, q, r によって決まる代数方程式の根なので, x については複数個の可能性もありますけれど, 本質的に d は p, q, r によって決まることになります. あと, 式 (22) の右辺の分子の方はまあこんなものが出てくるだろうということは分かりますけど, 分母の方にどんなものが出てくるかということは中々難しい問題です. それでも式 (24) のような整除関係を持つことが分かります. ですから, データの a, b を使って v_i の情報がある程度は書けることになっています. このことより, 各 v_i は集合

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{i+a}{p} : i = 1, \dots, p-1 \right\} \cup \left\{ \frac{i+b}{q} : i = 1, \dots, q-1 \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{j-a}{r-p} : j = 0, \dots, r-p-1 \right\} \cup \left\{ \frac{j-b}{r-q} : j = 0, \dots, r-q-1 \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

内のどれかで無いといけないことが分かるわけです. この辺りのことは論文 [Iw1] に示していることです.

各 v_i は集合 (26) 内のどれかなわけですが, どれが選択されるかまでは論文 [Iw1] の時点では何も述べていないわけです. 論文 [Iw2] ではこの辺りのことがさらに詳しく分かっています. 集合 (26) から v_i 達が選ばれていくわけですが, 選ばれなかったもの, すなわち補集合がありますね. この補集合がどのような役割を果たすかということも疑問になるわけです. 実は, duality がそれに応えていて, 式 (22) の相補的なものが (本質的には) dual 解として現れてきます. だから, 式 (24) の左辺と右辺を等号で結ぼうと思ったら, 左辺に dual な奴を付け足せばよいわけです. ただそのときには, 正確に言うと, 式 (24) の右辺で等号が結ばれるのではなくて,

$$\prod_{i=0}^{p-1} \left(w + \frac{i+a}{p} \right) \prod_{i=0}^{q-1} \left(w + \frac{i+b}{q} \right) \prod_{j=0}^{r-p-1} \left(w + \frac{j-a}{r-p} \right) \prod_{j=0}^{r-q-1} \left(w + \frac{j-b}{r-q} \right). \quad (27)$$

で等号が結ばれることになります*17. 式 (27) は, 式 (24) の右辺と比べると, i が 1 からでな

*17 詳しくは, 後述の定理 6 参照.

く 0 から走るようになっていきますね.

あと式 (23) は, 青木さん, 反田さんが計算した Voros 係数^{*18} と関連がありそうです. Voros 係数というのは, 古典的な超幾何関数と WKB 解を結ぶようなものです. 青木さんと反田さんの結果を大事なところだけ抜き出して書きますと

$$f(w; \lambda) \propto C x^{-\frac{1}{2}rw} (1-x)^{-\frac{1}{2}(p+q-r)w} \Phi_+(x; w)$$

となります^{*19}. ここで, $\Phi_+(x; w)$ は subdominant な WKB 解の Borel 和です. また C ですけれども, これも大事なところだけ抜き出しますと, 次のようになります. ^{*20}

$$C \propto \frac{\Gamma(rw)}{\sqrt{\Gamma(pw+a)\Gamma(qw+b)\Gamma((r-p)w-a)\Gamma((r-q)w-b)}}.$$

この式, 式 (23) と非常に良く似ていますね. つまり, この式の右辺に Stirling の公式を使って, w に関する主要項を見るとそれは式 (23) の右辺になるわけです. そんなわけで私の方は隣接関係式の方法を使って, 特に WKB 解析を使わずに式 (23) を導いたのですが, この d は Voros 係数と関係がありそうです.

論文 [Iw1] では, 中央キャンパスについては定理 1,2,3 を示しています. 中央キャンパスと南キャンパスの境界である $\mathcal{I}^{*-}$ では次のようなことを示しています:

定理 4(論文 [Iw2] の定理 3.4 参照.): 境界 $\mathcal{I}^{*-}$ において次のことが成り立つ (定理 1 より問題 I と問題 II は同値なことに注意せよ). $\lambda = (p, q(=0), r; a, b; x) \in \mathcal{I}^{*-}$ とする.

- (1) λ が elementary 解であるための必要十分条件は, $b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ である. この場合, 対応する $f(w; \lambda)$ は有限和 (terminating) となる.
- (2) non-elementary 解は次の条件を満たしていなければならない:

$$p, r \in \mathbb{Z}; \quad p \equiv r \pmod{2}; \quad b = \frac{1}{2}.$$

- (3) 任意の non-elementary 解は隣接関係式の方法から来る.

定理 4 から, $\mathcal{I}^{*-}$ の中の任意の non-elementary 解は隣接関係式の方法から来ることが分かります. 隣接関係式の方法から来ることが分かると, そのことを用いて色々詳しいことが分かっていくんですけど, まだそこまではやっていないです. そういうことをやる計画があります, ということを注意として言っておきます.

次の定理は南キャンパスについての話です:

^{*18} ここでの Voros 係数の意味は, 正確に言うと青木先生, 反田さんが使っている本来の意味での Voros 係数ではない. Voros 係数の Borel 和を指数関数で写したものがここでの意味となっている.

^{*19} 青木先生と反田さんは等式を明示的に導出している.

^{*20} 岩崎後記: Aoki [Ao] の Theorem 9 より抜き出した. ただし, 記号法は本講演に合せてある.

定理 5(論文 [Iw2] の定理 3.5 参照.): 南キャンパス $\mathcal{E}^{*-}$ において次のことが成り立つ (定理 1 より問題 I と問題 II は同値なことに注意せよ). $\lambda = (p, q, r; a, b; x) \in \mathcal{E}^{*-}$ とする.

- (1) 任意の解は non-elementary となる.
- (2) 解 $\lambda \in \mathcal{E}^{*-}$ は次の条件を満たしていなければならない:

$$p, r \in \mathbb{Z}; \quad p \equiv r \pmod{2}.$$

- (3) $q \in \mathbb{Z}$ である任意の解は隣接関係式の方法から来る.

という感じで, 定理 4 とほぼ同じことが南キャンパスでもいえます. 今のところ $q \notin \mathbb{Z}$ なる解があるかどうかは不明です.

以上, 論文 [Iw1] の結果をかいつまんでお話ししてきました.

3.3 Ebisu symmetry

論文 [Iw2] では, 先ほど言いましたように, duality と reciprocity という対称性を使うことでより詳しいところまで分かるということが書かれています.

まず, Ebisu symmetry について説明していきましょう. データ λ に対して, 式 (9) で定義される $f(w; \lambda)$ を考えてきましたね. それで, $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ を含む Kummer の 24 個の解を $K(\alpha, \beta; \gamma; z)$ と置きまして, $f(w; \lambda)$ を定義したのと同様に

$$k(w; \lambda) := K(pw + a, qw + b; rw; x)$$

と定義します. だから, Kummer の解は 24 個あるわけですが, それぞれに対して問題 II を考えることが出来るわけです. さて, 昨日三項間関係式というのを説明しましたね. もう一度書きますと,

$$F(\alpha + \mathbf{p}; z) = r(\alpha; z)F(\alpha; z) + q(\alpha; z)F(\alpha + \mathbf{1}; z) \quad (12)$$

といったものでした. ここで, $\alpha = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\mathbf{p} = (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$, $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$ です. この三項間関係式は任意の Kummer の解に対しても考えられるわけですが, それが実は,

$$K(\alpha + \mathbf{p}; z) = \psi_K(\alpha; \mathbf{p})r(\alpha; z)K(\alpha; z) + \phi_K(\alpha; \mathbf{p})q(\alpha; z)K(\alpha + \mathbf{1}; z) \quad (28)$$

と書けるんです. ここで, $\psi_K(\alpha; \mathbf{p})$ $\phi_K(\alpha; \mathbf{p})$ は, Kummer の解の取り方と $\mathbf{p}$ に応じて一意的に定まる α に関する有理関数です^{*21}. 次に隣接関係式の方法を思い出します. 式 (12) に対して

$$\alpha = \alpha(w) := (pw + a, qw + b, rw), \quad z = x$$

^{*21} 具体的な形は, [Eb2] の Lemma 2.2 参照.

と置いたのを

$$f(w+1; \lambda) = R(w; \lambda)f(w; \lambda) + Q(w; \lambda)\tilde{f}(w; \lambda) \quad (13)$$

と書いたのです。式 (28) に対して同じ操作をすると

$$k(w+1; \lambda) = \Psi_K(w; \lambda)R(w; \lambda)k(w; \lambda) + \Phi_K(w; \lambda)Q(w; \lambda)\tilde{k}(w; \lambda) \quad (29)$$

となりますね。ここで、 $\Psi_K(w; \lambda) := \psi_K(\alpha(w); \mathbf{p})$, $\Phi_K(w; \lambda) := \phi_K(\alpha(w); \mathbf{p})$, $\tilde{k}(w; \lambda) := K(\alpha(w) + \mathbf{1}; x)$ です。元々の隣接関係式の方法は、 $Q(w; \lambda) \equiv 0$ となるデータ λ を探すことにより、 $f(w; \lambda)$ に対して問題 II の解を見つけるものでした。しかし、 $Q(w; \lambda) \equiv 0$ となる条件と $\Phi_K(w; \lambda)Q(w; \lambda) \equiv 0$ となる条件は同値となりますから、結局、元祖超幾何関数に対して問題 II の解があったら、全ての Kummer の解に対しても問題 II の解になっているわけです。これが Ebisu observation です。

聴講者 A:

$Q(w; \lambda) \equiv 0$ であっても、 $\Phi_K(w; \lambda)$ によってキャンセルされて $\Phi_K(w; \lambda)Q(w; \lambda)$ が 0 でなくなったりしないんですか? *22

岩崎:

それはないです。

一方、Kummer の解というのは超幾何関数を使って書けますね。勿論、パラメータと独立変数を変換した超幾何関数ですけれども。だから、 k で書いた問題を f で翻訳してやりますと、解が解に移るという変換が生じるわけです。そういうわけで、隣接関係式の方法から来た解に対しては、こういう対称性があることになります。

岩崎:

蛭子さん、これはアレですか？ 計算する前に計算したらそうなるだろうと思っていました？ それとも計算した結果がそうになっていたんですか？

蛭子:

いや、あの、最初から知っていました*23。

というわけで、知っている人にとっては「知ってる observation」のようですが、ここから非常に重要な対称性が出てきます。つまり解を解に移す変換なわけですけれども、それが先程もご紹介した duality と reciprocity です (式 (17) と式 (18) 参照)。まず、Kummer の 24

*22 この箇所の岩崎先生の記述は不明瞭だったので、聴講者 A 先生の疑問はもっともであった。

*23 2011 年の春頃、論文 [Eb1] で得た三項間関係式の対称性 (これも明示的には書いていないが) に何か応用が無いとか色々考えていた。その結果生まれたのが隣接関係式の方法である。そのため、岩崎先生の言う Ebisu symmetry を隣接関係式の方法に組み入れることは既定路線であった。

個の解の出処を見ていきます. 超幾何微分方程式の Riemann Scheme は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z=0 & z=1 & z=\infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{array} \right\}$$

となります. 全部で 6 個の特性指数がありますね. その各特性指数ごとに 4 個の超幾何解があります; 元々のやつと Euler 変換したものと二つの Pfaff 変換をしたものの全部で 4 個の超幾何解のことです (自明な対称性は省く). このことから, 超幾何微分方程式には $4 \times 6 = 24$ 個の超幾何解があるわけです. それで duality というのはどういうものかといいますと,

duality : 特性指数 0 at $z=0$ に対応する超幾何関数に対する問題 II の解と,
 特性指数 $1-\gamma$ at $z=0$ に対応する超幾何関数に対する問題 II の解
 とを入れ替える操作.

です. reciprocity というのは,

reciprocity : 特性指数 0 at $z=0$ に対応する超幾何関数に対する問題 II の解と,
 特性指数 $\gamma-\alpha-\beta$ at $z=1$ に対応する超幾何関数に対する問題 II の解
 とを入れ替える操作.

となります. これらの操作を具体的に書きますと, 式 (17) と式 (18) のようになるわけです. duality, reciprocity は involution になっていますが, それは解を入れ替えるという上記の操作に対応しています. duality というのは, 式 (17) を見てみると, p, q, r, x は変わっていないで, a, b だけがある種の reflection で移り合っているという形をしています. reciprocity の方は, p, q, r も変わっていて, x も $1-x$ に変わっています. このように, 解を解に移す変換をちゃんと書き下すと, duality, reciprocity という変換が出てくるわけです.

問題 II の解を問題 II に移す変換として, duality, reciprocity を導入しました. あと, 古典的対称性から生じる変換も導入していますが, これでは Kummer の 24 個の解から生じる変換は尽くしていません. それについてコメントしたいと思います. 数直線 $\mathbb{R}$ から特異点 $0, 1$ を除くと三つの領域に分かれます: $(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$. 区間 $(-\infty, 0), (1, \infty)$ は, 元々の元祖超幾何関数の収束域からはみ出してしまっています. 区間 $(0, 1)$ だけが, 元祖超幾何関数の収束域の中に入っているわけです. duality, reciprocity という変換は, $(0, 1)$ 区間を $(0, 1)$ 区間に移す変換となっています. 勿論今言いましたように, 問題 II の解を問題 II に移す変換の中には, $(0, 1)$ 区間を外の区間に飛ばしてしまうような変換もあります. しかし, とりあえず今は無限級数で考えているので, 収束の圏外に飛ばしてしまうそのような変換は考えないわけです. そういうわけでこれからは, 解析的に使える duality, reciprocity という二つの対称性を中心に考えていきたいと思っています.

ただ、最初から terminating な場合だけに限定して問題 II を考えますと、全ての対称性を使うことが出来ます。問題 II というのは非常に形質的で、terminating な場合であろうとなかろうと意味を持つ問題です。そこで terminating な場合の問題 II を解くために、隣接関係式の方法を考えます。思い出しますと、隣接関係式の方法では $Q(w; \lambda) \equiv 0$ となる λ を探したわけですが、 $Q(w; \lambda)$ というのは w に関する有理式でした。terminating な場合に隣接関係式の方法を使い、十分多くの点で $Q(w; \lambda)$ が 0 となることが示せたとしましょう。そうしますと、当然 $Q(w; \lambda)$ は w 直線上で恒等的に 0 となります。ですから、対応する超幾何関数が無限級数となるような、そういう解を解に移す変換を施すことで、昨日今日とお話した結果を使えるようになるわけです。そうすることで、

有限和=有限積

と表せるための必要条件が出てきたりします。我々の結果はそういう使い方も出来るかと思っています。

3.4 論文 [Iw2] で得られている結果達

定理 3 を振り返りましょう。式 (24) の左辺と右辺の間には等号が成り立っていないですね。それで、その complementary の方が何らかの意味を持つだろうと予想されます。このことは定理 3(2) に関するコメント中で以前お話ししましたが、きちんと書きますと次の定理となります：

定理 6(論文 [Iw2] の定理 3.7 参照.)：領域 $\mathcal{D}^-$ において次のことが成り立つ。式 (17) で定義された duality は、領域 $\mathcal{D}^-$ 内の (A) 型の解を (A) 型の解へ変換する involution である。この変換は次のように書ける：

$$f(w; \lambda) = C \cdot d^w \cdot \frac{\prod_{i=0}^{r-1} \Gamma(w + \frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^r \Gamma(w + v_i)} \mapsto f(w; \lambda') = C' \cdot d^w \cdot \frac{\prod_{i=0}^{r-1} \Gamma(w + \frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^r \Gamma(w + v'_i)}.$$

ここで、 C' は或る正の定数であり、 d は定理 3(2) 内の式 (23) で与えられている。また、各 v'_i は次で定められる：まず、 v_i^* を

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^r (w + v_i) \prod_{i=1}^r (w + v_i^*) &= \prod_{i=0}^{p-1} \left(w + \frac{i+a}{p} \right) \prod_{i=0}^{q-1} \left(w + \frac{i+b}{q} \right) \\ &\times \prod_{j=0}^{r-p-1} \left(w + \frac{j-a}{r-p} \right) \prod_{j=0}^{r-q-1} \left(w + \frac{j-b}{r-q} \right). \end{aligned}$$

を満たすように持って来たあとに、それぞれの v_i^* に対して、

$$v'_i := 1 - \frac{2}{r} - v_i^*$$

とすることで v'_i が与えられる.

定理 6 は, duality という変換でガンマ乗積表示がどういふふうに移るかということを述べているわけですね.

$\mathcal{D}^-$ における (A) 型の解であるためには (p, q, r) がある種の整除関係を満たしていないといけないことを定理 2(2)(A) で見ました. 次の定理は (p, q, r) はもう一つ整除関係を満たしていないといけないことを言っています. さらに a, b は有理数でないといけないとも言っています:

定理 7(論文 [Iw2] の定理 3.6 参照.): $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ を領域 $\mathcal{D}^-$ 内の (A) 型の解とする. このとき, λ は次の条件を満たさなければならない:

$$(p, q, r) \in \mathcal{D}^-, (a, b) \in \mathbb{Q}^2.$$

ここで, $\mathcal{D}^-$ は次の条件を満たす集合である:

- (1) $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 且つ $r - p - q \equiv 0 \pmod{2}$.
- (2) 整除関係:
 $(p|r \text{ 又は } p|(r - p - q))$ 且つ $(q|r \text{ 又は } q|(r - p - q))$.

定理 7 では, a, b は有理数でないといけないことを見ましたが, 次の二つの定理はそれをより詳しく述べたものです. p, q, r が与えられたときに, それを主要部とする (A) 型の解は実は有限個しか無くて, その候補者は全て p, q, r を使って書き下せることを言っています:

定理 8(論文 [Iw2] の定理 3.10 参照.): 任意の $(p, q, r) \in \mathcal{D}^-$ に対して, (A) 型の解となるデータ $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ は高々有限個しか無い. $\mathcal{D}^-$ の定義に関しては定理 7 を参照せよ.

注意 (定理 8 について): 定理 8 は定理 9 からの帰結である.

定理 9(論文 [Iw2] の定理 3.8, 表 1 参照.): $\lambda = (p, q, r; a, b; x) \in \mathcal{D}^-$ を (A) 型の解とし, $\lambda' = (p, q, r; a', b'; x) \in \mathcal{D}^-$ をその dual 解とする. このとき, データの組 (λ, λ') は, 下に挙げる全六種の型のうち少なくとも一種に属していなければならない. これらの型は

- (1) (p, q, r) に関する二つの整除関係.
- (2) p, q, r と $(i, j) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ を用いての a, b の表示式.
- (3) p, q, r と $(i', j') \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ を用いての a', b' の表示式.
- (4) $(i, j; i', j') \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^4$ に関する二本の整数係数線型関係式.

という 4 つの項目からなっている. ここで, $s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $s|t$ である場合に限って $t_s := \frac{t}{s}$ と書くことにする.

1 型

- (1) $p|r$ 且 $\cap q|r$.
- (2) $a = \frac{i}{r_p}, b = \frac{j}{r_q}$.
- (3) $a' = \frac{i'}{r_p}, b' = \frac{j'}{r_q}$.
- (4) $i + i' = r_p - 2, j + j' = r_q - 2$.

2 型

- (1) $p|(r - p - q)$ 且 $\cap q|(r - p - q)$.
- (2) $a = \frac{(r - p)i - qj}{r(r - p - q)_p}, b = \frac{(r - q)j - pi}{r(r - p - q)_q}$.
- (3) $a' = \frac{(r - p)i' - qj'}{r(r - p - q)_p}, b' = \frac{(r - q)j' - pi'}{r(r - p - q)_q}$.
- (4) $i + i' = (r - p - q)_p, j + j' = (r - p - q)_q$.

3 型

- (1) $p|r$ 且 $\cap q|(r - p - q)$.
- (2) $a = \frac{i}{r_p}, b = \frac{r_p j - i}{r_p(r - p)_q}$.
- (3) $a' = \frac{i'}{r_p}, b' = \frac{r_p j' - i'}{r_p(r - p)_q}$.
- (4) $i + i' = r_p - 2, j + j' = (r - p - q)_q$.

4 型

- (1) $p|r$ 且 $\cap q|r_p(r - p - q)$.
- (2) $a = \frac{i}{r_p}, b = \frac{qj}{r}$.
- (3) $a' = \frac{i'}{r_p}, b' = \frac{r_p j' - i'}{(r_p(r - p))_q}$.
- (4) $i + i' = r_p - 2, i + (r_p - 1)j + r_p j' = (r_p(r - p - q))_q$.

5 型

- (1) $p|(r - p - q)$ 且 $\cap q|r(r - p - q)_p$.
- (2) $a = \frac{(r - p)i - qj}{r(r - p - q)_p}, b = \frac{(r - q)_p j - i}{(r(r - p - q)_p)_q}$.
- (3) $a' = \frac{ri' - qj'}{r(r - q)_p}, b' = \frac{qj'}{r}$.

$$(4) \quad i + i' = (r - p - q)_p, \quad i' + (r - q)_p j + (r - p - q)_p j' = ((r - q)(r - p - q)_p)_q.$$

6 型

$$(1) \quad p|r(r - p - q) \text{ 且つ } q|r(r - p - q).$$

$$(2) \quad a = \frac{pi}{r}, \quad b = \frac{rj - pi}{(r(r - p))_q}.$$

$$(3) \quad a' = \frac{ri' - qj'}{(r(r - q))_p}, \quad b' = \frac{qj'}{r}.$$

$$(4) \quad (r - p - q)i + (r - p)i' + qj = ((r - p)(r - p - q))_p, \\ (r - p - q)j' + pi' + (r - q)j = ((r - q)(r - p - q))_q.$$

定理 9 についてコメントしておきます. 各型の一番下に書いてある, $(i, j; i', j') \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^4$ に関する二本の整数係数線型関係式を見たら, これを満たす $(i, j; i', j')$ というのは有限個しかないことが分かりますね. これでもって, p, q, r を与えるごとに解の可能性は有限個しかない (定理 8) ということが出てくるわけです. こういった結果は, dual pair で考えたから, 出てくるんですね. dual 解を考えずに一方の解だけで考えると, 各型に $i, j \in \mathbb{Z}$ という成分がありましたが, それが際限なく大きくなる可能性があります. それを dual 解が抑えちゃってくれるので, 結局 λ が解となる可能性があるものは有限個に限られてくるわけです. こういう風に相補的に duality が働いていることが一点目の注意です. 二点目ですが, この結果を証明するためには duality を使うだけでは駄目なんです. 解があつたら reciprocity で移した先にも問題 II の解があるということを実は裏で使っています. reciprocity と duality を組み合わせて, 込み入った議論をすることでようやく定理 9 が得られるわけです. このように, 証明では duality と reciprocity という二つの対称性を本質的に使っています. 最初, 七種の型があつたんですが, 7 型は実は不可能ということが証明出来たので六種に減ったんですけど, もしかしたらもっと減るかもしれません. というのも, 型の中には具体例が一つもないようなものもありますので.

定理 9 により, p, q, r を与えると (a, b, a', b') の可能性は有限個しかなくて, その候補者は具体的に書き下せることが分かったわけです. ですから, $Q(w; \lambda) \equiv 0$ となるデータ λ を探すために過剰決定方程式系を解く必要はなくて, $Q(w; \lambda)$ に候補者を放り込んで本当に恒等的に 0 になるかどうかをチェックするだけの話になってしまうんですね. ただしこの段階では $Q(w; \lambda)$ はまだ implicit なので, 過剰決定方程式系を explicit に書きたくになります.

そうしますと, $\mathcal{D}^-$ 内の λ が (A) 型の解であることと, $Q(w; \lambda) \equiv 0$ となることは同値だったわけですが, さらに, これは $\Phi(w; \lambda) \equiv 0$ であることと同値になります. $\Phi(w; \lambda)$ について述べるために, まず切頭 (truncate) という概念を導入します: 無限級数 $\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$

に対して, k 次の項で打ち切ったものを $\langle \varphi(z) \rangle_k$ と書くことにします. すなわち,

$$\langle \varphi(z) \rangle_k := \sum_{j=0}^k c_j z^j.$$

すると, $\Phi(w; \lambda)$ は次で定義されます:

$$\Phi(w; \lambda) := (rw)_{r-1} \langle F(\mathbf{a}^*(w); z) \cdot F(\mathbf{v} - \mathbf{a}^*(w+1); z) \rangle_k \big|_{z=x}. \quad (30)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^*(w) &:= ((r-p)w - a, (r-q)w - b; rw), \\ \mathbf{v} &:= (1, 1; 2), \quad k := \max\{r-p-1, r-q-1\}. \end{aligned}$$

注意 ($\Phi(w; \lambda)$ の性質): 領域 $\mathcal{D}^-$ 内において, p, q, r を固定する. 勿論, λ が (A) 型の解であるためには $p, q, r \in \mathbb{Z}$ でなければならないから, それは仮定されている. このとき, $\Phi(w; \lambda) \in \mathbb{Q}[w, a, b, x]$ であり, さらに, $\deg_w \Phi(w; \lambda) \leq r-1$ であることが分かる.

$Q(w; \lambda) \equiv 0$ と同値な条件 $\Phi(w; \lambda) \equiv 0$ が出てきました. このように多項式 $\Phi(w; \lambda)$ は, 超幾何級数の積の切頭で具体的に書けてしまうわけです. これは, $r(\alpha; z), q(\alpha; z)$ の明示的な表示を蛭子さんが与えているんですが, そこから従います. それはこういったものかといいますと, これら $r(\alpha; z), q(\alpha; z)$ は超幾何級数の積の和で書けるんです. そして, その積の和というのは十分高いべきのところは全部打ち消されてしまって, 実は有限和になるわけです. それで, 高いべきのところを消してしまうためには超幾何の積を足し合わせないといけないんですけど, それは超幾何の積を一個だけ考えて, その切頭をすることと同じになります. そういう風に書きますと $\Phi(w; \lambda)$ の表示が得られます.

λ が (A) 型の解であったとき, そのときの $R(w; \lambda)$ は超幾何の積の切頭を使って書くことが出来ます.

$$P(w; \lambda) := (rw)_r \langle F(\mathbf{a}^*(w); z) \cdot F(\mathbf{1} - \mathbf{a}^*(w+1); z) \rangle_k \big|_{z=x}$$

(ここで, $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$) と定めたとき,

$$R(w; \lambda) = (1-x)^{r-p-q-1} \cdot \frac{(rw)_r}{P(w; \lambda)} \quad (31)$$

となるわけです.

注意 ($P(w; \lambda)$ の性質): $P(w; \lambda) \in \mathbb{Q}[w, a, b, x]$ であり, さらに, $\deg_w P(w; \lambda) \leq r$ であることが分かる.

以上をまとめますと、領域 $\mathcal{D}^-$ において (p, q, r) を固定したとき、問題 (問題 I と II は同値) の解を出し尽くすアルゴリズムが得られます:

定理 10 ($\mathcal{D}^-$ 上のアルゴリズム): データ $\lambda \in \mathcal{D}^-$ が (A) 型の解であることと、

$$\Phi(w; \lambda) \equiv 0 \text{ in } \mathbb{C}(w) \quad (32)$$

であることは同値である。ここで、 $\Phi(w; \lambda)$ は式 (30) で与えられる。また、もしデータ $\lambda \in \mathcal{D}^-$ が (A) 型の解であれば、そのときの $R(w; \lambda)$ は式 (31) で与えられる。

$\mathbf{p} = (p, q, r)$ を固定したとき、 $\mathcal{D}^-$ 内の全ての解 λ は次の操作によって出し尽くされる:

- Step 1: $\mathbf{p} \in \mathcal{D}^-$ かどうかチェックせよ。入っているのなら次の Step へ進め。入っていないのなら解は存在しない。 $\mathcal{D}^-$ の定義については定理 7 を参照せよ。
- Step 2: $(a, b; x)$ の候補をリストアップせよ。
- a, b の候補は定理 9 によって与えられる。
 - x の候補は定理 3 で与えられる。
- Step 3: それぞれの候補に対して、 $\Phi(w; \lambda)$ の値を計算せよ。もし式 (32) が成り立つのならば、その候補は解となる。成り立たないのなら、それは解とならない。
- Step 4: Step 3 で解が見つかったのなら、それぞれに対して $R(w; \lambda)$ を計算せよ。これは、式 (31) で与えられる。 $R(w; \lambda)$ を計算することでガンマ乗積表示が得られる (定理 1 参照)。
- Step 5: 得られた解に対して、それが (B) 型の解の multiplication になっているかチェックせよ (定理 2 参照)。こうすることで、(B) 型の解も全て出し尽くされる。

このように、 p, q, r を具体的に与えるごとに、その与えられた p, q, r に対する解を有限の手続きで全て書き上げることが出来るわけです。ただ、ほぼ確率 1 で解がないことが分かります。つまり、 p, q, r を与えると、それに対する解がないことが厳密に証明できることになります。

reciprocity によって、領域 $\mathcal{D}^-$ と西南キャンパスとが対応付けられます。そうすると、西南キャンパスも中央キャンパスと同じくらい分かるわけです。まず西南キャンパス $\mathcal{F}^-$ の定義をちゃんとしましょう:

$$\text{西南キャンパス } \mathcal{F}^- := \{\lambda \in \mathbb{R}^6 : p < 0, q < 0, r > 0; a, b \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}.$$

領域 $\mathcal{D}^-$ は reciprocity(18) によって、南西キャンパス $\mathcal{F}^-$ と移り合います。ただ、データ $\lambda = (p, q, r; a, b; x)$ を reciprocity で移した先を $\check{\lambda} = (\check{p}, \check{q}, \check{r}; \check{a}, \check{b}; \check{x})$ と書くようにしたので、これを明示的にするために領域 $\mathcal{D}^-$ と reciprocity で移り合う領域を $\check{\mathcal{F}}^-$ と書くことにしましょう。さて、この領域に対して次の定理が成り立ちます。この定理を見て、終わりにしたいと思います。

定理 11(論文 [Iw2] の定理 3.12 参照.): 領域 $\check{\mathcal{F}}^-$ に対して次のことが成り立つ.

- (1) $\check{\mathbf{p}} = (\check{p}, \check{q}, \check{r}) \in \mathbb{Q}^3$ であるデータ $\check{\lambda} \in \check{\mathcal{F}}^-$ が問題 II の解であれば, それは問題 I の解でもある. すなわち, このような $\check{\lambda}$ に対しては, 問題 I と問題 II は同値になる.
- (2) reciprocity は, $\mathcal{D}^-$ 内の (A) 型の解全体の集合から, $\check{\mathbf{p}} \in \mathbb{Z}^3$ である $\check{\mathcal{F}}^-$ 内の解全体の集合への全単射写像となる.
- (3) (A) 型の解 $\lambda \in \mathcal{D}^-$ は,

$$\prod_{i=0}^{p-1} \left(w + \frac{i+a}{p} \right) \prod_{i=0}^{q-1} \left(w + \frac{i+b}{q} \right) \mid \prod_{i=1}^r (w + v_i)$$

という整除関係を持っている. そこで, v_i の順序を適当に入れ替えることで,

$$\prod_{i=0}^{p-1} \left(w + \frac{i+a}{p} \right) \prod_{i=0}^{q-1} \left(w + \frac{i+b}{q} \right) = \prod_{i=r-p-q+1}^r (w + v_i)$$

と書き換えることにする. このとき, reciprocity によって写した先のガンマ乗積表示は次のように表される:

$$f(w; \lambda) = C \cdot d^w \cdot \frac{\prod_{i=0}^{r-1} \Gamma\left(w + \frac{i}{r}\right)}{\prod_{i=1}^r \Gamma(w + v_i)} \mapsto f(w; \check{\lambda}) = \check{C} \cdot \check{d}^w \cdot \frac{\prod_{i=0}^{r-p-q-1} \Gamma\left(w + \frac{i}{r-p-q}\right)}{\prod_{i=1}^{r-p-q} \Gamma(w + \check{v}_i)},$$

ここで,

$$\check{d} = (r-p-q)^{r-p-q} \sqrt{\frac{p^p q^q x^r}{(r-p)^{r-p}(r-q)^{r-q}(1-x)^{r-p-q}}},$$

$$\check{v}_i = v_i - \frac{1-a-b}{r-p-q} \quad (i = 1, \dots, r-p-q).$$

講演者後記 (脚注 14 に関する解説). 脚注 14 で書いたように, 落合さんの「すみません. Kummer の解で移りあえないという反例みたいなものはないんですか?」という質問に続く質疑応答がみごとに噛みあっていない. そこで, 当時の私のあたまのなかを再現しつつ, なぜ噛みあっていないかの解説をし, 更に質問の本来の意図に沿った回答を与える.

まず私が「反例?」とうろたえているところであるが, 私の方は直前の説明で, 問題 II と問題 I を区別しており, 問題 II の蛭子法由来の解については, Kummer の解を取り替えることで, 解が解に移ると述べている. そのあと, 蛭子法由来とは仮定しない問題 II の解まで対称性を延ばすには解析的な考察が必要なこと, 問題 I の解については概念的にはそのような対称性がないので, 問題 II と問題 I の関係性を論じる必要があることに言及している.

そのタイミングで「Kummer の解で移り合えない反例があるのですか?」という質問が出たので「えっ, 問題 II の蛭子法由来の解については移り合うと明確に言ったはずでは?」

と混乱してしまった訳である。質問の意図について察しかねていたところへ、「問題 I とか問題 II とか…」という話になったので、「あれっ、では問題 I について聞かれているのかな!？」と思い、問題 I については、三角関数因子を付けない現行の狭い定式化のもとでは、領域によっては、解が解に移らないことはあるので^{*24}、私が「あります、あります」と述べ、それでも十字架領域や西南キャンパスの (あるクラスの) 解については OK ですよと言おうとしたところ、そのような質問ではないということだったので、けっきょく何を聞かれているのかわからなくなってしまい、質疑応答を閉じてしまったというのが当時の仔細である。

なお、ノート作成者注 (落合先生の質問について) として述べられていることは、私が「あります、あります」と答えている時点での心境に即した回答となっている^{*25}。しかし、その後そのような質問ではないという反応が入るので、けっきょく何を聞かれていたのだろうということが、長らく私のなかで未解決であった。その後、このノートを蛭子さんにまとめていただく際に、質問者の落合さんと共に当時を振りかえってみる機会をえた^{*26}。改めて伺ってみると、落合さんの疑問は、端的にいうと次のようなことであった。

Q. 蛭子法由来でない問題 II の解については、解が解に移ることが「まだ」わかっていないだけなのか、それとも既に反例があるのか、どちらだろう？

以下では、この質問に対する回答を書く。そのために、まず用語として、 p, q, r のすべてが整数であるときデータ $\lambda = (p, q, r; a, b, x)$ は整 (integral) であるという^{*27}。蛭子法との関連性を考えるときは、整解のみが対象となる。いまのところ私に証明できているのは、「十字架領域および西南キャンパスでは、問題 II のすべての非初等的な整解は蛭子法から来る。従ってこれらの解に対しては蛭子対称性がはたらく」ということだけである。上記以外の領域で同様のことが成立つかどうかを考察するのは今後の課題である。また、上記以外の領域に属する非初等的な整解であって、蛭子法から来ないものがあるかどうかについては、私は知らない。そのようなものはないだろうという心証はもっているが…。

そういうわけで、先に私が「蛭子法由来とは仮定しない問題 II の解まで対称性を延ばすには、解析的な考察が必要なこと」と書いたことにも解説が必要である。これは、領域によっては、蛭子法に由来しない非初等的な整解が存在するので^{*28}そこを克服しようという意味ではなく、「これこれの領域では非初等的な整解はすべて蛭子法から来る」ということを証明するには、解析的な手段が必要だという意味である。なお、十字架領域のすべてのデータ λ および西南キャンパスのすべての有理的データ λ に対しては、問題 I と問題 II が同値で

^{*24} なお、概念的・本来的には、いま話題にしている対称性が問題 I の解へ直接的に働くわけではないので、これは対称性の式を強引に問題 I の解へ適用すればどうか…という解釈のもとで述べている。

^{*25} この点について、詳しい解説を書いてくださったノート作成者 (蛭子 彰仁さん) に感謝する。

^{*26} いろいろと、お付き合いくださった落合 啓之さんに感謝する。

^{*27} 因みに p, q, r のすべてが有理数であるとき λ は有理的 (rational), p, q, r のいずれかが無理数であるとき λ は無理的 (irrational) であるという。

^{*28} 上述の通り、そうなのか否か私はまだ知らない。むしろ存在しない方に賭けている。

あることは証明済みなので、ここでは両問題を区別する必要はない。

いずれにしても、このあたりの論理はいろいろ入り組んでいるので、聞いていただいている方々に「一回でわかってちょうだい、おねがいします」というのは土台むりがあることであった。その意味で、当時の噛みあわなかった掛け合いを思い出し、その原因をさぐってみたことは、かえって理解の一助になったことと期待する。

最後になるが、本講演を臨場感あふれる読み物にまとめてくださったノート作成者の蛭子彰仁さんに感謝する。

参考文献

- [AAR] G.E.Andrews, R.Askey and R.Roy, *Special functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Ao] T. Aoki, *The hypergeometric function and WKB solutions*, Collaborators: T. Takahashi and M. Tanda, スライド, 北海道大学における研究連絡, 2015 年 8 月 26 日.
- [AT] T.Aoki and M.Tanda, *Parametric Stokes phenomena of the Gauss hypergeometric differential equation with a large parameter*, J. Math. Soc. Japan, (to appear).
- [ATT] Takashi Aoki, Toshinori Takahashi, Mika Tanda, *The hypergeometric function and WKB solutions*, preprint.
- [Ba] W.N.Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Mathematical Tract No. 32, Cambridge University Press, (1935).
- [Eb1] A.Ebisu, *Three term relations for the hypergeometric series*, Funkcial. Ekvac., **55**(2012), no. **2**, 255–283.
- [Eb2] A.Ebisu, *Special values of the hypergeometric series*, Mem. Amer. Math. Soc., (to appear). available arXiv:1308.5588.
- [Erd] A.Erdélyi (editor), *Higher transcendental functions Vol.1*, McGraw-Hill, (1953).
- [Ga] C.F.Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, Comm. Soc. Reg Gött. II, Werke, **3**, 123–162, (1812).
- [Gour] É.Goursat, *Sur l'équation différentielle linéaire, qui admet pour intégrale la série hypergéométrique*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (2) **10**(1881), 3–142.
- [GS] I.Gessel and D.Stanton, *Strange evaluations of hypergeometric series*, SIAM J. Math. Anal., **13**(1982), no. **2**, 295–308.
- [IKSY] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura and M.Yoshida, *From Gauss to Painlevé —A modern theory of special functions*, Vieweg Verlag, Wiesbaden(1991).
- [Iw1] K.Iwasaki, *On some hypergeometric summations*, preprint. arxiv:1408.5658.
- [Iw2] K.Iwasaki, *On some hypergeometric summations II. Duality and Reciprocity*,

- preprint. arxiv:1504.03140.
- [Kum] E.Kummer, *Über die hypergeometrische Reihe*, J. Reine Angew. Math., **15**(1836), 39–83.
- [Ko] W.Koepf, *Hypergeometric summation —An algorithmic approach to summation and special function identities, Second edition*, Universitext, Springer(2014).
- [PWZ] M.Petkovšek, H.Wilf and D.Zeilberger, *A=B*, A.K.Peters, Wellesley(1996).
- [Ta] Mika Tanda, *Exact WKB analysis of hypergeometric differential equations*, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.
- [V1] R.Vidunas, *Algebraic transformations of Gauss hypergeometric functions*, Funkcial. Ekvac., **52**(2009), no. **2**, 139–180.
- [V2] R.Vidunas, *Dihedral Gauss hypergeometric functions*, Kyushu J. Math. **65**(2011), 141–167.