滑らかな写像芽の間の幾何学的同値関係とその応用

泉屋 周一 述

加葉田 雄太朗・佐治 健太郎・高橋 雅朋・
寺本 圭佑・濱田 直希・本多 俊一・山本 卓宏 記

2019 年 8 月 27 日

概 要

本稿は 2018 年 12 月 18 日から 21 日に神戸大学理学部で行われた研究集会「応用特異点論研究集会[1]」における口述者の講演を筆記者がまとめたものである. さらに, 7.4 節の内容は, 講演会後に得られた最新の分類結果について口述者自身が書き加えたものである. 詳しい証明などに興味がある読者は、[19, 20] を参照してほしい.

目 次

[1]神戸大学重点研究チーム「数学の幾何的様相」の支援を受けて開催された.

1 序

1.1 $\mathcal{A}$-同値と $\mathcal{K}$-同値

本稿では, C^∞ 級写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ の同値関係を考える. 歴史的には, Mather によって $\mathcal{R}$-同値, $\mathcal{L}$-同値, $\mathcal{A}$-同値, $\mathcal{C}$-同値および $\mathcal{K}$-同値が研究された [25]. その中で以下の $\mathcal{A}$-同値は最も基本的な同値関係である.

定義 1.1. C^∞ 級写像芽 f, g が $\mathcal{A}$-**同値**であるとは, 微分同相写像芽 ϕ, ψ が存在し $\psi \circ f = g \circ \phi$ を満たすことをいう. つまり, 図式

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & (\mathbb{R}^p, 0) \arrow[d, "\psi"] \\ (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "g"'] & (\mathbb{R}^p, 0) \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

が可換になることをいう. 特に, $\phi = 1_{\mathbb{R}^n}$ のとき $\mathcal{L}$-**同値**, $\psi = 1_{\mathbb{R}^p}$ のとき $\mathcal{R}$-**同値**という.

1970 年代頃の Thom-Mather 理論の前半部分は $\mathcal{A}$-同値に関する分類理論である. 多様体の間に大域的な C^∞ 級写像が存在する場合, その局所的な表現がどのような振る舞いをするかを考えると, それらはある点の周りの座標変換で $\mathcal{A}$-同値になる. このような意味で, $\mathcal{A}$-同値は微分位相幾何学的な同値関係であると考えることができる.

Mather は [25, 26] において, $\mathcal{A}$-同値の研究のために以下の $\mathcal{K}$-同値を導入した.

定義 1.2. C^∞ 級写像芽 f, g が $\mathcal{K}$-**同値**であるとは, ある微分同相写像芽 $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0), H(x, y) = (\phi(x), \Phi(x, y))$ $(\Phi(x, 0) = 0)$ が存在し,

$$H(x, f(x)) = (\phi(x), g \circ \phi(x)) \quad (\iff \Phi(x, f(x)) = g \circ \phi(x)) \tag{1.2}$$

を満たすことをいう. ここで,

$$\Phi(x,y)=\sum_{i=1}^{p}\Phi_i(x,y)y_i, \quad \Phi(x,f(x))=\sum_{i=1}^{p}\Phi_i(x,f(x))f_i(x) \tag{1.3}$$

である. 特に, $\phi=1_{\mathbb{R}^p}$ のとき$\mathcal{C}$-同値という.

定義 1.2 がこのような形で与えられているのは, $\mathcal{A}$-同値との関係を明確にする為であると考えられる. 一方, Mather により, C^∞ 級写像芽 f,g が$\mathcal{K}$-同値であることの必要十分条件が与えられている.

定理 1.3 ([25])**.** 以下は同値である.

(1) f,g が$\mathcal{K}$-同値である.

(2) C^∞ 級写像芽 $A:(\mathbb{R}^n,0)\to GL(p,\mathbb{R})$ と C^∞ 級微分同相写像芽 $\phi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ が存在し $A(x)^tf(x)={}^tg\circ\phi(x)$ を満たす.

(3) C^∞ 級微分同相写像芽 $\phi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ が存在し $\phi^*I(g)=I(f)$ をみたす.

ただし, 局所環 $\mathcal{E}_n=\{h\mid h:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}:C^\infty$ 級$\}$ の極大イデアル $\mathfrak{M}_n=\{h\in\mathcal{E}_n\mid h(0)=0\}$ に対して, $f^*:\mathcal{E}_p\to\mathcal{E}_n$, $f^*(h)=h\circ f$ および $I(f)=f^*(\mathfrak{M}_p)\mathcal{E}_n=\langle f_1,f_2,...,f_p\rangle_{\mathcal{E}_n}$ である.

今後は, 定理 1.3 の (2) の条件を$\mathcal{K}$-同値の定義として採用する. $\mathcal{K}$-同値と$\mathcal{A}$-同値は以下の関係を持つ.

事実 1.4. f,g が$\mathcal{A}$-同値ならば, f,g は$\mathcal{K}$-同値である.

定理 1.3 と事実 1.4 より, $\mathcal{K}$-同値は$\mathcal{A}$-同値より弱くかつ代数的な同値関係である. また, 安定写像に対しては$\mathcal{K}$-同値と$\mathcal{A}$-同値は同じ概念であり, $Q(f)=\mathcal{E}_n/I(f)$ の環構造が完全不変量になっている.

$\mathcal{K}$-同値は$\mathcal{A}$-同値の研究の為に導入された概念だが, その後の Golubitsky-Schaefer の分岐理論の研究などでは, $\mathcal{A}$-同値よりも$\mathcal{K}$-同値の方が有効であることが知られている.

1.2　同値関係の一般化と記号の準備

正則行列の集合と線形同型写像の集合を

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}, \tag{1.4}$$

および

$$GL(V) = \{L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid L: \text{同型写像}\} \tag{1.5}$$

とする．ベクトル空間 V の基底 $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ に対し表現行列をとることによって, $GL(V)$ から $GL(n,\mathbb{R})$ への同型写像が与えられる．この同型写像が $GL(V)$ のリー群としての微分構造を与える．リー群としては同型であるが, 今後 $GL(n,\mathbb{R})$ と $GL(V)$ は区別する．

定義域の変換として $GL(n,\mathbb{R})$ のリー閉部分群 $G' \subset GL(n,\mathbb{R})$, 値域の変換として一般のリー群 G の C^∞-表現 $\rho: G \to GL(\mathbb{R}^p)$ を考えると, Mather の $\mathcal{R}$-同値, $\mathcal{L}$-同値, $\mathcal{A}$-同値, $\mathcal{C}$-同値および $\mathcal{K}$-同値に対応する $\mathcal{R}[G']$-同値, $\mathcal{L}[G]$-同値, $\mathcal{A}[G': G]$-同値, $\mathcal{C}[(\rho,G)]$-同値および $\mathcal{K}[G': (\rho,G)]$-同値が定義できる．本稿では, $G' = GL(n,\mathbb{R})$ の場合のみを考える．$G' = GL(n,\mathbb{R})$ の場合, $\mathcal{R}[GL(n,\mathbb{R})]$-同値は $\mathcal{R}$-同値と一致する．第 3 節において $\mathcal{A}[G] = \mathcal{A}[GL(n,\mathbb{R}), G)]$-同値, 第 5 節において $\mathcal{K}[(\rho,G)]$-同値の性質について紹介する．なお, 上記の同値関係に対して, 以下の関係が成り立つ：

- $\mathcal{A}[G] = \mathcal{R} \times \mathcal{L}[G]$.
- $\mathcal{K}[(\rho,G)] = \mathcal{R} \rtimes \mathcal{C}[(\rho,G)]$.
- $\mathcal{K}[G] = \mathcal{R} \rtimes \mathcal{C}[G]$.
- $G \subset \mathcal{L}[G]$ ならば $\mathcal{R} \times G \subset \mathcal{A}[G]$.

微分同相写像芽の集合 $\mathrm{Diff}(p) = \{\psi : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) : \text{微分同相写像芽}\}$ とリー部分群 $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ に対して,

$$\mathrm{Diff}[G](p) = \{\psi \in \mathrm{Diff}(p) \mid \text{任意の } y \in (\mathbb{R}^p, 0) \text{ に対して } J_y\psi \in G\},$$

および

$$\mathrm{Diff}_0[G](p) = \{\psi \in \mathrm{Diff}[G](p) \mid \psi \text{ は } 1_{\mathbb{R}^p} \text{ にイソトピック}\}$$

とする．

1.3 $\mathcal{A}[G]$-同値と$\mathcal{K}[(\rho, G)]$-同値

終域の幾何構造を保つ同値関係として, $\mathcal{A}[G]$-同値と$\mathcal{K}[(\rho, G)]$-同値を考える.

定義 1.5. C^∞ 級写像芽 f, g が $\mathcal{A}[G]$-**同値**であるとは, ある $\phi \in \mathrm{Diff}(n)$ と $\psi \in \mathrm{Diff}[G](p)$ が存在し $\psi \circ f = g \circ \phi$ を満たすことをいう. 特に, $\phi = 1_{\mathbb{R}^n}$ のとき $\mathcal{L}[G]$-**同値**, $\psi = \psi_A$ のとき $\mathcal{R} \times G$-**同値**という. ただし, $\psi_A(y) = A^t y$ である.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow[g]{} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

終域の幾何構造を変えることにより, 様々な幾何学が対応する. 例えば, $G = SO(p)$ はユークリッド幾何学, $G = SL(p)$ は等積アファイン幾何学, $G = SP(p)$ はシンプレクティック幾何学が対応する. $\mathcal{A}[G]$-同値に関して以下が成り立つ:

- $\mathcal{R} \times G$-同値 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}[G]$-同値.
- $G = \{I_p\} \Rightarrow \mathcal{A}[\{I_p\}] = \mathcal{R}$.
- $G = GL(p, \mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{A}[GL(p, \mathbb{R})] = \mathcal{A}$.

群 G の C^∞ 級表現を $\rho : G \to GL(\mathbb{R}^p)$ とする.

定義 1.6. C^∞ 級写像芽 f, g が$\mathcal{K}[(\rho, G)]$-**同値**であるとは, ある $\phi \in \mathrm{Diff}(n)$ と $a : (\mathbb{R}^n, 0) \to G$ が存在し $g \circ \phi(x) = \rho\big(a(x)\big)\big(f(x)\big)$ を満たすことをいう. 特に, $\phi = 1_{\mathbb{R}^n}$ のき$\mathcal{C}[(\rho, G)]$-**同値**という.

注意 1.7. リー部分群 $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ に対して, ある $A : (\mathbb{R}^n, 0) \to G$ が存在し ${}^t g \circ \phi(x) = A(x)^t f(x)$ としたのが Torgeron の G-同値である. Torgeron の G-同値はここでの$\mathcal{K}[G]$-同値である. また, $G = GL(p, \mathbb{R})$ のとき, $\mathcal{K}[GL(p, \mathbb{R})] = \mathcal{K}$ である.

各同値関係同士の関係を考えよう. $\mathcal{R}$ 同値であれば$\mathcal{R} \times G$ 同値である. $\mathcal{R} \times G$ 同値であれば$\mathcal{A}[G]$ 同値であり,$\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値である. $\mathcal{A}[G]$ 同値であれば$\mathcal{A}$ 同値であり. $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値であれば$\mathcal{K}$ 同値であり. $\mathcal{A}$ 同値であれば$\mathcal{K}$ 同値であ

る．しかし, $\mathcal{A}[G]$ 同値であれば $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値かどうかは群 G によって変わる．この関係を図で表すと以下のようになる．

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\mathcal{A} \arrow[d] & \subset & \mathcal{K} \arrow[d] \\
\mathcal{A}[G] \arrow[rr, dotted, "\text{関係は } G \text{ によって変わる}"] \arrow[dr] & & \mathcal{K}[(\rho, G)] \arrow[dl] \\
& \mathcal{R} \times G \arrow[d] & \\
& \mathcal{R} &
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

2　$\mathrm{Diff}[G](p)$ の無限小構造

$G \subset GL(p, \mathbb{R})$ とする．$\psi \in \mathrm{Diff}[G](p)$ における $\mathrm{Diff}[G](p)$ の形式的接空間は

$$T_\psi \mathrm{Diff}[G](p) = \left\{ \left. \frac{d\psi_t}{dt} \right|_{t=0} \;\middle|\; \text{任意の } t \in (\mathbb{R}, 0) \text{ に対して} \psi_t \in \mathrm{Diff}[g](p),\ \psi_0 = \psi \right\} \tag{2.1}$$

で与えられる．特に $\psi = 1_{\mathbb{R}^p}$ の時, 任意の $\psi_t \in \mathrm{Diff}[g](p)$ に対して

$$J_y \left(\left. \frac{d\psi_t}{dt} \right|_{t=0} \right) = \left. \frac{d(J_y \psi_t)}{dt} \right|_{t=0} \in T_{I_p} G = \mathfrak{g} \tag{2.2}$$

である．ただし, $\psi_0 = 1_{\mathbb{R}^p}$ である．原点 $0 \in (\mathbb{R}^p, 0)$ におけるベクトル場の芽全体を

$$\theta(p) = \left\{ \eta = \sum_{i=1}^{p} \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \;\middle|\; \eta_i : C^\infty \text{級関数} \right\} \tag{2.3}$$

とすると

$$\left. \frac{d\psi_t}{dt} \right|_{t=0} \in \theta(p) \cong \mathcal{E}(p, p) \tag{2.4}$$

である. したがって,

$$\left.\frac{d\psi_t}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{p} \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{2.5}$$

と表されるので任意の $y \in (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して

$$\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_j}(y) \right) \in \mathfrak{g} \tag{2.6}$$

である. ただし, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_p) : (\mathbb{R}^p, 0) \to \mathbb{R}^p : C^\infty$ である. 以上より,

$$T_{1_{\mathbb{R}^p}} \operatorname{Diff}[G](p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \;\middle|\; \text{任意の } y \in (\mathbb{R}^p, 0) \text{ に対して } \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_j}(y) \right) \in \mathfrak{g} \right\} \tag{2.7}$$

である.

定義 2.1. $\theta[G](p)$ および $\theta[G]_0(p)$ を

$$\theta[G](p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \;\middle|\; \text{任意の } y \in (\mathbb{R}^p, 0) \text{ に対して } \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_j}(y) \right) \in \mathfrak{g} \right\}, \tag{2.8}$$

$$\theta[G]_0(p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \in \theta[G](p) \;\middle|\; \eta_i(0) = 0 \right\} \tag{2.9}$$

と定義する.

注意 2.2. $\theta[G](p)$ および $\theta[G]_0(p)$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間である. また, $\theta(p)$ は有限生成 $\mathcal{E}_p$ 加群であり, $\theta[GL(p, \mathbb{R})](p) = \theta(p)$ である.

$\theta[G]_0(p)$ 上にどの程度の加群構造が入るかを考える.

定義 2.3. $\mathcal{E}_p$ 加群 $\mathfrak{g}(\mathcal{E}_p)$ を $\mathfrak{g}(\mathcal{E}_p) = \{\zeta \mid \zeta : (\mathbb{R}^p, 0) \to \mathfrak{g} : C^\infty\}$ と定義する.

注意 2.4. $\zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_p)$ であることの必要十分条件は, 任意の $y \in (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して $\zeta(y) \in \mathfrak{g}$ が成り立つことである.

定義 2.5. $\lambda \in \mathcal{E}_p$ および p 次正方行列全体を $M_p(\mathbb{R})$ とする．写像 $\mathrm{grad}_y\lambda : \theta(p) \to M_p(\mathcal{E}_p)$ を

$$\mathrm{grad}_y\lambda(\eta) = \eta \otimes \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial\lambda}{\partial y_p}\right) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\lambda}{\partial y_p} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

と定義する．ただし, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_p)$ および $y = (y_1, ..., y_p)$ である．また, $\mathcal{E}_p[G]$ を

$$\mathcal{E}_p[G] = \left\{\lambda \in \mathcal{E}_p \mid \text{任意の } \eta \in \theta[G]_0(p) \text{ に対して } \mathrm{grad}_y\lambda(\eta) \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_p)\right\} \tag{2.11}$$

と定義する．

命題 2.6. $\mathcal{E}_p[G]$ は $\mathcal{E}_p$ の $\mathbb{R}$ 部分代数である．また, $\theta[G]_0(p)$ は $\theta(p)$ の $\mathcal{E}_p[G]$ 部分加群である．

命題 2.7. $\mathcal{E}_p$ の $\mathbb{R}$-部分代数 R について, $\theta[G]_0(p)$ が $\theta(p)$ の R-部分加群であるならば, $\mathcal{E}_p[G] \supset R$ が成り立つ．

ここで, $\mathcal{E}_p[G]$ を $\theta[G]_0(p)$ に関する $\mathcal{E}_p$ の**極大 $\mathbb{R}$-部分代数**と呼ぶ．

命題 2.8. $\mathcal{E}_p[G]$ は $\mathcal{E}_p$ の C^∞-部分環である．

定義 2.9. $\mathbb{R}$-代数 $\mathcal{D}$ が**可微分代数**であるとは, ある自然数 n およびある $\mathbb{R}$ 代数全射 $\phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{D}$ が存在することをいう．

注意 2.10. $\mathcal{E}_p[G]$ が可微分代数かどうかは G に依存する．

例 2.11. $SO(p) \subset GL(p, \mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(p) = \{X \in M_p(\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\theta(p) \supset \theta[SO(p)](p) \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} \,\middle|\, i = 1, ..., p \right\rangle_{\mathbb{R}} + \left\langle y_j\frac{\partial}{\partial y_i} - y_i\frac{\partial}{\partial y_j} \,\middle|\, 1 \le i < j \le p \right\rangle_{\mathbb{R}} \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} \,\middle|\, i = 1, ..., p \right\rangle_{\mathbb{R}} + \theta[SO(p)]_0(p) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

である．ただし，

$$\sum_{1\leq i<j\leq p}\lambda_{ij}\left(y_j\frac{\partial}{\partial y_i}-y_i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\in\theta[SO(p)]_0(p) \tag{2.13}$$

に

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,p-1} & \lambda_{1,p} \\ -\lambda_{1,2} & 0 & \cdots & \lambda_{2,p-1} & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\lambda_{1,p-1} & -\lambda_{2,p-2} & & 0 & \lambda_{p-1,p} \\ -\lambda_{1,p} & -\lambda_{2,p} & \cdots & -\lambda_{p-1,p} & 0 \end{pmatrix}\in\mathfrak{so}(p) \tag{2.14}$$

が対応するので $\theta[SO(p)]_0(p)\backsimeq\mathfrak{so}(p)$ である．

命題 2.12. $\mathrm{Diff}_0[SO(p)]=SO(p)$ および $\mathcal{E}_p[SO(p)]=\mathbb{R}$ である． また，$\theta[SO(p)]_0(p)$ は有限生成 $\mathcal{E}_p[SO(p)]=\mathbb{R}$ 加群である．

例 2.13. $SL(p,\mathbb{R})\subset GL(p,\mathbb{R})$ に対して $\mathrm{Diff}[SL(p,\mathbb{R})](p)$ は体積保存微分同相写像芽である．ここで，$\mathfrak{sl}(p)$ は $\mathfrak{sl}(p)=\{X\in M_p(\mathbb{R})\mid \mathrm{Trace}X=0\}$ である．

命題 2.14. $d(\Omega^{(p-2)})$ を完全 $(p-1)$ 形式の芽のベクトル空間とする．このとき，$d(\Omega^{(p-2)})\backsimeq\theta[SL(p,\mathbb{R})](p)$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間である．また，$\mathcal{E}_p[SL(p,\mathbb{R})]=\mathbb{R}$ である．

ここで，$\theta[SL(p,\mathbb{R})]_0(p)$ は有限生成 $\mathcal{E}_p[SL(p,\mathbb{R})]$ 加群ではない事に注意する．

例 2.15. $G=Sp(2n,\mathbb{R})=\{A\in GL(2n,\mathbb{R})\mid {}^tAJ_{2n}A=J_{2n}\}$ の場合を考える．ここで，$J_{2n}=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$ である．このとき，$Sp(2n,\mathbb{R})$ のリー環は

$$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})=\{X\in M_{2n}(\mathbb{R})\mid {}^tXJ_{2n}+J_{2n}X=0\} \tag{2.15}$$

である．いま，$\mathbb{R}^{2n}$ の座標を $(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)$ とすると，シンプレクティック形式 $\omega=\sum_{i=1}^n dp_i\wedge dq_i$ が定まり，

$$\theta[Sp(2n,\mathbb{R})](2n)=\left\{\sum_{i=1}^n\left(-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}+\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\middle| H\colon(\mathbb{R}^{2n},0)\to\mathbb{R}\right\} \tag{2.16}$$

となる．これはハミルトンベクトル場芽のなす集合である．

$n=1$ のとき, $Sp(2,\mathbb{R})=SL(2,\mathbb{R})$ であり, $\mathcal{E}_2[Sp(2,\mathbb{R})]=\mathbb{R}$ である．一般に, $\mathcal{E}_{2n}[Sp(2n,\mathbb{R})]=\mathbb{R}$ だろう．

$\theta[Sp(2n,\mathbb{R})](2n)$ は有限生成 $\mathcal{E}_{2n}[Sp(2n,\mathbb{R})]=\mathbb{R}$ 加群ではないことに注意する．

例 2.16. $p=p_1+p_2$ とする．

(1)

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \;\middle|\; A\in GL(p_1,\mathbb{R}), B\in GL(p_2,\mathbb{R}) \right\} \\ &= GL(p_1,\mathbb{R})\oplus GL(p_2,\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{2.17}$$

に対して,

$$H=GL(p_1,\mathbb{R})\oplus\{I_{p_2}\},\quad K=\{I_{p_1}\}\oplus GL(p_2,\mathbb{R}) \tag{2.18}$$

とおく．すると,

$$G=HK\cong H\times K \tag{2.19}$$

である．このとき, G,H のリー環はそれぞれ

$$\mathfrak{h}=\left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; X\in M_{p_1}(\mathbb{R}) \right\}=M_{p_1}(\mathbb{R})\oplus\{0\}, \tag{2.20}$$

$$\mathfrak{k}=\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \;\middle|\; Y\in M_{p_2}(\mathbb{R}) \right\}=\{0\}\oplus M_{p_2}(\mathbb{R}) \tag{2.21}$$

なので G のリー環 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{k}=M_{p_1}(\mathbb{R})\oplus M_{p_2}(\mathbb{R}) \tag{2.22}$$

となる．このとき,

$$\theta[H]_0(p)=m_{p_1}\theta(p_1),\quad \theta[K]_0(p)=m_{p_2}\theta(p_2) \tag{2.23}$$

であり

$$\theta[G]_0(p) = m_{p_1}\theta(p_1) \oplus m_{p_2}\theta(p_2) \tag{2.24}$$

である．さらに, $\mathcal{E}_p[G] = \mathbb{R}$, $\mathcal{E}_p[H] = \mathbb{R}$, $\mathcal{E}_p[K] = \mathbb{R}$ であり, これらは全て可微分代数である．よって, $\mathcal{E}_p[G] = \mathbb{R} = \mathcal{E}_{p_1} \cap \mathcal{E}_{p_2} = \mathcal{E}_p[H] \cap \mathcal{E}_p[K]$ である．これは幾何学的部分群でない．幾何学的部分群については Damon [8, 9] を参照.

(2)

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in GL(p_1, \mathbb{R}), C \in GL(p_2, \mathbb{R}) \right\} \\ &= GL(p_1, \mathbb{R}) \widetilde{\oplus} GL(p_2, \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{2.25}$$

に対して,

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in GL(p_1, \mathbb{R}) \right\} = GL(p_1, \mathbb{R}) \widetilde{\oplus} \{I_{p_2}\} \tag{2.26}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \;\middle|\; C \in GL(p_2, \mathbb{R}) \right\} = \{I_{p_1}\} \widetilde{\oplus} GL(p_2, \mathbb{R}) \tag{2.27}$$

とおく．すると, $N \lhd G$, $K \lhd G$ であり, $G = NK$ である．これは N と K との半直積 $H \rtimes K$ に同型である．このとき, N, H のリー環はそれぞれ

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (X, Y) \in M_{p_1 \times p}(\mathbb{R}) \right\} \tag{2.28}$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \;\middle|\; Z \in M_{p_2}(\mathbb{R}) \right\} \tag{2.29}$$

なので G のリー環 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \;\middle|\; (X, Y) \in M_{p_1 \times p}(\mathbb{R}), Z \in M_{p_2}(\mathbb{R}) \right\} \tag{2.30}$$

となる．このとき,

$$\theta[N]_0(p) = m_p\theta(\pi_{p_1}), \quad \theta[K]_0(p) = m_{p_2}\theta(p_2) \tag{2.31}$$

である. ここで, $\theta(\pi_{p_1})$ は $\pi\colon \mathbb{R}^{p_1}\times\mathbb{R}^{p_2}\to\mathbb{R}^{p_1}$ に沿ったベクトル場芽全体のなす集合であり, $\theta(\pi_{p_1})$ は $\mathcal{E}(p,p_1)\cong\mathcal{E}_p^{p_1}$ と同型である. このとき,

$$\theta[G]_0(p)=\theta[N]_0(p)\oplus\theta[K]_0(p)=m_p\theta(\pi_{p_1})\oplus m_{p_2}\theta(p_2) \tag{2.32}$$

である. さらに, $\mathcal{E}_p[G]=\mathcal{E}_p[K]=\mathcal{E}_{p_2}$, $\mathcal{E}_p[N]=\mathcal{E}_p$ であり, これらは可微分代数である. よって, $\mathcal{E}_p[G]=\mathcal{E}_p[K]\cap\mathcal{E}_p(K)$ である. これは幾何学的部分群 [8] である.

3　$\mathcal{A}[G]$-同値の無限小構造

3.1　Thom-Mather 理論

C^∞ 級写像芽 $f\colon(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を考える. C^∞ 級写像芽 $\eta\colon(\mathbb{R}^n,0)\to T\mathbb{R}^p$ が $\pi_p\circ\eta=f$ を満たすとき f **に沿ったベクトル場**と呼ぶ. ここで, $\pi_p\colon T\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ は接ベクトルバンドルの射影である. すなわち, f **に沿ったベクトル場** $\eta\colon(\mathbb{R}^n,0)\to T\mathbb{R}^p$ とは, 図式

$$\begin{tikzcd} & T\mathbb{R}^p \arrow[d, "\pi_p"] \\ (\mathbb{R}^n,0) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "f"] & (\mathbb{R}^p,0) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

を可換にするもののことである. C^∞ 級写像芽 $f\colon(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に沿ったベクトル場を全て集めた集合を $\theta(f)$ と書く. このとき, $\eta\in\theta(f)$ であるための必要十分条件は

$$\eta(x)=\sum_{i=1}^{p}\eta_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i}\circ f \tag{3.2}$$

と書けることであり, 基底のベクトルを忘れることで $\eta(f)\in\theta(f)$ を

$$\eta(x)=(\eta_1(x),\ldots,\eta_n(x))\in\mathcal{E}(n,p)=\mathcal{E}_n^p \tag{3.3}$$

と思うことが出来る. ここで, $\mathcal{E}_n^p$ は $\mathcal{E}_n$-加群であるが, 引き戻し準同型 $f^*\colon\mathcal{E}_p\to\mathcal{E}_n$ を通して $\mathcal{E}_p$-加群でもあることに注意する.

恒等写像に沿ったベクトル場を $\theta(n) = \theta(1_{\mathbb{R}^n})$ とおく．このとき,

$$\theta(n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathcal{E}_n}, \tag{3.4}$$

$$\theta(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \right\rangle_{\mathcal{E}_p}, \tag{3.5}$$

$$\theta(f) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \circ f \right\rangle_{\mathcal{E}_n} \tag{3.6}$$

なので $\theta(n), \theta(f)$ は有限生成 $\mathcal{E}_n$-加群であり, $\theta(p)$ はは有限生成 $\mathcal{E}_p$-加群である．

C^∞ 級写像芽 $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して $\mathcal{E}_n$ 準同型 $tf\colon \theta(n) \to \theta(f)$ を $tf(\zeta) = df \circ \zeta$ と定める．また, f を通した $\mathcal{E}_p$ 準同型すなわち $f^*(\mathcal{E}_p)$-準同型 $\omega f\colon \theta(p) \to \theta(f)$ を $\omega f(\xi) = \xi \circ f$ と定める．このとき, 組

$$(\omega f, tf, \theta(p), \theta(n), \theta(f))$$

を**有限型混合準同型**と呼ぶ.

$\theta(f)$ は $\mathcal{E}_n$-加群, $\mathcal{E}_p$-加群両方の構造を持ち, ωf は $\mathcal{E}_p$ 準同型, tf は $\mathcal{E}_n$ 準同型という混ざった構造を持つことが難しくしている．この困難をどう回避するかという発想から $\mathcal{K}$-同値が導入される. $\mathcal{K}$-同値に関しては第 5 節で扱う.

さて, $\theta[G](p) \subset \theta(p)$ なので,

$$\omega f_{[G]} = \omega f|_{\theta[G](p)}\colon \theta[G](p) \to \theta(f), \quad f^*_{[G]} = f^*|_{\mathcal{E}_p[G]}\colon \mathcal{E}_p[G] \to \mathcal{E}_n \tag{3.7}$$

とおくと, $\theta(f)$ は $f^*_{[G]}$ を通して $\mathcal{E}_p[G]$-加群であり, ωf は $f^*_{[G]}$ 上 $\mathcal{E}_p[G]$ 準同型なので, $f^*_{[G]}$ 上混合準同型 $(\omega f_{[G]}, tf, \theta[G](p), \theta(n), \theta(f))$ を得る.

注意 3.1. $\theta[G]_0(p)$ が $\mathcal{E}_p[G]$-加群として有限生成であるとき,

$$(\omega f_{[G]}, tf, \theta[G](p), \theta(n), \theta(f))$$

は有限型となる.

例 3.2. (1) $G = SL(p, \mathbb{R})$（例 2.13）のとき, $\mathcal{E}_p[SL(p, \mathbb{R})] = \mathbb{R}$ であり,

$$\theta[SL(p, \mathbb{R})]_0(p)$$

に対して $\dim_{\mathbb{R}} \theta[SL(p, \mathbb{R})]_0(p) = \infty$ である.

(2) $G = SO(p)$（例 2.11）のとき, $\mathcal{E}_p[SO(p)] = \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} \theta[SO(p)]_0(p) < \infty$ となる.

C^∞ 級写像芽 $f\colon(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ の $\mathcal{A}[G]$-同値に関する接空間は

$$T\mathcal{A}[G]_e(f)=tf(\theta(n))+\omega f_{[G]}(\theta[G](p)), \tag{3.8}$$

$$T\mathcal{A}[G](f)=tf(m_n\theta(n))+\omega f_{[G]}(\theta[G]_0(p)) \tag{3.9}$$

となる.

注意 3.3. (1) $G=GL(p,\mathbb{R})$ のとき $T\mathcal{A}[GL(p,\mathbb{R})](f)=T\mathcal{A}(f)$ である.
(2) $G=\{I_p\}$ のとき $T\mathcal{A}[\{I_p\}](f)=T\mathcal{R}(f)$ である.

3.2 $\mathcal{R}\times G$-同値

$A\in GL(p,\mathbb{R})$ を $\psi_A\colon {}^t\boldsymbol{y}\mapsto A^t\boldsymbol{y}$ と同一視することにより $G\subset GL(p,\mathbb{R})$ を $G\subset \mathrm{Diff}[G](p)$ と考える. このとき, C^∞ 級写像芽 $f\colon(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して

$$\theta(f)\supset\mathfrak{g}(f)=\{X^tf\mid X\in\mathfrak{g}\} \tag{3.10}$$

とおく. ここで, $\mathfrak{g}\subset\theta(p)$ とみなせることに注意する.
C^∞ 級写像芽 $f\colon(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ の $\mathcal{R}\times G$-同値に関する接空間は

$$T(\mathcal{R}\times G)_e(f)=tf(\theta(n))+\mathfrak{g}(f), \tag{3.11}$$

$$T(\mathcal{R}\times G)(f)=tf(m_n\theta(n))+\mathfrak{g}(f) \tag{3.12}$$

となる.

$$\omega f_{\mathfrak{g}}=\omega f|_{\mathfrak{g}}\colon\mathfrak{g}\to\theta(f)$$

は $\mathbb{R}$ 準同型なので, 有限型混合準同型 $(\omega f_{\mathfrak{g}},tf,\mathfrak{g},\theta(n),\theta(f))$ を得る.
しかし, 次が成り立つ.

命題 3.4. $p>1$ とする. このとき, $\dim_{\mathbb{R}}\dfrac{\theta(f)}{T(\mathcal{R}\times G)_e(f)}<\infty$ ならば f は沈め込み写像である. 特に, $n<p$ のときは, 沈め込み写像は存在しないので, いつでも $\dim_{\mathbb{R}}\dfrac{\theta(f)}{T(\mathcal{R}\times G)_e(f)}=\infty$ となる.

4 $\mathcal{A}[G]$-同値の例

4.1 等長的 $\mathcal{A}$ 同値

$G = SO(p)$ とする．C^∞ 級写像芽 $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

$$\begin{aligned}\omega f_{[SO(p)]}(\theta[SO(p)](p)) = & \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \mid i = 1, \dots, p \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ & + \left\langle f_j \frac{\partial}{\partial y_i} \circ f - f_i \frac{\partial}{\partial y_j} \circ f \mid 0 \le i < j \le p \right\rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

である．

定義 4.1. $f, g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ とする．f と g が $SO(p)$**-合同**であるとは, f と g が $\mathcal{R} \times SO(p)$-同値であるときである．

命題 4.2. $f, g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ とする．f と g が $\mathcal{A}_0[SO(p)]$-同値であるための必要十分条件はこれらが $SO(p)$-合同であることである．ここで, $\mathcal{A}_0[SO(p)] = \mathrm{Diff}(n) \times \mathrm{Diff}_0[SO(p)](p)$ である．

系 4.3. $n < p$ のとき, $\dim_{\mathbb{R}} \dfrac{\theta(f)}{T\mathcal{A}[SO(p)]_e(f)} = \infty$ である．

以下で, $n = 1$, $p = 2$ とする．

命題 4.4 (古典的結果)**.** $f, g\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ は正則であるとし, κ_f, κ_g をそれぞれの曲率関数とする．このとき, f と g が $\mathcal{A}_0[SO(2)]$-同値であるための必要十分条件は κ_f と κ_g が $\mathcal{R}$-同値であることである．

写像芽 $f = (f_1, f_2)\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ が正則でない場合, すなわち, 特異曲線の場合を考える．

定義 4.5. $f = (f_1, f_2)\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ が A_k **型**であるとは, f_1 が A_k 型かつ f_2 が A_{2k} 型, または, f_2 が A_k 型かつ f_1 が A_{2k} 型であることである．

注意 4.6. 関数芽 $h\colon (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ が A_k 型であるとは, $h'(0) = \cdots = h^{(k)}(0) = 0$, $h^{k+1}(0) \neq 0$ を満たすときである．

命題 4.7. $f\colon (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^2,0)$ が A_k 型ならば, 関数芽 $h\colon (\mathbb{R},0) \to \mathbb{R}$ で f が $(\pm x^{k+1}, x^{k+1}h(x))$ と $\mathcal{A}_0[SO(2)]$-同値となる h が存在する.

命題 4.7 のもと, $f(x) = (\pm x^{k+1}, x^{k+1}h(x))$ と改めておくと

$$\dot{f}(x) = (\pm(k+1)x^k, x^k((k+1)h(x) + x\dot{h}(x))$$

である. このとき,

$$\boldsymbol{\mu}(x) = \frac{1}{||\dot{f}(x)||}\dot{f}(x),\ \boldsymbol{\nu}(x) = J\boldsymbol{\mu}(x)$$

とおく. ここで, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である. このとき, $\{\boldsymbol{\mu}(x), \boldsymbol{\nu}(x)\}$ は f に沿った正規直交枠であり, さらに, $\dot{f}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) = 0$ を満たす. すなわち, f はフロンタルである. ここで $\ell_f(x) = \dot{\boldsymbol{\nu}}(x) \cdot \boldsymbol{\mu}(x)$, $\beta_f(x) = \dot{f}(x) \cdot \boldsymbol{\mu}(x)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\nu}}(x) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell_f(x) \\ -\ell_f(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}(x) \\ \boldsymbol{\mu}(x) \end{pmatrix}, \quad \dot{f}(x) = \beta_f(x)\boldsymbol{\mu}(x) \tag{4.2}$$

が成立する (福永・高橋 [13]).

定理 4.8 (福永・高橋 [13])**.** フロンタル芽 $f, g\colon (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^2,0)$ に対して, f と g が $SO(2)$-合同であるための必要十分条件は $\phi \in \mathrm{Diff}(1)$ で任意の $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して $\dot{\phi}(x) > 0$ かつ $\dot{\phi}(x)(\ell_f \circ \phi(x), \beta_f \circ \phi(x)) = (\ell_g(x), \beta_g(x))$ となるものが存在することである.

$f(x) = (\pm x^{k+1}, x^{k+1}h(x))$ に対して,

$$\ell_f(x) = \frac{\pm(k+1)((k+1)\dot{h}(x) + x\ddot{h}(x))}{\sqrt{((k+1)^2 + ((k+1)h(x) + x\dot{h}(x))^2)^3}},$$
$$\beta_f(x) = x^k\sqrt{(k+1)^2 + ((k+1)h(x) + x\dot{h}(x))^2}$$

である.

注意 4.9. $h(x)$ は関数モジュライか?

命題 4.10 (モンジュ標形)**.** $f\colon (\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^3,0)$ がはめ込み写像であれば, f は $g(x_1,x_2)=(x_1,x_2,\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+O(3))$ と $\mathcal{A}_0[SO(3)]$-同値である. ここで, λ_1, λ_2 は原点における f の主曲率である.

特異曲面の場合, 特にカスプ辺やスワロウテイルに関しては佐治の標準形 [24, 31] の研究がある.

4.2 体積を保つ $\mathcal{A}$-同値

$G=SL(p,\mathbb{R})$ とする. $\mathcal{A}[SL(p,\mathbb{R})]$ は $\mathcal{A}$ の幾何学的部分群ではない.

Dormitrz と Rieger[11] により, $\mathcal{A}[SL(p,\mathbb{R})]$-同値であるめの必要十分条件は $\mathcal{A}_{\Omega_p}$-同値であることであることが知られている.

定理 4.11. [11] $f,g\colon(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ は $\mathcal{A}$ 安定であるとする. このとき, f と g が $\mathcal{A}$ 同値であるための必要十分条件は, これらが $\mathcal{A}_{\Omega_p}$ 同値であることである.

4.3 シンプレクティック $\mathcal{A}$-同値

$G=Sp(2q,\mathbb{R})$ とする. $\mathcal{A}[Sp(2q,\mathbb{R})]$ の理論は石川, Janeczko, Domitrz らによる研究に対応する.

4.4 bi-$\mathcal{A}$-同値

$p=p_1+p_2$ とし, $G=GL(p_1,\mathbb{R})\oplus GL(p_2,\mathbb{R})$ とする. このとき, $f=(f_1,f_2),g=(g_1,g_2)\colon(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^{p_1}\times\mathbb{R}^{p_2},0)$ が $\mathcal{A}[GL(p_1,\mathbb{R})\oplus GL(p_2,\mathbb{R})]$-同値であるための必要十分条件はこれらが bi-$\mathcal{A}$-同値であることである. ここで, $f=(f_1,f_2),g=(g_1,g_2)$ が bi-$\mathcal{A}$-同値であるとは, C^∞ 級微分同相写像芽 ϕ,ψ_1,ψ_2 で図式

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{R}^{p_1},0) & \xleftarrow{f_1} & (\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{R}^{p_2},0)\\
\psi_1\downarrow & & \phi\downarrow & & \downarrow\psi_2\\
(\mathbb{R}^{p_1},0) & \xleftarrow{g_1} & (\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{g_2} & (\mathbb{R}^{p_2},0)
\end{array} \tag{4.3}$$

を満たすものが存在するときである．bi-$\mathcal{A}$-同値に関しては, [7] による研究がある．

$G = \{I_{p_2}\} \oplus GL(p_1, \mathbb{R})$ とする．$f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2) \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0)$ が $\mathcal{A}[\{I_{p_1}\} \oplus GL(p_2, \mathbb{R})]$-同値であるための必要十分条件はこれらが 狭義 bi-$\mathcal{A}$-同値であることである．ここで, (4.3) において $\psi_1 = 1_{\mathbb{R}^{p_1}}$ であるとき, $f = (f_1, f_2)$ と $g = (g_1, g_2)$ は**狭義 bi-$\mathcal{A}$-同値**であるという．狭義 bi-$\mathcal{A}$-同値に関しては, [23] による研究がある．

$n = p_2 = 2,\ p_1 = 1$ の場合は Dufour [12] の研究である．ここで, $p_1 = 1$ の場合のみ意味があることに注意する．

bi-$\mathcal{A}$-同値を一般化して, $p = 1 + 1 + \cdots + 1$ とし,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \right\}$$

のもと, 写像芽

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{R}, 0) \\
 & (\mathbb{R}, 0) \\
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[ruu] \arrow[ru] \arrow[r] \arrow[rd] \arrow[rdd] & \vdots \\
 & (\mathbb{R}, 0) \\
 & (\mathbb{R}, 0)
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

の分類理論を作ることができる．

4.5 写像芽の射影

$p = p_1 + p_2$ とし,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid A \in GL(p_1, \mathbb{R}), C \in GL(p_2, \mathbb{R}) \right\} = GL(p_1, \mathbb{R}) \widetilde{\oplus} GL(p_2, \mathbb{R})$$

とする. $f = (f_1, f_2)\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0)$ を

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0) \arrow[d, "\pi"] \\ & (\mathbb{R}^{p_2}, 0) \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

と理解する. $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0)$ に対して, $f = (f_1, f_2)$ と $g = (g_1, g_2)$ が $\mathcal{A}[GL(p_1, \mathbb{R}) \widetilde{\oplus} GL(p_2, \mathbb{R})]$-同値であるとは C^∞ 級微分同相写像芽

$$\phi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0), \Psi\colon (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0) \to (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0), \psi\colon (\mathbb{R}^{p_2}, 0) \to (\mathbb{R}^{p_2}, 0)$$

で図式

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0) & \xrightarrow{\pi_2} & (\mathbb{R}^{p_2}, 0) \\ \phi \downarrow & & \Psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0) & \xrightarrow{\pi_2} & (\mathbb{R}^{p_2}, 0) \end{array} \tag{4.6}$$

を可換にするものが存在するときである. これはファイバー束 $\pi : E(M) \to M$ に対する写像図式

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & E(M) \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd} \tag{4.7}$$

の局所理論である.

4.6 ラグランジアン同値

いま,

$$
\begin{aligned}
L(2n) &= GL(n,\mathbb{R})\widetilde{\oplus}GL(n,\mathbb{R}) \cap Sp(2n,\mathbb{R}) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in Sp(2n,\mathbb{R}) \mid A, C \in GL(n,\mathbb{R}) \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} ({}^tC)^{-1} & {}^tC^{-1}D \\ 0 & C \end{pmatrix} \in Sp(2n,\mathbb{R}) \mid A, C \in GL(n,\mathbb{R}) \right\} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

とすると,

$$
\ell(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} -{}^tX & Y \\ 0 & X \end{pmatrix} \mid X \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tY = Y \right\} \qquad (4.9)
$$

である. したがって,

$$
\zeta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(p,q)\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i(p,q)\frac{\partial}{\partial q_i}, \quad \eta_i(p,q),\ \xi(p,q) \in \mathcal{E}_{2n}
$$

に対して,

$$
J_\zeta = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \eta_i}{\partial p_j}(p,q) & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial q_j}(p,q) \\ \dfrac{\partial \xi_i}{\partial p_j}(p,q) & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial q_j}(p,q) \end{pmatrix} \in \ell(2n)
$$

であるための必要十分条件は

$$
\frac{\partial_i \eta_i}{\partial p_j}(p,q) = -\frac{\partial \xi_j}{\partial q_j}(p,q), \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}(p,q) = 0, \quad \frac{\partial_i \eta_i}{\partial q_j}(p,q) = -\frac{\partial \eta_j}{\partial q_i}(p,q) \qquad (4.10)
$$

が成立することである. このとき, $\xi_i(p,q) = \xi(q)$ であり, $\dfrac{\partial \eta_i}{\partial p_j}(p,q) = -\dfrac{\partial \xi_j}{\partial q_i}(q)$ より $\eta_i(p,q) = -\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \xi_j}{\partial q_i}(p,q)$ である. よって,

$$
\zeta(p,q) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i}(q) p_j + \mu_i(q) \right)
$$

とかける. すなわち, $\zeta(p,q)$ は

$$H\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}, \quad H(p,q) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(q) p_j + \mu(q)$$

というハミルトン関数から決まるハミルトンベクトル場である.

写像芽 $f, g\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0)$ に対して, f と g が $\mathcal{A}[L(2n)]$-同値であるとは, C^∞ 級微分同相写像芽 $\phi\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, $\psi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ とシンプレクティック微分同相写像芽 $\Psi\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0)$ で図式

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\pi_2} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & & {\scriptstyle \Psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\pi_2} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array} \tag{4.11}$$

を可換にするものが存在するときである. $m = n$ のとき f と g がラグランジュはめ込みの場合, f と g が $\mathcal{A}[L(2n)]$-同値であるための必要十分条件は f と g がラグランジュ同値であることとなる.

注意 4.12. (1) $L(2n) = GL(n,\mathbb{R}) \widetilde{\oplus} GL(n,\mathbb{R}) \cap Sp(2n,\mathbb{R})$ だったが,

$$GL(p_1,\mathbb{R}) \widetilde{\oplus} GL(p_2,\mathbb{R}) \cap SO(p) = SO(p_1) \oplus SO(p_2)$$

が成り立ち, この場合, 2 つの写像芽の組

$$f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}, 0)$$

が $\mathcal{A}_0[SO(p_1) \oplus SO(p_2)]$-同値であるための必要十分条件はこれらの f と g が $\mathcal{R} \times (SO(p_1) \oplus SO(p_2))$-同値であることである.

(2) $GL(n,\mathbb{R}) \oplus GL(n,\mathbb{R}) \cap SL(p_1 + p_2, \mathbb{R})$ ではどうか？

5 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$-同値の無限小構造

第 1.2 節で述べたように,

$$\begin{aligned} GL(p,\mathbb{R}) =& \{A \in M_p(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}, \\ GL(\mathbb{R}^p) =& \{L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p) \mid L \text{ は線形同型 }\} \end{aligned}$$

であり，本稿ではこの二者は区別している．$GL(\mathbb{R}^p)$ は $\mathbb{R}^p$ の基底をとって $GL(p,\mathbb{R})$ との同型対応を作り，この対応によって局所座標をとる．

G をリー群とし，

$$\rho : G \to GL(\mathbb{R}^p)$$

を C^∞ 表現とする．G が線形リー群 $G \subset GL(p,\mathbb{R})$ のときは恒等表現 $\iota : G \hookrightarrow GL(p,\mathbb{R})$ を表現とみなす．Mather の $\mathcal{K}$ 同値とは以下の同値関係である．

定義 5.1. $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ 写像芽とする．f と g が $\mathcal{K}$-**同値**であるとは C^∞-写像 $A : (\mathbb{R}^n, 0) \to GL(p,\mathbb{R})$ と微分同相写像 $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ が存在して任意の $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して

$$A(x)^t f(x) = g \circ \phi(x) \tag{5.1}$$

が成り立つときをいう．

この同値関係は以下のように解釈できる．$f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して $s_f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ を

$$s_f(x) = (x, f(x))$$

として，s_f を自明なベクトル束

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

の切断であると考えると，$\mathcal{K}$-同値はベクトル束の切断としての自然な同値関係と思える．これから定義する $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値のアイデアはこのベクトル束の構造群を小さくしようというものである．

定義 5.2. $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ 写像芽とする．f と g が $\mathcal{K}[(\rho, G)]$-**同値**であるとは微分同相写像 $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ と C^∞-写像 $a : (\mathbb{R}^n, 0) \to G$ が存在して任意の $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して

$$g \circ \phi(x) = \rho(a(x))(f(x)) \tag{5.2}$$

が成り立つときをいう．ϕ が恒等写像 $1_{\mathbb{R}^n}$ の場合は $\mathcal{C}[(\rho, G)]$-**同値**という．

$H^\rho_a : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を

$$H^\rho_a(x, y) = \rho(a(x))(y) \tag{5.3}$$

とすると (5.2) の右辺は $H^\rho_a(x, f(x))$ とかける. $\mathrm{Diff}(n+p)$ の部分集合を

$$\mathcal{K}[(\rho, G)](n, p) = \mathcal{K}[(\rho, G)] = \{(\phi, H^\rho_a) \,|\, \phi \in \mathrm{Diff}(n),\ a : (\mathbb{R}^n, 0) \to G : C^\infty\} \tag{5.4}$$

$$\cup$$

$$\mathcal{C}[(\rho, G)](n, p) = \mathcal{C}[(\rho, G)] = \{(1_{\mathbb{R}^n}, H^\rho_a) \,|\, a : (\mathbb{R}^n, 0) \to G : C^\infty\} \tag{5.5}$$

と定めると,

$$\mathcal{K}[(\rho, G)](n, p) = \mathrm{Diff}(n) \rtimes \mathcal{C}[(\rho, G)](n, p) \tag{5.6}$$

が成り立つ. 半直積の形式的接空間は直和なので,

$$T_{1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}}\mathcal{K}[(\rho, G)](n, p) = \mathfrak{M}_n\theta(n) \oplus T_{1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}}\mathcal{C}[(\rho, G)](n, p) \tag{5.7}$$

となる. $\mathfrak{M}_n\theta(n)$ の構造は先に調べたので, $T_{1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}}\mathcal{C}[(\rho, G)](n, p)$ の構造を調べる. リー群 G の単位元 e に対して $T_eG = \mathfrak{g}$ とかくと,

$$d\rho_e : \mathfrak{g} \to L(\mathbb{R}^p)$$

であり,

$$L(\mathbb{R}^p) = T_{1_{\mathbb{R}^p}}GL(\mathbb{R}^p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$$

である. ここで $\mathcal{E}_n$-加群 $\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) = \{\zeta \,|\, \zeta : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathfrak{g}, C^\infty\}$$

と定め,

$$L(\mathcal{E}_n) = L(\mathbb{R}^p)(\mathcal{E}_n)$$

と書くと,

$$\mathfrak{g} = L(\mathbb{R}^p) = \{\xi \,|\, \xi : (\mathbb{R}^n, 0) \to L(\mathbb{R}^p), C^\infty\}$$

だから, $\xi \in L(\mathcal{E}_n)$ であり, 任意の $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して $\xi(x) \in L(\mathbb{R}^p)$ である. ここで, ξ に対して写像 $\overline{\xi} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to \mathbb{R}^p$ を

$$\overline{\xi}(x, y) = \xi(x)(y)$$

と定義し,

$$\theta(\mathcal{C}) = \{\overline{\xi} \,|\, \xi \in L(\mathbb{R}^p)(\mathcal{E}_n)\}$$

とおくと, $\theta(\mathcal{C}) \subset \theta(\pi_p) = \mathcal{E}(n+p,p)$ であり, $\mathcal{E}(n+p,p)$ の部分 $\mathcal{E}_n$-加群である. ここで, 写像 $(d\rho_e)_* : \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \to L(\mathcal{E}_n)$ を

$$(d\rho_e)_*(\xi) = d\rho_e \circ \xi$$

と定義するとこれは $\mathcal{E}_n$-準同型となる. また, $\overline{\xi}$ の定義から, $\zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)$ に対して写像

$$\overline{d\rho_e \circ \zeta} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) \tag{5.8}$$

は

$$\overline{d\rho_e \circ \zeta}(x,y) = (d\rho_e \circ \zeta(x))(y) \tag{5.9}$$

である. これまでの考察から, 包含関係

$$\theta(\pi_p) \supset \theta(\mathcal{C}) \supset \theta(\mathcal{C}[(\rho,G)]) = \{\overline{d\rho_e \circ \zeta} \,|\, \zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)\} \tag{5.10}$$

が成り立ち, 次が成り立つ.

事実 5.3.

$$T_{1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}}\mathcal{C}[(\rho,G)](n,p) = \theta(\mathcal{C}[(\rho,G)]), \tag{5.11}$$

$$\theta(\mathcal{C}) = \theta([\iota, GL(\mathbb{R}^n)]). \tag{5.12}$$

この事実から, $\mathcal{C}[(\rho,G)]$ の接空間を

$$T\mathcal{C}[(\rho,G)] := \theta(\mathcal{C}[(\rho,G)])$$

とかく. ここで, Mather の $\mathcal{C}$ 同値の接空間 $T\mathcal{C}$ が $T\mathcal{C} = \theta(\mathcal{C})$ なので, その記号に対応させている.

このように書いても構造はまだわからないので, 以下で基底をとって構造を実際に調べる. $\Sigma = \{v_1, \ldots, v_p\}$ を $\mathbb{R}^p$ の基底とすると

$$r_\Sigma(f) = r_\Sigma(f) = (f_{ij}),$$

(ただし (f_{ij}) は f の Σ に関する表現行列) なる同型 $r_\Sigma : GL(\mathbb{R}^p) \simeq GL(p, \mathbb{R})$ がとれる. $\rho_\Sigma : G \to GL(p, \mathbb{R})$ を $\rho_\Sigma = r_\Sigma \circ \rho$ とおくと $\rho_\Sigma(a) = (a_{ij}^\rho)$ は $\rho(a)$ の Σ に関する表現行列となる. このとき

$$(d\rho_\Sigma)_e = (dr_\Sigma)_{1_{\mathbb{R}^p}} \circ d\rho_e : \mathfrak{g} \to M_p(\mathbb{R})$$

となる. ここで $M_p(\mathbb{R})$ は実 $p \times p$ 行列の集合である. さて $dr_\Sigma : T\mathcal{C} \to M_p(\mathbb{R})$ は $\bar{\xi} \in T\mathcal{C}$ に対して

$$dr_\Sigma(\bar{\xi}) = (dr_\Sigma)_{1_{\mathbb{R}^p}} \circ \xi : (\mathbb{R}^n, 0) \to M_p(\mathbb{R})$$

とみなせるので,

$$(dr_\Sigma)_*(T\mathcal{C}[(\rho, G)]) = (d\rho_\Sigma)_*(\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)) = \{(\zeta_{ij}) \,|\, (\zeta_{ij}) = (d\rho_\Sigma) \circ \zeta \ (\zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))\}$$

が成り立つ. ここで, $\{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ を実ベクトル空間としての $\mathfrak{g}$ の基底とすると

$$(d\rho_\Sigma)_e(\delta_k) = (\lambda_{ij}^k) \in M_p(\mathbb{R})$$

となる.

命題 5.4.

$$(dr_\Sigma)_*\big(T\mathcal{C}[(\rho, G)]\big) = \big\langle (\lambda_{ij}^1), \ldots, (\lambda_{ij}^r) \big\rangle_{\mathcal{E}_n} \tag{5.13}$$

が成り立つ. 特に $(dr_\Sigma)_*\big(T\mathcal{C}[(\rho, G)]\big)$ は有限生成 $\mathcal{E}_n$-加群である.

さて, $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して前述の $s_f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ ただし $s_f(x) = (x, f(x))$ を用いて $T\mathcal{C}(f)$ を書くと,

$$T\mathcal{C}(f) = \{\bar{\xi} \circ s_f \,|\, \xi \in M_p(\mathcal{E}_n)\} \subset \theta(s_f) \cong \mathcal{E}(n, n+p)$$

であるが,

$$\bar{\xi} \circ s_f(x) = \bar{\xi}(x, f(x)) = \xi(x)(f(x)) \in \mathbb{R}^p$$

なので,

$$\bar{\xi} \circ s_f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$$

となる. ゆえに $T\mathcal{C}(f) \subset \theta(f) \cong \mathcal{E}(n,p)$ が成り立つ. また,

$$\begin{aligned} T\mathcal{C}[(\rho,G)](f) = \{\overline{d\rho_e \circ \zeta} \circ s_f \,|\, \zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)\} \\ \subset T\mathcal{C}(f) \subset \theta(f) \end{aligned} \tag{5.14}$$

もわかる.

また同様に具体的に調べるために $\mathbb{R}^p$ の基底 $\Sigma = \{v_1, \ldots, v_p\}$ をとる. この Σ に対して

$$d(r_{\Sigma,f}) : T\mathcal{C}(f) \to M_p(\mathcal{E}_n)(f) = \{(\zeta_{ij})^t f \,|\, (\zeta_{ij}) \in M_p(\mathcal{E}_n)\} \tag{5.15}$$

は $\overline{\xi} \circ s_f \in T\mathcal{C}(f)$ に対して

$$d(r_{\Sigma,f})(\overline{\xi} \circ s_f) : x \mapsto (dr_\Sigma)_{1_{\mathbb{R}^p}} \circ \xi(x)(f(x)) = (\xi_{ij})^t f \tag{5.16}$$

となっている. ただし, $(dr_\Sigma)_{1_{\mathbb{R}^p}} \circ \xi = (\xi_{ij})$ である.

事実 5.5. $d(r_{\Sigma,f})$ は $\mathcal{E}_n$-加群としての同型写像である.

ここで, 表現行列を通して $d(r_{\Sigma,f})$ を $T\mathcal{C}[(\rho,G)](f)$ に制限したものは

$$d(r_{\Sigma,f})(T\mathcal{C}[(\rho,G)](f)) = (d\rho_\Sigma)e*(\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))(f) \tag{5.17}$$

$$= \{(\zeta_{ij})^t f \,|\, (\zeta_{ij}) \in (d\rho_{\Sigma\, e})_*(\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))\} \tag{5.18}$$

をみたす. このことから, 先程とった基底 $\Sigma = \{v_1, \ldots, v_p\}$ を使うと (dr_Σ) に f をつけても同じように生成元が書けることがわかる. つまり, 次が成り立つ.

命題 5.6.

$$(dr_{\Sigma,f})\big(T\mathcal{C}[(\rho,G)](f)\big) = \big\langle (\lambda^1_{ij})^t f, \ldots, (\lambda^r_{ij})^t f \big\rangle_{\mathcal{E}_n} \tag{5.19}$$

が成り立つ. 特に $T\mathcal{C}[(\rho,G)](f)$ は有限生成 $\mathcal{E}_n$-加群である.

注意 5.7. 特に, ρ が $\iota : G \hookrightarrow GL(p,\mathbb{R})$ の場合,

$$r_\Sigma = 1_{GL(p,\mathbb{R})}, \quad \iota_\Sigma = \iota$$

なので,

$$T\mathcal{C}[G] = \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_r \rangle_{\mathcal{E}_n}.$$

が成り立つ. ただし, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は $\mathfrak{g}$ の基底である. また,

$$T\mathcal{C}[G](f) = \langle \lambda_1{}^t f_1, \ldots, \lambda_r{}^t f \rangle_{\mathcal{E}_n}.$$

となる.

また,

$$\mathcal{K}[(\rho, G)] = \mathrm{Diff}(n) \rtimes \mathcal{C}[(\rho, G)](n, p) \tag{5.20}$$

なので,

$$T\mathcal{K}[(\rho, G)] = T\,\mathrm{Diff}(n) \oplus T\mathcal{C}[(\rho, G)](n, p) \tag{5.21}$$

$$T\mathcal{K}[(\rho, G)](f) = tf(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + T\mathcal{C}[(\rho, G)](f) \tag{5.22}$$

$$T\mathcal{K}[(\rho, G)]_e(f) = tf(\theta(n)) + T\mathcal{C}[(\rho, G)](f) \tag{5.23}$$

となる.

定理 5.8. $T\mathcal{K}[(\rho, G)]_e(f)$ は有限生成 $\mathcal{E}_n$-加群である.

つまり, $T\mathcal{K}[(\rho, G)]_e(f)$ は Damon の意味での幾何的部分群 ([8, Section 8]) となっている.

注意 5.9. $G = \{e\}$ ならば $\mathcal{K}[(\rho, G)]$-同値と $\mathcal{R}$-同値は必要十分条件である. ゆえに

$$\mathcal{R} \subset \cdots \subset \mathcal{K}[(\rho, G)] \subset \cdots \subset \mathcal{K} \tag{5.24}$$

となる. ここで, $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ はいつでも幾何的部分群となり, $\mathcal{R}$ で成り立ち, さらに $\mathcal{K}$ で成り立つことは原則的に $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ でも成り立つ.

6 表現の同値, 群の縮小・拡大

6.1 表現の同値

G をリー群, $\rho_i\colon G \to GL(\mathbb{R}^p)$ $(i = 1, 2)$ を C^∞ 表現とする. このとき, ρ_1 と ρ_2 が同値であるとは, $\mathbb{R}$-同型 $\psi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ が存在し, 任意の $a \in G$ に対して,

$\psi \circ \rho_1(a) \circ \psi^{-1} = \rho_2(a)$ が成り立つときをいう．二つの表現 ρ_1, ρ_2 が同値であるとき, $\rho_1 \sim \rho_2$ と表す．また, $\rho_1 \sim \rho_2$ であるとき, $\mathcal{E}_n$-同型 ψ_* が,

$$\psi_* \colon \theta(f) \ni \eta \mapsto \psi_*(\eta) = \psi \circ \eta \in \theta(\psi \circ f)$$

として誘導される．この写像 ψ_* により,

$$\psi_*(tf(\xi)) = \psi_*(df \circ \xi) = d\psi \circ df \circ \xi = d(\psi \circ f) \circ \xi = t(\psi \circ f)(\xi)$$

が成り立つので, 関係式

$$\psi_*(tf(\theta(n))) = t(\psi \circ f)(\theta(n)) \tag{6.1}$$

が言える．この関係 (6.1) を用いると, 次が分かる．

定理 6.1. リー群 G の二つの C^∞ 表現 $\rho_i \colon G \to GL(\mathbb{R}^p)$ $(i = 1, 2)$ が同値であるとき,

$$\psi_* \left(T\mathcal{C}[(\rho_1, G)](f) \right) = T\mathcal{C}[(\rho_2, G)](\psi \circ f) \tag{6.2}$$

が成り立つ．さらに,

$$\psi_* \left(T\mathcal{C}[(\rho_1, G)]_e(f) \right) = T\mathcal{C}[(\rho_2, G)]_e(\psi \circ f) \tag{6.3}$$

も成り立つ．

この定理の系として次が言える．

系 6.2. リー群 G の二つの C^∞ 表現 $\rho_i \colon G \to GL(\mathbb{R}^p)$ $(i = 1, 2)$ が同値であるとき, f が $\mathcal{K}[(\rho_1, G)]$-同値に関して k-確定であるための必要十分条件は, $\psi \circ f$ が $\mathcal{K}[(\rho_2, G)]$-同値に関して k-確定であることである．

系 6.3. リー群 G の二つの C^∞ 表現 $\rho_i \colon G \to GL(\mathbb{R}^p)$ $(i = 1, 2)$ が同値であるとき, F が f の $\mathcal{K}[(\rho_1, G)]$-普遍開折であるための必要十分条件は, $\psi \circ F$ が $\psi \circ f$ の $\mathcal{K}[(\rho_2, G)]$-普遍開折であることである．

6.2　表現の分解

G をリー群, $\rho\colon G \to GL(\mathbb{R}^p)$ を G の表現とする．また, $V \subset \mathbb{R}^p$ を $\mathbb{R}$-部分ベクトル空間とする．このとき, V が **ρ-不変**であるとは, 任意の $a \in G$ に対して, $\rho(a)(V) \subset V$ となるときをいう．さらに, V を不変部分空間という．(不変部分空間などの詳細については, [22, 36] などを参照せよ．)

以下では, $\rho(G)$ は $GL(\mathbb{R}^p)$ のリー部分群であり, 表現 ρ は**可約**, 即ち, (非自明な) ρ-不変部分ベクトル空間 $V_1 \subset \mathbb{R}^p$ が存在することを仮定する．このとき, $\mathbb{R}^p$ の部分ベクトル空間 V_2 で, $\mathbb{R}^p = V_1 \oplus V_2$, $\dim_{\mathbb{R}} V_i = p_i$ $(p = p_1 + p_2)$ を満たすものが存在する．G から $GL(V_1)$ への表現 $\rho_1\colon G \to GL(V_1)$ を, 任意の $a \in G$ に対して, $\rho_1(a) = \rho(a)\,|_{V_1} : V_1 \to V_1$ に対応させるものとして定める．いま, V_1 は ρ-不変であることに注意する．また, $\pi_2\colon \mathbb{R}^p = V_1 \oplus V_2 \to V_2$ を標準射影とし, G から $GL(V_2)$ への表現 $\rho_2\colon G \to GL(V_2)$ を, 各 $a \in G$ に対して, $\rho_2(a) = \pi_2 \circ \rho(a)\,|_{V_2} : V_2 \to V_2$ によって定める．

さて, $\Sigma_1 = \{v_1, \ldots, v_{p_1}\}$ を V_1 の一つの基底, $\Sigma_2 = \{v_{p_1+1}, \ldots, v_p\}$ $(p = p_1 + p_2)$ を V_2 の一つの基底とする．このとき, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ とすると, これは, $\mathbb{R}^p = V_1 \oplus V_2$ の基底を与えてる．写像 $r_\Sigma\colon GL(\mathbb{R}^p) \to GL(p, \mathbb{R})$ をこの基底に関する同型写像とする．この同型写像 r_Σ を用いて, 線形表現 $\rho_\Sigma\colon G \to GL(p, \mathbb{R})$ を, 任意の $a \in G$ に対して

$$\rho_\Sigma(a) = r_\Sigma \circ \rho(a) = \begin{pmatrix} \rho_1(a) & \rho_{12}(a) \\ 0 & \rho_2(a) \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

として定める．もし, V_2 も ρ-不変であるとすると, $\rho(a)(V_2) \subset V_2$ が任意の $a \in G$ に対して成り立つので, $\rho_2(a) = \rho(a)|_{V_2}$ が成立する．つまり, $\rho_{12}(a) = 0$ である．したがって, (6.4) で定義された線形表現 ρ_Σ は, 任意の $a \in G$ に対して,

$$\rho_\Sigma(a) = \begin{pmatrix} \rho_1(a) & 0 \\ 0 & \rho_2(a) \end{pmatrix} \quad (\rho_i(a) \in GL(p_i, \mathbb{R})),\ i = 1, 2)$$

と表される．即ち, $\rho_\Sigma = \rho_1 \oplus \rho_2\colon G \to GL(p_1, \mathbb{R}) \oplus GL(p_2, \mathbb{R})$ に分解される．

$f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) = (V_1 \oplus V_2, 0)$ を写像芽, $\pi_1\colon \mathbb{R}^p = V_1 \oplus V_2 \to V_1$ を標準射影, $\psi\colon (\mathbb{R}^p, 0) \to (V_1 \oplus V_2, 0)$ を $\psi(\boldsymbol{e}_i) = v_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ で定まる $\mathbb{R}$-同型とする．ただし, $\boldsymbol{e}_i$ は, $\mathbb{R}^p$ の標準基底を表し, $v_i \in \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ である．このと

き, 二つの写像 f_i $(i=1,2)$ を

$$f_i = \pi_i \circ \psi \circ f \colon (\mathbb{R}^p, 0) \to (V_i, 0)$$

で定める.

命題 6.4. $\rho_\Sigma = \rho_1 \oplus \rho_2$ という仮定の下で, 写像 $f, g \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{K}[(\rho, G)]$-同値であるための必要十分条件は, $\psi \circ f = (f_1, f_2)$ と $\psi \circ g = (g_1, g_2)$ が $\mathcal{K}[(\rho_1 \oplus \rho_2, G)]$-同値となることである.

6.3 群の縮小・拡大

$\rho \colon G \to GL(\mathbb{R}^p)$ をリー群 G の表現とする. H を G の部分群として, $\rho_H = \rho|_H \colon H \to GL(\mathbb{R}^p)$ と定める. 以下では, $\mathcal{K}[(\rho_H, H)]$-同値と $\mathcal{K}[(\rho, G)]$-同値を比較する.

写像芽 $f \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して, モジュライ空間 $\mathcal{M}(\mathcal{K}[(\rho, G : H)].f)$ を

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}[(\rho, G : H)].f) = \frac{T\mathcal{K}[\rho, G](f)}{T\mathcal{K}[\rho_H, H](f)} \tag{6.5}$$

と定める. これは, $\mathcal{E}_n$-加群になることに注意する. $\mathcal{M}(\mathcal{K}[(\rho, G : H)].f)$ を (ρ, ρ_H) **に関する無限小相対モジュライ空間**という. さらに

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}[(\rho, G : H)].f) = \frac{T\mathcal{C}[(\rho, G)](f)}{T\mathcal{C}[(\rho_H, H)](f)} \tag{6.6}$$

と定義する.

注意 6.5. 次の関係

$$T\mathcal{C} = M_p(\mathcal{E}_n), \quad T\mathcal{C}[G] = \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n), \quad T\mathcal{C}[H] = \mathfrak{h}(\mathcal{E}_n) \tag{6.7}$$

が成立する. また $\rho : \mathcal{M}[(\mathcal{C}[(\rho, G : H)].f] \to \mathcal{M}(\mathcal{K}[\rho, G : H].f)$ を $\rho\big(\tilde{\zeta}\big) = \hat{\zeta}$ とすると,

$$0 \to \ker \rho \to \mathcal{M}(\mathcal{C}[\rho, G : H].f) \to \mathcal{M}(\mathcal{K}[\rho, G : H].f) \to 0 \tag{6.8}$$

は, $\mathbb{R}$-ベクトル空間としての完全系列となる. ここで,

$$\ker \rho = \frac{T\mathcal{C}[\rho, G](f) \cap T\mathcal{K}[(\rho_H, H)](f)}{T\mathcal{C}[(\rho_H, H)](f)} \cong \frac{T\mathcal{C}[(\rho, G)](f) \cap tf(\mathfrak{M}_n\theta(n))}{T\mathcal{C}[(\rho_H, H)](f) \cap tf(\mathfrak{M}_n\theta(n))} \tag{6.9}$$

である.

いま, $C(n,p) = \{(1_{\mathbb{R}^n}, H_A) \mid A\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to GL(p, \mathbb{R})\}$ とし, その部分集合 $\mathcal{C}_f$ を $\mathcal{C}_f = \{(1_{\mathbb{R}^n}, H_A) \mid H_A \circ s_f = f\}$ と定める. ここで, $H_A \circ s_f(x) = A(x) \cdot {}^t f(x)$ に注意する. このとき, $\mathcal{C}_f$ の接束は,

$$T\mathcal{C}_f = \{\xi \in M_p(\mathcal{E}_n) \mid \xi(x) \cdot {}^t f(x) = 0,\ \forall x \in (\mathbb{R}^n, 0)\} \tag{6.10}$$

で与えられる. また, 写像 $\omega_{\mathcal{C}}^{\pi}(f)\colon T\mathcal{C} \to T\mathcal{C}(f) = \{\xi \cdot {}^t f \mid \xi \in GL(p, \mathcal{E}_n)\}$ を任意の $\xi \in T\mathcal{C}$ に対して, $\omega_{\mathcal{C}}^{\pi}(f)(\xi) = \xi \cdot {}^t f$ で定める. これは, 準同型写像になることに注意する. このことから, $\ker(\omega_{\mathcal{C}}^{\pi}(f)) = T\mathcal{C}_f$ が成立する. したがって, 同型対応

$$\frac{T\mathcal{C}}{T\mathcal{C}_f} \cong T\mathcal{C}(f) \tag{6.11}$$

が言える. さらに, $M_p(\mathcal{E}_n)_f = \{(\xi_{ij}) \in M_p(\mathcal{E}_n) \mid (\xi_{ij}) \cdot {}^t f = 0\}$ とすると, $T\mathcal{C} = M_p(\mathcal{E}_n)$ と上の同型対応から,

$$T\mathcal{C}(f) \cong \frac{M_p(\mathcal{E}_n)}{M_p(\mathcal{E}_n)_f} \tag{6.12}$$

を得る. いま, $T\mathcal{C}[G]_f = T\mathcal{C}[G] \cap T\mathcal{C}_f = \{\xi \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \mid \xi \cdot {}^t f = 0\} (= \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)_f)$ なので,

$$T\mathcal{C}[G](f) \cong \frac{T\mathcal{C}[G] + T\mathcal{C}_f}{T\mathcal{C}_f} \tag{6.13}$$

となる. したがって, $\mathcal{E}_n$-同型

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}[G:H].f) \cong \frac{T\mathcal{C}[G]}{T\mathcal{C}[H] + T\mathcal{C}[G]_f} \cong \frac{\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)}{\mathfrak{h}(\mathcal{E}_n) + \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)_f} \tag{6.14}$$

を得る.

一方, $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を標準射影とし, $\Pi_{(\mathfrak{g}.\mathfrak{h})}\colon \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \ni \xi \mapsto \pi \circ \xi \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})(\mathcal{E}_n)$ と定めると, $\ker\left(\Pi_{(\mathfrak{g}.\mathfrak{h})}\right) = \{\xi \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \mid \pi \circ \xi = 0\} = \{\xi \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \mid \xi \in \mathfrak{h}(\mathcal{E}_n)\} = \mathfrak{h}(\mathcal{E}_n) = T\mathcal{C}[H]$ が成立する (注意 6.5 参照).

以上をまとめると, 次が言える.

定理 6.6. 次の同型対応が成立する：

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}[G:H].f) \cong \frac{\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)}{\mathfrak{h}(\mathcal{E}_n)+\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)_f} \cong \frac{(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})(\mathcal{E}_n)}{\Pi_{(\mathfrak{g}.\mathfrak{h})}(\mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)_f)}. \tag{6.15}$$

例 6.7. $p = 1+q$, $G \subset GL(q,\mathbb{R})$ を線形リー部分群とする．また, $\{1\} \oplus G \subset GL(p,\mathbb{R})$ とする．いま, このリー環は $\{0\} \oplus \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ は G のリー環) になる．このとき, 写像芽 $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q, 0)$ が $\mathcal{K}[\{1\} \oplus G]$-同値であるとは, $f_1 = g \circ \phi$ かつ $A(x) \cdot {}^t f_2(x) = g_2 \circ \phi(x)$ を満たす微分同相写像芽 $\phi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ と $A\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to G$ が存在することである．いま, $\{1\} \oplus G \subset \mathbb{R}^* \oplus G \subset GL(p,\mathbb{R})$ であることに注意する．ただし, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であり, $\mathbb{R}^* \oplus G$ のリー環は, $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}$ である．もし, f と g を $\mathcal{C}[\mathbb{R}^* \oplus G]$-同値で分類をすると (できれば), 関数 f_1 の前に関数モジュライが現れる．

さて, 無限小相対モジュライ空間 $\mathcal{M}(\mathcal{C}[\mathbb{R}^* \oplus G : \{1\} \oplus G].f)$ を考えよう．上の定理 6.6 の同型対応 (6.15) から,

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}[\mathbb{R}^* \oplus G : \{1\} \oplus G].f) = \frac{\mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)}{\{0\} \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) + (\mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))_f} \cong \frac{\mathcal{E}_n}{\Pi((\mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))_f)}$$

である．ここで, $(\mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))_f = (\mathcal{E}_n)_{f_1} \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)_{f_2} = \{\lambda \in \mathcal{E}_n \mid \lambda \cdot f_1 = 0\} \oplus \{\xi \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \mid \xi \cdot {}^t f_2 = 0\}$ ($f = (f_1, f_2)\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q, 0)$) であり,

$$\Pi\colon \mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \to \frac{\mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)}{\{0\} \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)} = \mathcal{E}_n$$

であるので, $\Pi((\mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))_f) = (\mathcal{E}_n)_{f_1}$. よって, $\mathcal{E}_n / \Pi((\mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n))_f) = \mathcal{E}_n/(\mathcal{E}_n)_{f_1}$ であり, $\mathcal{E}_n/(\mathcal{E}_n)_{f_1} \cong \mathcal{E}_n(f_1) = \{\lambda \cdot f_1 \mid \lambda \in \mathcal{E}_n\} = T\mathcal{C}(f_1) = \langle f_1 \rangle_{\mathcal{E}_n}$ なので, $\mathcal{M}(\mathcal{C}[\mathbb{R}^* \oplus G : \{1\} \oplus G].f) \cong \langle f_1 \rangle_{\mathcal{E}_n}$ が成り立つ．

7 $\mathcal{K}[G]$-同値の例

$G \subset GL(p,\mathbb{K})$ をリー部分群とする．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

7.1 零点集合の旗

G を

$$G = T_\ell^*(p) := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \lambda_{p1} & \dots & \lambda_{pp} \end{pmatrix} \in GL(p, \mathbb{K}) \,\middle|\, \lambda_{11} \cdots \lambda_{pp} \neq 0 \right\} \subset GL(p, \mathbb{K}) \tag{7.1}$$

とする. $f = (f_1, \cdots, f_p) : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して,

$$V_j(f) := \bigcap_{i=1}^{j} f_i^{-1}(0) \quad (j = 1, \cdots, p) \tag{7.2}$$

とし, 零点集合の旗 $FV(f)$ を

$$FV(f) := (V_1(f), V_2(f), \cdots, V_p(f)) \tag{7.3}$$

とおく.

定義 7.1. $f, g\colon (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して, f と g が $\mathcal{K}[T_\ell^*(p)]$-同値の時, f と g は旗 $\mathcal{K}$-同値であるといい, $FV(f) \sim FV(g)$ と書く.

このとき, 次が成り立つ.

$FV(f) \sim FV(g)$ の時, $\phi \in \mathrm{Diff}(n)$ が存在して, $j = 1, \cdots, p$ に対して, $\phi(V_j(f)) = \phi(V_j(g))$ である. $T_\ell^*(p)$ に対応するリー環は

$$\mathfrak{t}_\ell(p) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \mu_{p1} & \dots & \mu_{pp} \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K}) \,\middle|\, \mu_{ij} \in \mathbb{K} \right\} \subset M_p(\mathbb{K}) \tag{7.4}$$

である. また,

$$\theta(\mathcal{C}[T_\ell^*(p)]) = \mathfrak{t}_\ell(p)(\mathcal{E}_n), \tag{7.5}$$

$$T\mathcal{C}[T_\ell^*(p)](f) = \{\zeta.{}^t f \mid \zeta \in \mathfrak{t}_\ell(p)(\mathcal{E}_n)\} \tag{7.6}$$

である. ここで,

$$(\zeta.{}^t f)(x) = \begin{pmatrix} \zeta_{11}(x) & & & 0 \\ \zeta_{21}(x) & \zeta_{22}(x) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \zeta_{p1}(x) & \dots & \dots & \zeta_{pp}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{11}(x) f_1(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} \zeta_{pi} f_i(x) \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

また,

$$T\mathcal{K}[T_\ell^*(p)]_e(f) = tf(\theta(n)) + T\mathcal{C}[T_\ell^*(p)](f) \tag{7.8}$$

である.

7.2 零点集合の配置

7.2.1 超曲面配置

G を

$$\begin{aligned} G = D^*(p) &:= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \in GL(p, \mathbb{K}) \,\middle|\, \lambda_1 \cdots \lambda_p \neq 0 \right\} \\ &\subset GL(p, \mathbb{K}) \end{aligned} \tag{7.9}$$

とする. $f = (f_1, \cdots, f_p) : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して, $V(f_i) := f_i^{-1}(0)$ $(i = 1, \cdots, p)$ とし, 超曲面配置を

$$AV(f) := (V(f_1), \cdots, V(f_p)) \tag{7.10}$$

とおく.

定義 7.2. $f, g \colon (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ に対して, f と g が $\mathcal{K}[D^*(p)]$-同値の時, f と g は配置 $\mathcal{K}$-同値であるといい, $AV(f) \sim AV(g)$ と書く.

このとき, 次が成り立つ.

$AV(f) \sim AV(g)$ の時, $\phi \in \mathrm{Diff}(n)$ が存在して, $j = 1, \cdots, p$ に対して, $\phi(V(f_j)) = \phi(V(g_j))$ である. $D^*(p)$ に対応するリー環は

$$\mathfrak{d}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_p \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K}) \middle| \mu_i \in \mathbb{K} \right\} \subset M_p(\mathbb{K}) \tag{7.11}$$

である. また,

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{C}[D^*(p)]) &= \mathfrak{d}(p)(\mathcal{E}_n), & (7.12) \\ T\mathcal{C}[D^*(p)](f) &= \{\zeta.{}^t f \mid \zeta \in \mathfrak{d}(p)(\mathcal{E}_n)\}, & (7.13) \\ T\mathcal{K}[D^*(p)]_e(f) &= tf(\theta(n)) + T\mathcal{C}[D^*(p)](f) & (7.14) \end{aligned}$$

である.

7.2.2 Bi-$\mathcal{K}$-同値 ([7, 28, 32] 参照)

p を $p = p_1 + p_2$ とおいて G を

$$\begin{aligned} G &= GL(p_1, \mathbb{K}) \oplus GL(p_2, \mathbb{K}) & (7.15) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in GL(p, \mathbb{K}) \middle| A \in GL(p_1, \mathbb{K}), B \in GL(p_2, \mathbb{K}) \right\} \subset GL(p, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

とする. 以下では $f = (f_1, f_2) : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^{p_1} \times \mathbb{K}^{p_2}, 0)$ と書くことにする.

定義 7.3. $f, g\colon (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^{p_1} \times \mathbb{K}^{p_2}, 0)$ に対して, f と g が $\mathcal{K}[GL(p_1, \mathbb{K}) \oplus GL(p_2, \mathbb{K})]$-同値の時, f と g は *bi-$\mathcal{K}$-***同値**であるという.

このとき, 次が成り立つ.

$GL(p_1, \mathbb{K}) \oplus GL(p_2, \mathbb{K})$ に対応するリー環は

$$M_{p_1}(\mathbb{K}) \oplus M_{p_2}(\mathbb{K}) \tag{7.16}$$

である. また,

$$\begin{aligned} &T\mathcal{K}[GL(p_1, \mathbb{K}) \oplus GL(p_2, \mathbb{K})]_e(f) \\ &= tf(\theta(n)) + \{\zeta \cdot f | \zeta = \zeta_1 \oplus \zeta_2 \in M_{p_1}(\mathcal{E}_n) \oplus M_{p_2}(\mathcal{E}_n)\} \qquad (7.17) \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\zeta \cdot f(x) = \begin{pmatrix} \zeta_1(x)^t f_1(x) \\ \zeta_2(x)^t f_2(x) \end{pmatrix}. \tag{7.18}$$

7.3 零点集合上の関数 ([10, 18])

p を $p = 1 + q$ とおいて G を

$$\begin{aligned} G = \{1\} \oplus GL(q, \mathbb{K}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL(p, \mathbb{K}) \middle| A \in GL(q, \mathbb{K}) \right\} \\ &\subset GL(p, \mathbb{K}) \end{aligned} \tag{7.19}$$

とする. このとき, 次が成り立つ.

$f = (f_1, f_2),\quad g = (g_1, g_2) : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K} \times \mathbb{K}^{p_2}, 0)$ に対して, f と g が $\mathcal{K}[\{1\} \oplus GL(q, \mathbb{K})]$-同値ならば, 微分同相写像 $\phi : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^n, 0)$ が存在して

$$f_1 = g_1 \circ \phi \quad \text{かつ} \quad f_2 \text{ と } g_2 \circ \phi \text{ は } \mathcal{C}\text{-同値} \tag{7.20}$$

である. このとき, $\phi(V(g_2)) = V(f_2)$, つまり, $f_2^{-1}(0) = (g_2 \circ \phi)^{-1}(0)$ となる. また,

$$\begin{aligned} T\mathcal{K}[\{1\} \oplus GL(q, \mathbb{R})]_e(f) &= tf(\theta(n)) + \{\zeta \cdot {}^t f \mid \zeta = 0 \oplus \zeta_2 \in \{0\} \oplus M_q(\mathcal{E}_n)\} \\ &= tf(\theta(n)) + \{0\} \oplus f_2^*(\mathfrak{M}_q)\mathcal{E}(n, q) \end{aligned} \tag{7.21}$$

である.

定義 7.4. $(f, h), (g, h) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q, 0)$ に対して, $\phi \in \mathrm{Diff}(n)$ が存在して,

$$f \circ \phi = g \quad \text{かつ} \quad I(h \circ \phi) = I(h) \tag{7.22}$$

の時, (f, h) と (g, h) は $\mathcal{R}_{I(h)}$-同値であるという. ここで, $I(h) = h^*(\mathfrak{M}_q)\mathcal{E}_n$ である.

命題 7.5 ([18])**.** 次は同値である.

(1) (f, h) と (g, h) は $\mathcal{R}_{I(h)}$-同値.

(2) (f, h) と (g, h) は $\mathcal{K}[\{1\} \oplus GL(q, \mathbb{R})]$-同値.

7.4 $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値

第 8 節で与えられるトポロジカル絶縁体や分子伝播への応用例は, $K[SO(p)]$-同値に言い換えられる. また, 一般に $G = \mathrm{Spin}(p)$ の場合, 定義からある表現 $\rho : G \longrightarrow SO(p)$ が存在するので, $K[(\rho, G)]$-同値は $K[SO(p)]$-同値に言い換えられる. このように, 様々な状況下で $K[SO(p)]$-同値は重要な役割を担うと思われる. ここでは, 神戸大での講義以降に得られた, $K[SO(p)]$-同値に関する分類結果を解説する.

$\mathcal{K}[SO(p)]$ に対応するリー環は

$$\mathfrak{so}(p) = \{X \in M_p(\mathbb{R}) | X + {}^tX = O\} \tag{7.23}$$

である. また,

$$\begin{aligned} T\mathcal{K}[SO(p)]_e(f) &= tf(\theta(n)) + \{\zeta \cdot {}^t f | \zeta \in \mathfrak{so}(p)(\mathcal{E}_n)\} \\ &= tf(\theta(n)) + T\mathcal{C}[SO(p)](f) \end{aligned} \tag{7.24}$$

である. ここで, $M_p(\mathbb{R})$ の標準基底 $\{E_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, p\}$ に対して, $T_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ と定めると, $\{T_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq p\}$ は $\mathfrak{so}(p)$ の基底となり,

$$T\mathcal{C}[SO(p)](f) = \mathfrak{so}(p)(\mathcal{E}_n)(f) = \langle T_{ij}.f \mid 1 \leq i < j \leq p\rangle_{\mathcal{E}_n}$$

が成り立つ. $\mathbb{R}^p$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_i \mid i = 1, \ldots, p\}$ とすると $f = (f_1, \ldots, f_p)$ に対して, $T_{ij}^t f = f_j\boldsymbol{e}_i - f_i\boldsymbol{e}_j$ なので,

$$T\mathcal{C}[SO(p)](f) = \langle f_j\boldsymbol{e}_i - f_i\boldsymbol{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq p\rangle_{\mathcal{E}_n}$$

となる. 従って,

$$T\mathcal{K}[SO(p)]_e(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}, f_j\boldsymbol{e}_i - f_i\boldsymbol{e}_j \;\middle|\; 1 \leq i < j \leq p \right\rangle_{\mathcal{E}_n}$$

となる.

写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して, その微分写像 $df(0) : T_0\mathbb{R}^n \longrightarrow T_0\mathbb{R}^p$ を考えると, $\mathrm{rank}\, df(0)$ は $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値の基本的な不変量となる. 直接計算から $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値ならば, $\mathrm{rank}\, df(0) = \mathrm{rank}\, dg(0)$ となることがわかる. この時以下の命題が成り立つ.

命題 7.6. $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $\operatorname{rank} df(0) = q$ であるような写像芽とする．この時，写像芽 $\widetilde{g} : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{p-q}, 0)$ で $i = q+1, \ldots, n$ に対して，$\partial\widetilde{g}/\partial x_i(0) = 0$ を満たすものが存在して，f は $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値となる．ここで，

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_q, \widetilde{g}(x_1, \ldots, x_n))$$

である．

この時, 以下の $\mathcal{K}[SO(p)]$-余次元に関する評価が得られる.

命題 7.7. $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $\operatorname{rank} df(0) = q$ を満たす写像芽とする．この時,

$$\mathcal{K}[SO(p)]\text{-cod}\,(f) \geq (n-q)(p-q)$$

が成り立つ.

有限確定な写像芽に関しては, 完全横断性理論を応用することにより, 以下の定理が成り立つ.

定理 7.8. $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $\mathcal{K}[SO(p)]$-有限確定で $\operatorname{rank} df(0) = q$ を満たす写像芽とする．この時, $\operatorname{rank} d\widetilde{g}(0) = 0$ を満たす写像芽 $\widetilde{g} : (\mathbb{R}^{n-q}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{p-q}, 0)$ が存在して，f は $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値となる．ただし,

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_q, \widetilde{g}(x_{q+1}, \ldots, x_n))$$

である.

7.4.1　$n \leq p$ の場合

最初に, はめ込み芽の場合は以下の命題が成り立つ.

命題 7.9. $n \leq p$ の時, $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $\operatorname{rank} df(0) = n$ を満たす写像芽とする．この時，f は $g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値である．さらに, $\mathcal{K}[SO(p)]\text{-cod}\,(f) = p - n$ となる.

次に $n=1$ の場合は, 関数芽 $f:(\mathbb{R},0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ について, f が A_k 型であるとは $f'(0)=f''(0)=\cdots f^{(k)}(0)=0$ かつ $f^{(k+1)}(0)\neq 0$ を満たすこととして, $A_{\geq k}$ 型であるとは $f'(0)=f''(0)=\cdots f^{(k)}(0)=0$ を満たすこととする. この時, 以下の補題が成り立つ.

補題 7.10. $f:(\mathbb{R},0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ を A_k 型の関数芽とする. この時, 微分同相芽 $\phi:(\mathbb{R},0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ が存在して $f\circ\phi(x)=\pm x^k$ となる. ただし, $+$ と $-$ は $f^{(k+1)}(0)$ の符号が正か負かによって定まる.

$f(x)=(f_1(x),\dots,f_p(x))$ と与えられる写像芽 $f:(\mathbb{R},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ を考える. この時, f が A_k 型であるとはある f_i $(i=1,\dots p)$ が A_k 型で他の関数芽 f_j は $A_{\geq k}$ 型であることと定義する. この時, 以下の命題が成り立つ.

定理 7.11. $f:(\mathbb{R},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ を A_k 型の写像芽とすると, f は $(x^{k+1},0,\dots,0)$ に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値である. さらに $\mathcal{K}[SO(p)]-\mathrm{cod}(f)=p(k+1)-1$ となる.

$\mathrm{rank}\,df(0)=n-1$ を満たす写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ は, 命題7.6 により,

$$g(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},\widetilde{g}(x_1,\dots,x_n)),$$

に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値である. ただし,

$$\widetilde{g}(x_1,\dots,x_n)=(g_n(x_1,\dots,x_n),\dots,g_p(x_1,\dots,x_n))$$

は $\partial\widetilde{g}/\partial x_n(0)=0$ を満たす写像芽である. この時, 写像芽 $g_0:(\mathbb{R},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^{p-n+1},0)$ を $g_0(x_n)=\widetilde{g}(0,\dots,0,x_n)$ と定める. g_0 が一変数関数芽として A_k 型の時 g は A_k 型であると言う. $n\leq p$ の時, 写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ が $\mathcal{K}[SO(p)]$ に関して A_k 型であるとは上記の A_k 型写像芽 g に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値であることと定義する. この時, 以下の定理が成り立つ.

定理 7.12. $n\leq p$ として, 写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ が $\mathrm{rank}\,df(0)=n-1$ とする. もし f が $\mathcal{K}[SO(p)]$ に関して A_k 型とすると, f は

$$g(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^{k+1},0,\dots,0)$$

に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値である. さらに, $\mathcal{K}[SO(p)]\text{-}\mathrm{cod}(f)=(k+1)(p-n)+k$ である.

写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ が $\mathcal{K}[SO(p)]$ に関して A 有限型であるとはある負でない整数 k が存在して f が $\mathcal{K}[SO(p)]$ に関して A_k 型であることと定義する. この時, 以下の命題が成り立つ.

命題 7.13. $n\leq p$ として, 写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ が $\operatorname{rank}df(0)=n-1$ とする. この時, f が $\mathcal{K}[SO(p)]$-有限確定であるための必要十分条件は f が $\mathcal{K}[SO(p)]$ に関して A 有限型となることである.

7.4.2 $n\geq p$ の場合

この場合, 最初の結果として以下の命題が成り立つ.

命題 7.14. $\operatorname{rank}df(0)=p$ を満たす写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ は

$$g(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_p)$$

に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値である. さらに, この場合 $\mathcal{K}[SO(p)]$-$\operatorname{cod}(f)=0$ となる.

さらに以下の系が成り立つ.

系 7.15. $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ を $\mathcal{K}[SO(p)]$-$\operatorname{cod}(f)=0$ である写像芽とする. この時, $n\geq p$ であり f は $g(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_p)$ に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値である.

次に $\operatorname{rank}df(0)=p-1$ の場合を考える. 一般に, リー群の表現 $\rho:G\longrightarrow GL(\mathbb{R}^p)$ に対して, 写像芽 f が $\mathcal{K}[(\rho,G)]$ 単純であるとは, f は $\mathcal{K}[(\rho,G)]$ に関して k 確定であり, かつ $j^kf(0)$ の $J^k(n,p)$ における十分小さな近傍が有限個の $\mathcal{K}[(\rho,G)]$ 軌道と交わることと定義する. H が G の部分リー群の時, f が $\mathcal{K}[(\rho|_H,H)]$ 単純ならば, それは $\mathcal{K}[(\rho,G)]$ 単純である. この時, 以下が成り立つ.

定理 7.16. $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ を $n\geq p$ かつ $\operatorname{rank}df(0)=p-1$ を満たす $\mathcal{K}[SO(p)]$ 単純な写像芽とする. この時, $\mathcal{R}$ 単純な関数芽 $f_0\in\mathfrak{M}_{n-p+1}$ が存在して f は $g(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{p-1},f_0(x_p,\dots,x_n))$ に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値である.

さらに, $\mathcal{K}[SO(p)]$ 単純写像芽は以下のように分類される.

定理 7.17. $n\geq p$ とする. この時, $\mathcal{K}[SO(p)]$ 単純写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ は以下のいずれかの写像芽に $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値となる:

型	$f(x_1,\dots,x_n)$	範囲	余次元
正則	$(x_1,\dots,x_p)$		0
A_ℓ	$(x_1,\dots,x_{p-1},x_p^{\ell+1}\pm x_{p+1}^2\pm\cdots\pm x_n^2)$	$\ell\geq 1$	$\ell-1$
$D_\ell^\pm$	$(x_1,\dots,x_{p-1},x_p^2x_{p+1}\pm x_{p+1}^{\ell-1}\pm x_{p+2}^2\pm\cdots\pm x_n^2)$	$\ell\geq 4$	$\ell-1$
E_6	$(x_1,\dots,x_{p-1},x_p^3\pm x_{p+1}^4\pm x_{p+2}^2\pm\cdots\pm x_n^2)$		5
E_7	$(x_1,\dots,x_{p-1},x_p^3+x_px_{p+1}^3\pm x_{p+2}^2\pm\cdots\pm x_n^2)$		6
E_8	$(x_1,\dots,x_{p-1},x_p^3+x_{p+1}^5\pm x_{p+2}^2\pm\cdots\pm x_n^2)$		7

この結果, $p\geq 2$ の場合には, $\mathcal{K}[SO(p)]$ 単純な写像芽は存在しないことがわかる. さらに, 写像芽

$$f:(\mathbb{R}^2,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,0);\ f(x_1,x_2)=\left(x_1x_2,\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)\right)$$

は $\mathcal{K}$ 単純（$\mathcal{K}[GL(2,\mathbb{R})]$ 単純) であることが知られている (cf. [4, pp. 170]) が, $\mathcal{K}[SO(2)]$-cod$(f)=\infty$ となり, $\mathcal{K}$-同値と $\mathcal{K}[SO(2)]$-同値の間には明確な違いがあることがわかる.

7.5 $\mathcal{K}[SO(1,q)]$-同値, $\mathcal{K}[\{1\}\oplus SO(q)]$-同値, $\mathcal{K}[\mathbb{R}^*\oplus SO(q)]$-同値

その他の例として, $\mathcal{K}[SO(1,q)]$-同値, $\mathcal{K}[\{1\}\oplus SO(q)]$-同値, $\mathcal{K}[\mathbb{R}^*\oplus SO(q)]$-同値などがある. ここで, $SO_0(1,q)$ は**固有ローレンツ群**であり,

$$A=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0q} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q0} & a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{pmatrix}\in GL(1+q,\mathbb{R})$$

が $A\in SO_0(1,q)$ であるための条件は ${}^tAI_{1,q}A=I_{1,q},\ a_{00}\geq 0$ を満たす事とする. ただし,

$$I_{1,q}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. この時, 自然に $\{1\} \oplus SO(q) \subset SO(1,q)$ が成り立つ. この時, $SO(p)$ の場合と同様にして,

$$
\begin{aligned}
&T\mathcal{C}[SO_0(1,q)](f) \\
&\qquad = \langle f_\ell \boldsymbol{e}_0 + f_0 \boldsymbol{e}_\ell, f_j \boldsymbol{e}_i - f_i \boldsymbol{e}_j \mid 1 \le \ell \le q,\ 1 \le i < j \le q \rangle_{\mathcal{E}_n}, && (7.25) \\
&T\mathcal{K}[SO_0(1,q)]_e(f) \\
&\qquad = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathcal{E}_n} + T\mathcal{C}[SO_0(1,q)](f) && (7.26)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. さらに,

$$
\begin{aligned}
&T\mathcal{K}[\{1\} \oplus SO(q)]_e(f) \\
&\qquad = tf(\theta(n)) + \{\zeta \cdot f | \zeta = 0 \oplus \zeta_2 \in \{0\} \oplus \mathfrak{so}(q)(\mathcal{E}_n)\}, && (7.27) \\
&T\mathcal{K}[\mathbb{R}^* \oplus SO(q)]_e(f) \\
&\qquad = tf(\theta(n)) + \{\zeta \cdot f | \zeta = \lambda \oplus \zeta_2 \in \mathcal{E}_n \oplus \mathfrak{so}(q)(\mathcal{E}_n)\} && (7.28)
\end{aligned}
$$

である. これらの詳しい解説や応用についてはここでは述べない.

8 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$-同値の例

8.1 一般の行列特異点

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, または $\mathbb{C}$ とする. 行列特異点に関する研究は以下がある.

- Arnol'd (1971) [3]: 正方行列,
- Bruce, Tari (2004) [6]: 正方行列 (上の Arnol'd のものとは異なった同値関係),
- Haslinger (2001) [17]: 歪対称行列,
- Gonyunov, Mond (2005) [15], Pereira (2010) [29]: 一般の $m \times q$ 行列.

一般的には,

$$\begin{aligned} \rho : GL(m,\mathbb{K}) \times GL(q,\mathbb{K}) &\to GL(M_{m\times q}(\mathbb{K})) \\ (A,B) &\mapsto L_{(A,B)} : X \mapsto AXB^{-1} \end{aligned} \tag{8.1}$$

であるが, Arnol'd は

$$\begin{aligned} \rho : GL(m,\mathbb{K}) &\to GL(M_m(\mathbb{K})) \\ A &\mapsto L_{(A,A)} : X \mapsto AXA^{-1} \end{aligned} \tag{8.2}$$

に対する研究，Bruce, Tari は

$$\begin{aligned} \rho : GL(m,\mathbb{K}) &\to GL(M_m(\mathbb{K}))\ (\text{または},\ GL(\mathrm{Sym}(\mathbb{K}))) \\ A &\mapsto {}^tL_A : X \mapsto AX\,{}^tA \end{aligned} \tag{8.3}$$

に対する研究をそれぞれ行った.

定義 8.1. $f, g\colon (\mathbb{K}^n, 0) \to M_{m\times q}(\mathbb{K})$ に対して, $\phi \in \mathrm{Diff}(n)$ と

$$(A,B)\colon GL(m,\mathbb{K}) \times GL(q,\mathbb{K})$$

が存在して, 任意の $x \in \mathbb{K}$ に対して,

$$A(x)f(x)B(x)^{-1} = g \circ \phi(x) \tag{8.4}$$

の時, f と g は$\mathcal{K}[(\rho, GL(m,\mathbb{K}) \times GL(q,\mathbb{K}))]$-**同値**であるという.

Ruas らは, この理論を行列式的特異点 (determinantal singularities) に応用している（例えば [1, 14, 21, 30] 参照）.

定義 8.2. $M^r_{m\times q}$ を

$$M_{m\times q}(\mathbb{K}) \supset M^r_{m\times q} := \{A \in M_{m\times q}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rank}\ A < r\} \quad (r \leq \min(m,q)), \tag{8.5}$$

とおき, $f : (\mathbb{K}^n, 0) \to M_{m\times q}(\mathbb{K})$ に対して,

$$X^r_f := f^{-1}(M^r_{m\times q}) \tag{8.6}$$

を (m,q,r) **型の行列式的特異点** (*determinantial variety of type* (m,q,r)) と呼ぶ.

注意 8.3. type $(1, q, 1)$ は, $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$ に対して,

$$\begin{aligned} M^1_{1\times q} &= \{(y_1, \cdots, y_q) \in M_{1\times q}(\mathbb{K}) \mid y_1 = \cdots y_q = 0\} = \{O\}, \\ X^1_f &= f^{-1}(0) = V(f) \end{aligned}$$

である. type $(m, 1, 1)$ は, $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$ に対して,

$$\begin{aligned} M^1_{m\times 1} &= \{{}^t(y_1, \cdots, y_m) \in M_{m\times 1}(\mathbb{K}) \mid y_1 = \cdots y_m = 0\} = \{O\}, \\ X^1_f &= f^{-1}(0) = V(f) \end{aligned}$$

である.

定義から, 以下が従う.

事実 8.4. $f, g\colon (\mathbb{K}^n, 0) \to M_{m\times q}(\mathbb{K})$ が $\mathcal{K}[(\rho, GL(m, \mathbb{K}) \times GL(q, \mathbb{K}))]$ -同値ならば, $\phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{K}^n)$ が存在して, $\phi(X^r_f) = X^r_g$ である. 特に, $m = 1, q = 1$ ならば $\mathcal{K}$ 同値のことである.

他にも, Math.Sci.net で determinantial singularities や determinantial varieties を検索すると例えば [2, 27, 33] など多数の文献が見つかる.

8.2　対称行列 ([5] 参照)

$$\mathrm{Sym}(m, \mathbb{K}) = \{X \in M_m(\mathbb{K}) | {}^tX = X\} \tag{8.7}$$

とする.

定義 8.5. $f, g\colon (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathrm{Sym}(m, \mathbb{K}), O)$ に対して, $\phi \in \mathrm{Diff}(n)$, $A\colon (\mathbb{K}^n, 0) \to GL(m, \mathbb{K})$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{K}$ に対して,

$$A(x) f(x) {}^tA(x) = g \circ \phi(x) \tag{8.8}$$

の時, f と g は $\mathcal{G}$ -同値であるという.

${}^t(AX^tA) = {}^{tt}A^tX^tA = A^tX^tA = AX^tA$ より,

$$\begin{array}{rcl} {}^t\rho : GL(m,\mathbb{K}) & \to & GL(\mathrm{Sym}(m,\mathbb{K})) \\ A & \mapsto & {}^tL_A : X \mapsto AX\,{}^tA \end{array} \tag{8.9}$$

とすると, 次が成り立つ.

命題 8.6. 次は同値である.

(1) f と g は $\mathcal{G}$-同値.

(2) f と g は $\mathcal{K}[({}^t\rho, GL(m,\mathbb{K})]$-同値.

また,

$$\mathrm{Sym}(m,\mathbb{K}) \supset M^m_{n\times n} := \{X \in \mathrm{Sym}(m,\mathbb{K}) | \det X = 0\} \tag{8.10}$$

とおくと,

$$\det X = 0 \iff \det(AX^tA) = (\det A)^2 \cdot \det X = 0 \tag{8.11}$$

から, $\mathcal{G}$-同値は $M^m_{n\times n}$ と対称性を保存している. 特に,$m = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時は binary differential equation

$$a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0 \tag{8.12}$$

と関連する. これに対して判別式とよばれる

$$\begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R}) \tag{8.13}$$

の行列式

$$a(x,y)c(x,y) - b(x,y)^2 = 0 \tag{8.14}$$

が重要な情報を含んでいる. この研究は判別集合の微分同相類を分類したいという事が動機である.

注意 8.7. 行列式 $\det X$ 自身を保存するにはどうすればよいのかというと,

$$GL(m,\mathbb{K}) \supset SL(m,\mathbb{K})$$

を考えばよい. 実際,

$$\begin{array}{rcl} {}^t\rho_{SL} : SL(m,\mathbb{K}) & \to & GL(\mathrm{Sym}(m,\mathbb{K})) \\ A & \mapsto & {}^tL_A : X \mapsto AX\,{}^tA \end{array} \tag{8.15}$$

は $\det A = 1$ より $\det X$ は保存される. つまり, $\mathcal{K}[({}^t\rho_{SL}, SL(m,\mathbb{K}))]$-同値は $\det X$ の値を保存する.

また, $\mathrm{Sym}(m,\mathbb{K})$ の部分集合 $M^m_{m\times m}$ を

$$M^m_{m\times m} := \{A \in \mathrm{Sym}(m,\mathbb{K}) \mid \mathrm{rank}\ A < m\} = \{A \mid \det A = 0\} \tag{8.16}$$

とすると, $f : (\mathbb{K}^n, 0) \to \mathrm{Sym}(m,\mathbb{K})$ に対して,

$$X^m_f = f^{-1}(M^m_{m\times m}) \tag{8.17}$$

であり, X^m_f は (m,m,m) 型の行列式的特異点集合である. 一方で

$$\mathrm{Sym}(m,\mathbb{K}) \supset M_m(c) := \{A \in \mathrm{Sym}(m,\mathbb{K}) \mid \det A = c\} \tag{8.18}$$

とすると (特異) 葉層構造

$$\{M_m(c)\}_{c\in(-\epsilon,\epsilon)}, \quad f^{-1}\left(\{M_m(c)\}_{c\in(-\epsilon,\epsilon)}\right) \tag{8.19}$$

を考えることができる. 後者を**行列式的特異葉層**と呼ぶ.

注意 8.8. 群をより小さく ($SO(m)$ 等) すれば固有値関数も保存することが可能だろう.

8.3 エルミート行列 (特にトレースが零のもの)

以下では, 記号として

$$\mathrm{Herm}(m) = \{X \in M_m(\mathbb{C}) \mid X^* := \overline{{}^tX} = X\}, \tag{8.20}$$

$$\cup$$

$$\mathrm{Herm}_0(m) = \{X \in \mathrm{Herm}(m) \mid \mathrm{trace}\, X = 0\}, \tag{8.21}$$

$$
\begin{aligned}
U(m) \quad &= \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}\}, && (8.22)\\
\cup \quad & \\
SU(m) \quad &= \{A \in U(m) \mid \det A = 1\}, && (8.23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{u}(m) \quad &= \{X \in M_m(\mathcal{C}) \mid X^* = -X\}, && (8.24)\\
\cup \quad & \\
\mathfrak{su}(m) \quad &= \{X \in \mathfrak{u}(m) \mid \operatorname{trace} X = 0\}, && (8.25)
\end{aligned}
$$

を用い,

$$
Ad : U(m) \to GL(\mathrm{Herm}(m), \mathbb{R}); \quad Ad(A)(X) = AXA^{-1} = AXA^* \tag{8.26}
$$

を随伴表現とする. ここで,

$$
\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Herm}(m) &= m^2,\\
\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Herm}_0(m) &= m^2 - 1,\\
\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(m) &= m^2,\\
\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(m) &= m^2 - 1
\end{aligned}
$$

である.

事実 8.9. 写像

$$
\iota \colon \mathfrak{u}(m) \to \mathrm{Herm}(m); \quad X \mapsto -iX \tag{8.27}
$$

は実ベクトル空間としての同型写像で, かつ, $\iota(\mathfrak{su}(m)) = \mathrm{Herm}_0(m)$ である.

証明. $X \in \mathfrak{u}(m)$ とすると $X^* = -X$ より,

$$
\iota(X)^* = -iX^* = \overline{-i\,{}^tX} = i\,\overline{{}^tX} = iX^* = -iX = \iota(X)
$$

となるので, $\iota(X) \in \mathrm{Herm}(m)$ である.

注意 8.10. $X, Y \in \mathfrak{u}(m)$ に対して $[\cdot, \cdot]$ をリー環における通常のブラケット $[X, Y] := XY - YX$ とすると,

$$
\begin{aligned}
[\iota(X), \iota(Y)] \quad &= \quad [-iX, -iY] = (-iX)(-iY) - (-iY)(-iX) && (8.28)\\
&= \quad -XY + YX = YX - XY = [Y, X]
\end{aligned}
$$

なので, 通常のブラケットを用いた時には ι は, リー環の同型写像ではないが,

$$\iota([X,Y]) = -i[X,Y] = -i(XY - YX) = i[Y,X] = i[\iota(X), \iota(Y)] \tag{8.29}$$

なので, $\mathrm{Herm}(m)$ 上のブラケットを $i[\cdot,\cdot]$ とすれば, リー環の同型写像になる.

$X, Y \in \mathrm{Herm}(m)$ に対して

$$(X,Y) := \mathrm{trace}\, XY = \mathrm{trace}\, XY^* \in \mathbb{R} \tag{8.30}$$

と定めると (X,Y) は正定値内積になる. $A \in U(m)$, $X, Y \in \mathrm{Herm}(m)$ に対して

$$\mathrm{trace}\, A(XY^*)A^* = \mathrm{trace}\, A(XY^*)A^{-1} = \mathrm{trace}\, XY^* \tag{8.31}$$

から,

$$Ad : U(m) \to \mathrm{Isom}^+(\mathrm{Herm}(m)) \subset GL(\mathrm{Herm}(m)) \tag{8.32}$$

が誘導される. 特に, $U(m)$ は連結なので Ad は向きを保つ同型写像である.

定義 8.11. $f, g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathrm{Herm}(m)$ に対して, $\phi \in \mathrm{Diff}(n)$, $A\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to U(m)$ が存在して, 任意の $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して,

$$A(x)f(x)A(x)^* = g \circ \phi(x) \tag{8.33}$$

の時, f と g は $\mathcal{K}[(Ad, U(m))]$-**同値**であるという.

注意 8.12. Nekarda により, 以下の場合の $m = 2$ の単純特異点の分類の研究がされている.

$$\rho : GL(m, \mathbb{C}) \to GL(\mathrm{Herm}(m)), \quad A \mapsto (X \mapsto AXA^*) \tag{8.34}$$

ここで,

$$\det(AXA^*) = (\det A)^2 \det X$$

より, 行列式的特異点は保存される. また, ρ を $SL(m, \mathbb{C})$ に制限すると

$$\det(AXA^*) = \det X$$

より, 行列式的特異葉層は保存される. ただし, この研究の動機は明記されていない.

ここでは, $\mathrm{Herm}_0(m)$ と $SU(m)$ を考える．この時,

$$Ad = Ad|_{SU(m)} : SU(m) \to \mathrm{Isom}^+(\mathrm{Herm}_0(m)) \subset GL(\mathrm{Herm}_0(m)) \tag{8.35}$$

が誘導される．実際, $A \in SU(m), X \in \mathrm{Herm}_0(m)$ に対して $\mathrm{trace}\, AXA^{-1} = \mathrm{trace}\, X = 0$ である．ここで

(1) トポロジカル絶縁体の理論,

(2) Hagedorn [16]: 分子の伝播

を考える ([34] も参照).

$$\hat{H}(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^4}{2}\Delta_x + H(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{8.36}$$

ここで, $H \in \mathrm{Herm}_0(m)$ とする．シュレーディンガー方程式

$$i\varepsilon^2 \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}(\varepsilon)\psi \tag{8.37}$$

のボルン・オッペンハイマー近似は WKB 解析で研究されている.

$H(x)$ の固有値関数が電子のエネルギーと思える．Hagedorn は $H(x)$ に 2 つの固有値関数 $E_{\mathcal{A}}(x) \geq E_{\mathcal{B}}(x)$ が存在する場合に対して, エネルギー交差集合 $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | E_{\mathcal{A}}(x) = E_{\mathcal{B}}(x)\}$ を考え, Γ はジェネリックには部分多様体で, Γ の余次元は $1, 2, 3, 5$ であることを示した．さらに, $H(x)$ を 11 の type に分類し,

(1) 余次元 1 の場合, 7 個で詳しく調べられている.

(2) 余次元 2 の場合, タイプ I ($\mathrm{Sym}_0(2)$).

(3) 余次元 3 の場合, タイプ B とタイプ K.

(4) 余次元 5 の場合, タイプ J.

としている．このエネルギー交差集合の近くにおけるエネルギー交差の様子をくわしく調べることが分子伝播研究の 1 つの目標である.

ここで, $m = 2$, Hagedorn の標準形のタイプ B (またはタイプ K) のときを考える．この時

$$Ad : SU(2) \to \mathrm{Isom}^+(\mathrm{Herm}_0(2)) \subset GL(\mathrm{Herm}_0(2)), \tag{8.38}$$

$p = 3 = \dim \mathrm{Herm}_0(2)$ であり, パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.39}$$

を基底とした時, $H \in \mathrm{Herm}_0(2)$ は

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} h_3 & h_1 - ih_2 \\ h_1 + ih_2 & -h_3 \end{pmatrix} \\ &= h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + h_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.40}$$

と書ける. ここで, $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ である. さらに, $X, Y \in \mathrm{Herm}_0(2)$ に対して,

$$\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2}(X, Y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\,XY^* = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\,XY \tag{8.41}$$

とすると,

$$\Sigma := \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \tag{8.42}$$

は $\mathrm{Herm}_0(2)$ の正規直交基底である. また,

$$r_\Sigma : \mathrm{Isom}^+(\mathrm{Herm}_0(2)) \to SO(3); \quad X \mapsto X \text{ の } \Sigma \text{ に対する表現行列} \tag{8.43}$$

は同型写像となり,

$$\rho_\Sigma := r_\Sigma \circ Ad : SU(2) \to SO(3) \tag{8.44}$$

は二重被覆写像となる (これは $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$ に対応している). 写像

$$\psi_\Sigma : \mathrm{Herm}_0(2) \to \mathbb{R}^3, \quad \psi_\Sigma(H) = (h_1, h_2, h_3)$$

は同型で $\psi_\Sigma(\sigma_i) = \boldsymbol{e}_i$ である. また, $\rho_\Sigma(SU(2)) = SO(3)$ より次が従う.

命題 8.13. $f, g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathrm{Herm}_0(2), O)$ に対して, 次は同値である.

(1) f と g が $\mathcal{K}[(Ad, SU(2))]$-同値.

(2) $\psi_\Sigma \circ f$ と $\psi_\Sigma \circ g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ が $\mathcal{K}[SO(3)]$-同値.

従って, 第 7.4 節の $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値による分類結果が応用できる. くわしい分類結果は [35] を参照.

また，$m=4$, すなわち Hagedorn の標準形のタイプ J のとき, [16] によると,

$$H = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{h_1 I_2} & h_2+ih_3 & h_4+ih_5 \\ & & -h_4+ih_5 & h_2-ih_3 \\ \hline h_2-ih_3 & -h_4-ih_5 & \multicolumn{2}{c}{-h_1 I_2} \\ h_4-ih_5 & h_2+ih_3 & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} h_1 I_2 & H_{12} \\ \hline H_{12}^* & -h_1 I_2 \end{array}\right) \in \mathrm{Herm}_0(4) \tag{8.45}$$

と表され,

$$H_J(4) := \left\{ H \in \mathrm{Herm}_0(4) \;\middle|\; H = \left(\begin{array}{c|c} h_1 I_2 & H_{12} \\ \hline H_{12}^* & -h_1 I_2 \end{array}\right) \right\} \tag{8.46}$$

とおくと, $H_J(4)$ は 5 次元の部分空間であるが, 随伴表現

$$Ad : SU(4) \to \mathrm{Isom}^+(\mathrm{Herm}_0(4)) \tag{8.47}$$

に対して $H_J(4)$ は不変集合ではない. したがって, $SU(4)$ の部分リー群で, $H_J(4)$ を不変集合にするものを考えなければならない.

$$SU(4) \supset SU(2) \times SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \in SU(4) \middle| A_{ii} \in SU(2) \right\} \tag{8.48}$$

とすると

$$Ad = Ad|_{SU(2)\times SU(2)} : SU(2) \times SU(2) \to \mathrm{Isom}^+(H_J(4)) \tag{8.49}$$

が定義できる. 実際, $(A_{11}, A_{22}) \in SU(2) \times SU(2)$ に対して,

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} aI & H_{12} \\ \hline H_{12}^* & -aI \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^* & O \\ \hline O & A_{22}^* \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} aI & A_{11} H_{12} A_{22}^* \\ \hline A_{22} H_{12}^* A_{11}^* & -aI \end{array}\right) \tag{8.50}$$

が成り立つ．さらに, $X, Y \in H_J(4)$ に対して,

$$\langle X, Y\rangle := \frac{1}{4}(X, Y) = \frac{1}{4}\operatorname{trace} XY^* = \frac{1}{4}\operatorname{trace} XY \tag{8.51}$$

として,

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & -I_2 \end{pmatrix},\quad \delta_2 = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ I_2 & O \end{pmatrix},\quad \delta_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & i & 0 \\ & & 0 & -i \\ \hline -i & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ 0 & i & & \end{array}\right), \tag{8.52}$$

$$\delta_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ 1 & 0 & & \end{array}\right),\quad \delta_5 = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & 0 & i \\ & & i & 0 \\ \hline 0 & -i & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ i & 0 & & \end{array}\right) \tag{8.53}$$

とすると,

$$\Sigma := \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\} \tag{8.54}$$

は $H_J(4)$ の正規直交基底である．$\psi_\Sigma\colon H_J(4) \to \mathbb{R}^5, \psi_\Sigma(H) = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ は同型であり,

$$r_\Sigma : \mathrm{Isom}^+(H_J(4)) \to SO(5)(\supset \{1\} \oplus SO(4)) \tag{8.55}$$

を

$$X \mapsto X \text{ の } \Sigma \text{ に対する表現行列} \tag{8.56}$$

で定義すると, これも同型となる．この時,

$$\rho_\Sigma := r_\Sigma \circ Ad : SU(2) \times SU(2) \to \{1\} \oplus SO(4) \tag{8.57}$$

は二重被覆写像となる．この事実は $\mathrm{Spin}(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ に対応している．このとき, 次も成り立つ．

命題 8.14. $f, g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to H_J(4)$ に対して, 次が同値である．

(1) f と g が $\mathcal{K}[(Ad, SU(2) \times SU(2))]$-同値.

(2) $\psi_\Sigma \circ f$ と $\psi_\Sigma \circ g : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^5$ が $\mathcal{K}[\{1\} \oplus SO(4)]$-同値.

注意 8.15. $\mathcal{K}[\{1\} \oplus SO(4)]$-同値という同値関係は強すぎることがわかり, $\psi_\Sigma \circ f$ と $\psi_\Sigma \circ g$ が $\mathcal{K}[SO(5)]$-同値であることの方が意味があるように思われる. 実際, $f(x)$ を

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$f_1(x)I_2$}} & f_2(x)+if_3(x) & f_4(x)+if_5(x) \\ & & -f_4(x)+if_5(x) & f_2(x)-if_3(x) \\ \hline f_2(x)-if_3(x) & -f_4(x)-if_5(x) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$-f_1(x)I_2$}} \\ f_4(x)-if_5(x) & f_2(x)+if_3(x) & & \end{array}\right)$$

とすると, 注意 8.16 より固有値関数 (エネルギー関数) は

$$E_\pm(x) = \pm\sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2 + f_4(x)^2 + f_5(x)^2} \tag{8.58}$$

となる. これを不変にする同値ということであれば $\mathcal{K}[SO(5)]$-同値で十分である.

注意 8.16.

$$X = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$x_1 I_2$}} & x_2+ix_3 & x_4+ix_5 \\ & & -x_4+ix_5 & x_2-ix_3 \\ \hline x_2-ix_3 & -x_4-ix_5 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$-x_1 I_2$}} \\ x_4-ix_5 & x_2+ix_3 & & \end{array}\right) \tag{8.59}$$

の固有方程式と固有値を直接計算すると,

$$
|X-\lambda I| = \begin{vmatrix} x_1-\lambda & 0 & x_2+ix_3 & x_4+ix_5 \\ 0 & x_1-\lambda & -x_4+ix_5 & x_2-ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_4-ix_5 & -x_1-\lambda & 0 \\ x_4-ix_5 & x_2+ix_3 & 0 & -x_1-\lambda \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
= \ & (x_1-\lambda)\left((x_1-\lambda)(x_1+\lambda)^2+(x_1+\lambda)(x_2^2+x_3^2)+(x_1+\lambda)(x_4^2+x_5^2)\right) \\
& +(x_2+ix_3)\Big((x_2-ix_3)(x_2^2+x_3^2)+(x_2-ix_3)(x_4^2+x_5^2) \\
& \qquad\qquad -(x_2-ix_3)(x_1^2-\lambda^2)\Big) \\
& -(x_4+ix_5)\Big(-(x_4-ix_5)(x_1^2-\lambda^2)-(x_4-ix_5)(x_2^2+x_3^2) \\
& \qquad\qquad -(x_4-ix_5)(x_4^2+x_5^2)\Big) \\
= \ & (x_1^2-\lambda^2)\left(x_1^2-\lambda^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right) \\
& +(x_2^2+x_3^2)\left(x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1^2-\lambda^2\right) \\
& -(x_4^2+x_5^2)\left(x_1^2-\lambda^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right) \\
= \ & \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-\lambda^2\right)^2
\end{aligned} \tag{8.60}
$$

より,

$$
|X-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2} \tag{8.61}
$$

が得られる.

$SU(4) \supset SU(4)_J$ が存在して,

$$
Ad_J = Ad|_{SU(4)_J}
$$

とおくと, $H_J(4)$ は $(Ad_J, SU(4)_J)$-不変となることがわかる. よって, 次が成り立つ.

命題 8.17. $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to H_J(4)$ に対して, 次は同値である.

(1) f と g が $\mathcal{K}[(Ad_J, SU(4)_J)]$-同値.

(2) $\psi_\Sigma \circ f$ と $\psi_\Sigma \circ g : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^5$ が $\mathcal{K}[SO(5)]$-同値.

この事実より, $\mathcal{K}[SO(5)]$-同値による分類でもエネルギー交差の分類を保障していることがわかる. この場合も, 第 7.4 節の $\mathcal{K}[SO(p)]$-同値による分類結果を応用することができる.

参考文献

[1] I. Ahmed and M. A. S. Ruas, *Determinacy of determinantal varieties*, Manuscripta math. **159**, 269–278, (2019).

[2] D. A. H. Ament, J. J. Nuño-Bellesteros B. Oréfice-Okamoto and J. N. Tomazella, *The Euler obstruction of a function on a determinantal variety and on a curve*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **47** (3), 955–970, (2016). .

[3] V. I. Arnol'd, *On matrices depending on parameters*, Uspechi. Math. Nauk **26** (1971).

[4] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Volume* 1*. Classification of critical points, caustics and wave fronts*, Monographs in Math., **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[5] J. W. Bruce, *On families of symmetric matrices*, Moscow Math. J. **3**, 335–360, (2003).

[6] J. W. Bruce and F. Tari, *On families of square matrices*, Proc. London Math. Soc. **89**, 738–762, (2004).

[7] J. C. F. Costa,H. A. Pedroso and M. J. Saia, *A note on equivalence relations of pair of germs*, Theory of singularities of smooth mappings and around it, 17–39, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B55**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2016.

[8] J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of* $\mathcal{A}$ *and* $\mathcal{K}$, Mem. Amer. Math. Soc. **50** (1984), no. 306.

[9] J. Damon, *Topological triviality and versality for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$*, Mem. Amer. Math. Soc. 75 (1988), no. 389.

[10] A. Dimca, *Function germs on isolated hypersurface singularities*, Compositio Math. **53**, 245–268, (1984).

[11] W. Domitrz and J. H. Rieger, *Volume preserving subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$ and singularities in unimodular geometry*, Math. Ann. **345** (2009), no. 4, 783–817.

[12] J. P. Dufour, *Familles de courbes planes différentiables* (French) Topology 22 (1983), no. 4, 449–474.

[13] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Existence and uniqueness for Legendre curves*, J. Geom. **104** (2013), no. 2, 297–307.

[14] T. Gaffney, N. G. Grulha and M. A. S. Ruas, *The local Euler obstruction and topology of the stabilization of associated determinantal varieties*, Math. Z., **291**, 905–930, (2019).

[15] V. Goryunov and D. Mond, *Tjurina and Milnor numbers of matrix singularities*, J. Lond. Math. Soc. (2) **72** (1), 205–224, (2005).

[16] G. A. Hagedorn, *Molecular propagation through electron energy level crossings*, Mem. Amer. Math. Soc. **111**, 130pp (1994).

[17] G. J. Haslinger, *Families of skew-symmetric matrices*, University of Liverpool Thesis, 2001.

[18] S. Izumiya and S. Matsuoka, *Notes on smooth function germs on varieties*, Proc. Amer. Math. Soc., **97**, 146–150, (1986).

[19] S. Izumiya, M. Takahashi and H. Teramoto, *Geometric equivalence among smooth map germs*, preprint, arXiv:1908.08232, Methods and Applications of Analysis, 掲載決定.

[20] S. Izumiya, M. Takahashi and H. Teramoto, *Geometric equivalence among smooth section germs of vector bundles with respect to structure groups*, 執筆中.

[21] D. Kerner, H. M. Pedersen and M.A.S. Ruas, *Lipschitz normal embeddings in the space of matrices*, Math. Z., **290**, 485–507, (2019).

[22] 小林 俊行, 大島 利雄, リー群と表現論, 岩波書店, 2005.

[23] S. Mancini, M. A. S. Ruas and M. A. Teixeira, On divergent diagrams of finite codimension. Port. Math. (N.S.) **59** (2002), no. 2, 179–194.

[24] L. Martins and K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges. Canad. J. Math. **68** (2016), no. 2, 445–462.

[25] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined mapgerms,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** 1968, 279–308.

[26] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings. IV. Classification of stable germs by R-algebras*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **37** 1969, 223–248.

[27] J. J. Nuño-Bellesteros B. Oréfice-Okamoto and J. N. Tomazella, *The vanishing Euler characteristic of an isolated determinantal singularity* , Israel. J. Math. **197** (1), 475–495, (2013).

[28] H. A. Pedroso, *Bi-equivalênsia de contato*, Master Thesis, ICMC-USP 1980.

[29] M. Pereira, *Variedades Determinantais e Singularidades de Matrizes*, Doctoral thesis, ICMC-USP, 2010, `www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-22062010-133339/en.php`.

[30] M. S. Pereira and M. A. S. Ruas, *Codimension two determinantal varieties with isolated singularities*, Math. Scand. **115** 161–172, (2014).

[31] K. Saji, Normal form of the swallowtail and its applications. Internat. J. Math. **29** (2018), no. 7, 1850046, 17 pp.

[32] E. A. da Silva and L. A. Favaro, *Bi-$\mathcal{K}$-euivalence and local $\mathbb{R}$-algebras (Portuguese)*, Rev. Mat. Estatist. **1** 15–20, (1983).

[33] T. F. da Silva, N. G. Grulha and M. S. Pereira, *The bi-Lipschitz equisingularity of essentially isolated determinantal singularities*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **49** 637–645, (2018).

[34] 寺本央, 結晶点群, 時間反転対称性の下でのバンド構造の幾何学的分類–特異点論の観点から–, 第65回トポロジーシンポジウム講演集, 81–89, (2018).

[35] H. Teramoto, K. Kondo, S. Izumiya, M. Toda and T. Komatsuzaki, *Classification of Hamiltonians in neighborhoods of band crossings in terms of the theory of singularities.* J. Math. Phys. **58** (2017), 073502, 39 pp.

[36] 山内 恭彦・杉浦 光夫, 連続群論入門, 培風館, 1966.