

超幾何学校講義録は超幾何関数に関連する最新の研究についての講演記録である。本号“超幾何学校講義録 その3”には下記の講演, および講演後の加筆等を掲載している。本講義録が超幾何関数の研究のさらなる進展に寄与することを願っている¹。

2022 年 1 月 26 日

高山信毅

1. 小池達也 述, 紫垣孝洋 記,
完全 WKB 解析と Borel 総和法.
Reinhard Schäfke, Some references for the present lectures of Tatsuya Koike.
2. 野海正俊 述, 渋川元樹, 宮永愛子 記,
Macdonald 多項式 — アフィン Hecke 環からのアプローチ—
3. 金子譲一 述, 渋川元樹 記,
セルバーグ積分, 超幾何系, 組合せ零点定理
4. 山田泰彦 述, 渋川元樹, 信川喬彦 記,
超幾何と共形場再訪

¹本研究は JSPS 科研費 21K03270 の助成を受けたものです

完全WKB解析と Borel 総和法

小池達也 述

紫垣孝洋 記

2016.9.1-9.2

(9月1日)「完全 WKB 解析と Borel 総和法」というタイトルで話をします。今回説明したいのは、特異摂動の問題です。方程式としては次の形のものを考えます。

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x)\right) \psi = 0.$$

2階の方程式について説明するのは明日になります。微分記号の前に $\hbar$ がかけられていて、 $\hbar$ は小さい正定数だと思っています。Schrödinger 方程式はこの形をしていて、微分の前に小さいパラメータがかけられているような特異摂動の問題を今回は考えます。特異摂動というのは、 $\hbar = 0$ のときには微分の項が消えるので、 $\hbar > 0$ のときとは方程式が大きく異なるという意味です。量子力学の本では WKB 法が必ず出てきて、この形の方程式に対して近似解を構成して量子力学の問題を考えるということを行います。WKB というのは3人の物理学者の名前の頭文字をとってつけられた名称です。近似解を考えるときには解を $\hbar$ で展開しておいて有限個で打ち切るということを行いますが、今回説明する「完全 WKB 解析」の完全 (exact) というのはそういった近似法ではなくすべての項を用いて物事を考えていくという意味です。そのために Borel 総和法を用いるので、まずは Borel 総和法について説明します。

次のような無限級数を考えます。

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hbar^n = a_1 \hbar + a_2 \hbar^2 + \cdots. \quad (0.1)$$

今回は都合により定数項は0としています。Borel 総和法では収束するとは限らない無限級数を扱います。WKB 解は上のような形をしていますの

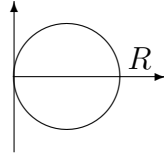
で総和法を用いて考えます．解について一旦座標変数の x を忘れて， $\hbar$ についての展開を考えると上のような級数になります．級数 f が Borel 総和可能であることの定義を与えます．

定義 1 級数 f が **Borel 総和可能**

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ ある $R, L > 0$ と領域 D_R で正則なある関数 $F(\hbar)$ が存在して， $0 < R' < R$ なる任意の R' に対し，

$$|F(\hbar) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \hbar^n| \leq CL^N N! |\hbar|^N (\hbar \in D_{R'})$$

を満たすような $C > 0$ が存在する．ただし $D_R := \{\hbar \in \mathbb{C} \mid \Re(\hbar^{-1}) > R^{-1}\}$ とする．

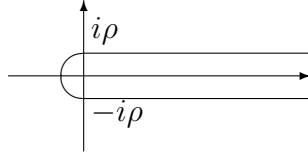


領域 D_R を図示すると，上のような原点で実軸に接する円盤になります． $0 < R' < R$ なる R' について，領域 $D_{R'}$ は D_R の内側に入ります．この定義は $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hbar^n$ が $F(\hbar)$ の漸近展開になっていることを主張しており，いつもと同じように不等式が成り立つ領域を少し内側に縮めています．ただ普通の漸近展開とちがひ，不等式の右辺について係数の N への依存のしかたがはっきり書かれており，領域も普通考えるような実軸近傍の角領域ではなく開き角 π の角領域に相当するものを考えています．形式級数が出てきたときにある関数の漸近展開として意味を与える，というのが Poincaré の時代からよく用いられる考え方で，Borel 総和法も基本的にはその考え方に基づいています，単に漸近展開であればよいというのではなく上で述べたようなより強い条件を課しています．漸近展開を考える領域を広くとって係数の N への依存性を指定しておくことで，定義内に出てくる $F(\hbar)$ は級数 f から一意に定まります．この $F(\hbar)$ のことを級数 f の **Borel 和** といいます．ある関数があってその漸近展開を考えようとしているのではなく，さきに微分方程式の形式解があってそこから解析関数解を考えようとしているのです．したがって級数から一意に $F(\hbar)$ が決まる方が望ましいわけで，実際そうになっています．さらに次の同値関係が成り立ちます．

級数 f が Borel 総和可能

$\iff$ ある $R, \rho > 0$ が存在し，次を満たす．

- (i) f の **Borel 変換** $f_B(y) := \sum_{n=1}^{\infty} (a_n/\Gamma(n))y^{n-1}$ は原点の近傍で収束する.
- (ii) $f_B(y)$ は $\Sigma_\rho := \{y \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(y, \mathbb{R}_+) < \rho\}$ に解析接続される.
- (iii) $0 < \rho' < \rho$ なる任意の ρ' に対して $C > 0$ が存在し, $|f_B(y)| \leq Ce^{|y|/R}$ ($y \in \Sigma_{\rho'}$) を満たす.



領域 Σ_ρ を図示すると, 上のような帯状領域になります. このとき, Borel 和 $F(\hbar)$ は次のような Laplace 積分で表されます.

$$F(\hbar) = \int_0^\infty e^{-y/\hbar} f_B(y) dy.$$

質問: $F(\hbar)$ の正則域 D_R と $f_B(y)$ の正則域 Σ_ρ には対応関係があるので

すか.
関数 $f_B(y)$ の正則域に出てくる ρ は $F(\hbar)$ の正則域 D_R の R から決まりますし, 逆に D_R の R は同値な条件に出てくるほうの R から決まります.

Borel 変換を Laplace 積分するともとの定義に出てきた Borel 和 $F(\hbar)$ が作れますので, 最初の定義では $F(\hbar)$ は単に存在するとしか述べられていませんでしたが, 同値な条件の方を見ると級数 f から $F(\hbar)$ をどう作るかが明示的に述べられているわけです. 今回の話ではもとの定義を使うのではなく, この同値な条件の方を使って考えます. もとの定義に基づいて考えようとする, いろいろと漸近展開で用いる手法を使って考えていくことになるのですが, 同値な条件の方を使って考えると $f_B(y)$ の解析的な性質を調べるということになります. どちらを使うかによって用いる手法が異なり, 僕は後半の方が好きなので後半の手法を用います. 微分方程式を考えるとき, 解を座標変数に関して解析接続させたときにどうなるかを考えて大域的な問題にアプローチしますが, そのときにも前半の定義そのままよりも同値な条件の方が都合が良いという事情もあります.

Stokes 現象を調べるためには Σ_ρ の外の $f_B(y)$ の特異点を調べる必要があります. 最初に書いた 2 階の方程式でこれがどうなっているかについて概要を明日お話ししたいと思っています. いくつか注釈を入れます.

注意 f が収束級数 $\Rightarrow F = f$ (練習 1).

級数 f が収束していない場合に Borel 和 F を考えたいわけだったのですが、収束していれば Borel 変換 $f_B(y)$ を Laplace 積分することでもとの f に戻ります. 収束している f については $f_B(y)$ を考えると全平面で正則になり、指数増大も示されて Laplace 積分を考えるという流れで示されますが、練習問題とします.

定義 1 は角度 0 の方向の Borel 和と呼ばれるものの定義になっています. θ 方向の Borel 和の定義やそれと同値な条件もあります.

定義 2 級数 f が θ 方向に Borel 総和可能

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ ある $R, L > 0$ と領域 D_R で正則なある関数 $F(\hbar)$ が存在して, $0 < R' < R$ なる任意の R' に対し,

$$|F(\hbar) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \hbar^n| \leq CL^N N! |\hbar|^N (\hbar \in D_{R'})$$

を満たすような $C > 0$ が存在する. ただし, $D_R := \{\hbar \in \mathbb{C} \mid \Re((e^{i\theta}\hbar)^{-1}) > R^{-1}\}$ とする. このとき, $F(\hbar)$ は存在すれば一意であり, $F(\hbar)$ を f の θ 方向の Borel 和という.

級数 f が θ 方向に Borel 総和可能

$\Leftrightarrow$ 次を満たすような $R, \rho > 0$ が存在する.

- (i) $f_B(y) := \sum_{n=1}^{\infty} (a_n/\Gamma(n))y^{n-1}$ は原点の近傍で収束する.
- (ii) $f_B(y)$ は $\Sigma_\rho := \{y \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(ye^{i\theta}, \mathbb{R}_+) < \rho\}$ に解析接続される.
- (iii) $0 < \rho' < \rho$ なる任意の ρ' に対して $C > 0$ が存在し, $|f_B(y)| \leq Ce^{|y|/R}$ ($y \in \Sigma_{\rho'}$) を満たす.

このとき, θ 方向の Borel 和 $F(\hbar)$ は次のように書ける.

$$F(\hbar) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} d^{-y/\hbar} f_B(y) dy.$$

領域 D_R や帯状領域 Σ_ρ , Laplace 積分の積分路を角度 θ 回したのが θ 方向の Borel 和の定義になっていて, これは明日の説明で用いるつもりです. 次に, t^α の Borel 変換を定義します.

注意 $\alpha > 0$ のとき, $\mathcal{B}[t^\alpha] = y^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. ただし, $\mathcal{B}$ は Borel 変換を表す.

これは自然数 n に対する t^n の Borel 変換の定義を, n から α に取り替えたものと同じです. 不確定特異点の形式解は $1/2$ 乗で展開されるなど必ずしも整数べきで展開されるとは限らないなどの事情もあり, 整数乗以外にも一般化させておきました. これは今日の説明でも使います.

注意 Borel 総和可能かどうかは x に依存する.

形式級数解に対して Borel 総和法を用いるときには, Borel 総和法の定義で用いた $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hbar^n$ の係数 a_n が x に依存している形になっています. ですので方程式では $\hbar$ がパラメータですが, Borel 総和法では $\hbar$ が主役となり, 座標変数の x が級数の立場ではパラメータとなります. x によって係数 a_n は変わりますので, x によって Borel 総和可能かどうか決まるということに特異摂動の問題を考える上では注意しなければなりません. そのため座標平面 (x 平面) で, 変わり点や Stokes 曲線や Stokes 現象というものがこれから導入されていきます. Stokes 曲線というのはその上で Borel 総和可能でなくなる曲線のことです. 変わり点というのは定義としては Stokes 曲線の端点なのですが, この名称には物理的な意味もあるので一般の方程式に対して用いていい名称なのかはわかりません.

練習 2 $f(\hbar) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hbar^n$ に対し次を示せ.

$$(1) \mathcal{B}\left[\frac{1}{\hbar}(f - a_1 \hbar)\right] = \frac{\partial f_B}{\partial y}. \quad (2) \mathcal{B}[f(\lambda \hbar)] = \frac{1}{\lambda} f_B(\lambda y), \lambda \in \mathbb{C}.$$

(1) は Borel 変換によって $\hbar$ で割る操作が微分に移される, ということを主張しています. ただ最初の項を引き算しておかないといけないのですが. そして (2) は $\hbar$ を定数倍したときに Borel 変換がどう変わるかを表した式です. たとえば θ 方向の Borel 和を考えると, $\lambda = e^{i\theta}$ として (2) を用います.

1 例

きょうは2階の方程式ではなくもう少し簡単な方程式を見て, Stokes 曲線などがどのように出てくるのかを説明します. 最初は次の方程式を考えます.

例 1

$$\hbar \frac{d}{dx} \psi = \psi + \hbar q(x). \quad (1.1)$$

微分の前に小さいパラメータ $\hbar$ がかかっている 1 階の特異摂動型の方程式で、右辺は ψ の 1 次式になっています。これが 2 次式になると Riccati 方程式ですね。また $q(x)$ は有理関数とします。本当はもっと簡単に多項式にしたいのですが、多項式にまで簡単にすると後から分かるように意味がなくなってしまうので有理関数としておきます。 $q(x)$ の前の $\hbar$ はない方が普通かもしれませんが、 ψ のスケール変換によって $\hbar$ がいない場合にも変換できて一般性を失いませんので今回はこの形で考えます。この方程式には次のような形式べき級数解がただ一つ存在します。

$$\psi(x, \hbar) = \hbar \psi_1(x) + \hbar^2 \psi_2(x) + \cdots. \quad (1.2)$$

上の展開を方程式に代入して $\hbar^n (n = 1, 2, \dots)$ の係数を比較すると以下の式が得られます。

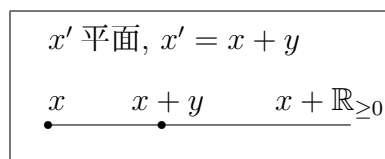
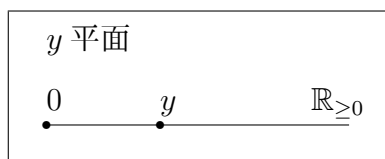
$$O(\hbar) : \psi_1(x) + q(x) = 0,$$

$$O(\hbar^n) : \psi'_{n-1}(x) = \psi_n(x) \quad (n \geq 2).$$

今回は都合により $\hbar$ に関して定数項のないべき級数解しか考えませんので、 ψ_0 をなくして考えているわけです。もし $q(x)$ の前に $\hbar$ がないと、 $\hbar$ について 0 次の項として ψ_0 を考えなければいけなくなるので、 $q(x)$ の前に $\hbar$ をつけています。上の ψ_n についての漸化式は簡単に解け、 $\psi_1(x) = -q(x)$, $\psi_n(x) = -(d^n q / dx^n)(x)$ となるので次を得ます。

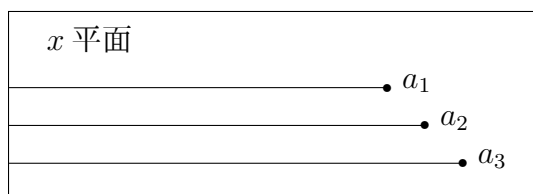
$$\begin{aligned} \psi(x, \hbar) &= \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \frac{d^{n-1} q}{dx^{n-1}}. \\ \Rightarrow \psi_B(x, y) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} q}{dx^{n-1}} = -q(x+y). \end{aligned}$$

Borel 変換の最後の等式は、Taylor 展開の公式から分かります。Borel 変換が具体的な式で書けたので、形式級数解 (1.2) が Borel 総和可能かどうかを調べることができます。Borel 総和可能かどうか調べるときは一旦 x を固定して y について考えるので、 y が正の実軸上を走らせたときに Borel 変換 $\psi_B(x, y) = -q(x+y)$ が特異点をもつかどうか的大事になります。 $q(x)$ の極を $\{a_1, \dots, a_m\}$ とおき、増大度のことを一旦忘れておいて、Borel 変換が y について正の実軸上へ解析接続できるかどうかを調べます。



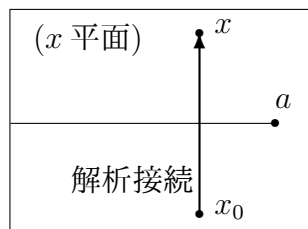
変数 y が実軸上を動くと、上の図のように $x' = x + y$ は $x + \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上を動きます．この半直線 $x + \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上に q の特異点が乗っていないければ、 $\psi_B(x, y) = -q(x + y)$ は $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ で正則になります．ですので、以下を得ます．

$$\begin{aligned} \psi \text{ が } x \text{ で Borel 総和可能} &\Leftrightarrow x + \mathbb{R}_{\geq 0} \not\ni a_j \ (j = 1, 2, \dots, m) \\ &\Leftrightarrow x \notin a_j - \mathbb{R}_{\geq 0} \ (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

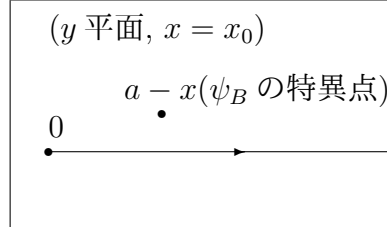


つまり x が上の図の a_n たちを通る半直線を除く領域にあるとき、 $\psi_B(x, y)$ は y について正の実軸上で解析接続されます．ここまで Borel 総和可能性の条件のうちで Borel 変換が解析接続されるという条件の方を見てきました．増大度のことは一旦忘れていたのですが、いまの場合は $\psi_B(x, y) = -q(x + y)$ で q は有理関数ですので、 y が無限遠に近づいても高々べき程度の増大度です．したがって問題なく指数評価が成り立ち、 $x \notin a_j - \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) のときに Borel 総和可能であるといえます． x 平面で考えると半直線 $a_j - \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上で Borel 総和可能でなくなるので、これらの直線が Stokes 曲線となります．このように x 平面で Borel 総和可能でないところが出てきます．

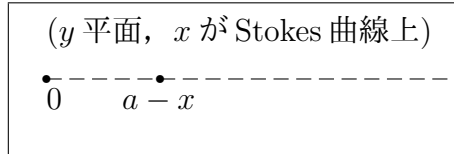
次に、この例で Stokes 現象について説明します． a を $q(x)$ の 1 位の極とします． a を端点とする Stokes 曲線を横切るときの、Borel 和の x についての解析接続を考えます．



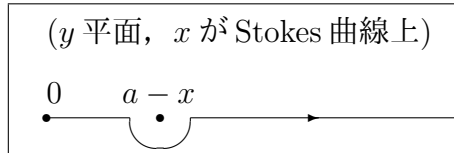
これから x_0 での Borel 和と x での Borel 和を比較していきます．そのため Borel 変換がどうなっているのかを見るため，まずは x が x_0 にいるときの y 平面の図を見ます．



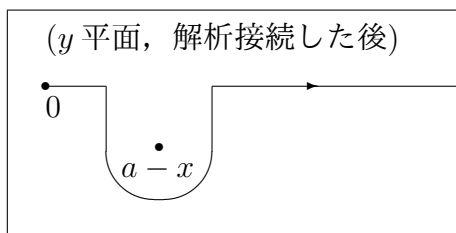
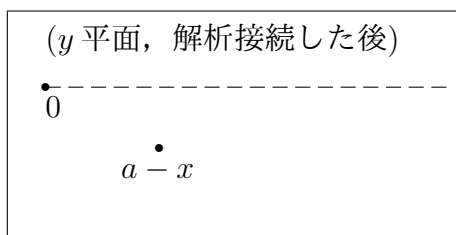
Stokes 曲線上ではないので x_0 で Borel 総和可能であり，したがって y 平面を見ると Borel 和を考えるときの積分路である正の実軸上には ψ_B の特異点はありません．正の実軸以外のところでは， $y = a - x$ のところに $\psi_B(x, y)$ の特異点があります． x 平面で Stokes 曲線の下から上へと Borel 和を解析接続させていくと，Stokes 曲線とぶつかったときに Borel 総和可能でなくなるのでした．このとき y 平面では下図のように特異点 $a - x$ が正の実軸の上側から落ちてきて正の実軸に乗る，ということが起こっています．



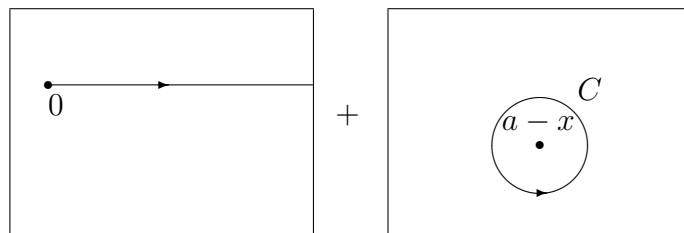
この点線は x_0 での Borel 和の積分路を表しています．解析接続を考えるときには積分路を特異点が横切ってはいけないので，例えば次のように積分路をとらないといけません．



さらに Stokes 曲線を越えて x について解析接続させると， y 平面では次の図のようになるため，同じように特異点を横切らないような積分路をとる必要があります．



よって, x_0 での Borel 和の解析接続と x での Borel 和を比較すると, 積分路が異なっており, 両者は一般には一致しません. 上の積分路は次のように変形できます.



1 番目の積分路は x での Borel 和の積分路で, 2 番目の積分路は $\psi_B(x, y)$ の 1 位の極の周りを 1 周する積分路ですので, 以下が成り立ちます.

$$\begin{aligned} & (x_0 \text{ での } \psi \text{ の Borel 和の解析接続}) \\ &= (x \text{ での } \psi \text{ の Borel 和}) + \int_C e^{-y/\hbar} \psi_B(x, y) dy. \end{aligned}$$

Stokes 曲線を横切るような解析接続を考えると, このように Laplace 積分の積分路に特異点がぶつかりますので, 積分路を変形させて考えると差が計算できたのでした. もし x_0 から解析接続させるときに a の右側を回って Stokes 曲線にぶつからないような経路を用いると, Laplace 積分の積分路に特異点がぶつかることはないので, x_0 での Borel 和の解析接続と x での Borel 和は等しくなります. つまり解析接続の経路に依存して等し

くなるかならないかが決まるのです． $y = a - x$ が $\psi_B(x, y)$ の 1 位の極であることを用いると，上の式の第 2 項が次のように変形できます．

$$\begin{aligned} & (x_0 \text{ での } \psi \text{ の Borel 和の解析接続}) \\ &= (x \text{ での } \psi \text{ の Borel 和}) + 2\pi i \text{Res}_{y=a-x}(e^{-y/\hbar} \psi_B) \\ &= (x \text{ での } \psi \text{ の Borel 和}) - 2\pi i e^{-a/\hbar} \text{Res}_{x=a} q(x) e^{x/\hbar}. \end{aligned}$$

このおつりの項 (第 2 項) の部分は，斉次方程式の解になっています．つまり方程式 (1.1) の $q(x) = 0$ のときの方程式の解になっています． x での Borel 和も x_0 での Borel 和も方程式 (1.1) の解なので，その差はもちろん斉次方程式の解になるのですが，定数倍も含めて具体的に計算できるというわけです．この $e^{x/\hbar}$ の係数のことを WKB 解析の世界では Stokes 係数と呼んでいます．不確定特異点の場合の Stokes 係数や Stokes 現象とは意味合いが異なりますが，同じ用語を用いています．おさらいしておくと，Borel 変換が $-q(x+y)$ という簡単な形になり，Borel 総和可能になるのはどういう領域かを調べました．そして Stokes 曲線の例や Stokes 曲線を越えて Borel 和を解析接続させるとどうなるかということを方程式 (1.1) について見ていきました．

例 2

例 1 を少しだけ難しくしたのが例 2 です．次の方程式を考えます．少しずつ Riccati 方程式に近づけています．

$$\hbar \frac{d}{dx} \psi = p(x) \psi + \hbar q(x). \quad (1.3)$$

ただし， $p(x), q(x)$ は多項式です．先ほど言うのを忘れていましたが，例 1 で $q(x)$ が多項式だと何回か微分すると消えるため， $\hbar$ について展開すると有限和になります．無限級数でなくなって総和法を用いてどうこうするということができなくなるので， $q(x)$ は有理関数としていました．いまの方程式 (1.3) の場合は $p(x), q(x)$ を多項式にしても問題ないので多項式としておきます．例 1 では $q(x)$ の極が大事な役割を果たしたのですが，この例ではかわりに $p(x)$ が大事な役割を果たします．この方程式についても，次の形の形式級数解がただ一つ存在します．

$$\psi(x, \hbar) = \psi_1(x) \hbar + \psi_2(x) \hbar^2 + \cdots. \quad (1.4)$$

先ほどと同じようにこの展開を方程式に代入していけば $\{\psi_n(x)\}$ が求ま

ります。

$$\begin{aligned} O(\hbar) : p(x)\psi_1 + q(x) &= 0, \\ O(\hbar^n) : \psi'_{n-1} &= p(x)\psi_n \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

よって、形式解は以下のようになります。

$$\psi(x, \hbar) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p(x)} \frac{d}{dx} \right)^{n-1} \frac{q(x)}{p(x)} \hbar^n$$

$p(x)$ の零点が形式解の特異点となっています。 $p(x)$ の零点は方程式 (1.3) の特異点ではない点ですが、形式解では特異点となっています。これから形式解の Borel 変換を見ていくのですが、まずは座標変換をします。次の変換を Liouville 変換ということにします。

$$z = \int_{x_0}^x p(x') dx'. \quad \left(\Rightarrow \frac{1}{p(x)} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dz} \right)$$

この変換を用いると、形式解の $1/p(x) \cdot d/dx$ が d/dz に変わるため扱いやすくなります。この変換は両辺を x で微分すると $z'(x) = p(x)$ となるので、 $p(x)$ の零点以外の点の近傍では両正則となっており、座標変換となっています。形式解の座標を z に取り替えて $\varphi(z(x), \hbar) = \psi(x, \hbar)$ とすると以下のようにになります。

$$\varphi(z, \hbar) = - \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \left(\frac{d}{dz} \right)^n Q(z), \quad Q(z(x)) = \frac{q(x)}{p(x)}.$$

ここまで変形すれば、 $Q(z)$ を $q(x)$ と見なせば例 1 と同じような形です。

練習 3 φ は $\hbar d\varphi/dz = \varphi + \hbar Q(z)$ を満たすことを示せ。

Borel 変換もさっきと同じで $\varphi_B(z, y) = -Q(z+y)$ となります。

練習 4 次が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi_B = p(x) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_B.$$

y が 0 から ∞ まで走るので、例 1 と同じように $z+y$ を考えて半直線 $z+\mathbb{R}_+$ の上に $Q(z)$ の特異点がなければよいわけです。次のように $\psi(x, \hbar)$ の Borel 総和可能性を調べていきます。

$$\begin{aligned}
& \psi(x, \hbar) \text{ が } x_1 \text{ で Borel 総和可能} \\
& \Leftrightarrow \varphi(z, \hbar) \text{ が } z_1 = \int_0^{x_1} p(x') dx' \text{ で Borel 総和可能} \\
& \Leftrightarrow \Im z = \Im z_1, \Re z \geq \Re z_1 \text{ 上に } Q \text{ の特異点がない} \\
& \Leftrightarrow \Im \int_{x_0}^x p(x') dx' = \Im \int_{x_0}^{x_1} p(x') dx', \Re \int_{x_0}^x p(x') dx' \geq \Re \int_{x_0}^{x_1} p(x') dx' \\
& \text{上に } q(x)/p(x) \text{ の特異点がない} \\
& \Leftrightarrow \Im \int_{x_1}^x p(x') dx' = 0, \Re \int_{x_1}^x p(x') dx' \geq 0 \text{ 上に } p(x) \text{ の零点がない.}
\end{aligned}$$

$p(x)$ の零点を $\{a_1, \dots, a_m\}$ とするとき,

$$\begin{cases} \Im \int_{a_j}^x p(x') dx' = 0 \\ \Re \int_{a_j}^x p(x') dx' \geq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

と曲線を定めると, x がこれらの曲線上になれば ψ は Borel 総和可能となります. 増大度を見ていませんでしたが, $z(x)$ が高々 x のべき程度で, $Q(z)$ は z のべき程度の増大度ですので指数評価は問題なく成り立ちます.

注意 $\Im \int_{x_0}^x p(x') dx' = 0$ は実 1 次元曲線. この上で $\Re \int_{x_0}^x p(x') dx'$ は単調関数. (練習 5: これを示せ.)

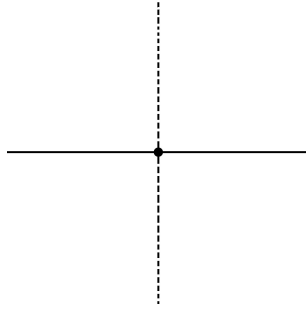
これまでの議論は $p(x)$ が多項式だから簡単になっています. 有理関数にすると (1.5) の第 1 式で定まる曲線 (Stokes 曲線) がやたら複雑になる場合もあります. 多項式の場合は Stokes 曲線の端点は $p(x)$ の零点 $\{a_1, \dots, a_m\}$ か無限遠点となります. Stokes 曲線どうしが交わることはなく, 1 点を共有していれば完全に重なります. $p(x)$ を有理関数にすると, 有理関数のとり方によってはループができます. また limit cycle, つまりどこかの円周に巻き付いていくような曲線に Stokes 曲線になることもありません. ですが端点がない場合も起こりえます. つまり永遠に走りっぱなしなので, 複素領域を稠密に埋め尽くすという Stokes 曲線もありえます. ですので $p(x)$ が有理関数のときは Stokes 曲線の形に条件を付けた上で Borel 総和可能性を調べないといけないのです.

Stokes 曲線 $\Im \int_{a_j}^x p(x') dx' = 0$ がどういう形をしているのか例で見ましょう.

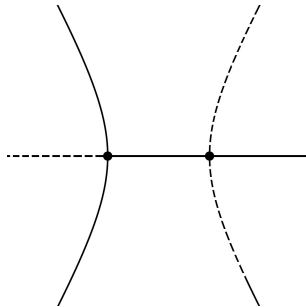
(ア) $p(x) = x$ のとき,

$$\int_0^x p(x') dx' = \frac{1}{2}x^2$$

なので, Stokes 曲線は $\Im x^2/2 = 0$ となり, 下図のようになります. この中で実部が正の曲線を探すと, 図の実線の 2 本の半直線となります. 点線は実部が負であることを表しています. この場合は積分の結果が $x^2/2$ という分かりやすい形をしているので, Stokes 曲線の正の部分である実軸上なら $\Re x^2/2$ が単調増大で, 負の部分である虚軸上なら単調減少するということも分かります.

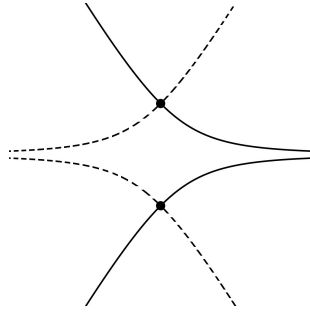


(イ) $p(x) = x^2 - 1$ のとき, 零点は $\{1, -1\}$ です. x 平面で Stokes 曲線の図を描くと下図のようになります. 零点からは (ア) のように必ず 4 本 Stokes 曲線が出ています. この中で実部が正の曲線は実線で描いています. 1 から出ている実軸上の $\{x > 1\}$ なる半直線では $x^2 - 1$ は正なので, このことから実部が正の曲線だと分かります. Stokes 曲線は原点から $0, \pm\pi/3, \pm2\pi/3, \pi$ の角度の方向に漸近しながら無限遠点に流れ込む形になっています.



(ウ) $p(x) = x^2 + 1$ のとき, $\{i, -i\}$ が零点です. Stokes 曲線と実部が正の部分は次の図のようになります. この場合も Stokes 曲線は原点から

$0, \pm\pi/3, \pm2\pi/3, \pi$ の角度の方向に漸近しながら無限遠点に流れ込む形になっています。ですので実線の Stokes 曲線以外では Borel 総和可能となります。



今日の話では実部が正のほうの Stokes 曲線，つまり実線で描いた方しか役割を担いませんでしたが，Riccati 方程式を考えるとどちらも重要です。そのことについてはまた明日説明します。

(9月2日) 昨日説明していたのは Borel 総和法についてです。形式べき級数が与えられたときに Borel 和を定義して，もとの級数が Borel 和の漸近展開になっているということを話しました。そして Borel 総和法を使って微分方程式を調べてみようということで，最初に考えていたのが，次の方程式です。

$$\hbar \frac{d}{dx} \psi = \psi + \hbar q(x).$$

ただし $q(x)$ は有理関数です。1 階の方程式でなるべく簡単な形を考え，べき級数解を作り，どこで Borel 総和可能となるかを考えていました。いまの場合は $\hbar$ についての Borel 総和法を用いるので， x は $\hbar$ についての係数に現れ， x に依存して Borel 総和可能かどうかが決まるのでした。また昨日は上の方程式を少し複雑にした次の方程式についても考えました。

$$\hbar \frac{d}{dx} \psi = p(x) \psi + \hbar q(x).$$

ただし $p(x), q(x)$ は多項式です。こちらの場合は Stokes 係数の見つけ方も説明しました。 $p(x)$ のゼロ点を端点として Stokes 曲線を描き，Stokes 曲線以外では Borel 総和可能だという話をしていました。以上をふまえて，2 階の方程式の話をしようと思います。

2 Schrödinger 方程式

Schrödinger 方程式というのは、昨日も書きましたが次の 2 階常微分方程式です。

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x) \right) \psi = 0. \quad (2.1)$$

ただし、 $\hbar > 0$ は小さいパラメータで、 $Q(x)$ は基本的には多項式とします。ところどころで有理関数の場合にどうなるかについても触れるつもりです。方程式に対して $\hbar$ のべき級数解を構成するのですが、昨日の 2 つの例とは少し違う次のような形の解を考えます。

$$\psi_{\pm}(x, \hbar) = \exp \left(\int_{x_0}^x S^{(\pm)}(x', \hbar) dx' \right), \quad (2.2)$$

$$S^{(\pm)}(x, \hbar) = \hbar^{-1} S_{-1}^{(\pm)}(x) + S_0^{(\pm)}(x) + \hbar S_{-1}^{(\pm)}(x) + \cdots. \quad (2.3)$$

この解のことを **WKB 解** といいます。このような $\hbar^{-1}$ から始まるべき級数の指数関数で表される解が存在することを見ていきます。(2.3) の第 3 項以降について Borel 総和法を適用するので、 $T^{(\pm)}(x, \hbar)$ を以下のように定義します。

$$T^{(\pm)}(x, \hbar) := S^{(\pm)}(x, \hbar) - \hbar^{-1} S_{-1}^{(\pm)}(x) - S_0^{(\pm)}(x). \quad (2.4)$$

この $T^{(\pm)}(x, \hbar)$ について Borel 総和法を用います。次に (2.3) の構成方法です。 $S^{(\pm)}(x, \hbar)$ は $\psi_{(\pm)}(x, \hbar)$ の対数微分となっています。よく知られているように、Schrödinger 方程式の解の対数微分は Riccati 方程式を満たします。つまり以下が成り立ちます。

$$\frac{dS}{dx} + S^2 = \frac{1}{\hbar^2} Q(x). \quad (2.5)$$

$S(x, \hbar)$ がこの方程式を満たしていれば (2.2) で定まる $\psi(x, \hbar)$ が方程式 (2.1) を満たす、というのは計算で確かめられます。この解を (2.3) の形で探します。 $1/\hbar$ で始まる級数になっているのは、(2.5) の右辺が $1/\hbar^2$ なので $\hbar$ についての次数を合わせるためです。

質問： Wasow の教科書などでは直接 Schrödinger 方程式の解の $\hbar$ についての漸近展開を構成していますが、一旦 Riccati 方程式の解を考えてから指数関数の肩に乗せた形で解を考えることには理由があるのですか。

WKB 解は $S^{(\pm)}$ を積分する操作があるので積分の端点 x_0 の選び方に依存しています。Riccati 方程式を経由せず直接 Schrödinger 方程式のべき級数解を構成すれば、 $\hbar^n$ の係数は x についての微分方程式によって決まていくので、係数を決める各ステップで定数が入ってきます。この定数を決めることと WKB 解で積分路を決めることが対応しています。この定数の不定性は Riccati 方程式まで変換すれば避けることができる、というのが 1 つ目の理由です。また WKB 解析では積分の端点 x_0 として無限遠点を採用したり変わり点を採用したりと端点を取りかえて考えるから、というのが 2 つ目の理由です。Schrödinger 方程式のべき級数解を直接構成しようとする、各ステップで出てくる定数をきれいな形で書くのが難しくなります。

級数 $S = \hbar^{-1}S_{-1}(x) + S_0(x) + \hbar S_1(x) + \cdots$ を (2.5) に代入して両辺の $\hbar^2$ の係数、 $\hbar$ の係数、 $\hbar^{n+1}$ の係数 ($n \geq -1$) を比較すると次の漸化式を得ます。

$$\begin{aligned} S_{-1}(x)^2 &= Q(x), \\ S'_{-1} + 2S_{-1} &= 0, \\ S'_n + \sum_{i+j=n} S_i S_j &= 0 \quad (n \geq -1). \end{aligned}$$

第 1 式より $S_{-1} = \pm\sqrt{Q}$ となるので S_{-1} は 2 つあります。高次の項は、まず第 2 式より $S_0 = -Q'/(4Q)$ で、第 3 式は $S'_n + 2S_{-1}S_{n+1} + \sum_{i=0}^n S_i S_{n-1} = 0$ と変形できます。したがって S_n ($n \leq 0$) は S_{-1} の $\pm$ を定めると帰納的に一意に決まります。このようにしてべき級数 $S(x, \hbar)$ が構成されます。

WKB 解 $\psi_{\pm}(x, \hbar)$ を、 $S(x, \hbar)$ の S_{-1} や S_0 を分けて書き直すと次のようになります。

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(x, \hbar) &= \exp\left(\pm \frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{Q} dx'\right) \exp\left(\int_{x_0}^x S_0^{(\pm)} dx'\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_{x_0}^x T^{(\pm)}(x', \hbar) dx'\right). \end{aligned}$$

右辺の第 2 項は定数倍を除けば $Q^{-1/4}$ となるので x だけの関数になっています。また第 3 項は

$$1 + \hbar \int_{x_0}^x S_1^{(\pm)} dx + \hbar^2 \left(\frac{1}{2} \left(\int_{x_0}^x S_1^{(\pm)} dx \right)^2 + \int_{x_0}^x S_2^{(\pm)} dx \right) + \cdots \quad (2.6)$$

と $\hbar$ についてのべき級数になっています。WKB 解の Borel 総和可能性を示すとき、次のような順番で考えます。

- (1) $T^{(\pm)}$ の Borel 総和可能性を証明する。
- (2) $\int_{x_0}^x T^{(\pm)} dx$ の Borel 総和可能性を示す。
- (3) $\exp\left(\int_{x_0}^x T^{(\pm)} dx\right)$ の Borel 総和可能性が分かる。

この中できちんと解析しないといけないのが (1) の段階です。(2) については図を描くことで分かっていきますし、(3) は後述の演習 2 によって (2) から従います。

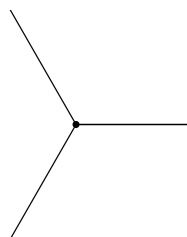
演習 1 形式べき級数 $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hbar^n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hbar^n$ が Borel 総和可能であれば、積 fg も Borel 総和可能であり、Borel 変換について $\mathcal{B}[fg] = f_B * g_B := \int_0^y f_B(y-t)g_B(t)dt$ が成り立つことを示せ。

演習 2 級数 $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ は原点近傍で収束しているとする。 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \hbar^n \in \hbar\mathbb{C}[[\hbar]]$ について $\Phi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\hbar)^n \in \hbar\mathbb{C}[[\hbar]]$ であり、さらに f が Borel 総和可能であれば $\Phi(f)$ も Borel 総和可能であることを示せ。

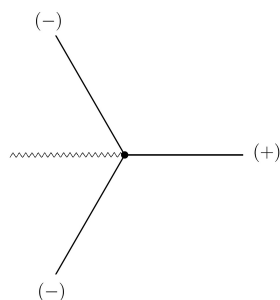
演習 2 の級数 $\Psi(f)$ に $f(\hbar)^n$ が出てくるので、演習 1 を使って Borel 総和可能性を考えます。また評価をする際に演習 1 で示した公式を用います。この演習 2 によって、(2) から (3) が従います。(3) の Borel 総和可能性を考えるときには、(2.6) の初項 1 は除いて考えます。以下では (1),(2) について説明していきます。

$T^{(\pm)}$ の Borel 総和可能性について調べていきます。まずいくつか用語を導入します。 $Q(x)$ の零点を変わり点といいます。以下では方程式の変わり点の集合を $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ と表します。昨日の例 2 では $p(x)$ の零点が大事な役割を果たしましたが、それと同じように以下の話では $Q(x)$ の零点が大事になります。 $\Im \int_{a_j}^x \sqrt{Q(x)} dx = 0$ で表される曲線を a_j を端点とする **Stokes 曲線**といいます。 $\Re \int_{a_j}^x \sqrt{Q(x)} dx \geq 0$ を正の部分、 $\Re \int_{a_j}^x \sqrt{Q(x)} dx \leq 0$ を負の部分といいます。図では (+), (-) をつけて Stokes 曲線の正の部分と負の部分进行を洗わすことにします。 $\sqrt{Q(x)}$ は 2 価関数ですので branch を決めないと正の部分と負の部分を決められないことに注意してください。

例 $Q = x$ のとき、変わり点は原点のみで、 $\int_0^x \sqrt{Q} dx = (2/3)x^{3/2} = (2/3)r^{3/2}e^{3i\theta/2}$ なので Stokes 曲線 $\Im \int_0^x \sqrt{Q} dx = 0$ は $\sin(3/2)\theta = 0$ なる次の図のような三本の直線になります。



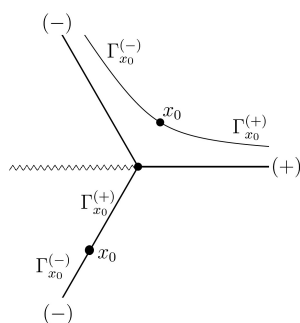
ここまでは branch に関わらず決まりますが, Stokes 曲線の正の部分と負の部分を決めるために $\sqrt{x}$ の branch を決めます. $x > 0$ のとき $\sqrt{x} > 0$ とし, 負の実軸上に branch cut を入れておきます. そうすれば cut を入れた平面では $\sqrt{x}$ は 1 価関数になります. 正の実軸上では $\sqrt{x} > 0$ なので $\Re \int_0^x \sqrt{x} > 0$ となり, 正の実軸は Stokes 曲線の正の部分になっていると分かります. あとは同じ変わり点から出て隣り合う Stokes 曲線は逆の符号になっていて, branch cut を挟んで隣り合う場合は同符号, というルールがありますので, 下の図のように正の部分と負の部分が決まります.



もう少し用語を導入します. $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ に対して曲線 Γ_{x_0} を $\Im \int_{x_0}^x \sqrt{Q} dx = 0$ と定義します. この Γ_{x_0} を x_0 を通るレベル曲線といいます. 最初は「 x_0 を通る Stokes 曲線」と呼んでいたのですが, 明らかに混乱が生じるので名前を変えておきました. レベル曲線のうち, $\Re \int_{x_0}^x \sqrt{Q} dx \geq 0$ の部分を正の部分と呼び $\Gamma_{x_0}^{(+)}$ で, $\Re \int_{x_0}^x \sqrt{Q} dx \leq 0$ の部分を負の部分と呼び $\Gamma_{x_0}^{(-)}$ で表します.

先ほどの $Q = x$ の例で, x_0 を Stokes 曲線以外の点としてとると, レベル曲線 Γ_{x_0} は次の図のようになります. x_0 を変わり点に近づけるとレベル曲線は Stokes 曲線に近づいていきます. レベル曲線は Stokes 曲線と平行に走っており, その Stokes 曲線の正負によってレベル曲線の正負が分かります. また次の図のように x_0 が Stokes 曲線の負の部分に乗っている場合は, レベル曲線は Stokes 曲線と一致します. 正の部分と負の部分は次の図のようになります. このようにレベル曲線は変わり点とぶつかる

こともありますが，そのときは変わり点から先にレベル曲線をのぼさず
 変わり点で止めておくものと定義しておきます．



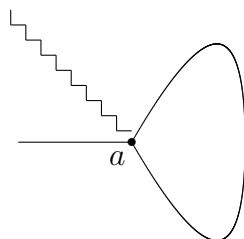
注意 $Q(x)$ が多項式のときは，Stokes 曲線や Γ_{x_0} の端点は変わり点か ∞ となる．

有理関数の場合は ∞ ではなく 2 位以上の極となります．ちなみに，1 位の極は変わり点として扱います．

注意 変わり点 a が $Q(x)$ の 1 位の零点のとき， a からは 3 本の Stokes 曲線が出る．

Airy の場合，つまり $Q = x$ のときは具体的に計算しました．一般の場合も Taylor 展開して変わり点の近傍で調べれば Airy の場合と同じように Stokes 曲線が 3 本出ることが分かります．2 位の零点のときは 4 本，3 位の零点のときは 5 本と (零点の位数)+2 本の Stokes 曲線が出てきます．

演習 3 $Q(x)$ は多項式で， a は $Q(x)$ の 1 位の零点とする．このとき，図のような変わり点から出て同じ変わり点に戻ってくるループとなる Stokes 曲線は存在しないことを示せ．



有理関数の場合は Stokes 曲線がループになることがあります。多項式の場合は複数の変わり点どうしが結ばれてループになるということも起こりません。

ヒント: Stokes 曲線上の変わり点でない点 x_0 での接ベクトルの偏角は $(-1/2) \arg Q(x_0)$ (または $(-1/2) \arg Q(x_0) + \pi$) であることを示すとよい。

ヒントを用いるとループに沿って偏角が分かるので、偏角の原理を用いることで演習 3 が示されます。ぼくは 10 年くらい前まで知らなかったのですが、この偏角の原理を用いる方法は Shibuya さん¹が書いた本に載っていた方法です。

最初に書いた $T^{(\pm)}$ がどこで Borel 総和可能性について、一番単純な定理をまず述べます。

定理 1 $x \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ に対し、 $\Gamma_x^{(\mp)}$ の終点が ∞ のとき、 $T^{(\pm)}$ は Borel 総和可能である。

特に、 x が Stokes 曲線 (の正の部分) 上になれば $T^{(+)}$ は Borel 総和可能となります。 $T^{(-)}$ の場合は x が Stokes 曲線の負の部分になれば Borel 総和可能となります。注意より $Q(x)$ が多項式のときは、レベル曲線の端点が変わり点か ∞ となるのでした。したがってレベル曲線の負の部分 $\Gamma_x^{(-)}$ が変わり点に流れ込む場合には上の定理からは Borel 総和可能性がいえず、それは x が Stokes 曲線の正の部分上にあることと同じなのです。 $Q(x)$ が有理関数のときは上の定理を「終点が $Q(x)$ の 2 位以上の極のとき」と変更すると成り立ちます。また 1 位の極は変わり点として扱われるので、Stokes 曲線を描くときにも変わり点として描きます。

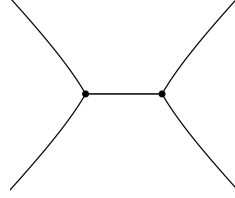
質問: この定理の証明はどれくらいかかるのでしょうか。

いろいろ準備をした上で、5 ページか 6 ページくらいですかね。

質問: $Q(x)$ が多項式のときレベル曲線の終点は ∞ か変わり点かのいずれかでしたが、レベル曲線の両端が変わり点となることはないのでしょうか。

たとえば $Q(x) = 1 - x^2$ のとき、Stokes 曲線は次のようになります。

¹名前をしっかりと聞き取れませんでしたので間違っているかもしれません。



変わり点どうしが結ばれている Stokes 曲線の上に点を取れば, レベル曲線の両端は変わり点となります.

質問: その場合はレベル曲線の正の部分と負の部分はどのようなのですか.

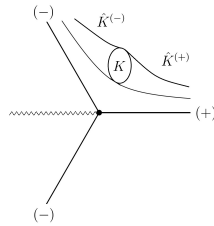
この場合は正の部分と負の部分が決まりません. このように変わり点どうし結ばれている場合に, Stokes 曲線は退化しているといいます. 正の部分や負の部分を考えられるのは Stokes 曲線が退化していない場合です. 定理の直後に述べたことは厳密には「 x が Stokes 曲線 (の正の部分) 上になければ」を「 x が Stokes 曲線上になければ」に変更するか, 「Stokes 曲線が退化していない場合」をつけなければいけませんでした.

$T^{(\pm)}$ の Borel 総和可能性についてはこの定理でいいのですが, WKB 解を考えるにはこの $T^{(\pm)}$ を x について積分しないといけません. 1 つの点 x を与えてそこで $T^{(\pm)}$ が Borel 総和可能かどうか分かるだけでは積分できないので, x が領域の中で動くような場合の定理が必要です. それが次の定理です.

定理 2 $K \subset \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ がコンパクト集合で, 任意の $x \in K$ に対し $\Gamma_x^{(-)}$ の終点は ∞ とする. このとき次を満たすような $\rho, C_1, C_2 > 0$ が存在する.

$$|T_B^{(+)}(x, y)| \leq C_1 e^{C_2 |y|} \quad ((x, y) \in \hat{K}^{(-)} \times \Sigma_\rho).$$

ここで, $\hat{K}^{(-)} = \cup_{x \in K} \Gamma_x^{(-)}$. 上記の仮定に加えてさらに任意の $x \in K$ に対し $\Gamma_x^{(+)}$ の終点を ∞ とすると, 評価式は $\hat{K} \times \Sigma_\rho$ で成立する. ただし $\hat{K} = \cup_{x \in K} \Gamma_x$.



Σ_ρ は帯状領域でした．この評価式は Borel 総和可能性のときに出てきた式でした．定数 $\rho, C_1, C_2 > 0$ が $x \in K$ によらず一様にとれるので，積分したものの Borel 総和可能性が従います．

K の中に積分路が含まれれば $T^{(+)}$ は Borel 総和可能となりますし，積分路が $\hat{K}^{(-)}$ に含まれていればそこで一様に評価が成り立つので $T^{(+)}$ は Borel 総和可能となります． x についての増大度を評価式の右辺につけて示すこともでき，それを用いると ∞ から積分するということも多項式ではできませんが，ここでは触れません．

(証明の概要) 以下では $T^{(+)}$ について考えますが，簡単のため $T^{(+)}$ を単に T と書きます．

$$\frac{dS}{dx} + S^2 = \frac{1}{\hbar^2} Q(x)$$

これがもとの Riccati 方程式でした．いまは T について考えたいので $S = (1/\hbar)S_{-1} + S_0 + T$ を代入して整理すると，この方程式は次のように書き換えられます．

$$\hbar \frac{dT}{dx} = -2\sqrt{Q}T + 2\hbar\sqrt{Q}S_1 + \hbar(-2S_0T + T^2).$$

式を整理するとき S_{-1}, S_0, S_1 の満たす漸化式も用いました．右辺の第 3 項がなければ昨日の例 2 と似た形になっていますので，第 3 項を摂動と思うわけです．以下のように， $T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} + \dots$ を満たす $T^{(n)}$ を構成します．ただし $T^{(n)}$ は単に x の関数だけではなく $\hbar$ にも依存しています．

$$\begin{aligned} \hbar \frac{dT^{(0)}}{dx} &= -2\sqrt{Q}T^{(0)} + 2\hbar\sqrt{Q}S_1, \\ \hbar \frac{dT^{(1)}}{dx} &= -2\sqrt{Q}T^{(1)} + \hbar(-2S_0T^{(0)}), \\ \hbar \frac{dT^{(2)}}{dx} &= -2\sqrt{Q}T^{(2)} + \hbar(-2S_0T^{(1)} + T^{(0)^2}), \\ \hbar \frac{dT^{(n+2)}}{dx} &= -2\sqrt{Q}T^{(n+2)} + \hbar(-2S_0T^{(n+1)} + \sum_{i+j=n} T^{(i)}T^{(j)}) \quad (n \geq 0). \end{aligned}$$

第 1 式は摂動と思う項がなく昨日の例 2 と似た形になっているので， $T^{(0)}$ がどこに特異点をもつか，どこで Borel 総和可能であるかが分かります．

$T^{(0)}$ では摂動項を考えていなかったで、 $T^{(1)}$ 以降で式に取り込んでいます。このように T_n を定めると $T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} + \dots$ を満たすことがわかります。上の漸化式を順に解いていくと、第2式以降の第2項は $\hbar$ についてのべき級数となっており、前のステップまででわかっている項となっています。ですので帰納的に前日やった例2と似た方程式を考えることになります。例2の q を $\hbar$ についてのべき級数にした上で同様の議論をするわけです。 $p(x) = -2\sqrt{Q}$ で、 $-2\sqrt{Q}$ の積分の虚部が0で実部が正の部分に $-2\sqrt{Q}$ の零点がないことが Borel 総和可能となる条件でした。マイナスがつくので $\sqrt{Q}$ の積分の実部が負の部分に変わり点に乗っていないことが重要となり、したがってレベル曲線の負の部分に変わり点に乗っていないことが Borel 総和可能となる条件になるわけです。先ほどの定理で $T^{(+)}$ の総和可能性は $\Gamma_x^{(-)}$ に依存していて、符号が反転しているのはそういう理由があったわけです。

これらの T_n について、ある $C_1, C_2 > 0$ が存在して、 $\hat{K}^{(-)} \times \Sigma_\rho$ で

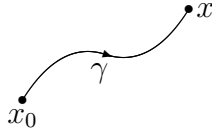
$$|T_B^{(n)}(x, y)| \leq C_1 C_2^n \frac{|y|^n}{n!}$$

を満たすことが示されます。したがって

$$|T_B(x, y)| \leq C_1 e^{C_2 |y|}$$

を得ます。本当は領域を単に直積集合ではなくもう少し膨らませて考えるのですが、 T_n について不等式を帰納的に示していきます。昨日の例2との対応でいえば、 q の増大度で元の解を評価するという不等式を作っておくと帰納法がうまくいく、という形になっています。(証明終)

Riccati 方程式の解 T についての Borel 総和可能性を調べたので、次は $\int_{x_0}^x T^{(\pm)}(x', \hbar) dx' (= \Phi^{(\pm)})$ の Borel 総和可能性について見ていきます。

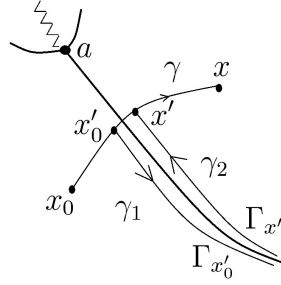


定理 3 積分路を γ として、 γ 上には変わり点に乗っていないとする。

- (1) γ が Stokes 曲線を横切らないとき、 $\Phi^{(\pm)}$ は Borel 総和可能である。
- (2) γ が Stokes 曲線を横切っても、その交点が γ の端点でなく、横切る Stokes 曲線の終端が ∞ なら、 $\Phi^{(+)}$ は Borel 総和可能である。

(1) については K として γ をとれば, $\hat{K}^{(\pm)}$ が変わり点にぶつからないので定理 2 の条件を満たしています.

(2) について,



積分路 γ と Stokes 曲線の交点では評価式が成立していません. そこで図のように γ 上で交点の前後に点 x'_0, x_0 をとります. x_0 から γ に沿って x'_0 まで進み, $\Gamma_{x'_0}$ に沿って ∞ へ走る曲線を γ_1 とします. ∞ から $\Gamma_{x'}$ に沿って x' まで進み, x' から γ に沿って x へ進む曲線を γ_2 とします. すると $\int_{\gamma} T^{(+)}(x, \hbar) = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$ が形式級数として成り立つことが分かります. 形式級数の積分は各次数ごとに積分したものの和ですので, $\hbar$ の各次数ごとに一致しているということです. これは S_n の増大度によって得られます. (cf. Q が次数 d の多項式のとき $S_n(x) = O(x^{-(\frac{d}{2}+1)n-1})$ ($x \rightarrow \infty$).) いまは $n \geq 1$ のときを考えていますので, ∞ から積分でき, 積分路を γ から $\gamma_1 + \gamma_2$ に取り替えることができます. γ_1 も γ_2 も変わり点にぶつかっていないので, $\int_{\gamma_1}, \int_{\gamma_2}$ は先の定理 2(を, x についての増大度をつけてよりよい評価にしたもの) から Borel 総和可能であることがわかります.

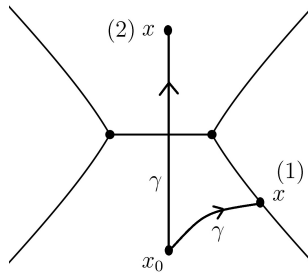
Borel 総和可能性が示されていないのは以下の 2 つの場合です.

(1) γ の端点が Stokes 曲線上にあるとき

→ movable singular point が y -平面の積分路上にある.

(2) 両端を変わり点とする Stokes 曲線を γ が横切るとき

→ fixed singular point が y -平面内の積分路上にある.



たとえば $Q = 1 - x^2$ のとき, Stokes 曲線は上ようになります. (1) は x が少し動いて Stokes 曲線上でなくなれば特異性が消えるので, 特異性が x の位置に依存して動くという意味で movable という名前がついています. 一方 (2) については, x を少し動かしたとしても積分路が Stokes 曲線を横切る状況は変わらないという意味で fixed という名前がついています. $Q(x)$ が多項式のときには, movable singularity は Airy 方程式を用いて調べ, fixed singularity は Weber 方程式を用いて調べるということが行われています.

以上で $Q(x)$ が多項式のときの Borel 総和可能性については, 示さないといけないことは示されたはずです. $Q(x)$ が有理関数の場合にも, Stokes 曲線が特殊な場合を除けば同様の定理が成り立ちます. あと特異性がある場合, 特に fixed singularity がある場合についての研究はこれからの課題だと思っています. 3 階以上の方程式の WKB 解についてはこの 2 日間で説明した方法で扱うのは難しそうだということは分かっているのですが特殊な場合を除いて未解明な部分が多いです.

Some references for the present lectures of Tatsuya Koike ¹

Please note that these references are only a very small part of the extensive literature concerning asymptotics, summability, resurgence, parametric resurgence and exact WKB analysis. They have been selected because either they are *directly* related to a topic presented in the lecture or because they contain *background information*.

The works of Balser [2] and Malgrange [13] present the theories of summability and multisummability and applications to irregular singular points of linear ODE. The works of Wasow [16] and Olver [14] contain, among other topics, the foundations of the theory of asymptotic expansion with respect to a parameter. Basic works on exact WKB analysis are those of Aoki, Kawai and Takei [1] and of Kawai and Takei [11]. Further basic works on exact WKB are those of Voros [15] and of Delabaere, Dillinger and Pham [4].

Proofs of the Borel summability with respect to a singular parameter in certain directions can be found in the works of Dunster, Lutz and Schäfke [5], Costin, Dupaigne and Kruskal [3] and more recently in an article of Fruchard and Schäfke [10]. The general potential can be reduced to the one treated in [5] using the Liouville transform. The summability in all directions and for analytic continuations will hopefully soon appear in a work of Koike and Schäfke [12].

The article of Fruchard and Schäfke [10] also presents a proof of parametric resurgence for an example.

The works of Ecalle [6], [7] and [8] stand apart. They are expositions of the theories of (multi-)summability, resurgence and parametric resurgence in a very special way, but, in the opinion of some people, contain not many proofs, in particular not for parametric resurgence.

参考文献

- [1] T. Aoki, T. Kawai, Y. Takei, Algebraic analysis of singular perturbations—exact WKB analysis. (Japanese) *Sugaku* 45 (1993), no. 4, 299–315. translation: *Sugaku Expositions* 8 (1995), no. 2, 217–240.
- [2] W. Balser: From Divergent Series to Analytic Functions, Lecture notes in mathematics **1582**, Springer, 1991.
- [3] O. Costin, L. Dupaigne, M.D. Kruskal, Borel summation of adiabatic invariants, *Nonlinearity* 17 (2004), 1509–1519.
- [4] E. Delabaere, H. Dillinger, F. Pham, Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) 43 (1993), no. 1, 163–199.
- [5] T. M. Dunster, D. A. Lutz, R. Schäfke, Convergent Liouville-Green expansions for second-order linear differential equations, with an application to Bessel functions, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 440 (1993), 37–54.
- [6] J. Ecalle, Les fonctions résurgentes, vol. I, II et III, *Publ. Math. Orsay* (1981–85).

¹by Reinhard Schäfke

- [7] J. Ecalle, Singularités irrégulières et résurgence multiple, Cinq Applications des Fonctions Résurgentes, Preprint No. 84T62, (Dept. Math., Univ. Paris-Sud, Orsay), 1984.
- [8] J. Ecalle, Weighted products and parametric resurgence, Analyse algébrique des perturbations singulières, I (Marseille- Luminy, 1991), *Travaux en Cours* 47, 7–49.
- [9] 江沢洋, 漸近解析入門, 岩波書店, 2018.
- [10] A. Fruchard, R. Schäfke, On the parametric resurgence for a certain singularly perturbed linear differential equation of second order, 213–243, *Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDEs; Generalized Borel Summation, vol. II*, ed. O. Costin, F. Fauvet, F. Menous, D. Sauzin, Edizioni della Normale, 2011.
- [11] T. Kawai, Y. Takei, Algebraic analysis of singular perturbation theory, Translated from the 1998 Japanese original by Goro Kato, *Translations of Mathematical Monographs*, 227. AMS Providence, RI, 2005.
河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998, 2008, 2018.
- [12] T. Koike, R. Schäfke, On the Borel summability of WKB solutions of Schrödinger equations with polynomial potentials and its application, in preparation.
- [13] B. Malgrange: Sommutation des séries divergentes, *Exposition. Math.*, **13**(1995), 163–222.
- [14] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York-London, 1974.
- [15] A. Voros, The return of the quartic oscillator: the complex WKB method, *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A (N.S.)* 39 (1983), 211–338.
- [16] W. Wasow, *Linear Turning Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 1985.

Macdonald 多項式

– アフィン Hecke 環からのアプローチ –

野海 正俊 述

渋谷 元樹, 宮永 愛子 記

2016.8.31-9.1

神戸大学の野海です。今回は「Macdonald 多項式 –アフィン Hecke 環からのアプローチ–」というタイトルで今日と明日 2 回講義をさせていただきます。この話は去年の超幾何学校 2015 で「Macdonald 多項式とその周辺」というタイトルで話をさせていただきました。そのときには Macdonald 多項式（それは q 差分の方程式と関係した直交多項式系なんですけれども）というのはどんなものか、それらはどういう意味で q 直交多項式になってるだとか、ある q 差分作用素の可換族の同時固有函数系になっているとか、そういう Macdonald 多項式に関係する周辺の話色々しました。もともとはアフィン Hecke 環からのアプローチは去年の後半にしようと思ってたんですけど、前半あまりにゆったりやすぎて、そこまでいかなかったのが今回リベンジということで、アフィン Hecke 環の理論を中心にして Macdonald 多項式の理論を紹介しようというのが、今回の目標です。

前回出ておられるという方ばかりではないと思うので（でも殆どは出てるのかな）、一応前回とは独立に Macdonald 多項式の話とそれから今回は q 差分作用素の可換族の話を中心にしたいと思うので、まず Section 1「Macdonald 多項式と q 差分作用素の可換族」でその話をします。で、 q 差分作用素と関係がある q -Dunkl 作用素っていうのがあって、これを経由して q 差分作用素の可換族ができるっていうのが、アフィン Hecke 環の理論なんですけど、そういうのを Section 2「アフィン Hecke 環と q -Dunkl 作用素」でやります。それからアフィン Hecke 環で理論を組み立てたことにより、Macdonald 多項式って（今日お話しするのは A 型 GL 版なんですけど）一般のルート系でも定式化することができて、そういう状況で Macdonald 多項式がもっている色々な性質をアフィン Hecke 環の代数的な構造論から導くことができるという話があります。その部分の 1 つの応用例を Section 3「二重アフィン Hecke 環とその応用」で話します。大体、2 日間でこんなストーリーで話すことを考えています。

それで文献としては、まず昨年度の超幾何学校 2015 の話は渋谷さん（阪大）と宮永さん（神大）が作ってくださった講義ノートがあって、これが今回の 2016 年

の超幾何学校のホームページ¹に行くとそこに PDF が置いてありますので、それは適宜参考にいただければと思います。それから基本文献は

[M] I. G. Macdonald: *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Cambridge tracts in Math. **157** Cambridge University Press, 2003.

です。これは一応 Macdonald 多項式のアフィン Hecke 環からのアプローチに関する基本文献で、大体皆さんこの本を勉強されるんですけど、非常に一般的な設定で書かれていて必ずしも読みやすい本ではないので、少し違う観点から（むしろ超幾何とか、 q 差分作用素の可換族の方をメインにして）全体的なストーリーがどうなっているかを紹介したいというのが今回の講義の目的です。

アフィン Hecke 環の理論を使って Macdonald の理論を定式化するっていうのは、1990 年代の半ばぐらいに Cherednik という人がはじめたことで、Macdonald 自身はこういうアフィン Hecke 環を使うような話ではなくてもう少し古典的な、直交函数系の理論として考えていました。ただルート系一般で理論を考えるにはアフィン Hecke 環を使うのがよいというのは Cherednik の着想で、いうなれば Macdonald-Cherednik 理論と言った方がよいでしょうけれども、内容的にはこの基本文献にあるようなストーリーで今回お話をします。

で、「雑談」をすると長くなるのでサラッと行きたいんですけど、もともと Macdonald 多項式っていうのは表現論に出てくる球函数の q -version なんですけど、量子群というのは Lie 環の普遍包絡環の q 変形だから、そういう量子群的な設定でも Macdonald 多項式が出てくるということがあって、僕自身はそういうことを 90 年代の前半ぐらいに主に色々やっていました。Macdonald 多項式が出てくるような表現論的設定っていうのは、そういった量子群の話っていうのもあるんですけど、ある意味では Hecke 環の方がより本質的に Macdonald 多項式の理論そのものに関わっているという言い方もできるんだろうと思います。

1 Macdonald 多項式と q 差分作用素の可換族

「Macdonald 多項式もある意味超幾何ですよ」という話は前回散々やったのでその辺の話はすっ飛ばしますが、Heckman-Opdam の超幾何函数というのをご存知であれば、その q 差分版にあたるものです。

1.1 対称 Laurent 多項式環

で、まず設定ですけど、対称な Laurent 多項式環の記号を固定するところからはじめます。前回是对称な (Laurent ではない) 多項式環でやったんですけど、こう

¹高山信毅編「超幾何学校 2014/2015 講義録」Rokko Lectures in Mathematics **24**, 2016 (<http://www.math.kobe-u.ac.jp/publications/rlm24.pdf>) を参照してください。

いうアフィン Hecke 環の議論をするときは Laurent 多項式でやる方が具合がいいので今回は Laurent 多項式環でやります.

$\mathbb{K}$ と書いて標数 0 の体を 1 つ固定して, $x = (x_1, \dots, x_n)$ とします. これは n 次元の代数的トーラスの座標系ですが, この $x = (x_1, \dots, x_n)$ の $\mathbb{K}$ 係数の Laurent 多項式環を $\mathbb{K}[x^{\pm 1}] := \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ と書きます. 更に ε_1 から ε_n までを基底とするような free な $\mathbb{Z}$ 加群 $P := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i \simeq \mathbb{Z}^n$ を考えます. こういうのは GL_n のウェイト格子と呼ばれているものですが, P の元を $\mu = \mu_1\varepsilon_1 + \dots + \mu_n\varepsilon_n$ を基底 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ の整数係数の一次結合だという風を書いて, $\mathbb{Z}^n$ のベクトル (多重指数) と同一視することにします.

$$\mu = \mu_1\varepsilon_1 + \dots + \mu_n\varepsilon_n \quad \longleftrightarrow \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n).$$

またこの多重指数 μ に対応する単項式を $x^\mu := x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n}$ と書いて, この次数を μ の長さ $|\mu| := \mu_1 + \dots + \mu_n$ で $\deg(x^\mu) := |\mu|$ 定義するとします. これを用いると先ほど導入した $\mathbb{K}$ 係数の Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ は, 実際には x^μ を基底とするような無限次元の $\mathbb{K}$ 上の線型空間になります.

$$\mathbb{K}[x^{\pm 1}] = \bigoplus_{\mu \in P} \mathbb{K}x^\mu.$$

これは加法群としての P の群環 $\mathbb{K}[P]$ の乗法的表現, つまりウェイト格子 P では加法的に書いていたものを, 形式上 $x = (x_1, \dots, x_n)$ の肩に乗せて乗法的に書いたもの, になっています².

これが Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ ですが, この上には Weyl 群 W , 今の場合は n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$, が $\mathbb{K}$ -代数の自己同型群として作用しています. つまり各変数 x_i に対して, 1 から n までの添え字の入れ替えで作用して, それが $\mathbb{K}$ -代数の準同型にまで延長されます.

$$\begin{array}{ccccc} W & \curvearrowright & \mathbb{K}[x^{\pm 1}] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \\ \psi & & \psi & & \psi \\ w & \curvearrowright & x_i & \mapsto & w.x_i := x_{w(i)} \end{array}.$$

また Weyl 群 W はウェイト格子 P にも作用するわけですが, こちらは P の基底 ε_i に対して $w.\varepsilon_i := \varepsilon_{w(i)}$ で作用します. これは $x_i = x^{\varepsilon_i}$ とみなすと

$$w.x_i = x_{w(i)} = x^{\varepsilon_{w(i)}} = x^{w.\varepsilon_i}$$

と先ほどの $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用と consistent になっています. ただ混乱するといけなくて少し言っておきますが, P の元 $\mu = \mu_1\varepsilon_1 + \dots + \mu_n\varepsilon_n$ を多重指数 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ とみなした場合, 先ほどは「場所の入れ替え」であつたのに対し, 多重指数への作

²もしわからない言葉を言い始めたら, 質問してください. その都度説明しますので.

用は「成分の入れ替え」という操作になっていて、これは

$$\begin{aligned} w \cdot \mu &= \mu_1 w \cdot \varepsilon_1 + \cdots + \mu_n w \cdot \varepsilon_n \\ &= \mu_1 \varepsilon_{w(1)} + \cdots + \mu_n \varepsilon_{w(n)} \\ &= \mu_{w^{-1}(1)} \varepsilon_1 + \cdots + \mu_{w^{-1}(n)} \varepsilon_n \quad \longleftrightarrow \quad (\mu_{w^{-1}(1)}, \dots, \mu_{w^{-1}(n)}) \end{aligned}$$

のように w^{-1} で移していることに注意してください.

$$\begin{array}{ccc} W & \curvearrowright & P \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ w & \curvearrowright & \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \xrightarrow{\cong} & & P \\ & & \Downarrow \\ \mapsto & & w \cdot \mu := (\mu_{w^{-1}(1)}, \dots, \mu_{w^{-1}(n)}) \end{array} .$$

多重指数への Weyl 群の作用をこう定めると, x^μ に対して

$$w(x^\mu) = x^{w \cdot \mu}$$

のように w の単項式への作用と多重指数の作用とが consistent になります.

それで対称 Laurent 多項式環を考えたいんですけど, 定義は簡単で Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ の W 不変式環

$$\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W := \{f \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \mid w \cdot f = f \ (w \in W)\} \subseteq \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$$

になります. で, 不変式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ を書こうと思ったらどうするかっていうと, Weyl 群 W がウェイト P に作用する様子をみればいいんです. 特に多重指数の成分に大小関係を大きい順に揃えた

$$P^+ := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$$

というものを考えると, P の任意の元は W の作用で適当に入れ替えると P^+ の元となり, かつそういう元はただ 1 つに定まるので, これは

$$P^+ \xrightarrow{\cong} W \backslash P$$

のように P の W 軌道の完全代表系になっています. これはなんて呼ぶのかいつも困るんですが, 表現論では「the cone of dominant integral weight」と呼ばれるもので, 「dominant」を「支配的」と呼ぶことにすれば³, 支配的整ウェイトのコーンの完全代表系を与える, そういう風になってます. ということから結局 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の $\mathbb{K}$ 基底を作ることができます. ここで今 2 つ基底を書きます.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W &= \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K} m_\lambda(x) = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K} s_\lambda(x). \\ \cup \\ \mathbb{K}[x^{\pm 1}] &= \bigoplus_{\mu \in P} \mathbb{K} x^\mu \end{aligned}$$

³前回は「支配的」じゃなくて「優」って言ったのかな?

1 つは (A 型の場合は) 単項型 (monomial) 対称式と呼ばれる

$$m_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W \cdot \lambda} x^\mu$$

ものです. つまり $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の元は x^μ の一次結合で書けるわけですが, それが W 不変になるためには「同じ W 軌道に属している単項式 x^μ の係数は同じ」という条件を課せばよいので, それぞれの軌道ごとにそういう単項式の和 (軌道 和) を考えてやれば, それが $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の基底になるわけです.

もう 1 つの $s_\lambda(x)$ は

$$s_\lambda(x) := \frac{\det (x_j^{\lambda_i + n - i})_{i,j=1}^n}{\Delta(x)}$$

で定まる Schur 関数です⁴. ここで $\Delta(x)$ は差積, つまり Vandermonde の行列式

$$\Delta(x) = \Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \det (x_i^{n-j})_{i,j=1}^n$$

で, 分子 $\det (x_j^{\lambda_i + n - j})_{i,j=1}^n$ の方も行列式で交代式です. 一般的に対称な Laurent 多項式は, 交代的な Laurent 多項式を差積で割ったもので実現できます. なので, これは同じく交代式である分母の差積 $\Delta(x)$ で割り切れて, $s_\lambda(x)$ は体 $\mathbb{K}$ の中の対称な Laurent 多項式で, $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の基底になっていることに注意してください.

更に

$$\delta := (n-1, n-2, \dots, 0)$$

という記号を導入すると, $\lambda + \delta := (\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \dots, \lambda_n)$ なので, Schur 関数は $\delta_i, (\lambda + \delta)_i$ でそれぞれ $\delta, \lambda + \delta$ の i 成分とすると

$$s_\lambda(x) := \frac{\det (x_j^{(\lambda + \delta)_i})_{i,j=1}^n}{\det (x_j^{\delta_i})_{i,j=1}^n}$$

のように書けます⁵.

聴講者: λ_1 から λ_n は負でも良いのですか?

普通は非負としますが, 今日は負でも構いません.

1.2 Macdonald 多項式

それで表題の Macdonald 多項式ですが, ここでは係数体として, 不定元 q, t に関する有理関数体 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, t)$ をとります. さて, 次の $\mathbb{K}(x)$ 係数の q 差分作用素を考

⁴これは GL_n の有限次元既約表現の指標を固有値のパラメータで書いたものでもあります.

⁵この辺の話は前回やって, Schur 関数には組合せ論的意味があるとか, 色んな説明をしました, 今日はそういうところは踏み込みません.

えてみましょう.

$$D_x := \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}.$$

ただし, T_{q,x_i} は x_i に関する q -shift operator です.

$$T_{q,x_i} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n).$$

ここで D_x の各 T_{q,x_i} の係数に x の有理式が出てきていますが, これは分母の差積 $\Delta(x)$ はそのまま, 分子の方は差積 $\Delta(x)$ の x_i に t 差分 T_{t,x_i} を当てたものになっているので

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{T_{t,x_i}(x_i - x_j)}{x_i - x_j} = \frac{T_{t,x_i}(\Delta)(x)}{\Delta(x)}$$

となります. なので D_x は

$$D_x = \sum_{i=1}^n \frac{T_{t,x_i}(\Delta)(x)}{\Delta(x)} T_{q,x_i}$$

とも書けます.

聴講者: そこ $\left(\frac{T_{t,x_i}(\Delta)(x)}{\Delta(x)} \right)$ は Laurent 多項式環 (の元) ですか? $\mathbb{K}[x]$ ですか?

係数は Laurent 多項式ではなく有理函数です.

聴講者: ああ (板書が) $\mathbb{K}(x)$ じゃなくて $\mathbb{K}[x]$ にみえました.

つまり D_x は $\mathbb{K}(x)$ 係数の q 差分作用素です. 作用素が有理函数係数なので, Laurent 多項式を (Laurent 多項式に) 保つかは一見当たり前じゃないんですけど, 次のようなことがわかります. まず D_x は有理函数体 $\mathbb{K}(x)$ については自然に作用できて, $\mathbb{K}$ 線型な線型作用素, $D_x \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$ だということはいいですね. ただ勝手な Laurent 多項式に作用させても, また Laurent 多項式になるわけではありません. つまり一般には

$$D_x(\mathbb{K}[x^{\pm 1}]) \not\subseteq \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$$

なわけです. しかし対称な Laurent 多項式環については

$$D_x(\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}) \subseteq \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$$

が成り立ちます. これは次のようにしてわかります. この作用素 D_x は x の添え字の入れ替えに対して対称です. しかも D_x は Weyl 群不変なので,

$$\Delta(x) D_x = \sum_{i=1}^n T_{t,x_i}(\Delta)(x) T_{q,x_i}$$

は $K[x]$ 係数の作用素になります。交代的な Laurent 多項式は通分すると、分子が交代的な多項式になり、これは差積で割り切れて対称な多項式になることに注意しましょう。なので交代的な Laurent 多項式は差積で割り切れて、結局 D_x の対称な Laurent 多項式への作用はまた対称な Laurent 多項式になるわけです。全く同様なことが多項式 $K[x]$ の場合にも言えます⁶。

以上の準備を基に Macdonald 多項式の定義ができます。

定理 1.1. 任意の $\lambda \in P^+$ に対し、

$$(1) P_\lambda(x) = \sum_{\lambda \geq \mu} p_{\mu\lambda} m_\mu(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} u_{\mu\lambda} m_\mu(x) = x^\lambda + (\text{lower terms}), \quad (1.1)$$

$$(2) D_x P_\lambda(x) = P_\lambda(x) d_\lambda, \quad d_\lambda = \sum_{i=1}^n t^{n-i} q^{\lambda_i}, \quad (1.2)$$

を満たす対称な Laurent 多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x \mid q, t)$ が一意に存在する⁷。これを $\lambda \in P^+$ に付随する (A 型 GL 版の) Macdonald 多項式とよぶ。

ここで $\geq$ は dominance ordering (支配的順序) といって、

$$\mu \leq \lambda \iff \lambda - \mu \in Q_+ := \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_{n-1}, \quad \alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$$

で定まる半順序です。ここで $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, n-1}$ は A_{n-1} 型の単純ルートと呼ばれるものですが、つまり dominance ordering は (その差が) 単純ルートの非負整数係数の一次結合で書けることです。今の場合、 μ と λ の成分を考えて次のように考えても良いです。

$$\mu \leq \lambda \iff \begin{cases} (1) \mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i & (i = 1, \dots, n-1) \\ (2) \mu_1 + \cdots + \mu_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n & (|\mu| = |\lambda|) \end{cases}.$$

1.3 いくつかの註釈

この辺の説明は前回もやって、定理の証明も述べましたので簡単に。まず $D_x : \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ は dominance ordering について三角で

$$D_x(m_\lambda(x)) = d_\lambda m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu(x).$$

を満たします⁸。leading term $m_\lambda(x)$ の係数が d_λ になることもわかりますが、これは前回もやりました。実際にさっきの作用素 D_x を展開して、主要項が何かを計算し

⁶これは去年やりました。

⁷「s.t.」って略語はカッコ悪いので使いたくないですけど。

⁸これを上三角とみるか、下三角とみるかは添え字のつけ方によって変わるんですけど、今の場合は λ を行、 μ を列とみて小さい順に並べたと思えば下三角です。

てやれば最初の係数が何かは計算できるわけです. そこは認めてもらって, 今, q, t は generic ですから固有値は λ ごとに異なることに注意してください. 固有値が異なる下三角行列は対角化できますよね. そういう意味で対角化できて, それで固有函数 (Macdonald 多項式) ができるという仕組みです.

あともう 1 つ注釈として, 今三角性が出ましたので Macdonald 多項式自身も monomial 対称式 $m_\lambda(x)$ について三角で, (三角行列の) 対角線は 1 になってます. で $P_\lambda(x)$ は $m_\mu(x)$ で μ が λ 以下のものを使って書けるわけですが, 逆に $m_\lambda(x)$ たちも $P_\mu(x)$ で μ が λ 以下のものを使って逆に解くこともできますから, 結局 $P_\lambda(x)$ っていうのが P^+ の上を渡るようにすると W 不変な Laurent 多項式環の基底になります.

$$\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K}P_\lambda(x).$$

ここで, $t = q^k$ として, t の特殊化を考えてみましょう.

$k = 0 (t = 1)$ この場合, さっきの作用素は

$$D_x = \sum_{i=1}^n T_{q, x_i}$$

というやつで, Macdonald 多項式は monomial 対称多項式になります. 実際,

$$D_x m_\lambda(x) = \sum_{i=1}^n T_{q, x_i} \sum_{\mu \in W \cdot \lambda} x^\mu = \sum_{\mu \in W \cdot \lambda} \sum_{i=1}^n q^{\mu_i} x^\mu = m_\lambda(x) \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i}.$$

ようするに q -shift するだけで固有値 $d_\lambda = \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i}$ が出てきて, 固有函数になるっていうのはすぐにわかるので, こうなります.

$k = 1 (t = q)$ これは

$$D_x = \sum_{i=1}^n \frac{T_{q, x_i}(\Delta(x))}{\Delta(x)} T_{q, x_i} = \frac{1}{\Delta(x)} \left(\sum_{i=1}^n T_{q, x_i} \right) \Delta(x)$$

より, 先ほどの $t = 1$ のときの D_x を差積 $\Delta(x)$ で共役変換したものになります. この場合の $P_\lambda(x)$ は Schur 函数, つまり $P_\lambda(x) = s_\lambda(x)$ です. 実際, Schur 函数っていうのは差積分の交代式なので

$$D_x s_\lambda(x) = \frac{1}{\Delta(x)} \left(\sum_{i=1}^n T_{q, x_i} \right) \det (x_i^{\lambda_j + n - j})_{i,j=1}^n$$

となって分子の交代式部分の作用を計算すると

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^n T_{q, x_i} \right) \det (x_i^{\lambda_j + n - j})_{i,j=1}^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^n T_{q, x_i} \right) \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) x_1^{\lambda_{w(1)} + n - w(1)} \cdots x_n^{\lambda_{w(n)} + n - w(n)} \\
&= \sum_{w \in W} \sum_{i=1}^n q^{\lambda_{w(i)} + n - w(i)} \operatorname{sgn}(w) x_1^{\lambda_{w(1)} + n - w(1)} \cdots x_n^{\lambda_{w(n)} + n - w(n)} \\
&= \det (x_i^{\lambda_j + n - j})_{i,j=1}^n \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i + n - i}
\end{aligned}$$

となるので, Schur 関数 $s_\lambda(x)$ が D_x の固有値 d_λ の固有函数であることがわかるわけだ。

$k = \frac{1}{2}$ ($t = q^{\frac{1}{2}}$) これは GL_n/SO_n ⁹ の球函数 (帯球函数), いわゆる zonal 多項式という統計に出てくる対称式に対応していて, その q 変形にあたるものです。

$k = 2$ ($t = q^2$) こちらは GL_{2n}/Sp_{2n} の球函数の q 変形にあたるものです。

matrix ensemble とかを知っている人は, $k = \frac{1}{2}, 1, 2$ がそれぞれ SO, Gaussian, Sp ensemble に対応していることがわかるでしょう。つまり, A 型のときはこの 3 つが (群の) 表現論的解釈を持つ場所です。

話を戻します。今, 顕わに D_x という q 差分作用素を導入しました。それは対称な Laurent 多項式環 $K[x^{\pm 1}]^W$ に作用するので, その固有値でもって固有空間分解しなさい, と。そうするとそれぞれの固有空間は 1 次元になっていて, それで適当に規格化したのが¹⁰, Macdonald 多項式ということでした。

聴講者: Macdonald Laurent 多項式ですか?

正確にはね。そうそう, それを言おうと思ってたんだ。さきほども述べたように, 今回は

$$P^+ := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n\}$$

を考えて, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が負になる場合も考えています。でも前回は,

$$L^+ := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

というのを自然数の組を考えました。Laurent 多項式環というのは, これを整数も許したものです。今も雑に Macdonald 多項式と言いましたが, 正確には Macdonald Laurent 多項式です。普通に「Macdonald 多項式」と言ったときには, Laurent 多項式ではなく, 本当の多項式だけの場合を考えられます¹¹。

⁹ Gelfand pair (GL_n, SO_n) .

¹⁰ dominance ordering の leading term の monomial 対称多項式の係数を 1 にするように規格化。

¹¹ そのときには, L^+ の元を (成分数が n 以下の) 分割と呼んで, Young 図形を用いて表します。

これも前回やりましたが, n 番目の基本 weight

$$\varpi_n := \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = (1, 1, \dots, 1)$$

を考えましょう. これを用いると, 任意の整数 l について

$$P_{\lambda+l\varpi_n}(x) = (x_1 \cdots x_n)^l P_\lambda(x)$$

が成り立ちます. これは実際に左辺と右辺が D_x の固有値 $d_{\lambda+l\varpi_n}$ の固有函数で, leading の monomial 対称式 $m_{\lambda+l\varpi_n}(x)$ の係数も共に 1 に規格化されていることからわかります. 一般に, 任意の $\lambda \in P^+$ に対して, 適当に整数 l を選べば

$$\mu := \lambda + l(1, \dots, 1) \in L^+$$

とすることができますよね. つまりその分だけ x_1 から x_n のべきをずらせば, Macdonald Laurent 多項式が本当の多項式になります. このときは去年やったように

$$\mathbb{K}[x]^W = \bigoplus_{\mu \in L^+} \mathbb{K} P_\mu(x)$$

となるわけです.

聴講者: すいません. あとで述べられるのかもしれませんが, t というか k ですか. それが 1 とか 2 とかの場合には表現論的意味があるようですが, 一般に t というパラメータを入れられた動機というか, ご利益というのはどういうところにあるのでしょうか.

この t は Hecke 環のパラメータなので, Hecke 環のレベルだったら t が任意で表現ができる, そういうようなことですかね. ここで $2k$ が, 対称空間でいうと, 制限 root 系に対応する root の重複度のパラメータなので, 大体は整数しか取りません. それを (微分 or 差分) 方程式を書くときには連続変形できて, 可換な (作用素) 族が決まるので, 「そういうのを考えるのは意味があるね」っていうのが Heckman-Opdam の超幾何函数とかそういうのになっているわけです.

ともかく少し言葉足らずだったかもしれないけど, 前回が多項式だったものを, 今回は Laurent 多項式にしてしまいました. なので Macdonald 多項式と言っても, 大体は Macdonald Laurent 多項式です. よろしいですかね.

1.4 q 差分作用素の可換族 (Ruijsenaars-Macdonald)

ずいぶん時間が経ってますね, すでに. なるべくはやく一応の結論を言いましょう.

大事なのは q 差分作用素の可換族があるということで、これも一応前回説明はしたんですけど、この族は Ruijsenaars¹²-Macdonald の q 差分作用素と僕らはよく呼んでいます。これは $r = 0, 1, \dots, n$ に対して、集合 $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ の濃度 r の部分集合 I に対して、

$$D_x^{(r)} := \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=r} t^{\binom{r}{2}} \left(\prod_{i \in I, j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \right) \prod_{i \in I} T_{q, x_i}$$

で定まるものです。ここで

$$T_{q, x}^I := \prod_{i \in I} T_{q, x_i}$$

とすれば、 D_x と同様に

$$D_x^{(r)} = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=r} \frac{T_{t, x}^I \Delta(x)}{\Delta(x)} T_{q, x}^I$$

のように書き換えられます。おつりの $t^{\binom{r}{2}}$ は、差積 $\Delta(x) = \prod_{k < l} (x_k - x_l)$ の k, l が両方とも I に属している項が t 倍されて、それが $\binom{r}{2}$ 個あることから出てきます。いくつか書き出してみると、

$$D_x^{(0)} = 1, D_x^{(1)} = D_x, D_x^{(2)} = t^{\binom{2}{2}} T_{q, x_1} \cdots T_{q, x_n}$$

となっています。つまり $r = 0$ のときは 1 , $r = 1$ のときはさっきの D_x , 最後の $D_x^{(n)}$ は次数を測る Euler 作用素です。

ここで定理を述べましょう。

定理 1.2. (0) 各 $D_x^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) は W 不変な q 差分作用素で、 W 不変な Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ を保つ。

(1) 各 $D_x^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) は互いに可換である。

$$D_x^{(r)} D_x^{(s)} = D_x^{(s)} D_x^{(r)} \quad (r, s = 0, 1, \dots, n).$$

(2) Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ は $D_x^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) の同時固有函数である。

$$D_x^{(r)} P_\lambda(x) = P_\lambda(x) e_r(t^\delta q^\lambda).$$

ただし、 $e_r(x)$ は r 次の基本対称式

$$e_r(x) := \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=r} \prod_{i \in I} x_i$$

で $t^\delta q^\lambda := (t^{n-1} q^{\lambda_1}, \dots, t q^{\lambda_{n-1}}, q^{\lambda_n})$.

¹² 「ラウセナース」で「Ruijsenaars」です。あ、オランダ人なんですけど、オランダ語って不思議ですね。

少し説明すると、まず (0) は D_x のときと同様ですね。で (1) と (2), これが大事なんですけども、さっき Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ は 1 個の作用素 D_x の固有函数と思ったんだけど、実際には $D_x^{(2)}$ から $D_x^{(n)}$ っていう他の $n-1$ 個の、 $D_x^{(1)} = D_x$ と可換のなるような q 差分作用素があります。だけど互いに可換ですから、それぞれの作用素は $D_x^{(1)}$ の 1 次元の各固有空間を保たなければならないので、Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ は $D_x^{(2)}$ から $D_x^{(n)}$ の固有函数にもならなければならないわけです。つまり代数的独立な¹³ n 個の q 差分作用素が存在して、Macdonald 多項式はその同時固有函数になっているというわけです。

で、基本的な問い¹⁴というのは

問. この q 差分作用素の可換族はどこから来たのか？

ということになります。たとえば「 n 変数の函数空間に作用する作用素で可換、かつ当たり前でないものを作る」というのはすごい難しい問題で、たいていは何やってたってできないんだけど、非常にラッキーな状況があると Ruijsenaars-Macdonald 作用素のような非自明な可換族ができたりするわけです。

Ruijsenaars-Macdonald 作用素について言えば、 $\mathbb{K}[D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n)}]$ は、固有値で見ると基本対称式っていうんだから、大体なんかの意味での W 不変式環にみえますよね。なので「(Harish-Chandra 的に) なんかの意味でそういうところから由来するんだろう」と思うわけです。さっき「球函数の設定 ($k = \frac{1}{2}, 2$)」とか言いましたが、量子群とかなんかで考えると、こういう作用素っていうのは量子包絡環の中心から来ます。中心の元の動径成分というのを計算するとちょうど $D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(r)}$ が出てくる仕組みになっています。それから次の第 2 節でやるアフィン Hecke 環というものを考えると、「アフィン Hecke 環の中心に由来してこういう可換なものが出てくるよ」という説明になります。っていうことを今から説明したいというわけです。

聴講者：ここまでは去年の話ですね。

うん。でも、まあ…、ここまで言っておかないと…。

高山：焦らなくても終わらなかったらまた来年もありますので。

いやいやいや (笑), さすがにそこまでは…、ちょっと…。

¹³固有値が基本対称式だから generic には代数的独立。

¹⁴練習問題という意味ではありません。

2 アフィン Hecke 環と q -Dunkl 作用素

「どうしてこういう非自明な可換な作用素の族がありうるのか」, その1つの説明がアフィン Hecke 環です. こういうものを考えるとこういう作用素の族の由来がわかるということを説明したいわけです.

まず有理関数係数の q 差分作用素環

$$\mathcal{D}_{q,x} := \mathbb{K}(x)[T_{q,x}^{\pm 1}] \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$$

を考えましょう. これもどう思ってもらってもいいですが, 抽象的に考えてもよし, あるいは有理関数体上の線型作用素全体がつくる End の中の部分環だと思ってもらってもいいです. あるいは $\mu \in P$ で添え字付けられた有理関数 $a_{\mu}(x) \in \mathbb{K}(x)$ を用いて

$$A(x; T_{q,x}) = \sum_{\mu \in P} a_{\mu}(x) T_{q,x}^{\mu} \quad (\text{有限和})$$

と書いた元全体と言ってもいいです. ただし,

$$T_{q,x}^{\mu} := T_{q,x_1}^{\mu_1} \cdots T_{q,x_n}^{\mu_n}$$

で

$$T_{q,x}^{\mu} f(x_1, \dots, x_n) = f(q^{\mu_1} x_1, \dots, q^{\mu_n} x_n)$$

のように作用します.

すいません, $\mathbb{K}(x)[T_{q,x}^{\pm 1}]$ の q 差分作用素 $T_{q,x}^{\pm 1}$ の部分を多項式環みたいに $[\]$ で書いてますが, q 差分作用素は係数 $\mathbb{K}(x)$ や $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ の元とは一般に可換ではないので注意してください. 「多項式環の $[\]$ の部分は必ず可換 (環) でなければならない」と思っている人がいたら, とりあえずその固定観念は捨ててください. 非可換環でも大体こういう記号で書いてしまってますので.

聴講者: ねじれ群環みたいな感じですね.

そうです. ようするに q 差分作用素が有理関数体に作用していて, その接合積です.

それから僕はなるべく包含関係を書くとき, 等号が許される場合には横線を入れるようにしていますが, 忘れて等号が書いていない場合でも「絶対に等号にはならない」という意味では必ずしもなかったりするので気にしないでください.

聴講者: 去年も同じことをおっしゃいましたね.

はい (笑). いつも気にしてるんですけど...

で, さっき作った $D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n)}$ を用いて, Ruijsenaars-Macdonald の q 差分作用素のつくる可換環 $\mathbb{K}[D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n-1)}, (D_x^{(n)})^{\pm 1}]$ を考えます. ここで $D_x^{(n)}$ は先ほど説明したように Euler 作用素 $D_x^{(n)} = t^{\binom{n}{2}} T_{q,x_1} \cdots T_{q,x_n}$ なので, 逆

$$(D_x^{(n)})^{-1} = t^{-\binom{n}{2}} T_{q,x_1}^{-1} \cdots T_{q,x_n}^{-1}$$

が $\mathcal{D}_{q,x}$ 内に存在するのでそれも仲間に入れてしまっています. で, この可換環は

$$\mathbb{K}[D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n-1)}, (D_x^{(n)})^{\pm 1}] \subseteq \mathcal{D}_{q,x}^W,$$

つまり W 不変な有理函数係数の q 差分作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}^W$ に入っています. ただし, Weyl 群 W の $\mathcal{D}_{q,x}$ への作用は

$$w(A(x; T_{q,x})) = \sum_{\mu \in P} w(a_\mu(x)) T_{q,x}^{w, \mu}$$

のように, 係数の有理函数 $a_\mu(x)$ には $\mathbb{K}(x)$ への作用, 差分作用素の部分には多重指数 μ への作用でもって定めるとします. とにかく, W 不変な q 差分作用素環の中に可換な q 差分作用素環ができていて, そういう状況になっているわけです. もちろんそういう種類のものは, 簡単なものは, 色々あるんだけど, Ruijsenaars-Macdonald のように非自明なものが q 差分作用素環としてつくれるというわけです.

だから「こういう q 差分作用素環を考えることは大事だね」と思ったことにしましょう. 実際, Hecke 環を考える際にも $\mathcal{D}_{q,x}$ 以外の q 差分作用素環をいくつか考える必要があるので, 以下その紹介をします. まず, ここまでは係数が有理函数であって, Laurent 多項式ではありませんでした. この $\mathbb{K}$ 係数の Laurent 多項式とする q 差分作用素環は

$$\mathbb{K}[x^{\pm 1}][T_{q,x}^{\pm 1}] = \bigoplus_{\lambda, \mu \in P} \mathbb{K} x^\lambda T_{q,x}^\mu \subseteq \mathcal{D}_{q,x}$$

のように書くことができます. 先ほども注意したように, これは可換環ではないので, 特に x^λ と $T_{q,x}^\mu$ の (x^λ を掛け算作用素と思ったときの) 交換関係が問題になります. これは

$$T_{q,x}^\mu x^\lambda = q^{\langle \mu, \lambda \rangle} x^\lambda T_{q,x}^\mu$$

となります. ただし, 内積は

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : P \times P \rightarrow \mathbb{Z} \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$$

で定めます¹⁵. 微分の場合, こういうのは Heisenberg 代数といいます¹⁶, $\mathbb{K}[x^{\pm 1}][T_{q,x}^{\pm 1}]$ はその q 版にあたるものです.

¹⁵ つまり P を基底 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ について数ベクトルで書いたときの普通の内積.

更に別の q 差分作用素環として, Weyl 群 W が $\mathcal{D}_{q,x}$ に作用していることに注意して, Weyl 群と $\mathcal{D}_{q,x}$ の接合積¹⁶

$$\mathcal{D}_{q,x}[W] := \mathcal{D}_{q,x} \rtimes W = \bigoplus_{w \in W} \mathcal{D}_{q,x} \cdot w$$

を考えます. 言い方は良くないかもしれませんが, $\mathcal{D}_{q,x}$ の Weyl 群付きの q 差分作用素環です. つまり, $A \in \mathcal{D}_{q,x}$ に作用が $w \in W$ の共役

$$w(A) := wAw^{-1}$$

で定まる代数構造を入れます. $A_1, A_2 \in \mathcal{D}_{q,x}, w_1, w_2 \in W$ に対し, 積を書けば

$$(A_1 \cdot w_1)(A_2 \cdot w_2) = A_1(w_1 A_2 w_1^{-1}) \cdot w_1 w_2$$

のようになります.

すいません, この辺で少し記号を変えます¹⁷. 以下, T_{q,x_i} を τ_i と書くことにします. これに合わせて, $T_{q,x}^\mu$ も

$$\tau^\mu := \tau_1^{\mu_1} \cdots \tau_n^{\mu_n} = T_{q,x}^\mu$$

と書けば, 先ほどの交換関係は

$$\tau^\mu x^\lambda = q^{\langle \mu, \lambda \rangle} x^\lambda \tau^\mu$$

となります.

これを用いて, 上述した q 差分作用素環を書き出してみると, 以下のようになっています.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}_{q,x}[W] & \\ & \cup & \\ & \mathbb{K}[x^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}][W] & \\ \subset & & \supset \\ \mathbb{K}[x^{\pm 1}][W] & & \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W] \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{K}[x^P \rtimes W] & & \mathbb{K}[\tau^P \rtimes W] \end{array} .$$

ここで $\mathbb{K}[x^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}][W]$ は $x^{\pm 1}$ と $\tau^{\pm 1}$ が可換ではないので, 「;」を使っています. また前に説明したとおり, ウェイト格子 P に Weyl 群 W が作用しているので, その半直積を

$$\widetilde{W} := P \rtimes W$$

¹⁶接合積って業界によって色んな言い方がありますよね. 群の場合は半直積って言うんだけど, crossed product と言ったり, smash product と言ったり.

¹⁷Hecke 環で T と書くと別の意味で使うので.

を拡大アフィン Weyl 群と呼びます. ここに出てきている $x^P \rtimes W$ や $\tau^P \rtimes W$ は, 格子の部分を乗法的に書いたもので, こちらもそれぞれ拡大アフィン Weyl 群と呼ばれます. 以下, こちらの方を $\widetilde{W} := \tau^P \rtimes W$ としましょう. つまり Weyl 群付きの q 差分作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の中に 2 つのアフィン Weyl 群が入っているわけです.

それでやるべきことは何かというと, $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ を, それを含んでいる $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の中で t 変形して, 拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ をつくります. ここで出てきた t は Macdonald の定義に出てきた q と t のうちの t です¹⁸. もともと $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ が q -shift operator で実現されているので, q の方はある意味最初から入っています. もう時間がないのでどうやってつくるのかは明日説明しますが, ともかく $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ を t 変形した拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ をつくります. それから, 元の $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ には q 差分作用素から構成される n 変数 Laurent 多項式環 (可換環) $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ が含まれていますが, これに相当する n 変数 Laurent 多項式環と同型な可換環 $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ を, $H(\widetilde{W})$ の中につくるということをやります. ここで Y は operator の組で $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ と書いてこいつらのことを q -Dunkl 作用素といいます.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W] & \supset & \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}] \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \\ t \text{ 変形} \quad \downarrow & & \downarrow \\ H(\widetilde{W}) & \supset & \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \quad Y = (Y_1, \dots, Y_n) \end{array}.$$

こういった代数 A の中心 (center)

$$\mathcal{Z}(A) := \{z \in A \mid az = za \ (a \in A)\}$$

を考えると, $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ の中心 $\mathcal{Z}(\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W])$ は $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]$ の Weyl 群不変な部分 $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W$ になりますが, 拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ の中心 $\mathcal{Z}(H(\widetilde{W}))$ も q -Dunkl 作用素のなす n 変数 Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ の Weyl 群不変な部分全体 $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W$ になります. これの生成元を対応させると, 基本対称式で不変式環が生成されるはずなんですけど, $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W$ と Ruijsenaars-Macdonald 作用素のなす可換環

$$\mathbb{K}[D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n-1)}, (D_x^{(n)})^{\pm 1}]$$

が自然に対応します.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}] & \supset & \mathcal{Z}\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W] = \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W \\ t \text{ 変形} \quad \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] & \supset & \mathcal{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W \simeq \mathbb{K}[D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n-1)}, (D_x^{(n)})^{\pm 1}] \end{array}.$$

いいかえると, アフィン Hecke 環の中心 $\mathcal{Z}H(\widetilde{W})$ から, さっき述べた q 差分作用素の可換族 (Ruijsenaars-Macdonald 作用素) が構成できる, という話になります.

実際にアフィン Weyl 群の群環 $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ をどのように t 変形して $H(\widetilde{W})$ を得るか, あるいは q -Dunkl 作用素をどのように構成するか. またそういう代数的な構成

¹⁸ $t = 1$ のときは monomial で, $t = q$ のときは Schur だって言ったんですけど.

法から Macdonald 多項式についてどんなことがわかるかとか, そういう話を明日やります.

聴講者: $\widetilde{W}$ なんですけど, それを $x^P \rtimes W$ と書いたり, $P \rtimes W$ と書いたりするのは, 乗法的に書いているか, 加法的に書いているかの...

違いだけです.

聴講者: 今 $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W] \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$ の中心

$$\mathcal{Z}\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W] = \{F' \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W] \mid F' \circ F = F \circ F' \ (F \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W])\}$$

を考えましたが, より一般に $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ の $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$ における commutant

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]' &:= \text{End}_{\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]}(\mathbb{K}(x)) \\ &= \{F' \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x)) \mid F' \circ F = F \circ F' \ (F \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W])\} \end{aligned}$$

や double commutant

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]'' &:= \text{End}_{\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]'}(\mathbb{K}(x)) \\ &= \{F'' \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x)) \mid F'' \circ F' = F' \circ F'' \ (F' \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]')\} \end{aligned}$$

については何か (その構造論や Macdonald 多項式等に該当する特殊函数) わかるのでしょうか.

ああ, それ? ... 知らない. わかりません.

2 日目

3 アフィン Hecke 環と q -Dunkl 作用素

昨日は § 2 に入って, アフィン Hecke 環と q -Dunkl 作用素という話を始め, その考え方の概要を説明したところで終わりましたので, 今日はその続きです.

3.1 アフィン Weyl 群

昨日説明したように, Macdonald の q 差分作用素の可換族というものがあって, まあそういった非自明な差分作用素の可換族をつくるっていうのは普通あまり出来ないと言いますか, 難しいことなんですけれども, この場合にはある意味で奇跡

的に面白いクラスが捕まっているという風になっていて、それを説明するためにアフィン Hecke 環というものを使います、ということでした。それでどうやるかと言いますと、アフィン Hecke 環はアフィン Weyl 群をある意味で t 変形したものを考えるということだったわけです。

もう昨日大体の記号は用意しましたね。 x と τ の Laurent 多項式を考えて、昨日は Heisenberg と言いましたが、普通の微分作用素で言うところの Weyl 代数ですね。多項式の微分作用素環に相当するところの Weyl 代数の部分です。代数も群も全部 Weyl ですね。なんでこんな風に全部 Weyl なのかは知りませんが、まあそのようになっています。実際に作用素としては、 x の有理関数体上の線型作用素として実現したと、そういう風な設定でやっていたわけです。

$$\underbrace{\mathbb{K}[x^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}]}_{\text{Weyl 代数}} \underbrace{[W]}_{\text{Weyl 群}} \subseteq \mathcal{D}_{q,x}[W] \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$$

$$\parallel \text{def}$$

$$\mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}][W]$$

念のために確認しておく、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ は掛け算作用素で、 τ は昨日は $T_{q,x}$ と書きましたが、 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ で q シフト作用素 ($\tau_i(x_j) = q^{\delta_{i,j}} x_j$) のことですね。

この中で、まず W というのは Weyl 群です。今は $\mathfrak{S}_n$ ですね。アフィン Weyl 群というのは、その Weyl 群と何か格子、つまり有限階数の自由なアーベル群との半直積を作ります。標準的に、この W のアフィン Weyl 群というときには、ルート格子との半直積をつくるのが普通です。今回は、これよりももっと大きな、ウェイト格子との半直積をつくったものも考えます。で以下のように、Weyl 群とアフィン Weyl 群 2 つという三段階になっています。

$$\begin{aligned} W &= \mathfrak{S}_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle \\ \cap \\ W^{\text{aff}} &= \tau^Q \rtimes W = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle \\ \cap \\ \widetilde{W} &= \tau^P \rtimes W = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \omega \rangle \end{aligned}$$

ここで、 Q と P はそれぞれルート格子、ウェイト格子と表現論では呼ばれているもので、次のようになっています。

$$\begin{aligned} Q &= \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_{n-1} \\ \cap \\ P &= \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n \end{aligned}$$

ここに書いた $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ というものは、

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$$

というもので、 A_{n-1} 型の単純ルートです。 Q の rank は $n-1$, P の rank は n です。今はこういった2つの格子を使っています。

また Weyl 群は、単純鏡映 (α_i に関する鏡映)

$$s_i = (i \ i+1) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

で生成されています。対称群の言葉で言えば隣接互換、隣り合う1から n の添え字のうち隣り合うものを交換するっていう互換で、これはよく知られていることです。対称群の生成系です。ルート格子との半直積の群を作るには、これにさらにもう1つ特別な元を付け加えます。それが $\alpha_0 = \delta - \varepsilon_1 + \varepsilon_n$ に関する鏡映

$$s_0 = (1 \ n) \tau_1 \tau_n^{-1} = (1 \ n) \tau^{\varepsilon_1 - \varepsilon_n}$$

です。 $\varepsilon_1 - \varepsilon_n$ は A 型のルート系の最高ルートというもので、 δ はアフィンルート系の言葉で言うと null root と言うものです。実際はルートというのは Cartan 部分環の上の一次関数なんですけど、普通一次式ですよ。一次関数なんですけど、定数をもっているという風にするのがアフィンのルートで、この null root というのはまあ定数だと思って構いません。ルート系の設定やらなんやを言い出すとまた色々時間ばかり食うのであんまり詳しく説明しませんが、この α_0 に関する鏡映 s_0 というものを付け加えると、ちょうどアフィンの Weyl 群ができるという風になっています。さらにここに ω という元を1つ付け加えると、大きい方のアフィン Weyl 群ができます。これは、 $\omega = (n \ n-1 \ \dots \ 1) \tau_1$ というもので、巡回置換に τ_1 をつけたものですね。こうすると大きい格子まで生成されるという関係になっています。

念のために作用素で書いておきましょう。つまり $\mathbb{K}(x)$ への作用でみるとどんな風になっているかということですが、次のようになっています。

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0(x_1) = qx_n, \\ s_0(x_n) = q^{-1}x_1, \\ s_0(x_i) = x_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-1). \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega(x_1) = qx_n, \\ \omega(x_i) = x_{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{array} \right.$$

このような自己同型です。これをどう思うかですが、次の図のようを見るとわかりやすいと思います。

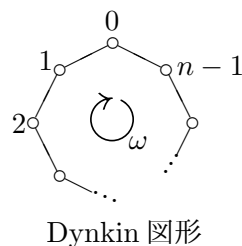
$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & qx_{n-1} & \xleftrightarrow{s_{n-1}^{-1}} & qx_n & \xleftrightarrow{s_0} & x_1 & \xleftrightarrow{s_1} & x_2 & \cdots & x_{n-1} & \xleftrightarrow{s_{n-1}^{-1}} & x_n & \xleftrightarrow{s_0} & q^{-1}x_1 & \xleftrightarrow{s_1} & q^{-1}x_2 & \cdots \\ & & & & & & & & & \xleftarrow{\omega} & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \text{1つずらす} & & & & & & & \end{array}$$

ワンブロックに $x_1, x_2, \dots, x_n$ という変数が並んでいて、左に行くときには q が掛かって q^2 が掛かって、右に行くときは q^{-1} が掛かって q^{-2} が掛かって、という風に無限個変数が並んでいると思ってください。その間を $s_1, \dots, s_{n-1}$ が入れ替えますが、 s_0 は各ブロックの間を乗り越えて q がつくところで変数の入れ替えをします。 q は定数で、ちょうどさっきの δ に対応する定数なんですけど、その定数でパラメー

タ付けられた変数が並んでいて、それを mod n でみて何処を動かすかというのが、アフィンのルート系でやっていることです。また ω というのは変数を 1 個ずつ左側にずらしていくっていうものです。そういうのが Weyl 群, アフィン Weyl 群, 拡大アフィン Weyl 群の生成元です。あ, W を Weyl 群, W^{aff} をアフィン Weyl 群, $\widetilde{W}$ を拡大アフィン Weyl 群と呼ぶのが普通です。標準的にアフィン Weyl 群というときには, 大体ルート格子かその dual との半直積をとったもののことを言いますので, $\widetilde{W}$ はそれより広いので拡大アフィン Weyl 群と呼びます。以上が設定です。

この生成元の基本関係を書いておきます。

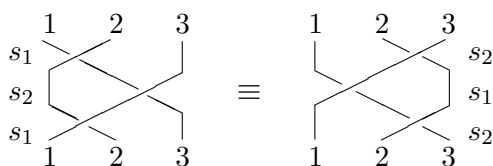
$$\left\{ \begin{array}{ll} (0) & s_i^2 = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ (1) & s_i s_j = s_j s_i \quad \left(\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ i & j \end{array} \right), \\ (2) & s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \quad \left(\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ i & j \end{array} \right), \\ (3) & \omega s_i = s_{i-1} \omega \quad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \end{array} \right.$$



0 番は, s_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) がすべて reflection なので二乗すれば identity というのが最初の式です。で, s_i, s_j を持ってきたときには交換したり, あるいは三次の関係式を持ったりします。こういった基本関係式を表すときには, Dynkin 図形を描いて考えます。上の図がちょうど $A_{n-1}^{(1)}$ 型, あるいは Bourbaki だと $\widetilde{A}_{n-1}$ 型という風にも書きますが, A_{n-1} 型のアフィン Weyl 群の Dynkin 図形です。 i と j が線で結ばれていないときは互いに交換し, 結ばれているときは 2 番のような三次の関係式が成り立ちます。2 番は一番典型的には

$$s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$$

ですね。後ろから読むことにしますが, こういうのをよく braid 関係式と言います。



上図は紐を動かすと同じ絵になりますね, これが braid 関係式です。1 番と 2 番を Coxeter 関係式として $(s_i s_j)^2 = 1$ や $(s_i s_j)^3 = 1$ と書く手もありますが, ここでは braid 関係式で通しましょう。それから 3 番は共役変換で作用すると思えば s_i を s_{i-1} に移すので, 右向きに 1 step だけ回転させるような Dynkin 図形の自己同型に対応する元です。拡大アフィン Weyl 群は生成元と関係式で, 上のように定義されている, とまあそんな風になっています。

拡大アフィン Weyl 群, アフィン Weyl 群の面白いところは, 有限 Weyl 群とそれが生成する格子の半直積というようなある意味で構造論的な記述ができることと, 同時に, 単純鏡映とか Dynkin 図形の自己同型に対応する生成元があって, その

基本関係で記述することもできる, というところです. 単純鏡映とか Dynkin 図形の自己同型とかだけを見ていてもどうやって格子がでてくるかって見えないんですけど, 2通りの違う記述が同じ群に対してできるってところがアフィン Weyl 群の面白いところですね. まあそういう風に思ってください.

3.2 アフィン Hecke 環

昨日, アフィン Hecke 環というのはアフィン Weyl 群を t 変形するんではないかと言いましたが, 変形するときには Weyl 群と格子の半直積というような記述で変形するのではなく, 生成元と基本関係による記述で変形する, という風にします. というわけでアフィン Hecke 環というものがようやく出てきます.

今3つ群がありました. W と W^{aff} と $\widetilde{W}$ の3つです. 生成元と関係式なので要はこれの群環ですね. ちょっと変な記述をしますが, まあ許してください. これらそれぞれに対応して, $H(W)$, $H(W^{\text{aff}})$, $H(\widetilde{W})$ を作ります. Hecke なので H と書いています.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[W] & H(W) & = \mathbb{K}\langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle \\ \cap & \cap & \\ \mathbb{K}[W^{\text{aff}}] & \xrightarrow[t \text{ 変形}]{} H(W^{\text{aff}}) & = \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \dots, T_{n-1} \rangle \\ \cap & \cap & \\ \mathbb{K}[\widetilde{W}] & H(\widetilde{W}) & = \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1} \rangle \end{array} .$$

左側を t 変形して右側に三段階の Hecke 環を作っています. これらの Hecke 環は $\mathbb{K}$ 代数で, 生成元と基本関係式で定義しますが, ちょうど s_i と書いていたところを T_i とします. それからもう一個 ω というのがありましたが, ω は同じ記号で書いておいて, これは可逆なので ± 1 をつけておきます. こういったもので生成されます.

これの $\mathbb{K}$ 代数としての基本関係を書きましょう. 群の時は生成系と基本関係と言いますが, 代数の時も同じですかね. 基本関係というか, 定義関係式ですね. どうするかと言いますと, さっきのを真似します. 以下, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}})$ とします. パラメータ q と t がありますが, $\frac{1}{2}$ 乗を使った方が便利なのでそのようにしています. それらのパラメータを不定元と思って生成した有理関数体ですね, それを係数体にとります. 定義関係式は次のようになります.

$$\left\{ \begin{array}{l} (0) \quad (T_i - t^{\frac{1}{2}})(T_i + t^{-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ (1) \quad T_i T_j = T_j T_i \quad \left(\begin{smallmatrix} \circ & \circ \\ i & j \end{smallmatrix} \right), \\ (2) \quad T_i T_j T_i = T_j T_i T_j \quad \left(\begin{smallmatrix} \circ & \circ & \circ \\ i & & j \end{smallmatrix} \right), \\ (3) \quad \omega T_i = T_{i-1} \omega \quad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \end{array} \right.$$

アフィン Weyl 群の基本関係の 0 番は, $0 = s_i^2 - 1 = (s_i - 1)(s_i + 1)$ となります. 群環の中ではこういう関係式だったわけです. これが今の 0 番の関係式に対応してい

ます. $t = 1$ と言いますか, $t^{\frac{1}{2}} = 1$ とすると 0 番の関係式は reflection の関係式に戻ると, そういうものになっています. 残りは同じですね. 1, 2, 3 番のときにこれは braid 群の関係式と呼ばれていて, それにさらに生成元が 2 次関係式をもっているというのがアフィン Hecke 環の関係式です. 途中に三段階の群環や三段階の代数を作ったわけですが, ようするにそれらの定義関係式はそれらの生成元の関係するものだけをもってきたものです. 全部一緒に書いてますがそういう風に読んでください.

以上がアフィン Hecke 環の定義です. こういうものを実現したいわけです.

聴講者: その関係式には q は出てこないんですか?

はい出てきません.

聴講者: Hecke 環の方もですか?

Hecke 環のほうにも定義関係式に q は出てきません. 実現するときに出てきます. だからこれは加法的に書いても同じですね, この部分は.

3.3 $H(W)$ の $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ における実現 (Lusztig 作用素)

今作ったアフィン Hecke 環, 拡大アフィン Hecke 環を $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の中で実現しようということをやります. 抽象的に定義したものと作用素を一応別物だということにして, x 変数の空間に作用する q 差分作用素 Weyl 群なのでそのことを明記するために右上に x を書いておきましょう.

$$\begin{cases} T_i^x = t^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - tx^{\alpha_i}}{1 - x^{\alpha_i}} s_i^x + \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - x^{\alpha_i}} & (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ \omega^x = (n \ n-1 \ \dots \ 1) \tau_1. \end{cases}$$

$\frac{1 - tx^{\alpha_i}}{1 - x^{\alpha_i}}$ は分母に一次式, 二項式があつて, 分子に t がついた典型的なものです. ある業界では c 関数と呼んだりもします. ここで α_i と書いたのは先ほどから言っているようにアフィンの単純ルートで, 以下のようなものです.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= \delta - \varepsilon_1 + \varepsilon_n, \\ \alpha_1 &:= \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} &:= \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n. \end{aligned}$$

これに対応して形式上は次のように書けますが, ここで symbolic に $x^\delta = q$ と思って下さい.

$$\begin{aligned} x^{\alpha_0} &= x^{\delta-\varepsilon_1+\varepsilon_n} = qx^n/x^1, \\ x^{\alpha_1} &= x^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = x_1/x_2, \\ &\vdots \\ x^{\alpha_{n-1}} &= x^{\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n} = x_{n-1}/x_n. \end{aligned}$$

これがアフィンの単純ルートに対応する monomial です. そういうものを用いて上の作用素を作ってくださいというのがこの定義です. こういう種類の作用素を考え始めたのは Lusztig だと思います. Lusztig の有名な論文があって, そこでアフィン Hecke 環の構造論を Lusztig が色々としています. 1989 年の Affine Hecke algebras and their graded version という論文です. もっと古い論文かと思っていましたが以外に新しいですね.

作用素に出てきた函数って何と思われる方もいらっしゃるかもしれませんが,

$$c(z) := t^{-\frac{1}{2}} \frac{1-tz}{1-z}, \quad d(z) := \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1-z}$$

とするとこういう特別な係数を組み合わせて線型作用素を作ってる, という意味はいいですね. この $c(z)$ と $d(z)$ というのは特別に選ばれていて, どのような関係があるかという, 次のような関係があります.

$$\begin{cases} c(z) + d(z) = t^{\frac{1}{2}}, \\ c(z) + c(z^{-1}) = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

これを用いると, T_i^x というのは次のように書けます.

$$T_i^x = c(x^{\alpha_i})s_i^x + d(x^{\alpha_i}) = t^{\frac{1}{2}} + c(x^{\alpha_i})(s_i^x - 1) = t^{\frac{1}{2}}s_i^x + d(x^{\alpha_i})(1 - s_i^x).$$

真ん中の表記を見ると, T_i^x に一番簡単な 1 という函数に作用させると $c(x^{\alpha_i})(s_i^x - 1)$ の部分が消えて $t^{\frac{1}{2}}$ が出るので, 1 っていうのは T_i^x の固有函数で固有値は $t^{\frac{1}{2}}$ になります. これが trivial 表現, Hecke 環の自明な表現に対応するところです. 自明な表現が $t^{\frac{1}{2}}$ で出てくるように作ってあります.

定理 3.1. 上記の T_i^x ($i = 0, 1, \dots, n-1$), $\omega^x \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$ は $H(\widetilde{W})$ の生成元の定義関係式をみたす. つまり以下が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \exists! \rho : H(\widetilde{W}) & \rightarrow & \mathcal{D}_{q,x}[W] \quad \mathbb{K} \text{ 代数の準同型} \\ \Psi & & \Psi \\ T_i & \mapsto & T_i^x \\ \omega & \mapsto & \omega^x \end{array} .$$

さらに, この ρ は単射である.

単射性は構造論を全てやったあとでないとわからないのですが一応つけておきます.

ちょうどアフィン Weyl 群の生成元と基本関係式を $\mathbb{K}$ 代数の意味で t 変形して定義したアフィン Hecke 環というものを考えることができますが, それを, $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の中で作用素として実現することができ, その作用素がこの Lusztig 作用素というものです.

以下 T_i^x, ω^x の x は省略します. 要は $H(\widetilde{W})$ を $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の部分環と同一視してしまいましょうということです. ここでようやく問題が出せますね. 大変なので気が向いたものだけやってもらえたら, 全部はやらなくてもいいです.

問 1. T_i^x, ω^x が定義関係式の (0), (1), (2), (3) を満たすことを示せ.

(0) は $c(z), d(z)$ の性質を使って示してください. これは本当に普通の練習問題です. (1) はほとんど明らかですね. (2) は是非やってみてください. $T_1 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2$ を示せばいいのですが, これを作用素として展開して作用素を比較すると, これは $c(z)$ とか $d(z)$ の関数方程式になります. 実際にここで作った関数がその方程式を満たすということをチェックしないといけないのでやりだすと結構大変ですが, どのぐらいの関係式かというのは一度やっておいてほしいです. せめて関数方程式がどのような方程式になるか, くらいはチェックしておいてください. 例えば Gauss の超幾何関数が Gauss の超幾何微分方程式を満たすというのは一生に一度くらいはやらないといけませんよね. それと同じように, Hecke 環なんかを扱う人は一生に一度くらいは確認してください, というようなものです. 本当はもっと抽象的な理論を積み重ねて遠回りをしてくれば自然にこういった係数がでてきて, この関係式が満たされることがわかる, というような議論も無いわけでは無いのですが, それをやると物凄く時間が掛かるので, 勉強する側の人間としては, ここに非自明なことのすべてが入っていると思って一回は確認する, という方がいいですね. この話の非自明なところはここです. ここが一番本質的に非自明なところです. ここ以外はストーリーをお話しているだけです.

注意 3.2. (0) の関係式を書き換えておきましょう.

$$\begin{aligned} T_i(T_i - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})) &= 1, \\ T_i^{-1} &= T_i - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

普通の Weyl 群のときは $s_i^{-1} = s_i$ で同じものですが, T_i^{-1} は大体 T_i と同じだが定数の分だけずれる, ということを覚えておいてください.

今の状況をまとめると次のようになっています.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\widetilde{W}] & = & \mathbb{K}\langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \omega^{\pm 1} \rangle \\ \parallel & & \cap \\ \mathbb{K}[\tau^P \rtimes W] & & \mathcal{D}_{q,x}[W] \quad \downarrow t \text{ 変形} \\ & & \cup \\ H(\widetilde{W}) & = & \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1} \rangle \end{array}$$

さっきも説明したように, t 変形というのは $t = 1$ とするとともに戻るということでした. 実際に Lusztig の作用素を見てもらうと, $T_i|_{i=1} = s_i$ となっています.

$\mathcal{D}_{q,x}[W]$ にはもともと x っていう別の変数も入っていて, 今は τ の方を変形したわけですが, x っていう変数とどういう関係になっているのだろうということが気になるわけです. こういうことをやりだすと時間がいくらあってもきりが無いのですが, まあいいでしょう. 講義って 20 年, 30 年やってても全くうまくならないですね.

命題 3.3 ($H(\widetilde{W})$ の生成元と x 変数の交換関係).

$$(1) \quad T_i x_i T_i = x_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

$$T_i x_j = x_j T_i \quad (j \neq i, i+1),$$

(2) 任意の $\lambda \in P$ に対し

$$T_i x^\lambda - x^{s_i(\lambda)} T_i = d(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i(\lambda)}),$$

$$T_i f(x) - s_i(f(x)) T_i = d(x^{\alpha_i})(f(x) - s_i(f(x))).$$

(1) は $s_i x_i s_i^{\pm 1} = s_{i+1}$ に対応するものですが, Hecke 環での微妙なところは T_i と T_i^{-1} が違うので, T_i か T_i^{-1} かどちらかに決めなければいけませんね. 今は T_i で x_i を挟むと x_{i+1} になります. 逆は $T_i^{-1} x_{i+1} T_i^{-1} = x_i$ です. T_i と T_i^{-1} は大体似たような役割をしますが, inverse が付くか付かないかは十分注意してください. (2) の $d(x^{\alpha_i})$ というのは Lusztig 作用素に出てきたものと同じものです.

これは易しいので問題にしておきましょう.

問 2. これを示せ.

3.4 q -Dunkl 作用素

ここからは q -Dunkl 作用素の話です. 答えを先に書いておきましょう.

$$\mathbb{K}[\widetilde{W}] = \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[W] \supseteq \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}],$$

$$H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} H(W) \supseteq \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \quad Y = (Y_1, \dots, Y_n).$$

元のアフィン Weyl 群の群環が 1 行目です. 代数の接合積もこう書いていいのかな.

聴講者: いいと思います. 単純環とかでよくやります.

そう書くんですか. まあいいですね, とりあえずこう書いておきましょう. この $\mathbb{K}[\widetilde{W}]$ の中に q シフト作用素による可換環 $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]$ が入っているわけです. 2 行目はこれを t 変形した Hecke 環ですが, これが有限な Hecke 環とのテンソル積になるように Y という operator を作って, Laurent 多項式環と同型な Y たちの可換部分

環 $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ を作ります. この Y のことを q -Dunkl 作用素と言います. こういったものを作りたいのですが, どうやって作るかというのが大事なところです.

Weyl 群の側で見るときには次のようになっていました. さっき ω というのを,

$$\omega = (n \cdots 1)\tau_1$$

と書きましたがこれを逆に書くと,

$$\tau_1 = (1 \cdots n)\omega = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \omega$$

となります. また, τ_2 は τ_1 を s_1 で共役変換したものです. それを繰り返すと以下のように書けることがわかります.

$$\widetilde{W} : \begin{cases} \tau_1 = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \omega, \\ \tau_2 = s_2 \cdots s_{n-1} \omega s_1, \\ \vdots \\ \tau_i = s_i \cdots s_{n-1} \omega s_1 \cdots s_{i-1}, \\ \vdots \\ \tau_n = \omega s_1 s_2 \cdots s_{n-1}. \end{cases}$$

平行移動はアフィン Weyl 群の生成元で書くとこのように書けています. アフィン Hecke 環の中に, これに対応する元を作りましょう.

$$H(\widetilde{W}) : \begin{cases} Y_1 = T_1 T_2 \cdots T_{n-1} \omega, \\ Y_2 = T_2 \cdots T_{n-1} \omega T_1^{-1}, \\ \vdots \\ Y_i = T_i \cdots T_{n-1} \omega T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1}, \\ \vdots \\ Y_n = \omega T_1^{-1} T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1}. \end{cases}$$

先ほども言いましたが, どこに inverse をつけるかがデリケートです. このように定義した Y を q -Dunkl 作用素と言います. Heckman-Opdam の超幾何なんかを知っている人だと Dunkl 作用素というのがあって, これはその q 版です. あるいは, 元は Dunkl ですが Dunkl がこれをやっていたわけではなく, こういうことをやっていたのは Cherednik なので Cherednik に敬意を表して, Dunkl-Cherednik 作用素という方がいいかもしれません.

本当はシフトがなぜこのような表示になるのかということを紐の絵で描いてみせるとわかりやすいんですが, まあそれは自分で工夫して考えてみてください. 対称群の元を紐の絵で描いたりしますよね. さっきどこかで描きましたが, ああいう絵を描いて関係式を追跡していくとはるかに見通しよく計算ができます.

また, 今 A 型なので直に生成元で書いて見せましたが, 一般のルート系でやる場合には, ルート系の translation を Weyl 群の表示で最短表示し, それを Hecke 環の

元に置き換えてといったことをきちんとやります. 今の場合はいきなり書けるのでこう書きます. いいですね.

そうすると, さっきは x と T の交換関係を書きましたが, 今度は Y と T の交換関係です.

命題 3.4 (Y と T の交換関係).

- (1) $T_i Y_{i+1} T_i = Y_i \quad (i = 1, \dots, n-1),$
 $T_i Y_j = Y_j T_i \quad (j \neq i, i+1),$
- (2) $Y_i Y_j = Y_j Y_i \quad (i, j = 1, \dots, n),$
- (3) 任意の $\mu \in P$ に対して,
 $T_i Y^\mu - Y^{s_i(\mu)} T_i = d(Y^{-\alpha_i})(Y^\mu - Y^{s_i(\mu)}).$

(1) はさっきと少し役割が変わっています. さっきは T_i で挟むと x_i が x_{i+1} に移ると言いましたが, 今度は逆ですね. T_i で挟むことによって次のようになっています.

$$Y_1 \xleftarrow{T_1} Y_2 \cdots Y_{n-1} \xleftarrow{T_{n-1}} Y_n$$

(2) はちょっと驚くべきことです. Y の可換性を言っています. (3) は先ほどは α_i だったところが $-\alpha_i$ になっています. 書き方があまりよくないかも知れませんがまあいいでしょう. 多重指数で書いているので, $Y^\mu = Y_1^{\mu_1} \cdots Y_n^{\mu_n}$ です. また, $d(Y^{-\alpha_i}) = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - Y^{-\alpha_i}}$ は $Y^\mu - Y^{s_i(\mu)}$ を掛けると実際には割り切れるので, 右辺は Y の Laurent 多項式です. さきほどは注意しませんでした x のときもそういった関係で, 右辺は Laurent 多項式です. この (3) の関係式が重要な関係式で, Lusztig 関係式と言います.

問 3. これを示せ.

ヒントを出すのは解く人に失礼かもしれませんが, 一応ヒントを出しておきましょう. (1) は, $k \leq i < l$ のときに

$$(T_k T_{k+1} \cdots T_l) T_i = T_{i+1} (T_k T_{k+1} \cdots T_l)$$

をまずは示してください. この $(T_k T_{k+1} \cdots T_l)$ というのは Weyl 群のときには $(k \ k+1 \ \cdots \ l)$ という巡回置換ですよ, なので s_i を入れると番号が1つ上がるというのに対応した式です. これを証明するときにさっきの braid の関係式を使うわけです. この式を使うと割合見通しよく示せます. (2) は可換性です. これが大事な式ですね. やり方は色々あると思いますが, $Y_1 Y_2 = Y_2 Y_1$ をまず示して下さい. これもさっきの braid の関係式を何度も使うと示せます. これも一生に一度はやっておいてほしいですね. これに (1) を用いて示してください. これを示すと, τ というシフト operator に対応する可換な部分環が実際に構成できた, ということになります.

話を進めます.

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[\widetilde{W}] &= \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[W] = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]w, \\ H(\widetilde{W}) &= \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} H(W) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]T_w.\end{aligned}$$

1 行目はアフィン Weyl 群の時ですが, Weyl 群の元を base にすると一番右のように分解しています. アフィン Hecke 環の時も同様に, Hecke 環の $\text{base}T_w$ を与えてやると, Dunkl 作用素のつくる Laurent 多項式環に T_w , という形で分解します. このように, Laurent 多項式環上の module としては free に base が作れる, という風になっています. ただし, この T_w と書いたのは, Hecke 環ではいつもやることなんですが, $w \in W$ に対して最短表示

$$w = s_{j_1} \cdots s_{j_p} \quad (j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, n-1\})$$

をとり, これと同じ並びで T_i を並べたもの, $T_w = T_{j_1} \cdots T_{j_p}$ と定義します. このようにして T_w を定義すると, T_w は最短表示の取り方に依らないことが知られています. これは braid 群なんかを扱うときに一番大事な性質の 1 つですね. これを表現論の人は岩堀・松本の補題と呼んでいます. Weyl 群の同じ元に対して 2 つの違う最短表示があったら, 適宜 braid 関係式を適用することでお互いに移りあえる, というものです.

今説明したことも含みますが, 次の定理が構造定理として非常に重要なものです.

定理 3.5 (Bernstein, Lusztig). (1) $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ は, $H(\widetilde{W})$ 内に Laurent 多項式環と同型な可換環を生成し,

$$H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} H(W) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]T_w \supseteq \mathbb{K}[Y^{\pm 1}].$$

(2) $H(\widetilde{W})$ の中心については,

$$\mathcal{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W = \mathbb{K}[e_1(Y), \dots, e_{n-1}(Y), e_n(Y)^{\pm 1}] = \bigoplus_{\mu \in P^+} \mathbb{K}m_{\mu}(Y).$$

(1) が先ほどの内容です. $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ は n 変数の Laurent 多項式環と同型ですね. (2) をもう少し正確に書くと,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[y^{\pm 1}]^W & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{Z}H(\widetilde{W}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f(y) & \mapsto & f(Y) \end{array}$$

ということです. これと

$$\mathbb{K}[y^{\pm 1}]^W = \mathbb{K}[e_1(y), \dots, e_{n-1}(y), e_n(y)^{\pm 1}] = \bigoplus_{\mu \in P^+} \mathbb{K}m_{\mu}(y)$$

から (2) が得られます. ここで, e_i は基本対称式, m_μ は monomial 対称式です. これを証明しろというのは酷なので演習問題にはしません. 途中簡単な部分もありますが, 完全に証明するのはなかなか難しいですのでちょっと置いておきます.

こういったことを設定しておく, q -Dunkl 作用素から Macdonald の q 差分作用素に移行することができる, という風になっているわけです.

3.5 q -Dunkl 作用素から Macdonald の q 差分作用素へ

$\mathcal{D}_{q,x}[W] = \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}][W]$ の一般元というのは次のように書けます.

$$A = \sum_{w \in W} A_w(x; \tau) w \in \mathcal{D}_{q,x}[W].$$

$A_w(x; \tau)w$ の部分が q 差分作用素です. 今記号的に $\varphi(x)$ と書いて, これを W 不変な関数 (対称式) としましょう. これに A を作用させます.

$$A\varphi(x) = \sum_{w \in W} A_w(x; \tau)w(\varphi) = \sum_{w \in W} A_w(x; \tau)\varphi(x).$$

つまり A を対称関数に作用させるときには, 単に一番右にある w を削って対称関数に変えるだけです. この A に対して次を定義します.

$$L_A = \sum_{w \in W} A_w(x; \tau) \in \mathcal{D}_{q,x}.$$

一番右にある w を全て 1 に置き換え, 係数の q 差分作用素の総和をとったものです. すると次のような写像が定まります.

$$\begin{array}{ccc} L: \mathcal{D}_{q,x}[W] & \rightarrow & \mathcal{D}_{q,x} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \mapsto & L_A \end{array}.$$

$\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の W のところを無視して q 差分作用素に置き換えましょうという写像です.

注意 3.6. 勉強するときには次のような註釈をきちんとつけておくべきですね.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{q,x}[W] / \sum_{w \in W} \mathcal{D}_{q,x}[W](w-1) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{D}_{q,x} \\ \Downarrow & & \\ \varphi(x) = (1 \bmod \sum_{w \in W} \mathcal{D}_{q,x}[W](w-1)) & & \end{array}.$$

ideal で modulo したところの標準的な生成元を今 $\varphi(x)$ と書いたと, そう思ってください.

これを一纏めの定理にしてしまいましょう.

定理 3.7. (1) $f(y) \in \mathbb{K}[y^{\pm 1}]^W$ に対し, $L_f = L_{f(Y)}$ とおくと, $L_f \in \mathcal{D}_{q,x}^W$ となり

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{K}[D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n-1)}, (D_x^{(n)})^{\pm 1}] \\ \Psi & & \Psi \\ f(Y) & \mapsto & L_f \end{array}.$$

(2) $f(y) \in \mathbb{K}[y^{\pm 1}]^W$ について,

$$f(Y)(P_\lambda(x)) = L_f(P_\lambda(x)) = P_\lambda(x)f(t^\rho q^\lambda) \quad (\lambda \in P^+).$$

ただし,

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots, -\frac{n-1}{2} \right) \\ &= (n-1, n-2, \dots, 0) - \frac{n-1}{2} (1, 1, \dots, 1) \\ &= \delta - \frac{n-1}{2} (1, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

(1) では本当は積を保つといったことも言わなければなりませんが, 今はやりません. $\mathbb{K}[D_x^{(1)}, \dots, D_x^{(n-1)}, (D_x^{(n)})^{\pm 1}]$ は Macdonald の作用素が生成する可換環ですね. L で送った先がこれと同型になります. (2) の ρ は正ルートの和の半分です. 中心元の固有函数として Macdonald 多項式が実現されるということを言っています. つまり, q -Dunkl 作用素の Weyl 群不変な Laurent 多項式を任意に持ってくると, 対称多項式に作用するときには q 差分作用素として作用して, それがちょうど Macdonald 多項式の operator になり, Macdonald 多項式はそれらの共通の固有函数になります.

基本対称式 e_r の場合を考えると, Macdonald の q 差分作用素との関係がわかります.

$$f = e_r(y), \quad L_{e_r} = t^{-\frac{r(n-r)}{2}} D_x^{(r)}.$$

これは実際には確認しないといけませんが, q -Dunkl 作用素から昨日説明した Macdonald の q 差分作用素が得られると, このような関係になっています. 時間があればどうしてこのようなさっきの operator が出るのかということを詳しく説明すればよかったのですが, 時間がないのでこのくらいにしておきましょう.

問 4. $n = 2$ のとき,

(1) Y_1, Y_2 の具体形を求めよ.

(2) $e_1(Y) = Y_1 + Y_2, e_2(Y) = Y_1 Y_2$ に対応する q 差分作用素 L_{e_1}, L_{e_2} を求めよ.

これは実際に定義に従って計算できるので, 2 変数の時くらいは計算してもらって, どんなことが起きているのかということを確認して貰えばと思います.

これ以上詳しい説明は今は出来ないのとおりあえずここまでのストーリーをわかって貰えればいいかなと思います.

4 二重アフィン Hecke 環 (DAHA) とその応用

4.1 二重アフィン Hecke 環と双対性

時間が無くなってしまったので少し駆け足でこの節を説明しようかなと思います.

二重アフィン Hecke 環のことを, Hecke 環をやっている人は double affine Hecke algebra の頭文字をとって DAHA と呼ぶのですが, 物凄くセンスが悪いと思いますね. まあそれはいいでしょう.

$$\mathbb{K}[x^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}][W] = \mathbb{K}\langle x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}; s_1, \dots, s_{n-1}; \tau_1^{\pm 1}, \dots, \tau_n^{\pm 1} \rangle.$$

我々が今考えていたのはこういうものでした. 先ほどまでは $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ の部分のアフィン Hecke 環を考えていましたが, この $\mathbb{K}[x^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}][W]$ 自体にも Hecke 環を考えることができ, それが以下のようなものです.

$$DH(\widetilde{W}) = \mathbb{K}\langle x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}; T_1, \dots, T_{n-1}; Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_n^{\pm 1} \rangle \subseteq \mathcal{D}_{q,x}[W].$$

これを二重アフィン Hecke 環と言います. 要するに, Heisenberg-Weyl 代数の t 変形が二重アフィン Hecke 環というものです. そうするとさっき x と T の交換関係とか Y と T の交換関係を考えましたが, 役割は少し変わっていましたがほとんど同じ関係式でしたね. そういったことから実はこの代数には Cherednik の対合というのが定義できます.

$$\begin{array}{ccc} \phi : DH(\widetilde{W}) & \rightarrow & DH(\widetilde{W}) : \mathbb{K} \text{ 代数の反同型, 対合 } (\phi^2 = 1) \\ \Psi & & \Psi \\ x_i & \mapsto & Y_i^{-1} \quad (i = 1, \dots, n) \\ Y_i & \mapsto & x_i^{-1} \quad (i = 1, \dots, n) \\ T_i & \mapsto & T_i \quad (i = 1, \dots, n-1) \end{array} .$$

x_i を位置の変数, Y_i を運動量の変数として Fourier 変換に対応する変数変換です. 要するに Fourier 変換の x と ξ を入れかえてそれを Weyl 群込みで変換することができるような involution が存在する, ということが示せます. これは示すのは大変ややこしいですが, さっきの交換関係の命題から大体正しいだろうというのはわかりますね. x と Y の交換関係というのが非常に難しいのですが, とりあえず今はこれを認めましょう.

このようにすると二重 Hecke 環の上には内積が定義できます.

$$\begin{array}{ccc} \langle , \rangle : DH(\widetilde{W}) \times DH(\widetilde{W}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ \Psi & & \Psi \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q \rangle := \langle \phi(P)Q \rangle_{\mathbb{K}} \end{array} .$$

ただし, ここで $\langle \rangle_{\mathbb{K}}$ は期待値で, 次で定めます.

$$\langle P \rangle_{\mathbb{K}} = P(1)|_{x=t^{-\rho}}.$$

$P(1) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ なのでこれを $x = t^{-\rho}$ で evaluate すると, そういう意味です. この内積は表現論で言うと, Fisher 内積と言うものに対応します. すると次が成り立ちます.

$$\begin{cases} \langle \phi(P) \rangle_{\mathbb{K}} = \langle P \rangle_{\mathbb{K}} \\ \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle \end{cases}.$$

これは定義からすぐにわかります. 対称内積となっているわけですね. これで Macdonald 多項式の内積をとってみるわけです.

$$\begin{aligned} \langle P_{\lambda}(x), P_{\mu}(x) \rangle &= \langle \phi(P_{\lambda}(x)) P_{\mu}(x) \rangle_{\mathbb{K}} \\ &= \langle P_{\lambda}(Y^{-1}) P_{\mu}(x) \rangle_{\mathbb{K}} \\ &= \langle P_{\lambda}(t^{-\rho} q^{-\mu}) P_{\mu}(x) \rangle_{\mathbb{K}} \\ &= P_{\lambda}(t^{-\rho} q^{-\mu}) P_{\mu}(t^{-\rho}). \end{aligned}$$

するとこれは対称内積だったので, λ と μ の役割を入れ替えたものと等しくなります.

$$P_{\lambda}(t^{-\rho} q^{-\mu}) P_{\mu}(t^{-\rho}) = P_{\mu}(t^{-\rho} q^{-\lambda}) P_{\lambda}(t^{-\rho}).$$

両辺を割ると, 次のようになります. 割るためには 0 でないことを言うておかねければなりません, まあいいでしょう.

$$\frac{P_{\lambda}(t^{-\rho} q^{-\mu})}{P_{\lambda}(t^{-\rho})} = \frac{P_{\mu}(t^{-\rho} q^{-\lambda})}{P_{\mu}(t^{-\rho})}.$$

これは, P_{λ} を $t^{-\rho}$ で 1 になるように規格化したものです. 左辺の λ はスペクトル変数, μ は空間 (位置) 変数です. この式は, スペクトル変数と空間変数の役割が変わって, 同じ値になる, そういう式です. これを Macdonald 多項式の双対性 (duality) と呼びます. inverse を取り除くこともできますが, この定義でいくとこのようになるのでこのままにしておきましょう.

これで Macdonald の双対性ができたことになりますが, これができると今度は q 差分作用素の式の x 変数とスペクトル変数をひっくり返すことができ, それが Pieri の公式です. Pieri の公式というのは基本対称式を掛けると Macdonald の一次結合で書いたときにどういった係数がでるかというものですが, それがちょうど q 差分方程式の dual で出てきます. その関係式があると, この normalization の 1 での値がいくらかというのも漸化式を作って計算できるというようなことになっています. ですから duality というのは Macdonald 多項式にとっては非常に本質的で基本的な大事な性質なのですが, そういうのが二重 Hecke 環の上に適当な内積を導入することで出てくる仕組みになっています, というのがこの節でのお話です.

4.2 追記 (Pieri 公式と特殊値の決定)

講義では時間がなく紹介のみであった, 双対性のその先の話を少し追記しておきます.

双対性の式の inverse は外しておいた方がきれいなので, ここでは外しておきましょう. どのようにして外すかという, $D_x P_\lambda = P_\lambda d_\lambda$ は, $q, t \mapsto q^{-1}, t^{-1}$ としても本質的に同じ方程式なので, $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t)$ と書くと, $P_\lambda(x; q, t) = P_\lambda(x; q^{-1}, t^{-1})$ が成り立つことを用います.

$$\begin{aligned} P_\lambda(t^{-\rho} q^{-\mu}; q, t) P_\mu(t^{-\rho}; q, t) &= P_\mu(t^{-\rho} q^{-\lambda}; q, t) P_\lambda(t^{-\rho}; q, t) \\ &\downarrow \quad \quad \quad q, t \mapsto q^{-1}, t^{-1} \\ P_\lambda(t^\rho q^\mu; q^{-1}, t^{-1}) P_\mu(t^\rho; q^{-1}, t^{-1}) &= P_\mu(t^\rho q^\lambda; q^{-1}, t^{-1}) P_\lambda(t^\rho; q^{-1}, t^{-1}) \\ &\downarrow \quad \quad \quad P_\lambda(x; q, t) = P_\lambda(x; q^{-1}, t^{-1}) \\ P_\lambda(t^\rho q^\mu; q, t) P_\mu(t^\rho; q, t) &= P_\mu(t^\rho q^\lambda; q, t) P_\lambda(t^\rho; q, t) \end{aligned}$$

また, P_λ は $|\lambda|$ の同次対称式であることと, $\rho = \delta - \frac{n-1}{2}(1, 1, \dots, 1)$ から, ρ を δ で置き換えてよいので, 双対性の式は次のようになります.

$$\frac{P_\lambda(t^\delta q^\mu)}{P_\lambda(t^\delta)} = \frac{P_\mu(t^\delta q^\lambda)}{P_\mu(t^\delta)}.$$

$P_\lambda(\delta)$ で割っていますが, $P_\lambda(\delta) \neq 0$ となることは Schur 関数の場合で確かめてみてください. 以下,

$$\tilde{P}_\lambda(x) := \frac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(t^\delta)}$$

とおきます. すると先ほどの双対性の式は次のように書けます.

$$\tilde{P}_\lambda(t^\delta q^\mu) = \tilde{P}_\mu(t^\delta q^\lambda).$$

これを用いて Pieri の公式を導きましょう. 次の式を双対性を用いて書き換えていきます.

$$D_x^{(r)} P_\lambda(x) = P_\lambda(x) e_r(t^\delta q^\lambda).$$

ただし,

$$\begin{aligned} D_x^{(r)} &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=r} A_I(x; t) T_{q, x}^I, \\ A_I(x; t) &= t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{i \in I, j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} = \frac{T_{t, x}^I(\Delta(x))}{\Delta(x)}. \end{aligned}$$

$\mu \in L^+$ の時を考え, 両辺を $P_\mu(t^\delta)$ で割っておきます.

$$\begin{aligned} D_x^{(r)} \tilde{P}_\mu(x) &= \tilde{P}_\mu(x) e_r(t^\delta q^\mu) \\ \parallel \\ \sum_{|I|=r} A_I(x; t) \tilde{P}_\mu(q^{\varepsilon_I} x) &= \left(\varepsilon_I = \sum_{i \in I} \varepsilon_i \right). \end{aligned}$$

ここで, $x = q^\lambda t^\delta$ とおきます.

$$\begin{array}{ccc} \sum_{|I|=r} A_I(q^\lambda t^\delta; t) \tilde{P}_\mu(q^{\lambda+\varepsilon_I} t^\delta) & = & \tilde{P}_\mu(q^\lambda t^\delta) e_r(q^\mu t^\delta) \\ \parallel & \leftarrow \text{duality} \rightarrow & \parallel \\ \sum_{|I|=r} A_I(q^\lambda t^\delta; t) \tilde{P}_{\lambda+\varepsilon_I}(q^\mu t^\delta) & & \tilde{P}_\lambda(q^\mu t^\delta) e_r(q^\mu t^\delta) \end{array} .$$

$\lambda + \varepsilon_I$ が partition にならない場合があるのではないかと気になる方もいるかもしれませんが, そのような I のときは $A_I = 0$ となるので和には寄与しません. 結局, 次のような式が成り立ちます.

$$(e_r \cdot \tilde{P}_\lambda)(q^\mu t^\delta) = \sum_{|I|=r, \lambda+\varepsilon_I \in L^+} A_I(q^\lambda t^\delta; t) \tilde{P}_{\lambda+\varepsilon_I}(q^\mu t^\delta)$$

今これは $\lambda, \mu \in L^+$ で成り立っていますが, $q^\mu t^\delta \mapsto x$ としても成り立ちます.

$$e_r(x) \tilde{P}_\lambda(x) = \sum_{|I|=r, \lambda+\varepsilon_I \in L^+} A_I(q^\lambda t^\delta; t) \tilde{P}_{\lambda+\varepsilon_I}(x).$$

この式を Pieri の公式と呼びます. 双対性とその式は Cherednik がした仕事というよりは, 皆よく知っていたことです.

Pieri の公式を用いるとさらに, $P_\lambda(t^\delta)$ の値も求まります.

$$P_\lambda(t^\delta) := a_\lambda$$

とおき, $r \geq l(\lambda)$ のときの Pieri の公式の leading term を考えます. Pieri の公式の左辺は

$$\begin{aligned} e_r(x) \tilde{P}_\lambda(x) &= ((x_1 \cdots x_r) + \cdots) \left(\frac{1}{a_\lambda} x^\lambda + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{a_\lambda} x^{\lambda + \varpi_r} + \cdots . \end{aligned}$$

他方, Pieri の公式の右辺は

$$\begin{aligned} \sum_{|I|=r, \lambda+\varepsilon_I \in L^+} A_I(q^\lambda t^\delta; t) \tilde{P}_{\lambda+\varepsilon_I}(x) &= \sum_{|I|=r, \lambda+\varepsilon_I \in L^+} A_I(q^\lambda t^\delta; t) \left(\frac{1}{a_{\lambda+\varepsilon_I}} x^{\lambda+\varepsilon_I} + \cdots \right) \\ &= A_{\{1, \dots, r\}}(q^\lambda t^\delta; t) \cdot \frac{1}{a_{\lambda+\varpi_r}} x^{\lambda+\varepsilon_I} + \cdots . \end{aligned}$$

ただし,

$$\varpi_r = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0)$$

としています. leading term $x^{\lambda+\varepsilon_I}$ の係数を比較すると, 次が成り立つことがわかります.

$$a_{\lambda+\varpi_r} = A_{\{1,\dots,r\}}(q^\lambda t^\delta; t) \cdot a_\lambda.$$

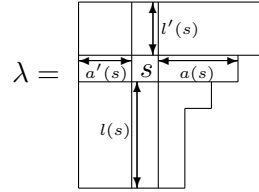
これを帰納的に用いると, 次の式が得られます.

$$P_\lambda(t^\delta) = t^{n(\lambda)} \prod_{s \in \lambda} \frac{1 - q^{a'(s)} t^{n-l'(s)}}{1 - q^{a(s)} t^{l(s)+1}}.$$

ただし,

$$n(\lambda) = \sum_{1 \leq i \leq l(\lambda)} (i-1)\lambda_i$$

です. また, $a(s), l(s), a'(s), l'(s)$ をそれぞれ腕長, 脚長, 余腕長, 余脚長と言い, Young 図形で言うと以下の場所の箱の数のことです.



これらの duality, Pieri の公式, 特殊値の決定 (evaluation formula) の3つは, どれか1つが分かれば他のものも出てくる, という風になっています. ここでは二重アフィン Hecke 環を用いて duality を示し, duality から Pieri の公式を導き, そこからさらに特殊値を求めるという Cherednik 流の導出の仕方を紹介しました.

以上を講義の追記としておきます.

セルバーグ積分, 超幾何系, 組合せ零点定理

金子譲一 述

渋谷元樹 記

2017.9.4-9.5

タイトルは「セルバーグ積分, 超幾何系, 組合せ零点定理」ですが, まずセルバーグ積分の話をして, その証明で出てくる, その一般形にあたる超幾何系とか (まあ何を「超幾何系」というかですけど), 多変数の方程式系が自然に出てくるのでその話をします. 3 番目の組合せ零点定理は, Selberg 積分 (これはある種の Laurent 多項式の定数項を計算することと同値なんですけれど) と関連して, 最近組合せ零点定理というのが最近証明されて, これは本質的に Hermite 補間法とか, Lagrange 補間法を使ったアイデアですが, これを使っても Selberg 積分が証明できるわけですし, そういった最近の結果の紹介です.

1 Selberg 積分

1.1 Selberg 積分

まず Selberg 積分を紹介します. 後で使うので Selberg density を

$$D(\alpha, \beta, \gamma) := \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} \quad (1.1)$$

としておきます. ここで複素パラメータ α, β, γ を $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta), \operatorname{Re}(\gamma) > 0$ とするとき, 次のような公式を Selberg 積分といいます.

定理 1.1 (Selberg [S2], 1944).

$$\begin{aligned} S_n(\alpha, \beta, \gamma) &:= \int_{[0,1]^n} D(\alpha, \beta, \gamma) dt \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + (j-1)\gamma) \Gamma(\beta + (j-1)\gamma) \Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)\gamma) \Gamma(1+\gamma)}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

ここで Γ は通常のガンマ関数です. 一番簡単な $n = 1$ の場合は

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

という皆さんよくご存知のベータ関数の公式で, その一つの自然な拡張になっています. これの多重積分版として, 微積の教科書にあるような Dirichelt の多重積分公式

$$\int \cdots \int_D t_1^{\alpha_1-1} \cdots t_n^{\alpha_n-1} (1-t_1-\cdots-t_n)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta)},$$

$$D := \{t_1 > 0, \dots, t_n > 0, \quad t_1 + \cdots + t_n < 1\}$$

もありますが, Selberg 積分は差積が出てきたところが新しいわけです.

これは Selberg が 1944 年に証明しましたが, 1980 年前後に再発見され, 注目を浴びました. それは何故かという, 統計物理の方で次のような (Dyson-)Mehta 積分というのがありました.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{t_i^2}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$$

これはみればわかりますが, Selberg 積分の (右辺の) 尻尾の方の α, β が関係しない部分がモロに出てきているわけです. これは 1960 年代にみつかつて, (信じ難いことに) 80 年代くらいまで予想でありました. $n \leq 3$ までは無理やりやることもできますが, $n = 4$ になるともうかなり大変で $\dots$ $n = 3$ のときの証明は変数変換でやるんですけど, Mehta の「Random Matrix」という本 [Me] の第一版にはその証明が載っています. 対称式に変数変換するんですけど, その証明も結構大変で $\dots$.

しかしこれは Selberg 積分からすぐでてくるわけです. これは一変数のベータ関数の公式から Gauss 積分の $e^{-\frac{t^2}{2}}$ がでてくると同じ理由で, Selberg 積分において $\alpha = \beta$ として,

$$t_i \rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_i}{\sqrt{2\alpha}} \right)$$

と変数変換すると,

$$\begin{aligned} S_n(\alpha, \alpha, \gamma) &= \int_{[-\sqrt{2\alpha}, \sqrt{2\alpha}]^n} \prod_{i=1}^n 2^{2-2\alpha} \left(1 - \frac{t_i}{\sqrt{2\alpha}} \right)^{\alpha-1} \left(1 + \frac{t_i}{\sqrt{2\alpha}} \right)^{\alpha-1} \\ &\quad \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left| \frac{t_j}{2\sqrt{2\alpha}} - \frac{t_i}{2\sqrt{2\alpha}} \right|^{2\gamma} \frac{1}{2^n (2\alpha)^{\frac{n}{2}}} dt \\ &= \int_{[-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}]^n} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{t_i^2}{2\alpha} \right)^{\alpha-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} \frac{2^{(1-2\alpha)n}}{2^{\gamma n(n-1)} (2\alpha)^{\frac{n}{2} + \gamma \frac{n(n-1)}{2}}} dt \end{aligned}$$

となります. ここで両辺に $2^{(2\alpha-1+\gamma(n-1))n}(2\alpha)^{\frac{n}{2}+\gamma\frac{n(n-1)}{2}}$ をかけて, $\alpha \rightarrow \infty$ とすると積分側は

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 2^{(2\alpha-1+\gamma(n-1))n}(2\alpha)^{\frac{n}{2}+\gamma\frac{n(n-1)}{2}} S_n(\alpha, \alpha, \gamma) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{[-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}]^n} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{t_i^2}{2\alpha}\right)^{\alpha-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{t_i^2}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt. \end{aligned}$$

他方, Stirling の公式

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha + A)}{\alpha^{\alpha+A-\frac{1}{2}} e^{-\alpha}} = \sqrt{2\pi}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 2^{(2\alpha-1+\gamma(n-1))n}(2\alpha)^{\frac{n}{2}+\gamma\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + (j-1)\gamma)\Gamma(\alpha + (j-1)\gamma)}{\Gamma(2\alpha + (n+j-2)\gamma)} \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n 2^{2\alpha-1+2\gamma(j-1)} (2\alpha)^{\frac{1}{2}+(n-j)\gamma} \left(\frac{\Gamma(\alpha + (j-1)\gamma)}{\alpha^{\alpha+(j-1)\gamma-\frac{1}{2}} e^{-\alpha}} \right)^2 \alpha^{2\alpha+2(j-1)\gamma-1} e^{-2\alpha} \\ &\quad \cdot \frac{(2\alpha)^{2\alpha+(n+j-2)\gamma-\frac{1}{2}} e^{-2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + (n+j-2)\gamma)} (2\alpha)^{-2\alpha-(n+j-2)\gamma+\frac{1}{2}} e^{2\alpha} \\ &\quad \cdot \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \prod_{j=1}^n \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha + (j-1)\gamma)}{\alpha^{\alpha+(j-1)\gamma-\frac{1}{2}} e^{-\alpha}} \right)^2 \frac{(2\alpha)^{2\alpha+(n+j-2)\gamma-\frac{1}{2}} e^{-2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + (n+j-2)\gamma)} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \end{aligned}$$

となって Selberg 積分から Mehta 積分が得られるわけです. これが 1980 年前後に Selberg 積分が注目を集めた一番最初で, 今では色々なところで出てくる話になりました.

それで何回か言っている思い出話ですけど... 私は 1979 年くらいに青本先生から Mehta 積分の問題を教わって, こちらの方の証明を, $n=4$ の場合を泣く泣く計算したんですけど (笑). で, それはできました. その場合は, この Mehta 積分に付随する de Rham コホモロジーを計算してやったんですけど. 何をやるかっていうと Mehta 積分は γ しか径数がないので, この差積のベキの γ を下げるしかない. でも差積のベキを下げるというのはメチャクチャ大変で... $n=4$ の場合は泣く泣くやって, 証明はできたんですが, 「それ以上はとてもできない」と思ったわけです. つまり Mehta 積分というのはパラメータが少なくて難しいわけです. とこ

ろが Selberg 積分はパラメータがもう 2 つ余分についているわけです. また α と β について対称ですから, どちらか片方を下げられれば, de Rham コホモロジー, あるいは Stokes の定理を使って, t_i または $1 - t_i$ の因子が無くなる形にもってこれるわけです. しかも γ を下げるよりは α, β を下げる方 (後述しますがこの後に青本先生がやられました) が簡単なわけです. で, 差積だけの形になるとこれは斉次型なので, 次元を 1 つ下げられて, 帰納法が使える形になります.

聴講者: α とか β は整数じゃないわけですよね? だから次数が下げられても積分がわかる気がしないんですが...

そこは函数論の定理で逃げるわけで. こういうタイプの積分っていうのは α とか β が右半平面で正則なわけですね. 更に bounded, より強く Carlson の定理, があれば, α, β が整数点で一致すれば一致するという定理があるので逃げる事が出来ます. これから紹介する Selberg 自身の証明でも同様に, パラメータが整数でないと証明しにくいので, まず右半平面のゼロでない整数のときに証明して, こうした函数論の定理を援用しています.

聴講者: α とか β が右半平面でっていう?

そうそう. 1 つ固定して考えればいいので, まず片方を固定して整数性を外し, 次のほうも一方も整数性を外すという風にやっていきます.

聴講者: α とか β に関する差分方程式も立つんですか?

はい.

聴講者: α を無限に飛ばした時の漸近挙動も?

それも出ますね.

1.2 Selberg の証明

さてそれで, 今知られている Selberg 積分の証明法で私が知っているのは 5 個ぐらいあるんですけど, 今回の話はそのうち, 組合せ零点定理を含む, 3 つを紹介することになります. 今日は Selberg の原証明の紹介で, 論文に載っていますが, 一度くらい味わうのがいいんじゃないかと思ってやってきました.

先程も述べたようにここでは $\gamma = k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ としましょう. まず $k = 0$ の時は差積

が無くなり、ベータ函数でわかります。そこで $k \neq 0$ として

$$\Delta_n(\mathbf{t}) := \Delta_n(t_1, \dots, t_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)$$

として、 $\Delta_n(\mathbf{t})^{2k}$ を

$$\Delta_n(\mathbf{t})^{2k} = \sum_{\mathbf{l}=(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c(\mathbf{l}) t_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n}$$

と展開します。これを Selberg 積分の式に代入すると、ベータ積分の公式より

$$S_n(\alpha, \beta, k) = \sum_{\mathbf{l}=(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c(\mathbf{l}) \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + l_j) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + l_j)}$$

となります。

聴講者：差積の絶対値はどうしたのでしょうか？

厳密には絶対値をつけたと思う方がいいけれど、差積の $2k$ 乗は多項式なんで、正の分枝を取ったと思ってください。

ここで次数の評価に関する不等式

$$c(\mathbf{l}) \neq 0, \quad 0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_n \quad \Rightarrow \quad k(j-1) \leq l_j \leq k(n+j-2) \quad (1.3)$$

をまず証明しましょう。これは証明の一番大事な Lemma だと思いますが、次数に関する比較から容易にわかります。実際、 $\Delta_j(\mathbf{t})^{2k}$ の次数は

$$\binom{j}{2} 2k = j(j-1)k.$$

更に仮定の $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_n$ から

$$j(j-1)k \leq l_1 + \cdots + l_j \leq jl_j$$

となるので

$$(j-1)k \leq l_j$$

はよい。

次いで

$$\Delta_n(\mathbf{t})^{2k} = (t_1 \cdots t_n)^{2(n-1)k} \Delta_n\left(\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_n}\right)$$

と変形して次数を考えると、こちらは

$$l'_j := 2(n-1)k - l_{n+1-j}, \quad l'_1 \leq l'_2 \leq \cdots \leq l'_n$$

となる. ここに先の不等式を使うと

$$(j-1)k \leq l'_j = 2(n-1)k - l'_{n+1-j}$$

で, ここで j を $n-j+1$ に置き換えて整理すれば, もう片方の

$$l_j \leq k(n+j-2)$$

を得ます.

この次数に関する評価に注意して, あとは対称性をフルに活用していけばいいわけ. まず

$$P_{l_j}(\alpha, \beta) := \frac{\Gamma(\alpha + l_j)}{\Gamma(\alpha + (j-1)k)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)k)}{\Gamma(\alpha + \beta + l_j)}$$

とおくと, 先の l_j に関する不等式から $P_{l_j}(\alpha, \beta)$ は α と β の多項式で, その β に関する次数は

$$\deg_{\beta} P_{l_j}(\alpha, \beta) = (n+j-2)k - l_j$$

であることがわかります. これで議論が多項式に帰着され, Selberg の積分公式の右辺の形が出てくるわけです. 更に

$$P_1(\alpha, \beta) := \prod_{j=1}^n P_{l_j}(\alpha, \beta) = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + l_j)}{\Gamma(\alpha + (j-1)k)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)k)}{\Gamma(\alpha + \beta + l_j)}$$

とすると, $\Delta_n(\mathbf{t})^{2k}$ は $\mathbf{t}$ の $n(n-1)k$ 斉次多項式で $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ が

$$\Delta_n(\mathbf{t})^{2k} = \sum_{\mathbf{l}=(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c(\mathbf{l}) t_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n}$$

だったことから

$$\sum_{j=1}^n l_j = n(n-1)k$$

なので, $P_1(\alpha, \beta)$ の β に関する次数は

$$\begin{aligned} \deg_{\beta} P_1(\alpha, \beta) &= \sum_{j=1}^n ((n+j-2)k - l_j) \\ &= \frac{3}{2}n(n-1)k - n(n-1)k \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)k \end{aligned}$$

になります.

これを更に対称な形にしてやります. そのために

$$P(\alpha, \beta) := \sum_{\mathbf{l}} c(\mathbf{l}) P_1(\alpha, \beta)$$

において

$$\prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + l_j) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + l_j)} = P_1(\alpha, \beta) \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + (j-1)k) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)k)}$$

であることに注意すると, Selberg 積分は

$$\begin{aligned} S_n(\alpha, \beta, k) &= \sum_{\mathbf{l}=(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c(\mathbf{l}) \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + l_j) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + l_j)} \\ &= P(\alpha, \beta) \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + (j-1)k) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)k)} \\ &= \frac{P(\alpha, \beta)}{R(\beta)} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + (j-1)k) \Gamma(\beta + (j-1)k)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)k)} \end{aligned}$$

と書き直すことができます. ただし

$$R(\beta) := \prod_{j=1}^n \beta(\beta+1) \cdots (\beta + (j-1)k)$$

としました.

後ろの方に Selberg 積分の α, β に関する部分が出てきていますが, その手前にある $\frac{P(\alpha, \beta)}{R(\beta)}$ が α と β によらない定数であることを示しましょう. 元々の積分は $t_i \leftrightarrow 1-t_i$ の変数変換で対称ですから, $S_n(\alpha, \beta, k)$ は α と β に関する対称関数です. なので

$$\frac{P(\alpha, \beta)}{R(\beta)} = \frac{P(\beta, \alpha)}{R(\alpha)}$$

が成り立ちますが, これから $P(\alpha, \beta)$ が $R(\beta)$ で割り切れることがわかります.

聴講者: それは何故ですか?

定義から, $P_{l_j}(\alpha, \beta), P_1(\alpha, \beta), P(\alpha, \beta)$ はみんな α, β の多項式で, 同様に右辺の $P(\beta, \alpha)$, 更に $\frac{P(\beta, \alpha)}{R(\alpha)}$ も特に β の多項式ですから割り切れることになります. 更に $P(\alpha, \beta)$ の β に関する次数を数えてみると定義より

$$\deg_{\beta} P(\alpha, \beta) \leq \frac{1}{2} n(n-1)k = \deg_{\beta} R(\beta)$$

となって, $P(\alpha, \beta)$ は $R(\beta)$ で割り切れているにもかかわらず, 次数は分母の $R(\beta)$ の方が大きいわけです. だから $\frac{P(\alpha, \beta)}{R(\beta)}$ は β によらず, 同様にして $\frac{P(\beta, \alpha)}{R(\alpha)}$ が α によら

ないことがわかるわけです. $\frac{P(\alpha, \beta)}{R(\beta)} = \frac{P(\beta, \alpha)}{R(\alpha)}$ だったので結局, これは共に α と β に
よらない定数 $c_n(k)$ であることがわかりました.

これで結局

$$S_n(\alpha, \beta, k) = c_n(k) \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + (j-1)k) \Gamma(\beta + (j-1)k)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)k)}$$

が得られたので, あとは α と β を特殊化して

$$c_n(k) = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+jk)}{\Gamma(1+k)}$$

を示しましょう. そこで $\alpha = \beta = 1$ とすると,

$$\begin{aligned} S_n(1, 1, k) &= c_n(k) \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+(j-1)k) \Gamma(1+(j-1)k)}{\Gamma(2+(n+j-2)k)} \\ &= \int_{[0,1]^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)^{2k} dt_1 \cdots dt_n \end{aligned}$$

となるので, この最後の積分を計算できればよい. これは $t_i \leq t_n$ に注意して

$$S_n(1, 1, k) = n \int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)^{2k} dt_1 \cdots dt_{n-1}$$

という反復積分表示に直してから, Dirichlet 積分でもよくやるように

$$t_1 = s_1 s_n, t_2 = s_2 s_n, \dots, t_{n-1} = s_{n-1} s_n, t_n = s_n$$

のように変数変換すると, Jacobian が s_n^{n-1} で

$$\Delta_n(\mathbf{t}) = s_n^{\frac{n(n-1)}{2}} (1-s_1) \cdots (1-s_{n-1}) \Delta_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1})$$

となるので

$$\begin{aligned} S_n(1, 1, k) &= n \int_0^1 s_n^{n(n-1)k+n-1} ds_n \\ &\quad \cdot \int_{[0,1]^{n-1}} ((1-s_1) \cdots (1-s_{n-1}))^{2k} \Delta_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1})^{2k} ds_1 \cdots ds_{n-1} \\ &= \frac{1}{1+(n-1)k} S_{n-1}(1, 2k+1, k). \end{aligned}$$

これで n が $n-1$ に下がったので, 帰納法を使うと

$$S_{n-1}(1, 2k+1, k) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(1+(j-1)k) \Gamma(1+(j+1)k)}{\Gamma(2+(n+j-1)k)} \frac{\Gamma(1+jk)}{\Gamma(1+k)}$$

となることがわかるので、これより

$$\begin{aligned}
c_n(k) &= S_n(1, 1, k) \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(2 + (n + j - 2)k)}{\Gamma(1 + (j - 1)k)\Gamma(1 + (j - 1)k)} \\
&= \frac{1}{1 + (n - 1)k} S_{n-1}(1, 2k + 1, k) \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(2 + (n + j - 2)k)}{\Gamma(1 + (j - 1)k)\Gamma(1 + (j - 1)k)} \\
&= \frac{1}{1 + (n - 1)k} \frac{\Gamma(2 + (n - 1)k)}{\Gamma(1 + (n - 1)k)} \frac{\Gamma(1 + nk)}{\Gamma(1 + k)} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(1 + jk)}{\Gamma(1 + k)} \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1 + jk)}{\Gamma(1 + k)}
\end{aligned}$$

を得ます。これで証明はおしまいです。

最初に証明を読んだときはビックリして…。何しろ差積を崩すという発想は全然無かったんで…。それが α と β に関する多項式の具体的な性質からこのような証明ができたというのは非常に素晴らしいと思います。これから最後の詰めというのは、Selberg は Carlson の定理、というよりは次の函数論の定理を証明して終わりにしています。

補題 1.2. 函数 $f(z)$ が $\operatorname{Re} z \geq 0$ で (1) 正則, (2) 有界, (3) $f(k) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ならば, $f(z) \equiv 0$ は恒等的に零。

Carlson の定理っていうのはもうちょっと強くて、函数が有界でなく、増大度が

$$|f(z)| \leq C e^{\mu|z|} \quad (0 \leq \mu < \pi)$$

のように指数函数で抑えられればよいところまで弱められるというものです [C]。それと比べるとこれはそれほど強くないわけですが、今の場合はこれで十分なわけです。証明は函数論の演習問題で Cauchy の積分公式だけでできる。もう少し正確には、これを少し変形した

$$\frac{f(z)}{(z - 1) \cdots (z - n)}$$

に対して Cauchy の積分公式を使うんだけど、円弧でやらずに虚軸上の積分

$$f(a) = \frac{(a - 1) \cdots (a - n)}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\sqrt{-1}\infty}^{\sqrt{-1}\infty} \frac{1}{z - a} \frac{f(z)}{(z - 1) \cdots (z - n)} dz \quad (n > a \geq 1)$$

に直して、 $|f(a)|$ を

$$\begin{aligned}
|f(a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a - n)} \right| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sqrt{-1}t)|}{\sqrt{(a^2 + t^2)(1^2 + t^2) \cdots (n^2 + t^2)}} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\Gamma(a)\Gamma(1 - a + n)}{n!} \frac{\sin(\pi(a - n))}{\pi} \right| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sqrt{-1}t)|}{\sqrt{(a^2 + t^2)(1 + \frac{t^2}{1^2}) \cdots (1 + \frac{t^2}{n^2})}} dt \\
&\leq \left| \frac{\Gamma(n + 1 - a)}{\Gamma(n + 1)} \right| \frac{1}{2\pi|\Gamma(1 - a)|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sqrt{-1}t)|}{1 + t^2} dt
\end{aligned}$$

と評価すれば、後ろの積分は n によらず有界で、主要部 $\left| \frac{\Gamma(n+1-a)}{\Gamma(n+1)} \right|$ は Stirling の公式から $n \rightarrow \infty$ で 0 になることがわかるので $f(a) = 0$ が示せます。

この Lemma を Selberg 積分の右辺と左辺の差に適応すると、積分側が bounded であることはすぐにわかって、ガンマ函数の方は Stirling の公式から

$$\left(\frac{j^j(j-1)^{j-1}(n-j)^{n-j}}{(n+j-2)^{n+j-2}} \right)^\gamma \quad (2 \leq j \leq n-1)$$

が $\gamma \rightarrow \infty$ の時の主要項であることがわかりますから、これが bounded になることを証明すればよい。つまり

$$0 < \frac{j^j(j-1)^{j-1}(n-j)^{n-j}}{(n+j-2)^{n+j-2}} \leq 1 \quad (2 \leq j \leq n-1)$$

を示せばよいわけですが、これは微積を使えば、当然証明できます (Selberg 自身は証明無しでやっていますが、微積を使わずにもうちょっと簡単にできませんかね?). これで Selberg 積分の証明が全て終わりました。

聴講者：これはどなたの証明なんでしょう?

Selberg 自身の元々の原論文の証明です。もうちょっと先に進んだら、青本先生の証明とか、組合せ零点定理を使った証明も紹介することになると思います。よろしいでしょうか。

1.3 積分と定数項恒等式

さて、これから定数項恒等式の話も出てくるので、それに関連して Dyson 積分を紹介したいと思います。元々 Mehta 積分は統計物理の論文から出てきたんですけども、そこには次のような積分 (Dyson 積分) も出てきています。

$$c_n(\gamma) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |e^{\sqrt{-1}\theta_i} - e^{\sqrt{-1}\theta_j}|^{2\gamma} d\theta_1 \cdots d\theta_n = \frac{\Gamma(1+n\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)^n}. \quad (1.4)$$

この $c_n(\gamma)$ は先程の Selberg 積分の証明に出てきたものとは別物で、積分も今度は円周上のものを考えています。この積分を、先程と同様に γ を非負整数 k にとって $x_i = e^{\sqrt{-1}\theta_i}$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} c_n(\gamma) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{|x_1|=1} \cdots \int_{|x_n|=1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^{2k} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{|x_1|=1} \cdots \int_{|x_n|=1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^k \left(1 - \frac{x_j}{x_i}\right)^k \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} \\ &= \text{CT} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^k \left(1 - \frac{x_j}{x_i}\right)^k \right] \end{aligned}$$

のように書き換えられます. ただし, CT は Laurent 多項式の定数項を取るという操作です. つまり γ が整数パラメータの場合には, Dyson 積分が Laurent 多項式の定数項恒等式

$$\text{CT} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^k \left(1 - \frac{x_j}{x_i}\right)^k \right] = \frac{(nk)!}{(k!)^n}$$

と同値になるわけです. 実は Selberg 積分もパラメータが整数のときには, こういった定数項恒等式の形に定式化できます.

Dyson [D] (1962) は更にこれを一般化して, 非負整数 $a_1, \dots, a_n$ に対して

$$\text{CT} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i} \left(1 - \frac{x_j}{x_i}\right)^{a_j} \right] = \frac{(a_1 + \dots + a_n)!}{a_1! \dots a_n!}$$

が成り立つと予想 (Dyson 予想) し, Andrews [Ao] (1975) が更にこの q 版

$$\text{CT} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_i}{x_j}; q\right)^{a_i} \left(\frac{qx_j}{x_i}; q\right)^{a_j} \right] = \frac{(q; q)_{a_1 + \dots + a_n}}{(q; q)_{a_1} \dots (q; q)_{a_n}}$$

も考えています. これらは予想だったんですけど, 何十年も前に全て証明されています.

これから目標とするのは Selberg 積分を使って, この Dyson 積分及びそれと同値な定数項恒等式を証明することです (一般の Dyson 予想の方は後で組合せ零点定理を使って証明することにします). そのために Askey's trick と呼ばれる次の一般的な原理を用意しておきます.

定理 1.3 (Askey's trick). Laurent 多項式 $f(t_1, \dots, t_n)$ と $\text{Re} \zeta \gg 0$ に対し,

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} (t_1 \dots t_n)^{\zeta-1} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \\ &= \frac{1}{(2 \sin \pi \zeta)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{\sqrt{-1}\zeta(\theta_1 + \dots + \theta_n)} f(-e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \dots, -e^{\sqrt{-1}\theta_n}) d\theta_1 \dots d\theta_n. \end{aligned} \quad (1.5)$$

証明は簡単で, 今 $f(t_1, \dots, t_n)$ は Laurent 多項式ですから

$$f(t_1, \dots, t_n) = t_1^{d_1} \dots t_n^{d_n} \quad (d_i \in \mathbb{Z})$$

について証明すれば十分です. 左辺の方は, ζ を $\text{Re}(\zeta + d_i) > 0$ となるように取っておくと

$$\int_{[0,1]^n} t_1^{d_1+\zeta-1} \dots t_n^{d_n+\zeta-1} dt_1 \dots dt_n = \frac{1}{d_1 + \zeta} \dots \frac{1}{d_n + \zeta}.$$

他方, 右辺の方は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2 \sin \pi \zeta)^n} \prod_{j=1}^n (-1)^{d_j} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{-1}(d_j + \zeta - 1)\theta_j} d\theta_j \\
&= \frac{1}{(2 \sin \pi \zeta)^n} \prod_{j=1}^n (-1)^{d_j} \frac{e^{\sqrt{-1}(d_j + \zeta)\pi} - e^{-\sqrt{-1}(d_j + \zeta)\pi}}{\sqrt{-1}(d_j + \zeta)} \\
&= \frac{1}{(2 \sin \pi \zeta)^n} \prod_{j=1}^n (-1)^{d_j} \frac{2}{d_j + \zeta} \sin \pi(d_j + \zeta) \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{1}{d_j + \zeta}
\end{aligned}$$

となり, 左辺と右辺が一致するので証明できました. この定理のままだと, 余分なパラメータ ζ が残ったままになっていますが, 適当に $f(t_1, \dots, t_n)$ を取って左辺の $[0, 1]$ 積分が計算できれば, その積分計算をした後で ζ を specialize することで, 具体的な定数項恒等式を得ることができます. たとえば $\zeta = \alpha$, $\beta \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として Selberg 積分の場合, つまり

$$f(t_1, \dots, t_n) = D((n-1)\gamma, \beta, \gamma) = \prod_{i=1}^n t_i^{(n-1)\gamma} (1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma}$$

という Laurent 多項式にこれを適応すると, 次のような Morris 積分と呼ばれる積分を得ることができます [Mo].

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{n+\binom{n}{2}\gamma} \left(\frac{\pi}{\sin \pi b} \right)^n M_n(a, b, \gamma).$$

ここで $a = \alpha + \beta + (n-1)\gamma - 1$, $b = -\alpha - (n-1)\gamma$ で

$$\begin{aligned}
M_n(a, b, \gamma) &:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} \prod_{i=1}^n e^{\frac{\sqrt{-1}\theta_i}{2}(a-b)} |1 + e^{\sqrt{-1}\theta_i}|^{a+b} \\
&\quad \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} |e^{\sqrt{-1}\theta_i} - e^{\sqrt{-1}\theta_j}|^{2\gamma} d\theta_1 \cdots d\theta_n
\end{aligned}$$

です. この積分を Selberg 積分を用いて計算すれば

$$\begin{aligned}
M_n(a, b, \gamma) &= (-1)^{n+\binom{n}{2}\gamma} \left(\frac{\sin \pi b}{\pi} \right)^n S_n(-b - (n-1)\gamma, a + b + 1, \gamma) \\
&= (-1)^{n+\binom{n}{2}\gamma} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\sin \pi b}{\pi} \right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(-b - (n-j)\gamma) \Gamma(1 + a + b + (j-1)\gamma) \Gamma(1 + j\gamma)}{\Gamma(1 + a + (j-1)\gamma) \Gamma(1 + \gamma)}.
\end{aligned}$$

ここでガンマ函数の相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

を用いて整理すると, 前のおつりがちょうど消えて

$$M_n(a, b, \gamma) = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+a+b+(j-1)\gamma)\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+a+(j-1)\gamma)\Gamma(1+b+(j-1)\gamma)\Gamma(1+\gamma)}$$

が得られます. ここで $a = b = 0$ とすると, Selberg 積分の積分表示の方は $\alpha = -(n-1)\gamma$, $\beta = 1$ なので発散してしまいますが, Morris 積分 $M_n(0, 0, \gamma)$ は先程の Dyson 積分になり, これは収束していて Morris の積分公式から Dyson の積分公式が得られるわけです.

聴講者: Dyson の予想ってのは何年ごろなんですか?

1962, 3 年で Mehta の論文と同じだったと思います.

聴講者: 「Dyson や Mehta っていうのは物理からこういうことを考えたんだろうな」っていうのはわかるんですけど, Selberg はなんでこんなことを考えたんでしょうか?

Selberg が考えたのは函数論の定理ですね. 彼は整数値整関数に関する定理を証明しているのですが, その定理の証明で, 差積を制限した時にある多項式の最大値最小値をもとめるという条件付き極値問題を考察していて, その考察の中でこういう差積の積分が出てくるといようなことだったと思います [S1] (cf. [Kan2]).

聴講者: Dyson の予想が Selberg 積分に帰着されることがわかったのはいつ頃なんですか?

1979 年か 80 年くらいだと思う. それは Bombieri が, 整数論の定理でやはり Selberg 型の積分が出てきて, それを Selberg に聞きにいったら「これは前にやったことがある」ということで, それが Dyson に伝わって...

聴講者: Dyson と Selberg は同じところに住んでいたんですか?

そうそう, 同じところ (プリンストン) にいた.

聴講者: だけど伝わらなかった (笑)?

全然伝わらなかった (笑). というかそれまでこういう定理があることは, Math review には載ってたけど, ほとんど知られていなかった.

実は僕は明倫館で古本を買いまして.... 柴垣和三雄 (わさお) 先生の「ガンマ函数」[柴垣]っていう, 1950 年くらいに出た岩波の本なんですけど.... この方は九大の応用数学の先生で, もうお亡くなりになっておられますが, 昔, なんとかお見かけしたことがあります. この本の第 4 章の演習問題 (p113, 問 8) に Selberg 積分が出ていたので興味がある方はご覧になってください. だから知られてないことも無かったんだけど....

聴講者: 群上の積分というか, Weyl の積分公式の計算をすると, 差積の部分が Jacobian part として出てくると思うんですけど.

はい. パラメータ γ が $\frac{1}{2}, 1, 2$ の時はそれで出てきます. これは統計の計算なんかでも出てくるみたいだけど....

聴講者: Mehta 積分に対応する統計物理のモデルってどんなものなんですか?

それは円周上に粒子があって, それが差積 (のベキ) で interactive してる場合の分配函数が Mehta 積分らしいです. ただ分配函数の定義を聞かれても, 物理わかんないんで, 「この式です」としか言えませんが.... 正確に言うと, Mehta 積分は外側の変数がない正規化定数の計算で, 本当はこれに外側の変数を加えたものの積分の挙動が知りたいようですけれども, それは一般には難しいみたいです.

聴講者: ようするに円周上の粒子っていうことで?

はい.

聴講者: Calogero 系とは関係があるんですか?

物理は良く知らないんですが, 出てきた式だけみてやると関係があります.

2 超幾何系

2.1 超幾何系の微分方程式系

昨日の続きで超幾何系の話をやることにします. ここで改めて

$$D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) := \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma}$$

とおきます. 青本先生がされた Selberg 積分に関する証明というのは以下のようなものです. まず次を証明します:

$$\int_{[0,1]^n} t_1 \cdots t_r D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) d\mathbf{t} = \frac{\alpha + (n-r)\gamma}{\alpha + \beta + (2n-r-1)\gamma} \cdot \int_{[0,1]^n} t_1 \cdots t_{r-1} D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (2.1)$$

ここで r が 1 以上の時は, この公式で r を 1 つずつ下げていくと

$$\int_{[0,1]^n} t_1 \cdots t_r D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) d\mathbf{t} = \prod_{j=1}^r \frac{\alpha + (n-j)\gamma}{\alpha + \beta + (2n-j-1)\gamma} S_n(\alpha, \beta, \gamma)$$

のように最後は Selberg 積分になります. 特に $r = n$ とすると, 最初の $t_1 \cdots t_n$ は $D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t})$ の α の中に入っていると思って

$$t_1 \cdots t_r D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) = D(\alpha + 1, \beta, \gamma, \mathbf{t})$$

とすれば, Selberg 積分についての関係式

$$S_n(\alpha + 1, \beta, \gamma) = \prod_{j=1}^n \frac{\alpha + (n-j)\gamma}{\alpha + \beta + (2n-j-1)\gamma} S_n(\alpha, \beta, \gamma)$$

が得られます. つまり Selberg 積分の α を一挙に下げるんじゃなくて, $t_1 \cdots t_r$ を順々に下げていくことにより, 1 つ下げる. で α が正の整数とすると, これにより $\alpha = 1$ までもってこれる. 同様に β に関しても, $1 - t_i$ に関して変数変換してやれば t_i の方に持ってこれますので, 同様の公式で $\beta = 1$ にもってこれるわけです. 結局 α, β 共に正の整数と思うと, $\alpha = \beta = 1$ にもってこれて, Selberg 積分の t_i と $1 - t_i$ の factors は無くなっちゃうわけです. そうすると, 残りは差積で homogeneous になりますので, 昨日やったやり方で $n - 1$ 次元の Selberg 積分に帰着されるわけです.

この証明の鍵になった (2.1) の formulation を変えますと以下のようになります.

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{j=1}^n (t_j - x) D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) d\mathbf{t} = c_n P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2x). \quad (2.2)$$

ただし, $P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2x)$ は Jacobi 多項式

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2x) := \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix}; x \right)$$

です. ここで出てきた定数 c_n も $x = 0$ とすれば

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{j=1}^n t_j D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) d\mathbf{t} = S_n(\alpha + 1, \beta, \gamma) = c_n P_n^{(\alpha, \beta)}(1)$$

となることから, やはり Selberg 積分を用いて

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{S_n(\alpha+1, \beta, \gamma)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(1)} \\ &= \frac{n!}{(\alpha+1)_n} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\alpha+1+(j-1)\gamma)\Gamma(\beta+(j-1)\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1+(n+j-2)\gamma)} \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \end{aligned}$$

のように具体的に書くことが出来ます.

この (2.2) は何をやっているかという, (2.2) の左辺は

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} \prod_{j=1}^n (t_j - x) D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) d\mathbf{t} &= \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} x^{n-r} \\ &\quad \cdot \int_{[0,1]^n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} t_{i_1} \cdots t_{i_r} D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) d\mathbf{t} \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} x^{n-r} \\ &\quad \cdot \int_{[0,1]^n} t_1 \cdots t_r D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) d\mathbf{t} \end{aligned}$$

のように上述の (2.1) の r についての母函数になっていて, それが Jacobi 多項式になる. つまり「超幾何微分方程式を満たす」ということを言っているわけです.

これを多変数化して次のような積分を考えます.

$$S_{m,n}(\alpha, \beta, \gamma, ; \mu; \mathbf{x}) := \int_{[0,1]^n} \Phi(\mathbf{t}) \theta. \quad (2.3)$$

ただし

$$\Phi(\mathbf{t}) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (t_i - x_j)^\mu D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}), \quad \theta := dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$$

です. $m = 1, \mu = 1$ の場合が先程の (2.2) で Jacobi 多項式になったわけです. この積分はその m 変数版で, 同じような微分方程式を満たし, 超幾何の 1 つの拡張のようなものになっているだろうと期待されるわけです. これをちょっとやってみましょう.

こうした (積分の満たす) 微分方程式はどうやって計算するかっていうと, 原理はただ一つで, Stokes の定理を使う. まずこれを説明します. ここで

$$\begin{aligned} \omega &:= d_t \log \Phi(\mathbf{t}) \\ &= (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \frac{dt_i}{t_i} + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \frac{-dt_i}{1-t_i} + 2\gamma \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{dt_i - dt_j}{t_i - t_j} + \mu \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{dt_i}{t_i - x_j} \end{aligned}$$

として, (その twisted derivation) ∇_ω を

$$\nabla_\omega := d + \omega \wedge$$

とおきます. すると Φ を form として, 外微分を計算すると

$$d(\Phi\varphi) = d(\Phi) \wedge \varphi + \Phi d\varphi = \Phi\omega \wedge \varphi + \Phi d\varphi = \Phi\nabla_\omega\varphi$$

となっているので, この場合に Stokes の公式を書いてみると, 適当な $(n-1)$ -form φ について

$$\int_{[0,1]^n} \Phi\nabla_\omega\varphi = 0. \quad (2.4)$$

これが微分方程式の「素」です. これを用いて青本先生の計算の m 変数版をやってみましょう.

まず, わかることは

$$\frac{\partial S_{m,n}}{\partial x_k} = -\mu \int_{[0,1]^n} \Phi(\mathbf{t}) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - x_k} \right) \theta, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 S_{m,n}}{\partial x_k^2} = \int_{[0,1]^n} \Phi(\mathbf{t}) \left((\mu^2 - \mu) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - x_k)^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(t_i - x_k)(t_j - x_k)} \right) \theta. \quad (2.6)$$

ここで x_k で 2 階微分するのではなく, 違う変数をとって混ざった 2 階微分も考えられますが, 今は考えません. ともかくこれで閉じた関係式が欲しいわけですが, そうすると Stokes の定理より mod exact, すなわち $\nabla_\omega\varphi$ で書けているようなものを mod にして, 関係式を立てればよろしい. それが微分方程式の立て方なわけです.

どんな $(n-1)$ -form φ についても ∇_ω してやれば何か関係式がでるわけですが, 我々は $S := S_{m,n}$ の微分方程式を出すという立場で, 以下のような補助的な $(n-1)$ -form を使います. 今

$$*dt_i := (-1)^{i-1} dt_1 \wedge \cdots \wedge \check{dt}_i \wedge \cdots \wedge dt_n$$

とおいて, $(n-1)$ -forms を

$$\varphi_0 := \sum_{i=1}^n *dt_i, \quad \varphi_1 := \sum_{i=1}^n t_i *dt_i, \quad \psi_k := \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - x_k} *dt_i$$

と定めると

$$dt_i \wedge *dt_i = \theta$$

と $\wedge$ の性質から各々の ∇_ω は次のようになります.

$$\begin{aligned}\nabla_\omega \varphi_0 &= \left\{ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - t_i} + \mu \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{dt_i}{t_i - x_j} \right\} \theta, \\ \nabla_\omega \varphi_1 &= \left\{ n(\alpha + \beta - 1 + \gamma(n - 1) + \mu m) - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - t_i} + \mu \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{x_j}{t_i - x_j} \right\} \theta, \\ \nabla_\omega \psi_k &= \left[(\mu - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - x_k)^2} - 2\gamma \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(t_i - x_k)(t_j - x_k)} \right. \\ &\quad + (\alpha - 1) \frac{1}{x_k} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - x_k} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \right\} \\ &\quad - (\beta - 1) \frac{1}{1 - x_k} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - t_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - x_k} \right\} \\ &\quad \left. + \mu \sum_{j=1, j \neq k}^m \frac{1}{x_k - x_j} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - x_k} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - x_j} \right\} \right] \theta.\end{aligned}$$

まず $\nabla_\omega \varphi_0$ と $\nabla_\omega \varphi_1$ に, Φ をかけて $[0, 1]^n$ 上で積分し, (2.3), (2.5), (2.6) で書き直すと Stokes の定理 (2.4) より

$$\begin{aligned}0 &= \int_{[0,1]^n} \Phi \nabla_\omega \varphi_0 \\ &= - \sum_{j=1}^m \frac{\partial S}{\partial x_j} + (\alpha - 1) \int_{[0,1]^n} \Phi \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \theta - (\beta - 1) \int_{[0,1]^n} \Phi \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - t_i} \theta, \\ 0 &= \int_{[0,1]^n} \Phi \nabla_\omega \varphi_1 \\ &= n(\alpha + \beta - 1 + \gamma(n - 1) + \mu m) S - \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial S}{\partial x_j} \\ &\quad - (\beta - 1) \int_{[0,1]^n} \Phi \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - t_i} \theta\end{aligned}$$

がわかりますが、これを整理して以下の関係式を得ます。

$$(\beta - 1) \int_{[0,1]^n} \Phi \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-t_i} \theta = n(\alpha + \beta - 1 + \gamma(n-1) + \mu m)S - \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) \int_{[0,1]^n} \Phi \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \theta &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial S}{\partial x_j} + (\beta - 1) \int_{[0,1]^n} \Phi \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-t_i} \theta \\ &= n(\alpha + \beta - 1 + \gamma(n-1) + \mu m)S \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \frac{\partial S}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial S}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

先程と同様に $\nabla_\omega \psi_k$ に、 $x_k(1-x_k)\Phi$ をかけて $[0,1]^n$ 上で積分すると、(2.7) と (2.8) を用いて整理して

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0,1]^n} x_k(1-x_k)\Phi \nabla_\omega \psi_k \\ &= x_k(1-x_k) \int_{[0,1]^n} \Phi \left\{ (\mu-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i-x_k)^2} - 2\gamma \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(t_i-x_k)(t_j-x_k)} \right\} \theta \\ &\quad + (\alpha-1)(1-x_k) \frac{\partial S}{\partial x_k} - n(\alpha+\beta-1+\gamma(n-1)+\mu m)(1-x_k)S \\ &\quad - (1-x_k) \sum_{j=1}^m \frac{\partial S}{\partial x_j} + (1-x_k) \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial S}{\partial x_j} \\ &\quad - (\beta-1)x_k \frac{\partial S}{\partial x_k} - n(\alpha+\beta-1+\gamma(n-1)+\mu m)x_k S + x_k \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial S}{\partial x_j} \\ &\quad + \mu \sum_{j=1, j \neq k}^m \frac{x_k(1-x_k)}{x_k-x_j} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x_k} - \frac{\partial S}{\partial x_j} \right\} \\ &= x_k(1-x_k) \int_{[0,1]^n} \Phi \left\{ (\mu-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i-x_k)^2} - 2\gamma \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(t_i-x_k)(t_j-x_k)} \right\} \theta \\ &\quad + (\alpha-1)(1-x_k) \frac{\partial S}{\partial x_k} - (\beta-1)x_k \frac{\partial S}{\partial x_k} - n(\alpha+\beta-1+\gamma(n-1)+\mu m)S \\ &\quad - (1-x_k) \sum_{j=1}^m \frac{\partial S}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial S}{\partial x_j} + \mu \sum_{j=1, j \neq k}^m \frac{x_k(1-x_k)}{x_k-x_j} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x_k} - \frac{\partial S}{\partial x_j} \right\}. \end{aligned}$$

これから微分方程式が出そうですが、残りの主要項についてはそのままではダメで、ここで (2.6) と見比べて

$$\frac{\mu^2 - \mu}{2\mu^2} = \frac{\mu - 1}{-2\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 1, \quad -\gamma$$

という仮定をしてやると、 S の 2 階微分が出てきて、以上をまとめて次を得ます。

定理 2.1. $\mu = 1$ もしくは $\mu = -\gamma$ のとき, $S = S_{m,n}(\alpha, \beta, \gamma, ; \mu; \mathbf{x})$ は次の微分方程式系を満たす.

$$\begin{aligned} & x_i(1-x_i)\frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} + \left\{ c - \frac{1}{\gamma}(m-1) - \left(a + b + 1 - \frac{1}{\gamma}(m-1) \right) x_i \right\} \frac{\partial S}{\partial x_i} - abS \\ & + \frac{1}{\gamma} \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{x_i(1-x_i)}{x_i-x_j} \frac{\partial S}{\partial x_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{x_j(1-x_j)}{x_i-x_j} \frac{\partial S}{\partial x_j} \right\} = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (2.9)$$

ただしパラメータは, $\mu = 1$ のときは

$$a = -n, \quad b = \frac{1}{\gamma}(\alpha + \beta - 1 + m) + n + 1, \quad c = \frac{1}{\gamma}(\alpha - 1 + m).$$

$\mu = -\gamma$ のときは

$$a = n\gamma, \quad b = -(\alpha + \beta - 1) + \gamma(m - n + 1), \quad c = -(\alpha - 1) + m\gamma.$$

先程出てきた Jacobi 多項式はちょうど $m = 1$, $\mu = 1$ とするとそうになっているわけです. また $m = 2$ のときは, Appell の F_4 の 2 重被覆への持ち上げ

$$x_1 = s_1 s_2, \quad x_2 = (1 - s_1)(1 - s_2).$$

になります. これは加藤 (満生) 先生がやられたお仕事です [Kat]. なので $S_{m,n}$ はそれらの一つの一般化になっているとすることができるわけです.

この方程式をみると, 統計の方はよくご存知でしょうけど, Muirhead [Mu] とかの zonal 多項式から作られる超幾何方程式系と (パラメータが少し違うだけで) 全く同じわけです. ですから, Muirhead のまねをすれば全く同じようにすれぱうまくいくだろうと思ってやってみたわけですね [Kan1].

2.2 超幾何級数解

「超幾何級数」と呼んでいいのかどうかよくわかりませんが, この方程式系 (2.9) の一つの級数解を構成してみます. Jack 多項式というのがありまして... まず α を正の実数パラメータ, λ を長さ n 以下の整数の分割

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

とします. また分割 μ, λ についての次のような dominance partial ordering を導入しておきます.

$$\mu \geq \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \geq \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2 \\ \vdots \\ \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \\ |\mu| = |\lambda| \end{cases}.$$

ただし

$$|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

として, また $\mu \geq \lambda$ かつ $\mu \neq \lambda$ のときは, $=$ を外して $\mu > \lambda$ と書くことにします.

分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し,

$$m_\lambda(\mathbf{x}) := \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_r \cdot \lambda} x_1^{\nu_1} \cdots x_r^{\nu_r},$$

$$\mathfrak{S}_r \cdot \lambda := \{\sigma \cdot \lambda := (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(r)}) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_r\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{(r)}$$

のように λ_1 から λ_n で異なった置換全体を走る和を (単項型) 対称多項式 $m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z})$ と呼びます. それから

$$L_2 := \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{x_i^2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

という 2 階の operator を考えます.

Jack 多項式 $P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ というのは次の 2 条件で一意に決まる (斉次) 対称多項式です.

- (1) $P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = m_\lambda(\mathbf{x}) + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(\mathbf{x}), \quad u_{\lambda\mu} \in \mathbf{Q}(\alpha).$
- (2) $L_2 P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \epsilon_\lambda P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}).$

こういうのがあるというのは全然自明じゃなくて, これは dominance ordering ですからスカスカなわけですが, こういうもので定義されるというのが unique に存在するということが知られています.

いくつか例を挙げると

$$\begin{aligned} \alpha = 1 & \Rightarrow \text{Schur,} \\ \alpha = 2 & \Rightarrow \text{zonal.} \end{aligned}$$

それから

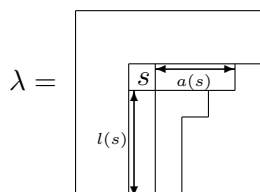
$$\lambda = 1^r := (\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ 個}}, 0, \dots, 0)$$

のときには初等対称関数

$$P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = e_r(\mathbf{x}) := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_r}.$$

Jack 多項式の具体的な計算結果というのは色々ありまして, たとえば ($\alpha = 1$ で) 縦一行の場合は完全対称多項式等, 個別にわかることもありますが, 一般にこれという明示公式はないようです.

超幾何級数解の定義にはもうちょっと準備が必要なので続けます．一般に分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を Young 図形で表示します．このとき, 適当な box s を取ったときに, s からみて s 自身を除いた右端までの長さ (箱の個数) を arm length $a(s)$, 下端までの長さを leg length $l(s)$ とします．



こういう量は組合せ論とか対称多項式なんかでもよく出てくるわけですが, この $a(s)$ と $l(s)$ を用いて

$$c_\lambda(\alpha) := \prod_{s \in \lambda} (a(s)\alpha + l(s) + 1), \quad c'_\lambda(\alpha) := \prod_{s \in \lambda} (a(s)\alpha + l(s) + \alpha).$$

とおきます．これらは $\alpha = 1$ のときは, 自分自身も入れた腕 (手と足) の長さ (和) の積になります．

もう一つは一般の Pochhammer symbol で

$$(a)_\lambda^{(\alpha)} := \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \left(a - \frac{1}{\alpha}(i-1) \right)_{\lambda_i}$$

とします．

聴講者：すみません．その $l(\lambda)$ は leg length でしょうか？

ああ, これは λ の長さ (零でない成分の個数) で, (少し紛らわしいですが) さっき導入した leg length $l(s)$ とは別物です．

ここで大事なことは, これが一番の要なんですけれども, 次の事実が成り立つことが知られています．

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{(1 - x_i y_j)^{\frac{1}{\alpha}}} = \sum_{\lambda} \frac{c_\lambda(\alpha)}{c'_\lambda(\alpha)} P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}) P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{y}). \quad (2.10)$$

二項展開と呼ぶべきか, なんて呼ぶべきか．とにかくこれが Jack 多項式の基本的な公式 (Cauchy kernel 公式) です．ある意味, 大事なのはこれだけですね．最後にこの式をみて, Jack 多項式の次のような normalization をしておきましょう．

$$C_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}) := \frac{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!}{c'_\lambda(\alpha)} P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}).$$

これは色んな意味でこうにしないとうまくいかない.

そこで超幾何級数を作しましょう.

$${}_pF_q^{(\alpha)} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; \mathbf{x} \right) := \sum_{\lambda} \frac{1}{|\lambda|!} \frac{(a_1)_{\lambda}^{(\alpha)} \cdots (a_p)_{\lambda}^{(\alpha)}}{(b_1)_{\lambda}^{(\alpha)} \cdots (b_q)_{\lambda}^{(\alpha)}} C_{\lambda}^{(\alpha)}(\mathbf{x}).$$

もちろん分母の $b_1, \dots, b_q$ は零にならない仮定をしないといけないわけですが、そうするとたとえば ${}_2F_1^{(\alpha)}$ のときは荒い評価で原点の近くで絶対収束することがわかります. また先程の Cauchy 核 (2.10) と Jack 多項式の $\mathbf{x} = \mathbf{1} := (1, \dots, 1)$ の特殊値公式

$$P_{\lambda}^{(\alpha)}(\mathbf{1}) = \frac{\alpha^{|\lambda|} \left(\frac{n}{\alpha} \right)_{\lambda}^{(\alpha)}}{c_{\lambda}(\alpha)}$$

から次のようなこともわかります:

$${}_1F_0^{(\alpha)} \left(\begin{matrix} a \\ \end{matrix}; \mathbf{x} \right) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i)^{-a}.$$

ここで $x_i \rightarrow \frac{x_i}{a}$ として $a \rightarrow \infty$ とすれば

$${}_0F_0^{(\alpha)} \left(\begin{matrix} \end{matrix}; \mathbf{x} \right) = \prod_{i=1}^n e^{x_i} = e^{|\mathbf{x}|}$$

もわかります.

さて, 我々の定理というのは次のようなものであります.

定理 2.2. ${}_2F_1^{(\gamma)}$ は先の定理の方程式系 (2.9) をみたす. 更に ${}_2F_1^{(\gamma)}$ は原点で正則かつ対称な一意の解である.

証明は少し長くなるので省略しますが, この定理と先の定理からの結論として

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (t_i - x_j) D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_n \\ &= c_1 {}_2F_1^{(\gamma)} \left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{\gamma}(\alpha + \beta - 1 + m) + n - 1 \\ \frac{1}{\gamma}(\alpha - 1 + m) \end{matrix}; \mathbf{x} \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (1 - t_i x_j)^{-\gamma} D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_n \\ &= c_2 {}_2F_1^{(\frac{1}{\gamma})} \left(\begin{matrix} \gamma n, \gamma(n-1) + \alpha \\ 2\gamma(n-1) + \alpha + \beta \end{matrix}; \mathbf{x} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

が得られます．ここで

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^n t_i^m D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_n = S_n(\alpha + m, \beta, \gamma), \\ c_2 &= \int_{[0,1]^n} D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_n = S_n(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

です．

先の Cauchy 核 (2.10) を使うと

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (1 - t_i x_j)^{-\gamma} D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_n \\ &= \sum_{\lambda} P_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}(\mathbf{x}) \frac{c_{\lambda}(\frac{1}{\gamma})}{c'_{\lambda}(\frac{1}{\gamma})} \int_{[0,1]^n} P_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}(\mathbf{t}) D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_n \end{aligned}$$

となるので, (2.11) の右辺

$$\begin{aligned} & c_2 {}_2F_1^{(\frac{1}{\gamma})} \left(\begin{matrix} \gamma n, \gamma(n-1) + \alpha \\ 2\gamma(n-1) + \alpha + \beta \end{matrix}; \mathbf{x} \right) \\ &= \sum_{\lambda} S_n(\alpha, \beta, \gamma) \frac{1}{|\lambda|!} \frac{(\gamma n)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})} (\gamma(n-1) + \alpha)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}}{(2\gamma(n-1) + \alpha + \beta)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}} C_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\lambda} P_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}(\mathbf{x}) \frac{(\gamma n)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})} (\gamma(n-1) + \alpha)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}}{(2\gamma(n-1) + \alpha + \beta)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}} \frac{\gamma^{-|\lambda|}}{c'_{\lambda}(\frac{1}{\gamma})} S_n(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

とを Jack 多項式で係数比較をすると, Kadell の積分公式 [Kad]

$$\int_{[0,1]^n} P_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}(\mathbf{t}) D(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_n = \frac{(\gamma n)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})} (\gamma(n-1) + \alpha)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}}{(2\gamma(n-1) + \alpha + \beta)_{\lambda}^{(\frac{1}{\gamma})}} \frac{\gamma^{-|\lambda|}}{c_{\lambda}(\frac{1}{\gamma})} S_n(\alpha, \beta, \gamma)$$

が得られます．

聴講者：その ${}_2F_1^{(\gamma)}$ が (2.9) をみたすというのは, どのように証明するのでしょうか．

これは Jack 多項式の微分方程式として L_2 という Laplacian みたいのが出てきますね．それと (2.9) は, $i = 1, \dots, m$ について全部足し上げると, かなり似てるわけです．なので, (2.9) が各 i についてみたすことを示す前に, それを全部足し上げたものについて満たすことを証明する．それから, 実は各々の i について対称な解が存在して一意であることもいえる．ところが (2.9) を全部足し上げた場合の解とい

うのも 1 個しかないことがわかるので、その解が結局各々の (2.9) をみたしていなければならないわけです。つまり (i) i について (2.9) を全部足し上げた場合を示せば、残りは (ii) (2.9) の解の存在と一意性から従います。よろしいでしょうか。

この話題はこの辺にして先に進みたいと思います。

3 組合せ零点定理

今までは積分をやってきたわけですが、前にも話しましたがこの手の積分というのはある範疇では定数項恒等式と同じでした。標語的に書けば

積分 $\sim$ 定数項恒等式

ですが、最近、定数項恒等式に関して組合せ零点定理という強力な手法が出てきました。これを前にやったように Askey's trick で積分の方に読み替えると、逆に積分の方が計算できてしまうわけで、積分がこういった代数的、ないしは組合せ論的方法で得られるようになっていくわけです。その紹介をしたいと思います。

まず零点定理ですが、元々は次のようなものです。

定理 3.1 (Hilbert の零点定理 (弱形)). F を代数的閉体として、 $f, g_1, \dots, g_m \in F[x_1, \dots, x_m]$ とする。 f が $g_1, \dots, g_m$ の共通零点で消えるならば、

$$f^k = \sum_{i=1}^m h_i g_i \quad (h_1, \dots, h_m \in F[x_1, \dots, x_m])$$

となる $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $h_1, \dots, h_m \in F[x_1, \dots, x_m]$ が存在する。

素人考えでいけば、函数の Taylor 展開のベキを考える感じですね。たとえば

$$f = x, \quad g_1 = y, \quad g_2 = x - y^2$$

ならば、 g_1, g_2 の共通零点は $(x, y) = (0, 0)$ で

$$f = yg_1 + g_2$$

なので $k = 1$, $h_1 = y, h_2 = 1$.

$$f = x, \quad g_1 = y, \quad g_2 = x^2 - y$$

ならば、 g_1, g_2 の共通零点は $(x, y) = (0, 0)$ で

$$f^2 = g_1 + g_2$$

なので $k = 2$, $h_1 = y, h_2 = 1$ といった具合です。

で組合せ零点定理というのは、これをより強くした感じのものなのですが、その前に少し記号を用意しておきます。 $f = f(x_1, \dots, x_n)$ を n 変数の多項式としたときに、その $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ における係数を

$$[x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}]f$$

と書くことにしましょう。

定理 3.2 (Alon [Al]). F を体, $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ として, その total degree $\deg(f)$ が

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^n t_i \quad (t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とします。ここで

$$\left[\prod_{i=1}^n x_i^{t_i} \right] f \neq 0$$

ならば,

$$|S_i| \geq t_i + 1$$

なる任意の $S_i \subset F$ ($i = 1, \dots, n$) に対して,

$$f(s_1, \dots, s_n) \neq 0$$

なる $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ が存在する。

これも証明は長くなるので述べませんが、仮定にあるように $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$ の係数が零でないとする、十分たくさんに元を取ってきて、そこからうまく選んで f に代入すると値が消えないという、零点定理というよりは「非」零点定理です。どうしてこれを零点定理と呼ぶのかというと、それはこの定理が先程の零点定理から従うからなのですが、この消えない係数を具体的書くことができます。これが本当の組合せ零点定理です。

定理 3.3 (組合せ零点定理). F を体, $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ として, f の total degree が $d_1 + \dots + d_n$ 以下とします。ここで

$$C_i \subset F \text{ s.t. } |C_i| = d_i + 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

とすると,

$$\left[\prod_{i=1}^n x_i^{d_i} \right] f = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in C_1 \times \dots \times C_n} \frac{f(c_1, \dots, c_n)}{\varphi'_1(c_1) \dots \varphi'_n(c_n)}, \quad (3.1)$$

ただし

$$\varphi_i(x) := \prod_{c \in C_i} (x - c) \quad (i = 1, \dots, n).$$

これ一変数の場合は、証明でも述べますが Lagrange の補間公式そのもので、多項式それ自身が値で復元されています。一般の場合には、多項式そのものは復元できないけど、Alon の定理で非零といった係数に関しては復元できて、多項式の値で実際に書いているわけです。これはいわば、Fourier 変換といいますか、積分変換というか、元の多項式を値から再現しているわけで、なんかの逆変換のようなもののわけです。

証明をちょっとやってみましょう。まず $n = 1$ の場合は、 $\deg f \leq d_1$ として、Lagrange の補間公式

$$f(x) = \sum_{c \in C_1} f(c) \frac{\varphi_1(x)}{\varphi'_1(c)(x - c)}$$

を考えます。これは後ろの

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi'_1(c)(x - c)}$$

が、 $x \in C_1$ ならば $x = c \in C_1$ で 1、 $x \neq c$ ならば 0 になるというデルタ的な振る舞いをするので、 $d_1 + 1$ 個の点 $c \in C_1$ を与えて $f(c)$ を掛けて足し上げると元の函数を再現するという公式です。この公式が基礎になっていまして、 $n = 1$ の場合はここで x^{d_1} の係数比較をすると結論

$$[x^{d_1}]f = \sum_{c \in C_1} \frac{f(c)}{\varphi'_1(c)}$$

を得ます。

一般の n については、まず

$$f(\mathbf{x}) = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$$

の場合を考えます。この場合も Lagrange の補間公式から各 i について

$$x_i^{d_i} = \sum_{c_i \in C_i} c_i^{d_i} \frac{\varphi_i(x)}{\varphi'_i(c_i)(x - c_i)}$$

なので、これを掛け合わせた

$$x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in C_1 \times \cdots \times C_n} c_1^{d_1} \cdots c_n^{d_n} \frac{\varphi_1(x) \cdots \varphi_n(x)}{\varphi'_1(c_1) \cdots \varphi'_n(c_n)(x - c_1) \cdots (x - c_n)}$$

で両辺の $x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ の係数を比較すると

$$\left[\prod_{i=1}^n x_i^{d_i} \right] f = 1 = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in C_1 \times \cdots \times C_n} \frac{c_1^{d_1} \cdots c_n^{d_n}}{\varphi'_1(c_1) \cdots \varphi'_n(c_n)}$$

ゆえよい。

更に一般の場合は

$$h := f - Cx_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}, \quad C := \left[\prod_{i=1}^n x_i^{d_i} \right] f$$

を考えます. 今, 仮定から f の total degree は $d_1 + \cdots + d_n$ ですから,

$$\left[\prod_{i=1}^n x_i^{d_i} \right] h = 0 = \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in C_1 \times \cdots \times C_n} \frac{h(c_1, \dots, c_n)}{\varphi'_1(c_1) \cdots \varphi'_n(c_n)} \quad (3.2)$$

をいえばよいことになります. h の定義より

$$\deg_{x_i}(h) < d_i$$

となる $1 \leq i \leq n$ が存在します. そこで $c_j, j \neq i$ を任意に固定して一変数多項式 $h(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ について上の一変数の結果を適用すると

$$0 = \sum_{c_i \in C_i} \frac{h(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n)}{\varphi'_i(c_i)}.$$

よって

$$\begin{aligned} & \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in C_1 \times \cdots \times C_n} \frac{h(c_1, \dots, c_n)}{\varphi'_1(c_1) \cdots \varphi'_n(c_n)} \\ &= \sum_{c_j \in C_j, j \neq i} \frac{1}{\varphi'_1(c_1) \cdots \varphi'_{i-1}(c_{i-1}) \varphi'_{i+1}(c_{i+1}) \cdots \varphi'_n(c_n)} \left(\sum_{c_i \in C_i} \frac{h(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n)}{\varphi'_i(c_i)} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

これで証明ができました.

聴講者: 組合せ零点定理で「 f の total degree が $d_1 + \cdots + d_n$ 以下」という条件がありました, $d_1 + \cdots + d_n$ より真に小さい場合にはこの和は零になるということですか?

そういうことになります. total degree が足りない場合には最初から零になります.

この組合せ零点定理の応用として, 最初に述べた Dyson 予想

$$\text{CT} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j} \right)^{a_i} \left(1 - \frac{x_j}{x_i} \right)^{a_j} \right] = \frac{(a_1 + \cdots + a_n)!}{a_1! \cdots a_n!}$$

について考えましょう [KP]. ここで $a := a_1 + \cdots + a_n$ として, この左辺は分母を払ってやって整理すると,

$$\text{CT} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i} \left(1 - \frac{x_j}{x_i}\right)^{a_j} \right] = \left[\prod_{i=1}^n x_i^{a-a_i} \right] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{a_j} (x_j - x_i)^{a_i+a_j}$$

と変形できます. 更にこれは次のような変形 (perturb) できます.

$$\begin{aligned} & \left[\prod_{i=1}^n x_i^{a-a_i} \right] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{a_j} (x_j - x_i)^{a_i+a_j} \\ &= \left[\prod_{i=1}^n x_i^{a-a_i} \right] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{a_j} \prod_{s=-a_i+1}^{a_j} (x_j - x_i + s). \end{aligned}$$

つまり多項式の適当な係数というのは積分と違ってちょっと動かしても変らないわけです. そこでうまく具合に perturb する. 積分側でいえば, 適当な exact form を加えて変形するということなのかな... その辺はよくわかんないけど, いずれにせよ定数項恒等式側ではこのような perturb ができて, それを計算すればよい. これに組合せ零点定理が適応できる形になったわけですが, 組合せ零点定理のよい所は, 和の c_i 達を勝手に取ってよいところです. それに先程の perturb がうまく当てはまると, 組合せ零点定理に出てきた和が実は殆ど消えてしまうように c_i を選ぶことができます. これが応用の時のポイントで, うまくとると和が本当に一つしか残らない形にすることができて, その残った 1 項を計算すれば定数項恒等式がもとまることになります.

今の場合だったら,

$$f(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{a_j} \prod_{s=-a_i+1}^{a_j} (x_j - x_i + s)$$

に対し, 各 C_i の $|C_i| = a - a_i$ 個の元を

$$C_i := \{0, 1, \dots, a - a_i\}$$

として

$$b_i := \sum_{j=1}^{i-1} a_j \in C_i$$

とおきます. すると

$$\begin{aligned} & f(c_1, \dots, c_n) \\ &= \begin{cases} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{a_j} \frac{(a_i + \cdots + a_j)!}{(a_{i+1} + \cdots + a_{j-1})!} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{a_j} \frac{(b_{j+1} - b_i)!}{(b_j - b_{i+1})!} & (c_1, \dots, c_n) = (b_1, \dots, b_n) \\ 0 & (c_1, \dots, c_n) \neq (b_1, \dots, b_n) \end{cases} \end{aligned}$$

となることがわかります．だから組合せ零点定理の形は

$$\begin{aligned} \text{CT} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j} \right)^{a_i} \left(1 - \frac{x_j}{x_i} \right)^{a_j} \right] &= \left[\prod_{i=1}^n x_i^{a-a_i} \right] f(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in C_1 \times \dots \times C_n} \frac{f(c_1, \dots, c_n)}{\varphi'_1(c_1) \cdots \varphi'_n(c_n)} \\ &= \frac{f(b_1, \dots, b_n)}{\varphi'_1(b_1) \cdots \varphi'_n(b_n)} \end{aligned}$$

のように 1 項だけになる．あとは

$$\varphi_i(x) := \prod_{j=0}^{a-a_i} (x - j)$$

から

$$\begin{aligned} \varphi'_i(b_i) &= (-1)^{a_{i+1} + \dots + a_n} (a_1 + \dots + a_{i-1})! (a_{i+1} + \dots + a_n)! \\ &= (-1)^{a_{i+1} + \dots + a_n} b_i! (b_{n+1} - b_{i+1})! \end{aligned}$$

となるので，上の式を整理すれば Dyson 予想が得られるわけです．

このように元の式をどう perturb して，どう c_i をとるかというところがテクニカルなんですけど，そこを乗り越えれば，ちょっと込み入った組合せ論でなんとかやれると．ただ，これは言われないうちになかなか難しいところですね．でもこれで，Dyson も解けたし，Selberg も解けて，その q -version も，他に未解決だった Baker-Forrester 予想とかもこの手法で解けて，今のところ，こういった定数項恒等式を証明するための一番強力な手法になっていると思います [KNPV]．あと交代符号行列 (Alternating Sign Matrix) の数え上げ予想についても，これは既に証明されていますが，組合せ零点定理の手法が適応可能でその別証明が可能ではないかと思っています．

定数項恒等式に関しては他にも色んな未解決の予想がありますが，それについてこれがどれくらいうまくかというのはまだよくわかりませんが，やってみる価値はあるかもしれません．そういうところが現状です．

聴講者：真ん中の積分の話と最後の組合せ零点定理の話はなんか関係あるんですか？

今のところないですけど (笑)．いや，元々は真ん中の定理を拡張して，Baker-Forrester 予想をやってたんですけど先に解かれてしまったんで，それでこちらに移ったわけです．

聴講者： BC_n -Jacobi の，分割が rectangular の場合は， $\Phi(t)$ の積分でああやって書

けるということでしたが, その q 版というのは Koornwinder の rectangular なんですか?

それはちょっとやったことないな.

聴講者: BC_n -Jacobi の時は $\mu = 1$ の場合と $\mu = -\gamma$ の場合とがあって, q は $\mu = 1$ に相当する場合は三町先生の仕事 [Mi] があつたはずですが, $\mu = -\gamma$ の方は何かないのでしょうか?

ちょっとわかんないですね.

聴講者: Koornwinder ではなくて, 逆に Selberg density

$$D(\alpha, \beta, \gamma) := \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma}$$

を

$$\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} e^{-t_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma}$$

や

$$\prod_{i=1}^n e^{-t_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma}$$

のように退化させると, rectangular 型の多変数 Laguerre や Hermite の積分表示になっているのでしょうか?

やったことはないけど, 多分そうになっているはずです.

聴講者: その「perturb したら組合せ零点定理が適応しやすくなる」というのは, 右辺が 1 つの項を除いて全部零になるから?

そうそう. ここに出てくる c_i は勝手に取れるので, perturb とこの c_i をどう取るかがポイントです.

聴講者: 最初の話とのつながりでいくと, これで整数点での証明ができて, あとは Carlson 型の定理?

そう, Carlson 型の定理が適応できれば, 適応すればいい.

聴講者: 定数項恒等式というのはルート系による variation がありますけど, そう

というのはこういう perturb するやり方で, A 型ならこう, B 型ならこう, ... っていうような決まったテクニックというのはあるんですか?

そういう統一した見方があればいいですが, 今のところやられてないと思います. というか組合せ論の人は特に A 型のときを主にやっておられるようで...

聴講者: さっきの超幾何の方に戻りますが, Askey-Wilson の q じゃない, 普通の Wilson の場合は何かこういう積分表示は得られますか?

それはわかりません.

聴講者: 一変数の場合でいいですが, 青本先生の Jacobi 多項式の積分表示から (微分方程式や超幾何関数を介することなく) 直接 Jacobi 多項式の直交性を示すことはできますか?

それは考えたことがあるんですが, やってみたいけどできませんでした. つまり m 重積分と n 重積分したものを 2 つ掛けて適当な重み関数を掛けて積分する. 積分順序を交換するなどして適当に変形して行ってこれが 0 になれば直交性の別証明が言えるわけですが, 残念ながらできませんでした.

聴講者: Jacobi 多項式の母関数はこの積分表示からわかりますか?

それは考えたことないです.

それから Jack 多項式は eigenfunction で定義したけど, 内積としても定義できるわけで, その流儀でいっても殆ど同じ結果が得られます. たとえば今回は Jack 多項式の積分公式 (Kadell) は微分方程式から出てきましたけど, それを経由せずに Jack 多項式の内積公式を使って, 定数項恒等式に持ち込んでから積分公式に行くというやり方でも証明できる.

聴講者: それは Jack が 1 個の場合ですけど, 2 個の場合は?

2 個の場合も, パラメータを $\beta = \gamma$ と特殊化すると結果があります (Rains cf. [FW])¹.

聴講者: この「組合せ零点定理」ってどういうアイデアから生まれてきたんですかね?

¹2 個の場合も $\beta = \gamma$ で Fateev 等が explicit formula を与えていたことを後で知りました [AFLT].

よくわからないけど, Lagrange 補間公式じゃないかと思うんだけどね. それを素直に拡張したという感じ.

聴講者: 名前がなんで「零点定理」ってついているのか?

それをそう呼ばれてるんで.... でもどっちかっていうと補間公式みたいなものだと思う. だから「零点定理」っていうと変な感じがする. けど, そう呼んでるんだから呼ばざるを得ないんだけど....

聴講者: これ体 F は標数 0 である必要はないんですよね?

この定理は必要ない. Selberg 積分の証明に使うもっと強い方では, 微分が入った Hermite 補間っていうのを使うんで, 微分が消えると困るんでそこで適当な条件が付きますが, それでも $F = \mathbb{C}$ だったら O.K. です.

聴講者: 組合せ零点定理は数学セミナーの 2016 年 3 月号 [金子] でも触れられていましたよね?

はい (笑).

聴講者: あれだと, 短すぎてわからなかったのて, 今回はありがたかったです.

参考文献

- [AFLT] V. A. Alba, V. A. Fateev, A.V. Litvinov and G. M. Tarnopolskiy, *On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture*, Lett. Math. Phys. **98** (2011), 33–64.
- [Ao] K. Aomoto: *Jacobi polynomials associated with Selberg integrals*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 545–549.
- [Al] N. Alon: *Combinatorial Nullstellensatz*, Combin. Probab. Comput. **8**-1,2 (1999), 7–29.
- [C] F. Carlson: *Sur une Classe de Series de Taylor*, Ph.D. thesis, Uppsala Univ. (1914).
- [D] F.J. Dyson: *Statistical theory of energy levels of complex systems. I.*, J. Math. Phys. **3** (1962), 140–156.

- [FW] P. J. Forrester and S. Ole Warnaar: *The importance of the Selberg integral*, Bull. Amer. Math. Soc. **45**-4 (2008), 489–534.
- [Kad] K. W. J. Kadell: *The Selberg-Jack symmetric functions*, Adv. Math. **130** (1997), 33–102.
- [Kan1] J. Kaneko: *Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **24**-4 (1993), 1086–1110.
- [Kan2] J. Kaneko: *Constrained extremal problems for the difference product*, J. Approx. Theory **162** (2010) 1879–1918.
- [Kat] M. Kato: *A pfaffian system of Appell’s F_4* , Bull. Coll. Ed. Univ. Ryukyus. **33** (1988), 331–334.
- [KNPV] G. Károlyi, Z. Nagy, F. V. Petrov and V. Volkov: *A new approach to constant term identities and Selberg-type integrals*, Adv. Math., **277**, (2015), 252–282.
- [KP] R. N. Karasev, F. V. Petrov: *Partitions of nonzero elements of a finite field into pairs*, Israel J. Math. **192**-1, (2012), 143–156.
- [Me] M. L. Mehta, *Random matrices and the statistical theory of energy levels*, Academic Press, New York-London (1967).
- [Mi] K. Mimachi, *A duality of MacDonalld-Koornwinder polynomials and its application to integral representations*, Duke Math. J. **107**-2 (2001), 265–281.
- [Mo] W. G. Morris, *Constant Term Identities for Finite and Affine Root Systems: Conjectures and Theorems*, Ph.D. thesis, Univ. Wisconsin-Madison, (1982).
- [Mu] R. J. Muirhead: *Systems of partial differential equations for hypergeometric functions of matrix argument*, Ann. Math. Statist. **41**-3, (1970), 991–1001.
- [S1] A. Selberg: *Über einen Satz von A. Gelfond*, Arch. Math. Naturvid. **44** (1941) 159–170.
- [S2] A. Selberg: *Bemerkninger om et multipelt integral*, Norsk. Mat. Tidsskr. **24** (1944), 71–78.
- [金子] 金子讓一: シューア関数とセルバーグ積分, 数学セミナー 2016 年 3 月号, 日本評論社, (2016), 30–35.

[柴垣] 柴垣和三雄: ガンマ函数の理論と應用 –並びに小數 6 位まで有效な複素變數のガンマ函数表–, 岩波書店, 1952.

超幾何と共形場再訪

山田泰彦 述
渋川元樹, 信川喬彦 記

2019.9.2-2019.9.3

1 はじめに

ここ (B301) から歩いて 2 秒くらいのところ (B308) に住んでるんですけど、超幾何学校に最初からフルに参加させてもらうのは実は今回が初めてで、いろいろなルールがあるということを噂には聞いていたんだけど、先ほどの講義で初めてそのルールの実態がわかったので、かなりルール破りの話になるかと思いますがご勘弁ください。それで最初に話のオチをしゃべっておきます。そうすると途中でどう脱線して何が起ころうとも、まあ大丈夫ということになるかと思います*1。

「超幾何学校」ということですので、おまじないに超幾何方程式とか書いたほうがいいかなと、誰かが書いたほうがいいと思いますので書きますと

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0.$$

これが Gauss の Hypergeometric Equation (HGEq) というものですね。 α, β, γ がパラメータ、 x が微分方程式の独立変数です。これについては超幾何解という級数解が知られていて、

$$\text{級数解: } y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} x^n$$

一番書きたかったのは

$$(\alpha)_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

で、以下ではこういう記号を使います。こういう級数解があります。

一方で積分による解も、(級数と) 同じものとは限りませんが、あって、

$$\text{積分: } y = \int_C t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{\gamma-\beta-1} (t-x)^{-\alpha} dt.$$

(プロはここの指数とかも覚えてたりするかもしれませんが、私はアマチュアなのでみないと書けません) ... こんな式があることは皆さん知っていると思います。この積分路を適当にとると 2 つの独立解ができて、そのうちの 1 つがこういう級数で表示されると、そういうことになっているわけです。

*1 内容が雑な上に、話し方も日本語が壊れていて講義の参加者と読者には大変申し訳ないのだが、これが講演者の実力なので仕方がない。にもかかわらず、頑張って文字にしてくれた信川さん渋川さんに深く感謝します (講演者)。

この拡張がいろいろあるわけですけど、その1つとして Dotsenko-Fateev (ロシアの物理学者ですけども、1984-5 年ごろだったと思います) が考えたものが、次のようなものがあります。彼らは次のような積分を考えたんですね。

$$\int_C \prod_{i=1}^m t_i^\alpha (t_i - 1)^\beta (t_i - x)^\gamma \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)^\delta dt_1 \cdots dt_m \quad (1)$$

上の α, β, γ とパラメータの取り方が違いますが、パラメータの名前はなんでもよくて、積分変数が m 個あります。この m 次元空間の適当なサイクルで積分してやったものがある種のいい微分方程式をみたすという話をします。彼らがやったのは m が 2 の場合、つまり 2 重積分の場合で、一般に $m+1$ 階の微分方程式が出てくるんですけども (m が 1 のときが Gauss の場合です)。この α, β, γ と上の α, β, γ は同じとは限りませんが、まあとにかく拡張になっていると。で、彼らがやったのはとくに m が 2 の場合に 3 階の方程式を調べて解のモノドロミーとかを一生懸命調べたわけですよ。彼らはこういう話を共形場理論を応用するか、共形場理論へ応用するか、両方あると思いますけどそういうつもりでこういうことをやりました。

2 共形場理論への応用, 共形場理論からの応用

今回ここで話をするようになったのは、渋川さんがすすめてくださったわけですけども … 渋川さんが宿題を出してくれまして、それを夏に 1 ヶ月くらいかけて解きましたというご報告です。渋川さんが次のような問題を出してくれました。 m が 2 の場合に次のような級数表示があります。これは渋川さんの結果ではなく既にわかっていたこと (だそう) です (Appendix 参照)。

$$\int_{[0,1]^2} \prod_{i=1}^2 x_i^{a-1-\frac{d}{2}} (1-zx_i)^{-b} (1-x_i)^{c-a-1-\frac{d}{2}} |x_1-x_2|^d dx_1 dx_2 \quad (2)$$

$$= (\Gamma\text{-factor}) \sum_{i,j \geq 0} \frac{(a)_{i+j} (a-\frac{d}{2})_j (b)_{i+j} (b-\frac{d}{2})_j}{(c)_{i+j} (c-\frac{d}{2})_j} \frac{(\frac{d}{2}+1)_i (d)_i}{(\frac{d}{2}+1)_{i+j} i! j! (\frac{d}{2})_i} z^{i+2j}. \quad (3)$$

ちょっとパラメータを上手にずらしていますが、渋川さんのノートのそのままの記号で、ここでは x が積分変数で z が独立変数というわけです。渋川さんのノートだと差積に絶対値がついています。 Γ -factor も明示的に書いてくれていますがここでは細かいことは省略して、2 重級数で書いています。 a, b, c が対等に分子分母に出てくるようにパラメータを調節したのだと思います。こういう式が知られていると教科書にもあるそうなんですけど、これ (2) はもちろん Dotsenko-Fateev の積分 (1) なわけで、1 つの級数表示を与えるということになります。

渋川さんの問いは何かというと、

これはネクラソフ関数ですか？

というものです。聞かれた時すぐには答えられなかったんですけど、超幾何学校に間に合わせようと思って 1 週間前になってようやく答えが出ました。答えは

Yes

です。今回の目標は、まずこういう質問がどこから来たのかということを知ってもらったのが半分、もう半分はこの答えを知ってもらった、という 2 つがあります。この問いを理解するにはネクラソフ関数が何かという

のをわからないといけないんですけども、なかなかめんどくさい式なので書くだけでくたびれますけど、一度は書いたほうがいいと思うので元気のいいうちに書きます。

私は学生に

数学の新しいことを勉強するときにはまず数学辞典や教科書ではなくて百科事典的に勉強しなさい。ググって数学者以外がどう理解しているかをわかった上で数学の中身をわかるようにしなさい。

とそういう指導をしているんですけど、なのでネクラソフ関数とは何かというのを(すぐ後で数学的な式を書いて説明しますが、その前にまず)数学者以外の人がどう理解しているかを掻い摘んで説明しておきますと、ゲージ理論に出てくる特別な関数で 2002 年にネクラソフという人が見つけたというものです。なので、ゲージ理論に出てきた特別な関数だと思ってください。それが百科事典、あるいは国語辞典的な理解です。そういう国語辞典的な理解ないまま数学的な話に突入する人がけっこう多いんですけど、数学以外の人と話をするときにはそれでは通じませんので、そういうことを理解したうえで中身に入ったほうがいいと思います。

聴講者。渋川さんの問いのところで、「これは」といっているのは m が 2 のときをいっているのですか？

例えばそうです。

聴講者。 m が 3 以上の場合は Yes なんですか？

いい質問です。Yes です。もうちょっと正確にいうと、ネクラソフ関数を特殊化するとこれ (2),(3) になる、別の特殊化すると m が 2 や 3 や 4 や、もっといろんなものが出てきます。

聴講者。Dotsenko-Fateev 方程式は $m + 1$ 階でもパラメータの数は 4 個ですか？

はい、そうです。Dotsenko-Fateev の微分方程式はけっこうめんどくさい式なので、もしあとで元気があったら書きますけど、省略させてください。パラメータは a, b, c, d の 4 つで、それは最初に積分を書いたときの指数のところを指定していたパラメータです。

ネクラソフ関数というのは何か、数学的な説明は 2 種類あります。1 つは「インスタントン解のモジュライ空間の Euler 数などの重要な量を同変積分で与えたもの」というのが高尚な定義なんですけど、それで中身がわかって計算できる人というのはごくわずかしかないと思うので、ここではそういうふうにはいわないで、式を特殊関数として書いてしまいます。ネクラソフ関数といったときに 2 つのものを指す流儀があって、これから書くネクラソフの分配関数というものを書くための材料になる関数のことをネクラソフ関数と呼ぶこともあります。区別するためにここでは前者をインスタントン分配関数と呼んでおきましょう。具体的に式を書きますけど、いくつかのパラメータに depend する無限級数です。ここでは、いろんなバージョンがあるんですが、

ゲージ群： $G = U(2)$ (2 次のユニタリ群) $\rightarrow (a_1, a_2)$ (カルタン座標: 差が重要)

物質場：基本表現 (G の 2 次元表現) に属する物質場が 4 個 $\rightarrow (m_1, m_2, m_3, m_4)$ (質量)

$\mathbb{R}^4$: 4 次元空間上の理論 $\rightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (比が重要, 収束させるため)

を考えます。そうするとこの場合にはパラメータが 6 個出てきます。ゲージ群のカルタンの座標を指定する 2 つのパラメータ (a_1, a_2) があります。それから基本表現が 4 個あってその質量パラメータ (m_1, m_2, m_3, m_4) に相当するものが 4 個あります。それから 4 次元空間でそのまま計算すると発散してしまうので、それを (正

則化) 収束させるためにネクラソフパラメータと呼ばれているパラメータ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ を 2 つ入れます。以上、全部で 8 個パラメータがありますが、このうち a_1, a_2 は本質的に差だけが重要で、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は本質的に比だけが重要です。なので実質は 6 個のパラメータを持っています。これから書く関数は 6 個のパラメータを持っている無限級数です；

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n z^n, \quad (4)$$

$$Z_n = \sum_{\substack{|\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}| = n \\ \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} \in \mathcal{P}}} W(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}).$$

ここで $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ は 2 つのヤング図形です (ちょうど先程の講義でヤング図形が出てきたのでサボれていいんですけど)。2 個のヤング図形はゲージ群が $U(2)$ で考えていることに対応します。この Z_n は $\lambda^{(1)}$ と $\lambda^{(2)}$ の箱の総和が n になるようなヤング図形について足し算してください、というものです。この重み関数 $W(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ は次のような形をしています；

$$W(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \frac{\prod_{i=1}^4 \{z_f(a_i, \lambda^{(1)}, m_i) z_f(a_i, \lambda^{(2)}, m_i)\}}{\prod_{i,j=1}^2 z_v(a_i, \lambda^{(i)}, a_j, \lambda^{(j)})}.$$

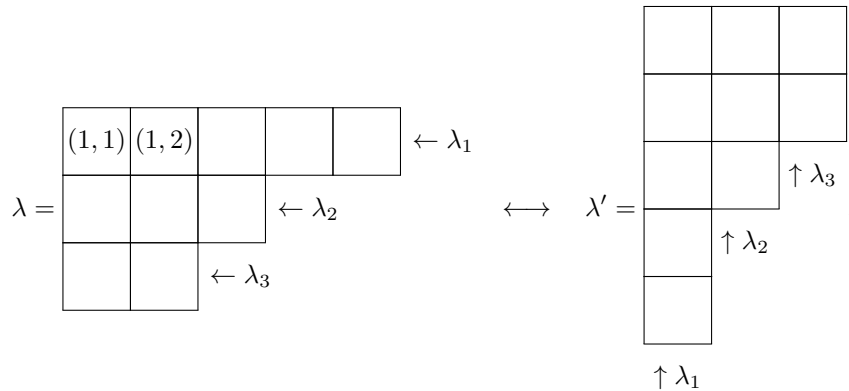
ここで出てきた分子、分母の z_f, z_v はヤング図形の中の箱に関する積で定義される関数で

$$z_f(a, \lambda, m) = \prod_{(i,j) \in \lambda} h(a + m + \varepsilon_1(i-1) + \varepsilon_2(j-1)),$$

$$z_v(a, \lambda, b, \mu) = \prod_{(i,j) \in \lambda} h(e_{i,j}(a-b, \lambda, \mu)) \prod_{(i,j) \in \mu} h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - e_{i,j}(b-a, \mu, \lambda)),$$

$$e_{i,j}(a, \lambda, \mu) = a + \varepsilon_1(\lambda_j' - i + 1) - \varepsilon_2(\mu_i - j).$$

今は $h(x) = x$ ですが、後で三角関数や楕円関数にしたいときがありますから、こう書いておきます。また λ' は λ の転置とします。たとえば $\lambda = (5, 3, 2)$ ならば $\lambda' = (3, 3, 2, 1, 1)$ です。



これらはヤング図形の言葉でいうと「腕の長さ (arm length)」とか「足の長さ (leg length)」とか呼んでもものですが、今の場合は「 μ の中に入っている箱を λ で足の長さを測る」とかっていう、そういう奇妙なことをやったりしていますので、はみ出したりすると負になることもあります。以上で全部書き終わりました。

こんなものがゲージ理論のモジュライ空間上の積分からどうして出てくるのかということを知りたい人は、Nakajima-Yoshioka (Instanton counting on blowup) とかをみるといいと思いますが、吉岡さんは多分その

辺りにおられると思いますので演習の時間に連れてきて聞いてもらったら私も勉強したいと思います、ここではそういうことは使わずにこの式だけを見ます。定義したんですけど、じゃあ具体的に書き下してくださいというのはめんどくさいので、たいがい機械にやらせるのですが、大事なことは各項がきれいな factor で factorize されているものの和になっているということです。この式で大事なものは、係数が factorize されているんですけど、こういう重みで和をとっています。なので同じベキのところでもそろえて係数を通分してしまうと悲惨なことになります。なので Dotsenko-Fateev の積分は 30 年も昔からあるわけですけど、級数表示を真面目に考えた人があんまりいなかった理由はこういうことです。

例えば「微分方程式がわかっているんだから係数を未定係数でつつこんで順番に係数を求めていけば級数表示なんてわかるだろう」と素朴には思うわけですけど、わかるんですけど解いていくと各項の係数は超幾何のようにきれいに factorize しないです、悲惨な式がだーっと出てきてとても收拾がつかないので、「級数表示はあんまり便利じゃないよね」というのであんまり扱ってなかったわけです。この式は、1 つの項にまとめようとしなくていくつもの項の和で書いているので、それぞれはきれいに factorize された形になるというのが嬉しいところです。factorize された形にきれいに書こうというのはある意味ではいつでもできるので、全部展開してしまえば monomial ですから factorize しています。それは全然面白くないですから、「そういうものをうまくまとめて少ない項でしかもきれいに factorize されているもので意味のある表示がありますか」、というものの 1 つの答えがこれ (4) なわけです。

一方で“ある理由”(AGT) から (3) は (4) に関係している (もちろん渋川さんもそういうことを知っていて質問されているわけですけども)、これもきれいに factorize されています。なので「これ (4) のある場合がこの級数 (3) になっているのか」というのが渋川さんの問いです。いろんな状況証拠からこうすることが予想できるので、ここに書いた級数 (3) とこの級数 (4) は何か同じところ—Dotsenko-Fateev 積分とかその周辺—にいる似たような関数のはずなんだけど、関数として同じなのか？ またそうだと表示としても同じなのか？というのが渋川さんの質問でした。

というわけで問題は理解していただいたかと思います。この質問への答えは、同じ関数であって表示としても同じというのが結論です。例を 1 個みたほうがいいのかと思います。

例 1. $n = 0, 1$ のとき、 Z_0, Z_1 を書き下しなさい。ただし $(a_1, a_2) = (a, -a)$ とする。

解.

$$Z_0 = W(\emptyset, \emptyset) = 1,$$

$$Z_1 = W(\square, \emptyset) + W(\emptyset, \square) = \frac{\prod_{i=1}^4 (-a + m_i)}{2a\varepsilon_1\varepsilon_2(-2a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)} - \frac{\prod_{i=1}^4 (a + m_i)}{2a\varepsilon_1\varepsilon_2(2a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

ここで考えているネクラソフの関数は 1 から始まる整級数になります。 a_1, a_2 は差だけが大事なので、 $(a_1, a_2) = (a, -a)$ とおいています。 $SU(2)$ でみていると思ってもらいたいと思います。今の場合 Z_1 は 2 つの項で書けていますが、「たった 2 つのかわいらしい式で書けている」と思って油断していると、これを展開して通分した式をみるととてもそれがこういうふうになるとは思えない。先ほどの級数も同じで z のベキごとに整理したものを開いちゃうと悲惨な式です。超幾何級数のときは各項が因数分解されていたのでそういう悩みはなかったんですけど、こういう場合は工夫しないと書けないと、さらにこの先やりたい人は計算機に計算してもらったほうが良いと思います。必要なら Mathematica ならプログラムがありますのでほしい人はいっていただけたら提供します。

こういうめんどくさい式がこの式 (3) に関係していると期待される理由を説明しましょう。ネクラソフ関数

Z が Dotsenko-Fateev の級数 (3) に関係すると期待される理由は物理で知られている AGT 対応 (2009) です。今回「これ (AGT) をタイトルに入れてください」と渋川さんに言われたんですけどこれをメインの主題にして話すわけではないので省きました*2。AGT 対応の国語辞典的な説明は

4 次元ゲージ理論と 2 次元共形場理論の間に対応があります

というものです。これはちょうど 10 年くらい前の 2009 年に Alday, Gaiotto, Tachikawa という 3 人の物理学者が発見しました。彼らによるとネクラソフの分配関数は、(2 次元共形場理論はいろいろあるんですが Virasoro 代数という無限次元代数を対称性を持つ) 共形場理論の、(一般に共形場理論は Riemann 面上で考えることができるんですけど) $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点関数に対応するということが提唱されました。10 年前には級数を比較するとどうもあっているらしいという実験的な予想だったんですけど、その後いろんな人が頑張って今では証明されています。その証明の細かいことをここで説明する時間も力量も私にはありませんので証明はしません。必要があったら文献などは後で紹介しますので自分で勉強されたいと思います。1 つ、何も予備知識なしに計算だけで証明するという方法が、共形場理論の方法は使いますが、この後 30 分くらいしゃべった話を使うと読めるようになる論文が 1 つありますので、もし興味がある人はそれをよんでいただけたらいいかなと思います。

3 共形場理論の復習

共形場理論の知識をちょっと使いますから、共形場理論を一度も扱ったことがない人もいるかもしれないので復習というのも変ですけど、最初から聞いても十分わかるように復習します。共形場理論を国語辞典的にいうと何かというと、共形不変性を持つ 2 次元の場の量子論、1984 年に BPZ (Belavin-Polyakov-Zamolodchikov) という人たちによって一撃で完成された理論というふうについておけば国語辞典、百科事典的には間違いのない説明だと思います。今から中身の説明をします。共形場理論にもいろんなバージョンがあるんですけども、ここでやるのは一番基本的な Virasoro 代数の対称性を持っているものです。

先程の講義でちょうど Lie 環の説明がありましたので、いきなり交換関係を書いてそれで定義をしたことにします。

$$\text{Vir} : [L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}$$

ここで $L_n (n \in \mathbb{Z})$ は無限個の (生成) 元、 c は中心元で、以下では $c \in \mathbb{C}$ として扱うことにします。Virasoro 代数はこういう交換関係で定義される無限次元の Lie 代数ですが、こんなものがどこから出てきましたかという、(都合で $-$ をつけますけど) 1 変数の解析的なベクトル場 $l_n = -z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z}$ のなす Lie 代数に中心元を追加したものです。こういう解析的な座標変換、等角変換ともいいますが、等角変換の対称性を持っているような場の量子論というものを共形場理論と呼んでいます。つまり Virasoro 代数は共形変換の無限小変換を生成する生成子のなす代数で、「理論の中にこういう operator があって、いろんなものがこの operator とどういう交換関係を持っていますか」、ということで特定される理論が「Virasoro 代数を対称性を持つ共形場理論」という言葉の意味です。この代数 Vir の表現空間の上で理論を構成するわけですけども、Vir の表現 (空間) として $h, c \in \mathbb{C}$ で特定されているような表現 V_h, V_h^* を考えます (ただし、 c は固定されているのでいちいち書かない

*2 渋川追記：ちなみに渋川さんの提案したタイトルは 2 つあり、1 つはここで触れられている「超幾何と AGT」で、もう 1 つは「超幾何と共形場理論 – Die Neue These –」であったが、後者は「カッコよすぎる (?)」という理由でボツになった (「山田先生ならこれくらいカッコよくなければダメだ」という意見は聞き入れていただけなかった)。

ことにしましょう). 表現論的には Verma 加群と呼ばれているものですが, 定義は平たく述べますと次のようなものです.

まず V_h は左 Vir 加群です. なので L_n は左から作用しています. 要は縦ベクトルの世界だと思ってください. 縦ベクトルのことを物理の方言ではケットベクトル $|h\rangle$ というもので表します. なのでここでもそれを使いますが, ケットベクトルを書いたら何か縦ベクトルだと思ってください. まず

$$\exists |h\rangle \in V_h \text{ s.t. } L_n |h\rangle = \begin{cases} 0 & (n > 0) \\ h |h\rangle & (n = 0) \end{cases}$$

とします. この $|h\rangle$ に L_n の添え字が正のものを作用させたら 0 ですから, 非自明な作用をさせようと思ったら負のものを掛けるしかないんですけど, 負のものは何をどういう順番でかけてもよろしい. そういうふうにかけたものの一次結合もあってよろしい. そういうものの全体の空間が V_h です.

V_h^* というのはケットベクトル (縦ベクトル) と書いていたものをブラベクトル (横ベクトル), L_n と書いていたものを L_{-n} , 作用素の積は順番を逆にする (こういうものを anti-involution といいますけど);

$$|h\rangle \leftrightarrow \langle h|, \quad L_n \leftrightarrow L_{-n}, \quad AB \leftrightarrow -BA.$$

これで右加群を左加群に翻訳することができます. この積の意味ですけど, Lie 環に積なんかないんですけど, この元の非可換な多項式の空間で $[,]$ が交換関係になるように拡張したものを普遍包絡環といいますけど, その世界での行列のかけ算の意味です.

私は物理出身なので最初のころ何が困ったかという, 普遍包絡環とかそういう言葉がわからないんですね. でもわからなくても計算はできるので, この講義でも計算主体に, 概念は後からついてくる, と. 証明はもっと後からついてくる, と. そういう流儀で話をさせてもらいます. 証明なんか後からついてくるというのは, 私の師匠の土屋先生にならった思想ですけど, 正しい態度だと思います. いや, その方が「正しい」じゃなく「楽しい」態度だと思います.

それで V_h はどういう構造をしているかという, 無限次元の表現なんですけど実は有限次元表現の無限個の直和になっていて,

$$V_h = V_h(0) \oplus V_h(1) \oplus \cdots \\ V_h(N) = \{|v\rangle \in V_h \mid L_0 |v\rangle = (N + h) |v\rangle\}$$

となっています. $V_h(1), V_h(2), \dots$ のベクトルたちは L_0 の固有値がどんどん上がっていくのですが, 慣例で, この $|h\rangle$ のことを highest(最高) weight ベクトルと呼んでいます. 具体的には

$$\begin{aligned} V_h(0) &= \mathbb{C} |h\rangle, \\ V_h(1) &= \mathbb{C} L_{-1} |h\rangle, \\ V_h(2) &= \mathbb{C} L_{-1}^2 |h\rangle \oplus \mathbb{C} L_{-2} |h\rangle, \\ V_h(3) &= \mathbb{C} L_{-1}^3 |h\rangle \oplus \mathbb{C} L_{-2} L_{-1} |h\rangle \oplus \mathbb{C} L_{-3} |h\rangle, \\ &\vdots \end{aligned}$$

のようになっています. 一般に $V_h(N)$ は

$$\{L_{-\lambda_1} L_{-\lambda_2} \cdots L_{-\lambda_l} |h\rangle \mid \lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0), |\lambda| = N\}$$

が基底としてとれ, その次元は N の分割数であることがわかります.

演習 1. なぜか考えよ.

hint : L_n ($n > 0$) たちは L_0 との簡単な交換関係

$$[L_0, L_n] = -nL_n$$

があるので, L_0 の固有値が $N + h$ であることは簡単に計算できる. また $L_{-1}L_{-2}$ は $L_{-2}L_{-1}$ と違うものだが, そういうものはおつりが他の L , 今の場合には

$$L_{-1}L_{-2} = L_{-2}L_{-1} + L_{-3}$$

となって $L_{-2}L_{-1}$ と L_{-3} で書けているので base としてはいけない.

Virasoro 代数の表現でめんどくさいのは, 基底の取り方によって係数がガラガラ変わりますので, どうしてもきれいに書けません. そういう意味でちょっとめんどくさいですが, とにかくこういう空間です. 例えば, $V_h(2)$ に L_1 を作用させると $V_h(1)$ に上がって, $V_h(0)$ (highest weight ベクトル) に L_{-2} を作用させると $V_h(2)$ に落ちる. こんな感じの表現になっています.

Virasoro 代数で以下で考えたいのは, 共形場理論で主役になるプライマリ場 $\Phi_h(z)$ というものです. これは 2 つの複素数 $h, z \in \mathbb{C}$ でパラメトライズされる作用素で, L_n との交換関係

$$[L_n, \Phi_h(z)] = z^n \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h(n+1) \right) \Phi_h(z)$$

に従うものとして定義します. 以下, このプライマリ場を 2 つ持ってきて

$$\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$$

という量を考えます. $\Phi_h(z)$ は作用素ですから行列です. $|h\rangle$ は縦ベクトル, $\langle h|$ は横ベクトル, 行列をかけ算して縦ベクトルと横ベクトルではさんでますのであるスカラー関数ができます. これのことを, 作用素を 2 個かけているので 2 点関数と呼ぶ流儀もあるんだけど, 普通は 4 点関数と呼んでいます.

4 点関数と呼ばれている理由をちょっとだけ説明しておきますと, 正真正銘の 4 点関数と呼ばれるものが実はあって,

$$\langle \Phi_{h_4}(z_4) \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) \rangle$$

これは 4 個のパラメータ h_1, h_2, h_3, h_4 と $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 に associate して決まるある関数ですけど, こういう関数を 4 個の点に $\langle L_0, L_{\pm 1} \rangle \cong \mathfrak{sl}_2$ が作用しているので, この人たちは $\mathfrak{sl}_2$ の作用で不変ではないけどある種の共変性があります. なので, この 4 個の点を $\mathfrak{sl}_2$ の作用で $0, 1, \infty$ とか適当に調節しちゃうことができて本質的に 1 変数の関数なんです. $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ もこの後すぐやりますが, スケール変換に対する変換性がありますので実質的には 1 変数の関数です. そういう意味で $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ と $\langle \Phi_{h_4}(z_4) \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) \rangle$ は対応しているので, 見かけ上 $\langle h_4 |, |h_1 \rangle$ と $\Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2)$ は違うようですが対等な役割をしています. そういう意味で 4 点関数と呼んでいます.

演習 2. $\langle L_0, L_{\pm 1} \rangle \cong \mathfrak{sl}_2 \curvearrowright \langle \Phi_{h_4}(z_4) \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) \rangle$ を示せ.

AGT 予想が言っていたのは

$$\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle \text{ がネクラソフ関数だよ}$$

ということです。この世界にはパラメータは h_1, h_2, h_3, h_4 があって、そのほかに c と h の 6 個があるわけですが、実は $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ だけで値は決まらずに、他に中間状態というものを指定しないといけません。なので、その説明をしましょう。

以下、4 点関数をどうやって計算すればいいですかということを話しますが、そのためにはまず 3 点関数 $\langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle$ から考えます。

演習 3.

$$\langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle = (\text{定数}) z^\Delta, \Delta = h_3 - h_1 - h_2. \quad (5)$$

hint : $[L_0, \Phi_{h_2}(z)] = (z \frac{\partial}{\partial z} + h_2) \Phi_{h_2}(z)$ を $\langle h_3 | | h_1 \rangle$ ではさむ。つまり

$$\begin{aligned} \langle h_3 | [L_0, \Phi_{h_2}(z)] | h_1 \rangle &= \langle h_3 | (L_0 \Phi_{h_2}(z) - \Phi_{h_2}(z) L_0) | h_1 \rangle \\ &= \langle h_3 | L_0 \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle - \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) L_0 | h_1 \rangle \\ &= (h_3 - h_1) \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle \end{aligned}$$

となり、他方

$$\begin{aligned} \langle h_3 | [L_0, \Phi_{h_2}(z)] | h_1 \rangle &= \langle h_3 | \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle \\ &= \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle \end{aligned}$$

なので、 $\langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle$ は微分方程式

$$\left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle = (h_3 - h_1) \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle$$

の解となる。

$\Phi_h(z)$ は L_n との交換関係しか定義していないので定数倍は決まりません。さらに $|v\rangle \in V_h$ と $\langle u| \in V_h^*$ に対して、3 点関数 $\langle u | \Phi_{h_2} | v \rangle$ は上記の定数を除いて一意に決まります。ここで $|v\rangle$ は h というパラメータを v に変えたという意味ではなくて、

$$|v\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} L_{-\lambda_1} \cdots L_{-\lambda_l} |h\rangle$$

という V_h の一般元を勝手に指定しているつもりです。ここらへんがブラケット記号で混乱を生む原因で、この v というのは h と同等のものと思わないでください (数ではありません)。 $\langle u|$ も同様に

$$\langle u| = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \langle h | L_{\lambda_1} \cdots L_{\lambda_l}$$

です。

演習 4. 3 点関数 $\langle u | \Phi_{h_2} | v \rangle$ は上記の定数を除いて一意に決まることを示せ。

hint : L_+ は交換関係で左へ、 L_- は右へ持っていくといずれは消えて、最後は (5) に帰着される。

こういう意味で 3 点関数というのはユニークに決まります。これが決まると、作用素の意味での

$$\Phi_{h_2}(z) : V_{h_1} \rightarrow V_{h_3} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

が generic には決まります. どういう意味かという、 $\Phi_{h_2}(z)$ を V_{h_1} の highest weight ベクトルに作用させたときが大事なんですけど、

$$\Phi_{h_2}(z) |h_1\rangle = Cz^\Delta(1 + z\beta_1 L_{-1} + z^2(\beta_{1,1} L_{-1}^2 + \beta_2 L_{-2}) + \cdots) |h_3\rangle \quad (C \text{ は定数})$$

というふうに決まっていきます. 送った先 (の係数) は V_{h_3} の元になってなさいといっているわけですから, V_{h_3} は $|h_3\rangle, L_{-1}|h_3\rangle, \dots$ ではられている世界なので上のように展開されるわけですが, それぞれの係数がこういう z のべきをもってなさいというのは L_0 の交換関係から決まっています. なので後は係数を決めればいいんですけど, この係数 $\beta_1, \beta_{1,1}, \beta_2, \dots$ は線形方程式を解いて決まります. 例えば $\Phi_{h_2}(z) |h_1\rangle$ に L_1 をかけて $\langle h_3|$ でお迎えに行ったら β_1 が拾われます. そのときの値はわかってますからその 1 次方程式を解くと β_1 が決まります. 同様に $\beta_{1,1}$ や β_2 が知りたければ L_1^2 や L_2 をかけてやれば決まります. ただし, 毎回 1 次方程式を解かないといけないのでこれらの行列式が 0 だと解けません. それが generic (行列式が零でない) といった意味です.

演習 5. 次を示せ.

$$2h_3\beta_1 = h_3 - h_1 + h_2,$$

$$\text{hint : } 2h_3 = \langle h_3 | L_1 L_{-1} | h_3 \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 4h_3 + \frac{c}{2} & 6h_3 \\ 6h_3 & (2h_3 + 1)4h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_3 + 2h_2 - h_1 \\ (h_3 + h_2 - h_1 + 1)(h_3 + h_2 - h_1) \end{pmatrix},$$

$$\text{hint : } \begin{pmatrix} 4h_3 + \frac{c}{2} & 6h_3 \\ 6h_3 & (2h_3 + 1)4h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle h_3 | L_2 L_{-2} | h_3 \rangle & \langle h_3 | L_2 L_{-1}^2 | h_3 \rangle \\ \langle h_3 | L_1^2 L_{-2} | h_3 \rangle & \langle h_3 | L_1^2 L_{-1}^2 | h_3 \rangle \end{pmatrix}.$$

次数が 3 だったら base が 3 個ありますので, 3×3 の逆行列を解いて求まる, 一般には n の分割数なのですぐに巨大になって手ではできませんけど, 計算機に頑張ってもらえばレベル 10 くらいまではすぐにやってくれます. こころあたりの人力の計算で一番高いところをやっているのを見たことがあるのは 6 次くらいまでですね (自分ではやってません, やった人を見たことがあります). でも, 全部交換関係だけから計算できます. これでこの作用が決まると, $|h_1\rangle$ に $\Phi_{h_2}(z_2)$ をかけた段階でパラメータが h の空間の元ができたと思って, この人にまた $\Phi_{h_3}(z_3)$ を作用させて V_{h_4} の人ができたと思って, その人を V_{h_4} の双対 $V_{h_4}^*$ で迎えに行ったら関数が計算できる, ということです.

今の説明で何が良かったかということ, 行列と行列をかけ算して縦ベクトルと横ベクトルではさんで数を計算しているわけですけど, 普通の行列でもまずかけ算が定義できるとは限りませんよね. 今の場合はどういふときに定義できるかとかいうことがあるんですけど, さらに普通の行列と違うのは一意的に決まってないということです. つまり $|h_1\rangle$ に $\Phi_{h_2}(z_2)$ をかけた段階

$$\Phi_{h_2}(z_2) |h_1\rangle \in V_h$$

で出てきた h というパラメータを決めて初めて計算できます. この h のことを中間状態といいます. 最初に用意した h_1, h_2, h_3, h_4 という 4 つのパラメータを指定するだけではこの 4 点関数というのは決まっています. 途中でどこを経由していきますかというパラメータ h をもう 1 つ決めて初めて決まります. この方面の文献を見てもらいますとよくこんな絵がかいてあります.

$$\begin{array}{ccccccc} & & h_3 & & h_2 & & \\ & & | & & | & & \\ h_4 & - & \bullet & -h- & \bullet & - & h_1 \end{array}$$

このようにして原理的には決定できるんですけど、さっきもいったように先のほうを計算しようとする n の分割数の逆行列を計算してやる必要があるので悲惨な式です。真面目にこれを計算しようと頑張ったのはほぼ世界に 1 人だけで、Zamolodchikov さんが以前に頑張って計算していたわけですが、他の人は「絶望的で計算できない」と。私もずっとそう思っていました。

ですが 2009 年に AGT という人たちが、書けるよ、ということを見つけたわけですが。たぶん無理じゃなくてちゃんと書けると信じて一生懸命頑張っていたのは Zamolodchikov だけだと思います。少なくとも私は土屋さんには「こんなのやっちゃいけない」と習いましたけど…。で、教訓は「先生のいうことは信じちゃいけません」ということですが (笑)。でも、頑張っていたからといってできたわけではないので…。実際、最初の数項を見てもらったらわかると思いますけど、かなり悲惨な式です。さらにいうと、2009 年に AGT がいったことはこれがネクラソフの関数でかけ、さらに「Painlevé の τ 関数にもなっています」という応用があって、それは Lisovyy という人たちによって AGT のちょっと後に示されました。ただし、その場合は $c = 1$ のときです。

「From Gauss to Painlevé」の preface を読むと、「Painlevé は 21 世紀の特殊関数を定義している」と予言してたんですけど、まさにその通りでその具体的な特殊関数はネクラソフ関数です。ネクラソフ関数は級数の形で書けます。今回お話しするのはそれが微分方程式をみたしているということが話の目的で、明日は微分方程式をつくって、それが最初に書いた渋川さんの言っていた級数のみならず Dotsenko-Fateev の微分方程式になっているということを説明したいと思います。

微分方程式がでてくる由来だけ説明しておきますと、微分方程式はいつでも成り立つのではなくて、generic でないときにでてきます。私が土屋さんに習ったのは「そうでないときが大事なんだ」と。「そうでないときは微分方程式が成り立っていいことがいろいろ起こって…」とそういうことでした。Painlevé でいうと特殊解を持っているようなときですね、そういうところがいろんなことができるというわけですが、特別な場合には微分方程式が成り立っていて、ある場合には Dotsenko-Fateev の微分方程式になるということになっています。

4 特異ベクトルと微分方程式

今日は、共形場理論からでてくる微分方程式の話半分ほどやって、その後でそれを使って AGT 対応がどのように証明されるか、証明といっても物理学者がやった証明なので“証明”ですけど、そういうことを説明したいと思います。昨日と同じように途中でどうせメロメロになるので、オチをちゃんと最初にいっておきますけど q -analogue にいくと簡単にできると、そういうオチです。

まず、今日の前半は Virasoro 代数の表現からどうやって微分方程式がでてくるかという話をします。昨日の最後にチラッといいましたけど、微分方程式が出てくるのは generic でないところからでてきます。どういうところだったかという、Virasoro 代数の表現の weight が N だけあがったところから $\mathbb{C}$ への自然なペアリング

$$\begin{array}{ccc} V_h^*(N) \times V_h(N) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ (\langle u |, |v \rangle) & \longmapsto & \langle u | v \rangle \end{array}$$

があったわけですが、これを並べて作った行列 $K(N)$ を Kac 行列、その行列式 $d_N = \det(K(N))$ を Kac 行列式といいます。具体的には次の通りです。 $N = 1$

$$K(1) = d_1 = \langle h | L_1 L_{-1} | h \rangle = \langle h | L_{-1} L_1 + 2L_0 | h \rangle = 2 \langle h | L_0 | h \rangle = 2h.$$

$$N = 2$$

$$K(2) = \langle h | \begin{pmatrix} L_2 L_{-2} & L_2 L_{-1}^2 \\ L_1^2 L_{-2} & L_1^2 L_{-1}^2 \end{pmatrix} | h \rangle = \begin{pmatrix} 4h + \frac{c}{2} & 6h \\ 6h & (2h+1)4h \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \det(K(2)) = 2h(c - 10h + 2ch + 16h^2).$$

私は最近こんなのも「Mathematica」を使って計算しているので、板書で書くとメロメロになるわけですが、とにかくこんな感じです。\$d_2\$ は \$h\$ は 1 回くりだせますけど後は因数分解できません。有理的に因子化しないので、\$h\$ についてどういう \$h\$ で 0 になるかということが大事なんですけど、それを調べようと思うとルートを使って 2 次方程式を解かないといけません。私はルートは嫌いなので、2 次方程式を解かなくていいようにする方法がありまして、\$c = 13 - 6(t + \frac{1}{t})\$ とおくと有理的に \$d_2 = 16(h - h_{1,1})(h - h_{2,1})(h - h_{1,2})\$ と因数分解できます。ここで \$h_{r,s} = \frac{1}{4t}((rt - s)^2 - (t - 1)^2)\$ というものです。一般に次の公式が知られています。

定理 1 (Kac (1978), Feigin-Fuchs (1982)).

$$d_N = \text{const} \prod_{\substack{r,s \geq 1 \\ r,s \leq N}} (h - h_{r,s})^{P(N-rs)}, \quad P(n) \text{ は } n \text{ の分割数}$$

この結果があるのでこれ (\$K(N)\$ の行列式) のことを Kac 行列式と呼んでいます。Kac(1978) はアナウンスだけだったと思います。Publish した最初の証明は Feigin-Fuchs が 1982 年に出ています。

\$d_N\$ は基底の取り方によるので const はどうでもいいです。例を書くとたとえば次のようになります。

$$\text{例 2. } d_3 = (h - h_{1,1})^2 (h - h_{2,1})^1 (h - h_{1,2})^1 (h - h_{3,1})^1 (h - h_{1,3})^1$$

これはどういう意味かというと、この定理の系として \$d_N\$ が 0 になるとき \$V_h\$ は既約でないということを知っているわけですけど、

系 1. 表現 \$V_h\$ は \$h = h_{r,s}\$ のとき可約になり、次のようなベクトル \$|\chi_{r,s}\rangle\$ (特異ベクトル) から生成される部分表現をもつ：

$$L_n |\chi_{r,s}\rangle = 0 \ (n > 0), \quad L_0 |\chi_{r,s}\rangle = rs |\chi_{r,s}\rangle.$$

こういう \$|\chi_{r,s}\rangle\$ があると、勝手なブラベクトルとペアリングをとったときにいずれ positive なものが左から攻めてきますので、消えちゃうわけですね。なのでこういう \$|\chi_{r,s}\rangle\$ があれば det が消えてしまうことが簡単にわかります。

逆に det が消えているときには非自明なカーネルベクトルがありますので、そのカーネルベクトルは特異ベクトルか、あるいは特異ベクトルに何かかけたものです。例えばレベル 3 のところで \$d_3\$ が 0 になるのはすでにレベル 1 のところで特異ベクトルができていて、それに \$L_{-1}\$ をかけたり \$L_{-2}\$ をかけたりしたものがペアリングをとって消えてしまっている、そういう状況も起こります。そういうものはレベル 1 のベクトルに \$L_{-1}, L_{-2}\$ をどうかけるかで 2 次元分ありますので、それでベキに 2 がでてくるといわけですね。

ここで一般に最高 (highest) weight の表現の中やテンソル積の中で再び最高 weight になるベクトルを特異ベクトルといいます。昨日の齋藤先生の講義でも、行列の中で最高 weight ベクトルを探して、次元勘定してとかやりましたが、最高 weight ベクトルをつかまえるのは大事です。普通は Virasoro 代数の表現で最高 weight ベクトルに \$L_{-1}\$ や \$L_{-2}\$ をかけていったものの全体は既約で、positive なものをかけてやると戻ってこれて全体が Virasoro 代数でつながっている、既約表現になっていますけど、特別な状況の場合にはブラックホールみたいなものがあっていったんその中に入ってしまうともう戻ってこれない、そういう状況が起こります。

そういう不変な部分空間ができちゃう場合があって、それが可約ということですけど、「そういうのは行列式 d_N が 0 になる特別なときに起こる」というのがこの定理の主張です。

実際に知られている証明は、むしろ特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ を先につくって、この $|\chi_{r,s}\rangle$ が零点にこれだけの寄与をするからこういう $\det$ が成り立ちますね、という証明でこちらのほうが普通です。最初に Feigin たちがやった証明も先に特異ベクトルを構成してしまって、これだけの零点があるはずであとは次数を勘定するとそれで全部だから、という証明で、論理的には上の系が定理で、定理が系という順番でそう説明することのほうが多いです。歴史的にはこのようになっています。最初に Kac がやった証明が何なのかは知りません。

聴講者。すみません。 $|\chi_{r,s}\rangle$ あるいは r, s を決めて $h_{r,s}$ を考えるときに、 r, s とは違う r', s' について $h_{r,s} = h_{r',s'}$ となるようなことはあるんですか？

あります。1つの表現が、 c が最初から決まっていって h を決めたら決まるので c と h で決まるわけですけど、そのときに同じ h が 2 通りの整数でラベリングされることもあり得ます ($c = 13 + 6(t + 1/t)$ の t が有理数のとき)。もともと BPZ がやった minimal モデルというのはこの場合で、既約な quotient をとると一番小さな表現ができるんですね。そういう場合が minimal モデルと呼ばれているものです。これ ($|\chi_{r,s}\rangle$) は最も generic に起こり得る可約な場合を書いているわけです。

$\mathfrak{sl}_3$ でいうと f_1 と f_2 の方向とあって、それぞれの方向に何回もやると消えて、となっているとこれで有限次元表現ができるわけです。今みているのはその 1 方向だけみたいなのをやっていて、Virasoro のときには最大 2 つ起こることがあり得て、それで最大です。それ以上起こることもあるんですけど、それ以上起こる場合にはその sub module の中にまた特異ベクトルがあって、という状況になって入れ子になってどんどん起こることはあります。いったん 2 つでてくると無限個でできます。そういうことは character を調べたりするときにやるんですけど、ここでは 1 つある場合だけを考えます。

例 3. $n = 1$ のとき $h_{1,1} = 0$, つまり最高重みベクトルは $|h_{1,1}\rangle = |0\rangle$ で、 $|\chi\rangle = L_{-1}|h=0\rangle$ が特異ベクトルになるしかありません。実際 L_1 を $|\chi\rangle$ に当てると、交換関係 $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$ から

$$L_1|\chi\rangle = L_1L_{-1}|0\rangle = [L_1, L_{-1}]|0\rangle = 2L_0|0\rangle = 0$$

となって消えてしまいます。 L_2 から先は weight の勘定からすべて 0 になります。なのでこの条件 (特異ベクトルの条件) が満たされています。

昨日話をした球面上の相関関数を考えるときには $\mathfrak{sl}_2$ で不変な状態で期待値をとって 4 点関数を定義すると言ったんですけど、そのときに使うベクトルは $|0\rangle$ および、それに双対な $\langle 0|$ です。positive なものはもちろん定義によって消えていますけど、 L_0 と L_{-1} でも消えています。 L_0 と $L_{\pm 1}$ が $\mathfrak{sl}_2$ を生成していますから、そういう意味でこの $|\chi\rangle$ は $\mathfrak{sl}_2$ で不変な状態を表しています。これで原点がどこにあるかというのに関係なしに、原点側も無限遠点側もツルツルで、 $\mathfrak{sl}_2$ でクルクル回せるような相関関数ができます。

$n = 2$ のとき これはもう少し非自明で、 $h = 0$ の $|0\rangle$ はもちろん positive なものをもってくると 0 になります。そうではなくてレベル 2 で初めて特異ベクトルになる人がいて、 $h = h_{2,1} = \frac{3t-2}{4}$ のとき、特異ベクトルとして

$$|\chi_{2,1}\rangle = (L_{-1}^2 - tL_{-2})|h\rangle$$

がとれます。

演習 6. $L_1|\chi_{2,1}\rangle = L_2|\chi_{2,1}\rangle = 0$ を示せ。

実は $n = 2$ の場合には $(r, s) = (1, 2)$ にも特異ベクトルが出てきますが、一般に t を $\frac{1}{t}$ にして (r, s) を (s, r) にすると h の式は同じになります。このことを使うと $(1, 2)$ の特異ベクトルをつくりたいければ、先程の $|\chi_{2,1}\rangle$ で t を $\frac{1}{t}$ にすれば OK です。だから片方だけ書けば十分ですね。たとえば $n = 3$ の場合には $(r, s) = (3, 1), (1, 3)$ で

$$|\chi_{3,1}\rangle = (L_{-1}^3 - 4tL_{-2}L_{-1} + 2t(2t-1)L_{-3})|h_{3,1}\rangle.$$

$|\chi_{1,3}\rangle$ のほうは $|\chi_{3,1}\rangle$ で t を $\frac{1}{t}$ にするとできます。

$n = 4$ になると $(r, s) = (4, 1), (2, 2), (1, 4)$ の 3 通りがでできます。 $(4, 1)$ の特異ベクトルと $(1, 4)$ の特異ベクトルは t を $\frac{1}{t}$ にするとお互いに移りあいます。 $(2, 2)$ の特異ベクトルは t を $\frac{1}{t}$ にすると自分自身に戻るような式になっています。

一般に positive なものをかけて消えてしまうという条件をチェックするには、 L_1 と L_2 についてチェックしておけば十分です。 L_1, L_2 で交換子をとると L_3 から先もどんどん生成されるので L_1 と L_2 について消えれば L_3 から先も消えることが必然的にできます。 L_1 と L_2 の一方だけ消すのであれば、係数を調整していつでも消せるので問題はないですけど、両方消そうとすると c と h の間に何か関係がないと成り立ちません。同様に一般に 2 つの整数でラベリングされるような特異ベクトルが Virasoro 代数の highest weight 表現の空間の中にズラズラとあります。

これからお話しするのは「そういったベクトルがあると微分方程式がでできます」ということです。実際、考えている表現空間が特異ベクトルをもつような可約な状況になっている場合には、4 点関数 $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z) \Phi_{h_2}(w) | h_1 \rangle$ はある線形微分方程式に従います。 h はいろんなパラメータがあるんですけど、どれか 1 個が特別な状況に退化していれば微分方程式は成り立ちます。たとえば中間状態に相当するパラメータが退化していてもいいです。微分方程式が出てくる理由は簡単で、 $h_1 = h_{r,s}$ のときはその表現空間にレベルが rs の特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ がありますので、 L_n の n が正のものが攻めていくといずれお迎えが来て

$$\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z) \Phi_{h_2}(w) | \chi_{r,s} \rangle = 0$$

のようにゼロになります。他方、 $|\chi_{r,s}\rangle$ は

$$|\chi_{r,s}\rangle = (L_{-1} + cL_{-2}L_{-1} + \cdots) | h_1 \rangle$$

のように書けていて、 L_{-n} を交換関係で左側に寄せていきますと、primary 場と交換する度に微分作用素が出てきますので、結局 $N = rs$ 階の微分方程式が出てきます。ホモジニティからこの人たちはいずれ 1 変数の関数で書けていますので、この場合には常微分方程式になります。1 変数の常微分方程式で N 階でしかも Fuchs 型です。

ここらへんの計算をするときには、先程の齋藤先生のお話とも同じなんですけれども、動ける座標は全部動かせるようにしておいたほうが式はきれいに書けます。なので一番式をきれいに書こうと思ったら、4 点のうち 2 点は Riemann 球面の原点と無限遠点にいて、残りの 2 個が途中のどこかにいる状況で、さらにやりたければそのうちのどちらかを 1 に特殊化してしまっても $0, 1, \infty$ ともう 1 個と書くと 1 変数の常微分方程式になるんですけど、そうしないで 4 個の変数全部動かせるようにしておいて微分方程式を書くと、むしろそのほうが方程式そのものはきれいに書けます。そこらへんは悩みの種で、作用素が n 個と一般にたくさんある場合は 3 個くらい減らして不自由になるくらいなら n 個でやるんですけど、4 個のものが 1 個になるとなるとかなり悩みますよね。なのでどっちで書くかというのは微妙なんですけど、両方でできます。ここでは具体的な式はそれほど必要ではないので、こういう微分方程式があるということだけ了解していただければいいと思います。

聴講者. $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z) \Phi_{h_2}(w) | \chi_{r,s} \rangle$ に出てきた h_4 の値は何でもいいんですか?

なんでもいいです. $\langle h_4 |$ の条件は negative のものがあたと消える, それだけです. それ以外の条件は使いません. h_4 の値がなんであるかというのは式の形によらないんですね^{*3}. というのは ∞ にもっていつているのでこの座標では見えないということです. 対称的にやりたければ,

$$\langle 0 | \Phi_{h_4}(z_4) \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle$$

と書いておいたほうが気持ちがいいです. ここで $\langle 0 |, | 0 \rangle$ と書いた人は, さっき言った $\mathfrak{sl}_2$ の意味での, $\mathbb{P}_1$ でツルツルの状態を表します.

それ (ツルツルの $z = 0$ や $z = \infty$ の意味) 以外の 4 か所に operator がさしこんであって (=出来事が起こっている=マーキングがされている) という状況で Virasoro を作用させてやると, 何かが起こっている場所が動いたという形に書けますので, こっちのほうが便利なおもい多しです. ここでやっているのは z_1 を原点に, z_4 を無限遠点に止めちゃいましょう, という形の計算でこれが $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ です. さらに徹底してもう 1 個固定できるでしょ, $\mathfrak{sl}_2$ は 3 次元ですからね, というふうにもう 1 個を例えば 1 に fix すると 0, 1, ∞ が fix されて残りの 1 個がモジュライになるというふうにして 1 次元の常微分方程式に落とすこともできます. 4 変数の方程式に $\mathfrak{sl}_2$ の不変性が 3 次元分あるというふうに連立形でみることもできます. どちらでみるかは目的に応じていろいろです.

ここでは方程式は書かないで, 解を積分でつくるといふもののお話をしておきましょう. まずいきなり演習問題から.

演習 7. $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j}$ について次を示せ (もっと一般の指数 $\lambda_{i,j}$ の話は Aomoto ('87)).

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial z_i} \Delta = \sum_{j(\neq i)=1}^N \frac{\alpha_i \alpha_j}{z_i - z_j} \Delta$$

$$(2) \quad \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \Delta = \sum_{i=2}^N \left(\frac{h(\alpha_i)}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \Delta,$$

ただし, $h(\alpha) := h_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \left(\alpha_1 - \frac{1}{2\alpha_1} \right)$.

(1) は対数微分をすればすぐにでてきます. 簡単な式なんですけど実は重要で, スカラーあるいは $U(1)$ の場合の KZ 方程式です. 行列にしたら本物の KZ 方程式になります.

(2) は, z_1 が一般の z_j でも書けますけど一般の j だと (和の添字で j を) 含むとか含まないとかめんどくさいので, $j = 1$ の場合だけを書きます. (2) は (1) をもう一回微分して部分分数分解してやればでてきます. こういうのは「Virasoro 代数の表現論をつかって微分方程式をたてて, それを Coulomb gas とかいわれる方法で解いて, etc.」というのが常套手段なんですけど, そこらへんの話は今までの表現論のことを全部すっかり忘れてしまって, この演習問題を 1 回解くと 30 分でわかる. そういう仕掛けになっていることを 3, 4 年前に発見しまして講義のときにも愛用しています. これは簡単で「儲け」の多い演習問題ですので是非やってみてください.

聴講者. (2) で α_1 と書いているのは?

^{*3} ただし係数は少し変わる.

今は, z_1 の方程式だけを書いています. なので α_1 だけが別格で, この人 ((2) 式) は α_1 によっています*4.

この (2) 式で大事なのは $h(\alpha_i)$ が 1 になるときで, そのときは

$$\left(\frac{h(\alpha_i)}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \Delta = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{1}{z_1 - z_i} \Delta \right)$$

なので, これは全微分でまとまって, その変数で積分した $\int_C \Delta dz_i$ も同じ微分方程式 (z_i の項なし) をみたします. 差積のベキが整数でなければ一般に多価関数ですので, 積分して 0 というためには「境界項がちゃんとキャンセルする」とかそういうことをやらないといけません. そういうときのためにひねりサイクルの理論とかがあるわけですが, そういうまいサイクルを見つけてやれば単なる差積だけでなく, 差積を積分したようなものから出てくる非自明な解が続々と得られます.

これは 1 回に限りません. $h(\alpha_i) = 1$ になっている変数が何個かあったら, その都度積分してやってやればいくらでも新しい解ができます. さらにいうと, $h(\alpha) = 1$ は 2 次方程式なので 1 つ $h(\beta) = 1$ を決めてやると, それに対して $h(-\frac{2}{\beta}) = 1$ です. なので $\alpha_i = \beta, -\frac{2}{\beta}$ に相当する変数 z_i を追加して積分するということをしてやっても, 元の方程式を保ったまま新しい解がつかれます. 多価関数の多重積分で目が回るんですけど, 積分ができればそれで方程式の非自明な解がゾロゾロと出てきます. このような作用素を, 妙な名前ですけど歴史的な経緯から, スクリーニング作用素といいます. 差積の言葉でいえば重みが 1 になっている変数を追加して積分するというわけです. こうして得られる差積の積分

$$\int dt_1 \cdots dt_n \prod_{1 \leq i < j \leq m} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (z_i - t_j)^{\alpha_i \beta} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)^{\beta^2}$$

は, もともと青本先生がやった話*5 の特別なバージョンですけど, 先ほどの表現論の言葉でいうと

$$\langle 0 | \Phi_{h_n}(z_n) \cdots \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle,$$

の解を与えています. どういう微分方程式かというと, Virasoro 代数の言葉で書けば次のようになります (この場合には変数が全部生きてるように書いたほうがわかりやすいと思います. また変数は 4 個である必要もなく何個あっても同じです).

$h_1 = h_{2,1}$ の場合:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 - t u(z_1) \right\} \psi(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad u(z_1) = \sum_{i=2}^n \left(\frac{h_i}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$$

特異ベクトル $|\chi_{2,1}\rangle = (L_{-1}^2 - t L_{-2}) |h\rangle$ との対応は,

$$L_{-1}^2 \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2, \quad L_{-2} \leftrightarrow u(z_1)$$

です. ここに生き残っている変数は勝手な weight をもっていて積分されないで残っている変数です. 裏には weight が 1 で積分されて, ここにみえていない変数がいくらあってもかまいません. そういうものがこの方程式の解を与えています.

*4 $h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha(\alpha_1 - \frac{1}{2\alpha_1})$ も α_1 を使って表示しているが, これは使いにくい. 普通は $h(\beta) = 1$ となる β を 1 つとって, $h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha(\frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2})$ と表す. このとき, $h(\alpha) = 1$ となるのは $\alpha = \beta, -\frac{2}{\beta}$. 特異ベクトルに現れたパラメータ t は $t = \beta^2/2$.

*5 K. Aomoto, “Gauss-Manin connection of integral of difference product”, J. Math. Soc. Japan 39 (2): (1987) 191-208.

これは z_1 の 2 階の微分方程式のように書いていますが、 $u(z_1)$ の中に微分作用素が入っていますので多変数の偏微分方程式系で、先程の GKZ みたいにノーマライズしないで動ける変数は全部動けるようにして、微分方程式を書きやすくして書いている状況に対応します。これを 4 点関数の場合に $\mathfrak{sl}_2$ -不変性をつかって 1 変数の常微分方程式の形に書いてやると、それが普通 BPZ の方程式や Dotsenko-Fateev の微分方程式とか呼んでいるものになっていくわけです。この場合には 2 階なので Gauss に落ちます。3 階の場合が Dotsenko-Fateev になる場合です。

聴講者. $h_1 = h_{2,1}$ というのは、どのパラメータの特殊化?

$\langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ の h_1 , あるいは $\langle 0 | \Phi_{h_n}(z_n) \cdots \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle$ の h_1 です。一番簡単な例として、 $h_1 = 0$ で $|h_1\rangle = |0\rangle$ がレベル 1 の特異ベクトル $|\chi_{1,1}\rangle = L_1 |h_1\rangle$ を持つ場合を考えます。 $|\chi_{1,1}\rangle$ が特異ベクトルであることから

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) | \chi_{1,1} \rangle = \langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) L_1 | h_1 \rangle \\ &= - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial}{\partial z_i} \langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle \end{aligned}$$

が成り立ちます。これはより対称的に $\psi = \langle 0 | \Phi_{h_n}(z_n) \cdots \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle$ で書けば、 $\frac{\partial}{\partial z_1} \psi = 0$ と $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \psi = 0$ を合わせたものと見なせます ($\frac{\partial}{\partial z_n}$ は $z_n = \infty$ では見えない)。前者 $\frac{\partial}{\partial z_1} \psi = 0$ が $\Phi_{h_1}(z_1)$ を $h_1 = 0$ に特殊した結果、後者は並進不変性 ($\mathfrak{sl}_2$ 不変性の一部) です。 $h_1 = h_{2,1}$ の場合には、 $\langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) (L_{-1}^2 - tL_{-2}) | h_{2,1} \rangle = 0$ から微分方程式が出てくるわけですが、 L_{-1} を左に寄せて微分作用素に書き換えるのは不経済なので、 $|h_{2,1}\rangle$ が $z_1 = 0$ にあるという条件を緩めて、 L_{-1} を $\Phi_{h_{2,1}}(z_1)$ の z_1 微分として処理して、 L_{-2} だけを左に寄せて書いたのが先ほどの微分方程式 $\{\partial_{z_1}^2 - tu(z_1)\}\psi = 0$ です。

聴講者. $h = h_{2,1}$ の場合が 2 階の微分方程式とのことですが...、そこに出てきた $\psi(z_1, \dots, z_n)$ は n 点関数ですか?

n 点でかまいません (質問の解答の歯切れが悪いのは、表示によっては $(n-2)$ 点のようにも書けるから)。

聴講者. どういう風に書いた n 点関数ですか?

たとえば、これです

$$\psi(z_1, \dots, z_n) = \langle 0 | \Phi_{h_n}(z_n) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle, \quad h_1 = h_{2,1}.$$

$h_{2,1}$ がどこにあるかで関数は変わりますが、満たす微分方程式は同じです。はじめに説明した $\langle h_4 | \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) | h_1 \rangle$ で $h_1 = h_{2,1}$ の場合は一番右端に持ってきて、 $z_1 = 0$ で考えています。

聴講者. つまりそれに出てくる $h_1, \dots, h_n$ のどれかが $h_{2,1}$ だったら、その (2 階の) 微分方程式が成り立つんだけど、一番目の変数にあるとしたらそれになるというわけ?

はい。実は、どこにあっても満たす微分方程式は本質的に同じです。 h というパラメータが 1 つでもこの特殊値になっていればそれに対応する変数の微分について方程式が成り立ちます。それは差積の計算でも同じです。

$h = h_{3,1} = 2t - 1$ の場合には 3 階の微分方程式が成り立っているんですけど、この 3 階の場合が Dotsenko-Fateev になります。この場合の解も同様に積分で得られます。微分方程式も、特異ベクトルの係数

$((L_{-1}^3 + c_1 L_{-2} L_{-1} + c_2 L_{-3}) |h_{3,1}\rangle$ の $c_1 = -4t, c_2 = 2t(2t - 1)$ がそのまま出てきて

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^3 + c_1 u(z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + c_2 u'(z_1) \right\} \psi(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad \left(' = \frac{\partial}{\partial z_1} \right).$$

が成り立ちます。特異ベクトルの式は翻訳すればそのまま微分方程式を表しているというわけです。

一般に特異ベクトルの表式があれば、それをしかるべきルール^{*6}で読みかえてやると微分方程式が成り立ちます。例えばすべての $\Phi_{h_i}(z_i)$ の weight が $h_i = h_{2,1}$ で、どの変数に関してもこの方程式が成り立つという状況を考えることも可能です。しかも「そういう状況で対称な解を求めてください」ということをやってやると、Jack 多項式の話になるということになります。同様にレベル n にある特異ベクトル

$$|\chi_{r,s}\rangle = (L_{-1}^n + c_1 L_{-2} L_{-1}^{n-2} + \dots) |h_{r,s}\rangle$$

からは、微分の leading term は L_{-1}^n から来る $\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^n$ になるので、 n 階の微分方程式が出てきます。それに対応する解も同じようにしてつくれますがここではやりません。

聴講者。先程の $\psi(z_1, \dots, z_n)$ を積分で書くと、さっきの意味の記号 Δ で、 $z_1, \dots, z_n$ の他に $u_1, \dots, u_n$ を入れて、それで積分したものが...

それが解です。積分変数はさっき書いた意味の、 $h(\alpha_i)$ が 1 になっているようなものだったら何個入れてもかまいません。普通 Jack 多項式とかをやるときには、2 種類あるうちの一方だけ入れますが両方入れてもかまいません。

聴講者。このロジックは「差積のベキを部分積分したと思って得られる関係式が、ちょうど特異ベクトルを左側に移して作った微分方程式と同じものになります」ということですか？

そういうことです。つまり「今書いた方程式で消されるような差積の積分の理論があります」ということを言っていたわけです。それをどうやって証明するかというと、一番素朴な方法は差積の式を書いておいて、この微分作用素をあてるんです。そうするとズラズラと式がでてくるんですけど、積分したい変数のところはさっきと同じメカニズムで全微分にまとまります。そこは積分して落としてよろしいと、そういうからくりです。なのでそうやって証明するのであれば Virasoro 代数の表現論は、方程式をつくるころまでは使いますけど、そこから先のスクリーニング作用素の理論とかは無くてもできます^{*7}。

5 AGT 対応との関係

AGT 対応の話にいきたいわけですが、これまでにわかったことは「Virasoro 代数の表現からできる 4 点関数、一般に n 点関数は表現の weight に相当するパラメータが特殊なところでは微分方程式を満たす」ということです。昨日言ったことは「相関関数を調べる手段はそれしかないんだから微分方程式の成り立たないところを考えても無駄だ」というふうに多くの人は思っていたということです。ですが「そうでないところ、generic なところもきれいな構造があるんだよ」ということが 10 年前にわかったわけです。そこで以下では「微分方程式の観点から AGT 対応はどのようにみえてくるか」という話をしたいと思います。

^{*6} $L_{-1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z_1}, L_{-n} \rightarrow \frac{1}{(n-2)!} u^{(n-2)}(z_1), u(z_1) = \sum_{i=2}^n \left(\frac{h_i}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$.

^{*7} 実際に微分作用素を当てなくても全微分のおつりの項の形が分かるのがスクリーニング作用素の効用。

今お話ししたような共形場理論の立場からの話やゲージ理論の背景の話而易しくまとめた文献に、瀧雅人, Alday-Gaiotto-Tachikawa 予想とその発展 (pdf) という日本語の良い解説が web に転がってますので、これがおすすめです。これは AGT 予想が出て 1 年後くらいに書かれたものなんですけど、非常によくまとまっています。

AGT 対応の話に入りたいんですけど、AGT 対応というのが何だったかという、その後いろいろな拡張があるんですけど一番オリジナルのやつは

$$\text{Vir の 4 点関数} \quad \langle h_4 | \Phi_{h_3}(1) \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle,$$

変数は 1 個あればいいんですけど、これと

$$\text{ネクラソフの分配関数} \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n Z_n,$$

が、もともとそれぞれ 2 次元共形場理論と (4 次元) ゲージ理論からでてきた関数で、直接は関係ないんですけど、**AGT がみつけたのはこの人たちが本質的に同じ人です**ということをいったわけです。

Virasoro 側にはパラメータとして 4 個の共形次元のパラメータ h_1, h_2, h_3, h_4 とそれ以外にもう 1 つ、中間状態の weight を指定するパラメータ h_{int} があって、それ以外に c があって 6 個のパラメータがあります。一方、ネクラソフ側はパラメータは物質場の質量に相当する 4 個のパラメータ m_1, m_2, m_3, m_4 と、ゲージ場の真空期待値と呼んでいるパラメータ a_1, a_2 、これは本質的に差だけが重要なので 1 個分です。これと発散をおさえるために、正則化のために入れるテクニカルなパラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ があって、これは比だけが重要なので 1 個分、これで全部で 6 個分のパラメータですけど、「この 6 個ずつのパラメータにしかるべく対応をつけるとこれら 2 つの関数が一致する」というのが AGT 対応の主張です。それは 10 年くらい前に Alday-Gaiotto-Tachikawa という人たちによって発見されました。

パラメータの対応関係を書いておきますと、

$$\begin{aligned} h_i &= \frac{\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right)^2 - \mu_i}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (i = 1, 4, \text{int}) \\ h_i &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \mu_i) \mu_i}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (i = 2, 3) \\ m_2 &= \mu_2 \pm \mu_1, \quad m_4 = \mu_3 \pm \mu_4, \quad a = a_1 - a_2 = \mu_{\text{int}} \\ c &= 1 + 6 \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right)^2 \end{aligned}$$

です。 h_1, h_2, h_3, h_4 は対等なんだけど、この構成だと外側の 2 人 h_1, h_4 と内側の 2 人 h_2, h_3 は性質が違います。そのことが反映して h の対応する式もちょっと変わっています。AGT 対応や AGT 予想や AGT 関係式といういろいろな呼ばれ方をしていますが、AGT 関係式と言っているのはこの翻訳ルールです。この翻訳ルールで読み直してやると、見た目も由来も全然違う式が一緒になるという発見です。どうしてそういう発見に至ったかということも、瀧さんの pdf に解説が書いてありますので興味がある方はご覧になるといいかと思います。

ただし、そのまんまほんとに一致するわけではなくて、こういうふうに AGT 対応で読みかえてやるとちょっとおつりがついて

$$\langle h_4 | \Phi_3(1) \Phi_2(z) | h_1 \rangle = Z^{\text{Nek}} (1 - z)^{-\frac{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$$

となります。これは Euler 関係式 (2 つの超幾何関数がベキ積を 1 個つけておくと等しくなるみたいなもの) と微分方程式の立場から思ってもらえばいいと思います。こういうおまじないをつけてやると 2 つの級数が等しくなります。

例えば共形場理論の立場からだ、この量はがんばれば、全然因数分解もしない悲惨な有理式ですけど、いくらでもがんばって計算できます。その人に factor をかけて補正してやってもうまく分解してやると、それぞれがスパスパと因数分解して昨日書いたきれいな式になるという結果なわけ。この (おつりにつけた) factor のことを、これは $U(1)$ の KZ の解なので $U(1)$ 因子と呼びます。ゲージ理論的にいうと、4 点関数は $SU(2)$ で計算してるんですけど、ネクラソフ関数は $U(2)$ で計算しているので $U(1)$ 分が余分にあります。その部分を補正しているのが $U(1)$ 因子であると解釈されています。

当時は AGT 予想といわれていましたけど、今では物理の意味では定理、数学的にもまっとうな数学の定理になっていると思います。いろんなレベルの証明があるんですが、昨日今日と説明した Virasoro 代数の表現論の計算みたいなことの延長で直接証明してしまう方法が 1 つ知られています。それが AGT 予想が出て 3 年後に出た Alba-Fateev-Litvinov-Tarnopolsky (arXiv:1012.1312) による証明です。これは Virasoro 代数の表現論だけからごりごり計算して証明するという一番ダイレクトな証明で、ここでは話の筋だけ紹介しておきます。

ものすごく symbolic に書いてしまいますけど、計算したいのは 4 点関数で、昨日計算したように

$$\langle h_4 | \Phi | h_1 \rangle = \sum_{I,J} \langle h_4 | \Phi | I \rangle (\langle I | J \rangle)^{-1} \langle J | \Phi | h_1 \rangle \quad (6)$$

と書けます。ここで $|I\rangle, \langle J|$ はそれぞれ V_h, V_h^* の基底です。3 点関数を求めておいて逆行列をかけて、もう 1 回 operator をあてて期待値の計算としてやって計算できるわけです。3 点関数は原理的に計算できて、逆行列は Kac 行列の逆行列です。彼らのアイデアは何かというと、この人 (上式の行列成分) たちが計算しやすいようないい基底を求めましょうということです。一番いいのは直交系になっていると逆行列の計算が簡単です。残念ながら Virasoro 代数の表現空間の中にそんな都合のいい基底はないんですけど、彼らがやったのは $\text{Vir} \otimes \mathcal{A}$ の上でいい直交基底をつかってやって実行できるということです。ここで $\mathcal{A}$ は Heisenberg 代数

$$\mathcal{A} := \langle a_n, a_{-n} (n \in \mathbb{Z}_{>0}) | [a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0} \rangle$$

です。ここは Virasoro 代数の表現ではないのでこう書くのはちょっとまずいんですけど、

$$(6) = \sum_I \langle h_4 | \Phi | I \rangle \frac{1}{W_I} \langle I | \Phi | h_1 \rangle$$

というふうになるわけですね。 $|I\rangle, \langle J|$ は表現空間の基底なので、もし Virasoro 代数だけでやると (基底をラベルするのは) partition 1 個です。ネクラソフ関数がいっているのは「2 個の partition で展開しろ」と言っているんですけど、それをやってくれるのは $\mathcal{A}$ です。 $\mathcal{A}$ の表現も Vir の表現も partition でつくれますのでこの (右辺の) I は 2 つの partition の組です。

彼ら (AFLT) がやったのは、実際に表現空間の直交基底でペアリングがきれいに factor されるものをつかって、その因子がちょうどネクラソフの因子になっているというものを手につくっちゃう。実際には $U(1)$ 因子の補正があるわけですが、とにかくそういう基底を induction で丁寧につくっていくわけです。 $\mathcal{A}$ を入れている根拠は 2 つの partition でラベル付けられる以外にもう 1 つあって、 $U(1)$ 因子の説明にもなっているわけです。実際にはテンソル積の空間で Vir の operator 以外に $\mathcal{A}$ の operator で、普通の exponential として書かれる vertex operator ですけど、そういうものを入れておきます。そうするとその人たちの相関関数は $U(1)$ の相関関数なので差積です。今の場合はちょうど $U(1)$ 因子を出してくれる、 $\mathcal{A}$ の 4 点関数として出てきます。もともと $U(1)$ の因子を引っ張り出すための何か $U(1)$ をうまくいれてやらないといけないというのはみんな知っていて「そういうのをうまくいれてやれば計算ができるんじゃないか」と言って、ロシアの人たちががんばってつくったのがこの話です。これはモジュライ空間の難しい話を使わないで、コツコツと計算すればでける証明です。

聴講者. Virasoro の $\mathfrak{sl}_2$ が入っているところを, 更に $U(1)$ を付け加えて, 定義し直したと思えばいいわけですか?

そうです. Virasoro 代数の立場からいうと Virasoro 代数というのは KdV operator の量子化によってでてくるもので, そう思うとこれは 2 階の微分作用素を $\mathfrak{sl}_2$ でゲージ固定して 1 階の分はでてこないように無理やりつくっているんです. そうしちゃっているんで自由がきかなくて AGT みたいな構造がみえないのもう 1 回復活してやる, $U(1)$ の部分と Virasoro の部分をうまく混ぜ合わせてやるときれいに書けますよと, そういうふうに理解してもいいんだと思います. 無理やり $\mathfrak{sl}_2$ (trace part = 0) としないで trace part にも活躍してもらおうというわけです. とにかくそういう証明がありますので, ここまでの話を辛抱して聞いていただいた方にはこれが一番おすすめの証明です. 私がちゃんとフォローした AGT の証明はこれしか知りません (ただし後の坂井さんのコメントによれば一部に不完全なところがあるらしいので, 実は“証明”)*8.

こういうことをやると共形場理論とネクラソフ関数に似たような構造がでてくることがわかるんですけど, 「渋川さんが私に教えてくれた公式がネクラソフ関数 Z^{Nek} から出てくるものと同じである」ということが最初に紹介した渋川さんの質問の答えだったんですけども, このことの説明を最後にやって終わりにしたいと思います. そのために大事になるアイデアが 2 つあって, 1 つは truncation と呼ばれている現象, もう 1 つは q 化して考えるというものです.

まず truncation のほうから説明しますね. Virasoro 側では特別なパラメータのときには微分方程式がでてくるという話をさっきまで一生懸命やってました. 一方, ネクラソフ側では対応する事情はどうなっているかという, Young 図形の truncation が起こるということがわかります. それはどういう事情かというと, h を特殊化するというのはゲージ理論側でいうと質量のパラメータ m を特殊化することに対応します. 質量に相当するパラメータはネクラソフの級数の因子の factor にできました. そこででてきたパラメータは

$$z_f(a, m, \lambda) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (a + m + \varepsilon_1(i-1) + \varepsilon_2(j-1))$$

というものでした. このときにもし $a + m = -(r-1)\varepsilon_1 - (s-1)\varepsilon_2$ になっていると, ある box のところで $(a + m + \varepsilon_1(i-1) + \varepsilon_2(j-1))$ が消えてしまいます. なのでこれから, $a + m = -(r-1)\varepsilon_1 - (s-1)\varepsilon_2$ なら λ は (r, s) を box に含めないということが起こります. 例を述べましょう.

$(r, s) = (1, 1)$ のとき

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \times & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdots \rightsquigarrow \lambda = \emptyset \text{ しかありません.}$$

$(r, s) = (3, 1)$ のとき

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \times & & & \\ \hline \end{array} \cdots \rightsquigarrow \lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{横 2 列しかありません}$$

一般に $(r, s) = (2, 2)$ のように中のほうにある場合は hook の Young 図形だけに制限されるということになります.

実は渋川さんが書いている級数はちょうどこの $(1, 1)$ と $(3, 1)$ の場合になっていて, パラメータを 2 つ特殊化します. 1 つのパラメータを $(r, s) = (1, 1)$ になるようにとって, 2 つある Young 図形のうちの 1 つを $\emptyset$ に

*8 後述の坂井コメントのやり取りの脚注でも繰り返し述べるが, この間違いは Albion-Rains-Warnaar arXiv:2001.05637 により解決されたと思われる.

固定しちゃいます. もう 1 つの Young 図形は $(r, s) = (3, 1)$ で truncate した Young 図形を走ります. そうすると上の例で述べたように縦 2 段の Young 図形に関する足し算という形になります. 渋川さんの話, つまり

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \leftarrow i+j \text{ 個}$$

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \leftarrow i \text{ 個}$$

という状況だと, 対応する級数は何か i, j に依存する $A_{i,j}$ があって

$$Z^{\text{Nek}} = \sum_{i,j \geq 0} A_{i,j} z^{2i+j}$$

という級数になるわけですね. なので最初にした級数のネクラソフ側での対応物は AGT の対応関係で翻訳して読みかえてやるとたしかにこの状況になっていて, 最初は 2 つの Young 図形に対する無限和で巨大な和だったんですけど, その中の一部分が取り出されてかわいらしい級数になる.

さらに $(3, 1)$ の代わりに $(2, 1)$ の場合は Young 図形は横 1 列だけです. ということは 1 列の普通の級数になってそれは Gauss の超幾何になる場合です. そうなれば予想されるように「Dotsenko-Fateev で 3 重積分の場合だったら深さが 3 個になって…」というようにズラズラと対応がつくわけですが. 例えば, 途中が制限されて hook みたいになる場合は $(r, s) = (2, 2)$ のときの微分方程式で 2 種類のスクリーニングチャージ (スクリーニング作用素) を入れたような解に相当するネクラソフ級数が hook のものからでてくるということになります. なのでパラメータの対応と truncation の構造をみると, 共形場理論側で微分方程式をみたす場合というのがゲージ理論側では truncate する場合というのにちょうど対応しているということがわかります. 一般の場合には truncate しないように, 共形場理論側でいうとスクリーニング作用素を山ほど入れて, -無限階の微分方程式が成り立つというのは何も成り立たないのと同じですから -, それで一般の場合がおぼろげながらも見えてくるという仕組みになっています.

さらにちゃんという次のようになります.

$$a_2 = -a_1$$

$$m_4 = -a_1 \rightarrow m_4 + a_1 = 0 \rightarrow \lambda^{(1)} = \emptyset$$

$$m_3 = a_1 - 2\varepsilon_1 \rightarrow a_2 + m_3 = 2\varepsilon_1 \rightarrow \lambda^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{m_1 - a_1}{\varepsilon_2}, \frac{m_2 - a_1}{\varepsilon_2}, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2a_1}{\varepsilon_2}, -2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$$

というふうにとってやるとぴったり一致する, つまり DF_3 の級数 $= Z^{\text{Nek}}$ がわかります.

これを直接証明はしてませんが, generic なときに一致するという証明がありますので, 特殊化したときに同じ級数の構造になっていて, z^{10} くらいまで計算機で確かめましたけどぴったり合っていますので, 物理的には立派な証明, 数学的にもいろんな状況証拠を照らし合わせればちゃんとした証明になっていると思います. そういうことをいろいろ使わないで「このことだけで証明できませんか」というのもあると思いますが, そういう手段が 1 つあります. それは q 化するというもので, これだと直接証明ができます.

アイデアだけ言っておきます. まず q 化すると, 考える級数の見た目はほとんど同じです. factorial のところを q -factorial $(a)_i = (1-a)(1-qa) \cdots (1-q^{i-1}a) = \frac{(a)_\infty}{(q^i a)_\infty}$ にするだけです. ただし, おまじないが 1 つ必要で (d^{2j} の因子),

$$\sum_{i,j \geq 0} \frac{(a)_{i+j} \left(\frac{a}{d}\right)_j (b)_{i+j} \left(\frac{b}{d}\right)_j (dq)_i (d^2)_i}{(c)_{i+j} \left(\frac{c}{d}\right)_j (dq)_{i+j} (q)_j (q)_i (d)_i} z^{2i+j} d^{2j}, \quad (7)$$

としてやるとこれは q -DF₂ に相当する方程式をみたくします。この対応する方程式を具体的に明示的に最初に書いたのは Mimachi ('94) だったと思います。 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の q -KZ 方程式で 2 点関数 (見方によれば 4 点関数) を考えますが、そのスピンの 2 つ下がったところの方程式です。スピンの 1 つ下がったところは q 超幾何です。スピンの 2 つ下がったところは 3×3 の行列ができます。それを単独高階で書いた式が q -DF₂ です。

q 化した理由は、まずこの人 (7) はそのまま積分に読めます。つまりこの和はそのまま Jackson 積分なので積分に読みかえることができます。ちょっと 4, 5 行計算すると、

$$(7) = \int \prod_{i=1}^2 \frac{(ct_i, dqt_i)_\infty}{(at_i, bt_i)_\infty} \prod_{i \neq j} \frac{\left(\frac{t_i}{t_j}\right)_\infty}{\left(\frac{dt_i}{t_j}\right)_\infty} \prod_{i=1}^2 t_i^{\alpha_0} \frac{dqt_i}{t_i}, \quad (q^{\alpha_0} = zd) \quad (8)$$

という Jackson 積分の形に書くことができます。級数の形を積分の形に翻訳するとパラメータの関係がいろいろずれてくるんですけど、この Jackson 積分の場合にはパラメータが、分子と分母はひっくりかえりますが、そのことを除いてほぼそのままできて、しかも級数そのものよりも対称性がみやすい形でできます。これは Mimachi ('94) で計算されている Jackson 積分と全く同じで、ただしちょっと違うのは三町さんが計算しているのは c などのパラメータが q -shift するときの方程式を計算していますが、今計算しているのは α_0 がずれるときです。ですが、なんかの duality があって同じ方程式になっているんだろうと思います。なのでこの級数 (7) はこういう積分 (8) です。一方でこの積分を留数で計算してやるとそのままネクラソフ関数になります、というふうに証明することができます。これは演習問題ということにします。以上で終わりたいと思います。

聴講者。 q を経由して AGT そのものを証明することはできるんですか？

一般の場合もこういうふうな積分の式を書いておいて、それを留数計算するとネクラソフの式になる、一方でちょっと別の変換をして計算してやると conformal block の式になるというふうにして証明できます。そういうことをやった Aganagic et al. (arXiv:1309.1687) という論文があります。 q の場合はほとんどなんの計算もいらなそうです。使うのはテータ函数や擬定数に関する知識を少し使う程度で、あとはこの因子を開かないでこれとこれがキャンセルするといった形式的な計算だけでできてしまいます。

聴講者。それは q でやっているんですか？

q でやっています。 q でないとそういうことができないんです*9。

聴講者。先ほどの「Alba-Fateev の論文が違うんじゃないか」というのを名古屋の柳田さんに教わったんですけど、当時名古屋にいた大久保 (勇輔) くんが修士論文で「計算すると違うんじゃないか」というのを書いていて、「Jack 多項式で展開すると合わなくて、ちょっとズラすと数値的には合うんだけど今度は証明ができない」ということを言っていて気になりました。

もしかしたら穴があるかもしれないですね。いっていることは正しいと思うんだけど、証明は正しくできていない可能性はあります。そういう意味では Alba-Fateev の証明*10やこの q の場合の arXiv:1309.1687 などの証明は物理的な“証明”です。

聴講者。 Dotsenko-Fateev っていう時には、4 点関数のどういう特異ベクトルに対するものを言うんですか？

*9 厳密な意味で $q \rightarrow 1$ の極限が取れるのかは怪しい。

*10 この Alba-Fateev-Litvinov-Tarnopolsky の証明の間違いは 2020 年になって Albion-Rains-Warnaar arXiv:2001.05637 により解決されたと思われる。

なんでもいいんですか？

もともとの渋川さんのものは $(3,1)$ に相当するものです。

聴講者. 普通, Dotsenko-Fateev っていう時には, $(3,1)$ のものを言う？

そうですね. Gauss のその次の奴で 3 階になる場合です. この方程式を Dotsenko-Fateev の方程式と呼んでいますが, 歴史的にはあまり正しくなくて, その方程式は BPZ がすでに書いているんです. その積分表示を与えてモノドロミーの解析をしたというのが Dotsenko-Fateev の仕事です.

聴講者. 変数を増やすには $(n,1)$ でとるんですか？

そうです. 積分変数を増やしていくのは $(n,1)$ の n をどんどん増やしていく場合です.

聴講者. パラメータはそのままでもいいんですか？

ほぼ同じだと思います.

聴講者. AGT 対応というときには, 今は Virasoro の 4 点関数とネクラソフの場合だけど, 両方の symmetric な variation はあるんですか？

あります. 今はゲージ理論側では $U(2)$ で共形場理論側では Virasoro 代数だったんですけど, ゲージ理論側のランクを上げて $U(n)$ にすると共形場理論側では $\mathcal{W}_n$ が対応するというのを AGT-W 対応と呼んでいます. それを提唱したのは Wyllard という人で, イニシャルが一緒になってよかったんですけど... つまり, $\mathcal{W}_n$ 代数がでてくるというのを W から始まる人がいいだしたということです.

聴講者. もともとの AGT は Virasoro の場合ですか？

元々は $SU(2)$ で, Virasoro の場合です.

聴講者. AGT-W の場合で truncation したものを考えると, どういう超幾何が出てくるんですか？

ここ (a, b, c) あたりの因子) を増やした奴かな？

聴講者. 一般超幾何みたいな奴ですか？

うん. こっち (a, b, c) あたりの因子) を増やして, さらに t_i/t_j に関する因子も色んな種類の奴が出てくる. たとえば KZ なんかなかったら, $SU(N)$ なら, weight が $N-1$ 種類あって, ルートも同じだけあるんですけど, それに相当する数だけの種類のスクリーニング作用素が出てきます. そういうものを自由にに入れていいので一般超幾何 $_{n+1}F_n$ や $_{n+1}\varphi_n$ が出てきます. ただしそれは簡単な場合で, 一般にはそれだけでは収まらないわけです.

聴講者. さっきの AGT の Virasoro の場合でいいんですけど, 今やった理論は特異ベクトルに対応して微分方程式のある場合は積分を経由してこういうことができるんだけど, 微分方程式をみたさない generic なときでも AGT 対応というのがあるわけですね. そのときは微分方程式にあたるものはみえないんですか？

みえないです*¹¹.

聴講者。「式としても同じでしょ」というしかないんですか？

はい。微分方程式の階数があがっていくと必要になってくる項の個数が増えてくるんですけど、生き残っている項そのものは簡単な有理関数で、制限する前とする後の対応関係はそのままみてとれるのでどんどん大きくなっていった極限の姿は変な極限をとる必要はなくて、よく知っているものが増えていくだけなんです。そういう意味で極限の姿は容易に想像がついて、それを書いているのがネクラソフの関数ということになっているので、形式的には積分変数の個数が無限になった極限で、もとの AGT が復活するというふうに思うわけですけど、それには難しい極限をとる必要はなくて、下の方で知っている、よくわかっているものがどんどん増えていくというからくりです。

聴講者。ネクラソフ側で 2 つの partitions λ と μ を m 行と n 行で切ったとしますよね。そうすると有限な積分になるわけですけど、それも Virasoro 側では何らかの特異ベクトルに対応すると思ってもいいわけですか？

たとえば Young 図形に二重の制限条件をかけて長方形に制限した場合を考えると、 $c = 1$ にすると、これに対応するのは terminate する超幾何とか、その行列式とかで書けていて、Painlevé の我々のよく知っている特殊解に落ちてくるとか、そういう構造になっています。 $c \neq 1$ のときは、直交多項式の理論からは外れますので、行列式にはならないけれども、こういう長方形が活躍するという状況になっています*¹²。なので色々な特殊関数を、色々な制限によって拾いだせるような特殊関数の親玉になっているのがネクラソフ関数だというわけです。

聴講者。任意の (r, s) に対する微分方程式なんてのは書き下せたりしてるんですか？

Virasoro の特異ベクトルを書けば書けますよね。あるいは青本さんの理論によれば、書けることになっている。

聴講者。存在することはわかる？

青本さんの論文にはその微分方程式を計算するアルゴリズムも書いてあるので、計算機に乗せれば方程式は出てきます。

聴講者。その場合は積分表示もわかっている？

そうです。一番最後までわからなかったのが級数表示だったんですけど、それはネクラソフが与えていましたということです。

聴講者。さっき ((8) の下あたり) その α_0 の差分という話をされたと思うんですけど、それが方程式ということですか？

*¹¹ 非線形方程式ならある。

*¹² これでは「特異ベクトルに対応するのか？」という質問の答えになっていないが、行数や列数を制限する条件は特異ベクトルの出現に対応するので、質問の答えは Yes.

(次の式を見せながら) ことです.

$$\begin{aligned} & q(z-1)(z-q)(dz-q)\{-(a+b)dqz+(c+dq)\}y\left(\frac{z}{q}\right) \\ & +d^{-1}q(z-1)\{d^3qz^3(a+b)(a^2d+ab+b^2d)+A_1z+A_2z^2-(c+dq)(c^2+cd^2q+d^2q^2)\}y(z) \\ & +(abd z-c)\{-d^2q^2z^3(a+b)(a^2+abd+b^2)+B_1z+B_2z^2+(c+dq)(c^2+cq+d^2q^2)\}y(qz) \\ & +d(abdz-c)(abqz-c)(abdqz-c)\{(a+b)dz-(c+dq)\}y(q^2z)=0. \end{aligned}$$

ただし A_1, A_2, B_1, B_2 は z によらない定数.

聴講者. なるほど. 三町さんのヤツは c とかの差分ですね.

はい. で, 実験してみるとですね三町さんが作った方程式 (b, c -shift の方程式) は 3 成分の連立系なんですけども, 1 番目の component のスカラー方程式を比べると, この表示になっています. それは元の方程式 (α_0 -shift の方程式) とパラメータがズレただけです. だから級数の方もパラメータをズラせば一致するだろうと...

聴講者. 自分 (伊藤雅彦), 両方書き下した式を持ってるんですけども...

是非, 比べてみてください.

聴講者. 入れ替えると大体同じ式になるんですけど, 微妙にピッタリじゃなかったんです.

はい, 適当にゲージ変換する「おまじない」は必要だったと思います.

聴講者. そうです, そうです.

こっち (α_0 のこと) を動かす方程式は余りやってないよね.

聴講者. ああ, そうですね^{*13}.

付録 A 超幾何と共形場再訪 –外伝– (by 渋川元樹)

参考までに, 「本伝」の山田先生のお話に出てきた渋川さんサイドの物語を「外伝」として少し述べておきます. 詳しくは“どっかの教科書” [VK] Chapter 3 他を参照. ただし中には“どっかの教科書”に書いてないこともあります. また察しの良い方ならばお気づきだと思いますが, この超幾何学校報告集に同じく収録されている金子穰一先生のレクチャーノート [金子] とも色々に関係があり, 参考になると思います.

以下, 特に断らない限り変数に出てくる $z, w \in \mathbb{C}$ は $|z|, |w| < 1$ と仮定します. 最初に一変数の登場人物を振り返っておきます. まず当たり前ですが基本的なベキ函数 (monomial)

$$\Phi_n(z) := z^n.$$

また $n!$ ですが, これは z^n を n 階微分して得られる Taylor 展開の係数の正規化定数とみなせ, 下降ベキ

$$P_n^{\text{ip}}(z) := \begin{cases} z(z-1)\cdots(z-n+1) & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

^{*13} その後, 伊藤さんをお願いして, そのあたりの結果を論文にまとめてもらいました. 伊藤さんありがとうございました. 興味のある方はそちら [Ito arXiv:1910.08393] も是非参照してください.

の特殊値

$$P_n^{\text{ip}}(n) := n(n-1) \cdots (n-n+1) = n!$$

に他なりません. そこでこの $n!$ で正規化した z^n を

$$\Psi_n(z) := \frac{z^n}{n!}$$

としておきます. それから次の 2 種類の二項級数

$$\begin{aligned} {}_1F_0 \left(\begin{matrix} \alpha \\ ; \end{matrix} ; z \right) &:= \sum_{n \geq 0} (\alpha)_n \Psi_n(z), \\ {}_1\mathcal{F}_0 \left(\begin{matrix} \alpha \\ ; \end{matrix} ; z; w \right) &:= \sum_{n \geq 0} (\alpha)_n \Psi_n(z) \Phi_n(w) = \sum_{n \geq 0} (\alpha)_n \Phi_n(z) \Psi_n(w) \end{aligned}$$

を考えます. もちろん今の場合は二項定理

$${}_1F_0 \left(\begin{matrix} \alpha \\ ; \end{matrix} ; z \right) = (1-z)^{-\alpha} \quad (9)$$

及び

$${}_1\mathcal{F}_0 \left(\begin{matrix} \alpha \\ ; \end{matrix} ; z; w \right) = {}_1F_0 \left(\begin{matrix} \alpha \\ ; \end{matrix} ; zw \right) \quad (10)$$

が成り立つことから

$${}_1\mathcal{F}_0 \left(\begin{matrix} \alpha \\ ; \end{matrix} ; z; w \right) = (1-zw)^{-\alpha}$$

となります. なので ${}_1\mathcal{F}_0$ と ${}_1F_0$ を分けて導入する必要はありませんが, 多変数では (9) は成り立ちますが, (10) は一般には成立しないので, 一変数の段階で既にこれらに別々の記号を与えておきます.

この記号を用いると Gauss の超幾何級数は

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; z \right) := \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \Psi_n(z),$$

その積分表示

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; z \right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} {}_1\mathcal{F}_0 \left(\begin{matrix} \beta \\ ; \end{matrix} ; x; t \right) dt$$

となることに注意しておきましょう.

これを多変数化します. r を正の整数, α, d を複素数として

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(r)} &:= \mathcal{P} = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0 \}, \\ \delta^{(r)} &:= \delta = (r-1, r-2, \dots, 2, 1, 0) \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

とします. また分割 μ, λ についての支配的順序 (dominant order) を

$$\begin{aligned} \mu \geq \lambda &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \geq \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2 \\ \vdots \\ \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \\ |\mu| := \mu_1 + \dots + \mu_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n =: |\lambda| \end{cases}, \\ \mu > \lambda &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu \geq \lambda \\ \mu \neq \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

で定め、更に分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し、単項型対称多項式 $m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z})$ を

$$m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z}) := \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{r,\lambda}} z_1^{\nu_1} \cdots z_r^{\nu_r},$$

$$\mathfrak{S}_{r,\lambda} := \{\sigma \cdot \lambda := (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(r)}) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_r\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{(r)}$$

により定義します。

任意の分割 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathcal{P}$ と複素数の r 組 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ について、ベキ函数の多変数類似にあたる **Jack 多項式 (Jack polynomials)** $P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})$ を以下の 2 条件を満たす $|\mathbf{m}|$ 次斉次多項式として定義します。

$$(1) \left(\sum_{j=1}^r z_j^2 \partial_{z_j}^2 + d \sum_{1 \leq j \neq l \leq r} \frac{z_j^2}{z_j - z_l} \partial_{z_j} \right) P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) \sum_{j=1}^r m_j (m_j - 1 - d(r - j)),$$

$$(2) P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = m_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) + \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{m}} c_{\mathbf{m}\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}).$$

また下降ベキの多変数化にあたる**補間 Jack 多項式 (interpolation Jack polynomials)** $P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})$ を次の 2 条件で定義します。

$$(1)^{\text{ip}} P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = 0, \quad \text{unless } \mathbf{k} \subset \mathbf{m} \in \mathcal{P}$$

$$(2)^{\text{ip}} P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) + (\text{lower terms}).$$

いずれも上記の条件で存在し、一意に定義されることが知られていますが、便宜上次のように正規化したものを考えます。

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}; \frac{d}{2})},$$

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})} = \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}).$$

これが一変数で導入した Φ, Ψ の多変数類似にあたるものです。更にここで用いた正規化定数は明示的に書けます。実際 [M] (10.20), [Ko] (4.8) より

$$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right) = \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \frac{j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1)}{m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1)}$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\left(\frac{d}{2}(j - i + 1)\right)_{m_i - m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j - i)\right)_{m_i - m_j}}. \quad (11)$$

ただし、 m'_j は分割 $\mathbf{m}$ の転置の成分です。また [Ko] の (7.4), (7.5) より

$$P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \left(m_i - j + 1 + \frac{d}{2}(m'_j - i) \right)$$

$$= \prod_{j=1}^r \left(\frac{d}{2}(r - j) + 1 \right) \prod_{m_j} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\left(\frac{d}{2}(j - i - 1) + 1\right)_{m_i - m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j - i) + 1\right)_{m_i - m_j}}. \quad (12)$$

ちなみに Jack 多項式はその normalization またパラメータに応じて色々な notations があり、混乱することがあります。代表的なものを以下に表にしてまとめておきましょう。順に簡単に解説すると、「Faraut-Korányi」は $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ で 1 に正規化した一番わかりやすいもので、とりあえず迷ったらこれを選択する (読み替える) のが無難です。「Stanley」は対称関数のノルムについての正規化をする流儀で、組合せ論や対称群の表現論 (Schur 多項式) における扱いと相性の良い流儀です。「Macdonald」は上で定義した original(?) の Jack 多項式で、Jack 多項式 P_λ を単項型対称多項式 $m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z})$ で展開したときの支配的順序についての leading term が 1 になるように正規化する流儀です。量子可積分系、あるいは Jack 多項式の q, t 変形に当たる Macdonald 多項式 ([M] もしくは本報告集収録の野海先生のレクチャーノート [野海] も参照) もこの流儀で扱われることが多いので、現在ではこの流儀が一番標準的かもしれません。「Kaneko」はここで解説する多変数特殊関数の文脈でよく見かける流儀で、この界限ではよく出てきます。「Shibukawa?」は「Kaneko」の亜種で $|\mathbf{m}|!$ 倍の違いしかありませんが、正規化定数の由来が補間 Jack の正規化定数になっています。元々は Faraut-Korányi [FK] において

$$(\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\binom{n}{r}_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$$

と書かれていたもので、対称錐上の調和解析における spherical Taylor 展開の正規化定数 (Fischer ノルム) に由来するものです。

	notation	special value at $\mathbf{z} = \mathbf{1}$
Faraut-Korányi	$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$	1 ([FK])
Stanley	$J_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}(\mathbf{z})$	$\left(\frac{2}{d}\right)^{ \mathbf{m} } \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \left(j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1)\right)$ ([S] Thm. 5.4)
Macdonald	$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)$	$\prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \frac{j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1)}{m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1)}$ ([M] VI (10.20))
Kaneko	$C_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}(\mathbf{z})$	$ \mathbf{m} ! \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \frac{(j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1))}{(m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1))(m_i - j + 1 + \frac{d}{2}(m'_j - i))}$ ([Ka] (18))
Shibukawa?	$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$	$\prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \frac{(j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1))}{(m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1))(m_i - j + 1 + \frac{d}{2}(m'_j - i))}$

表 1 Jack 多項式の正規化と表記

この中で「Stanley」だけがやや仲間外れで

$$J_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}(\mathbf{z}) = \left(\frac{2}{d}\right)^{|\mathbf{m}|} \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \left(m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1)\right) P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) \quad ([M] \text{ VI (10.22)})$$

となっていますが、この「Stanley」以外をまとめて書くと

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\binom{n}{r}_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{1}{P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)} P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{|\mathbf{m}|!} C_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}(\mathbf{z})$$

となります。

これらはいずれも難しい関数ですが、以下のような比較的綺麗に書ける例も知られています。

例 4. $r = 2$ の場合 任意の分割 $\mathbf{m} = (m_1, m_2) \in \mathcal{P}$ と複素数の対 $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ について,

$$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = z_1^{m_1} z_2^{m_2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m_1 + m_2, \frac{d}{2} \\ 1 - m_1 + m_2 - \frac{d}{2} \end{matrix}; \frac{z_2}{z_1}\right),$$

$$P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = (-1)^{m_1+m_2} (-z_1)_{m_2} (-z_2)_{m_1} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -m_1 + m_2, \frac{d}{2}, -m_1 + 1 - \frac{d}{2} + z_1 \\ 1 - m_1 + m_2 - \frac{d}{2}, -m_1 + 1 + z_2 \end{matrix}; 1\right).$$

更に

$$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right) = \frac{(d)_{m_1-m_2}}{\left(\frac{d}{2}\right)_{m_1-m_2}}, \quad P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = \frac{\left(\frac{d}{2} + 1\right)_{m_1} m_2! (m_1 - m_2)!}{\left(\frac{d}{2} + 1\right)_{m_1-m_2}},$$

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)_{m_1-m_2}}{(d)_{m_1-m_2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m_1 + m_2, \frac{d}{2} \\ 1 - m_1 + m_2 - \frac{d}{2} \end{matrix}; \frac{z_2}{z_1}\right),$$

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{\left(\frac{d}{2} + 1\right)_{m_1-m_2}}{\left(\frac{d}{2} + 1\right)_{m_1} (m_1 - m_2)! m_2!} z_1^{m_1} z_2^{m_2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m_1 + m_2, \frac{d}{2} \\ 1 - m_1 + m_2 - \frac{d}{2} \end{matrix}; \frac{z_2}{z_1}\right).$$

$d = 2$ の場合 任意の分割 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathcal{P}$ と複素数の r 組 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ について,

$$P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; 1) = s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) := \frac{\det\left(z_i^{m_j+r-j}\right)_{1 \leq i, j \leq r}}{\Delta(\mathbf{z})},$$

$$P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; 1) = \frac{\det\left(P_{m_j+r-j}^{\text{ip}}(z_i + r - i)\right)_{1 \leq i, j \leq r}}{\Delta(\mathbf{z})},$$

$$\Delta(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j).$$

ここで $s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})$ はよく知られた Schur 函数, $P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; 1)$ は shifted Schur 多項式である. 更に

$$P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}; 1) = s_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(j - i + 1)_{m_i - m_j}}{(j - i)_{m_i - m_j}},$$

$$P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; 1\right) = \prod_{j=1}^r (r - j + 1)_{m_j} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(j - i)_{m_i - m_j}}{(j - i + 1)_{m_i - m_j}},$$

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(2)}(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(j - i)_{m_i - m_j}}{(j - i + 1)_{m_i - m_j}} s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}),$$

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(2)}(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^r \frac{1}{(r - j + 1)_{m_j}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(j - i + 1)_{m_i - m_j}}{(j - i)_{m_i - m_j}} s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}),$$

$$\Psi_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{w}) = \frac{1}{(r)_{\mathbf{n}}} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}).$$

次に上昇ベキの多変数類似

$$(\alpha)_{\mathbf{n}} := \prod_{j=1}^r \left(\alpha - \frac{d}{2}(j-1)\right)_{n_j}$$

を用いて, 二項級数の多変数化

$${}_1F_0^{(d)}\left(\begin{matrix} \alpha \\ \end{matrix}; \mathbf{z}\right) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{P}} (\alpha)_{\mathbf{n}} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}),$$

$${}_1\mathcal{F}_0^{(d)}\left(\begin{matrix} \alpha \\ \end{matrix}; \mathbf{z}; \mathbf{w}\right) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{P}} (\alpha)_{\mathbf{n}} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{w}) = \sum_{n \geq 0} (\alpha)_{\mathbf{n}} \Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{w})$$

を考えます. このとき二項定理 (9) の多変数類似にあたる

$${}_1F_0^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha \\ \mathbf{z} \end{matrix} \right) = \prod_{j=1}^r (1 - z_j)^{-\alpha}$$

は成立しますが (右辺は d に寄らない), たとえば (10) の多変数類似にあたるようなものは一般には成立せず, どちらか片方の変数が全て等しい場合にのみ

$${}_1\mathcal{F}_0^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha \\ (z, \dots, z); \mathbf{w} \end{matrix} \right) = {}_1F_0^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha \\ z\mathbf{w} \end{matrix} \right) = \prod_{j=1}^r (1 - zw_j)^{-\alpha} \quad (13)$$

が成立します. ただし, $\alpha = \frac{rd}{2}$ のときには

$${}_1\mathcal{F}_0^{(d)} \left(\begin{matrix} \frac{rd}{2} \\ \mathbf{z}; \mathbf{w} \end{matrix} \right) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{P}} \left(\frac{rd}{2} \right)_{\mathbf{n}} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{w}) = \prod_{i,j=1}^r (1 - z_i w_j)^{-\frac{d}{2}}$$

となることが知られています (Jack 多項式の Cauchy 型再生核公式).

更に Gauss の超幾何 ${}_2F_1$ の多変数類似として

$${}_2F_1^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \mathbf{z} \right) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{P}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{n}} (\beta)_{\mathbf{n}}}{(\gamma)_{\mathbf{n}}} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z})$$

を導入します. 先の二項級数と併せて, やはり比較的綺麗に書ける例を挙げてみると次のようになります.

例 5. $r = 2$ の場合 複素数の対 $\mathbf{z} = (z_1, z_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ について,

$$\begin{aligned} {}_1\mathcal{F}_0^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha \\ \mathbf{z}; \mathbf{w} \end{matrix} \right) &= (1 - z_1 w_1)^{-\alpha} (1 - z_2 w_2)^{-\alpha} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{d}{2}, \alpha \\ d \end{matrix}; -\frac{(z_1 - z_2)(w_1 - w_2)}{(1 - z_1 w_1)(1 - z_2 w_2)} \right), \\ {}_2F_1^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \mathbf{z} \right) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F_4 \left(\alpha; \beta; \gamma - \frac{d}{2}, \alpha + \beta - \gamma + 1; z_1 z_2, (1 - z_1)(1 - z_2) \right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} [(1 - z_1)(1 - z_2)]^{\gamma - \alpha - \beta} \\ &\quad \cdot F_4 \left(\gamma - \alpha; \gamma - \beta; \gamma - \frac{d}{2}, \gamma - \alpha - \beta + 1; z_1 z_2, (1 - z_1)(1 - z_2) \right). \end{aligned}$$

ただし, F_4 は Appell の超幾何関数

$$F_4(a; b; c, c'; x, y) := \sum_{m, n \geq 0} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n}}{(c)_m (c')_n m! n!} x^m y^n.$$

$d = 2$ の場合 複素数の r 組 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ について,

$$\begin{aligned} {}_1\mathcal{F}_0^{(2)} \left(\begin{matrix} \alpha \\ \mathbf{z}; \mathbf{w} \end{matrix} \right) &= \prod_{j=1}^r \frac{(r-j)!}{(\alpha - r + 1)_{r-j}} \frac{\det((1 - z_i w_j)^{-\alpha + r - 1})_{1 \leq i, j \leq r}}{\Delta(\mathbf{z}) \Delta(\mathbf{w})}, \\ {}_2F_1^{(2)} \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \mathbf{z} \right) &= \prod_{j=1}^r \frac{(c - j - r + 2)_{r-1}}{(b - r + 1)_{r-j} (c - a - r + 1)_{r-j}} \\ &\quad \cdot \frac{r!}{\Delta(\mathbf{z})} \det \left({}_2F_1 \left(\begin{matrix} a - i + 1, b - r + 1 \\ c - i - r + 2 \end{matrix}; z_j \right) \right)_{i, j=1, \dots, r}. \end{aligned}$$

ここで $s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})$ はよく知られた Schur 多項式, $P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; 1)$ は shifted Schur 多項式である.

この積分表示は、一変数の時の類似で次のようになります。

$$\begin{aligned}
{}_2F_1^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \mathbf{z} \right) &= \frac{\Gamma^{(d)}(\gamma)}{\Gamma^{(d)}(\alpha)\Gamma^{(d)}(\gamma-\alpha)} \\
&\cdot \int_{[0,1]^r} \prod_{j=1}^r t_j^{\alpha-1-\frac{d}{2}(r-1)} (1-t_j)^{\gamma-\alpha-1-\frac{d}{2}(r-1)} {}_1F_0^{(d)} \left(\begin{matrix} \beta \\ \mathbf{z}; \mathbf{t} \end{matrix} \right) \prod_{1 \leq i \neq j \leq r} |t_i - t_j|^d dt_1 \cdots dt_r,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\Gamma^{(d)}(\alpha) := (2\pi)^{\frac{dr(r-1)}{4}} \prod_{j=1}^r \Gamma \left(\alpha - \frac{d}{2}(j-1) \right)$$

を持ちます。

Dotsenko-Fateev あるいは AGT との関連で大事なものは

$$z = z_1 = \cdots = z_r, \quad z = (z, \dots, z)$$

の場合です。このときは (13) より積分表示 (14) は

$$\begin{aligned}
{}_2F_1^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; z \right) &= \frac{\Gamma^{(d)}(\gamma)}{\Gamma^{(d)}(\alpha)\Gamma^{(d)}(\gamma-\alpha)} \\
&\cdot \int_{[0,1]^r} \prod_{j=1}^r t_j^{\alpha-1-\frac{d}{2}(r-1)} (1-t_j)^{\gamma-\alpha-1-\frac{d}{2}(r-1)} (1-zt_j)^{-\beta} \prod_{1 \leq i \neq j \leq r} |t_i - t_j|^d dt_1 \cdots dt_r.
\end{aligned}$$

右辺の積分は明らかに Dotsenko-Fateev ですが、左辺の和の方は Jack 多項式が

$$\Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(z) = z^{n_1 + \cdots + n_r}$$

のように monomial に退化することから

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1^{(d)} \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; z \right) \\
&= \sum_{0 \leq n_r \leq \cdots \leq n_1} \prod_{j=1}^r \frac{(\alpha - \frac{d}{2}(j-1))_{n_j} (\beta - \frac{d}{2}(j-1))_{n_j}}{(\frac{d}{2}(r-j)+1)_{n_j} (\gamma - \frac{d}{2}(j-1))_{n_j}} \\
&\cdot \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(\frac{d}{2}(j-i+1))_{n_i-n_j} (\frac{d}{2}(j-i)+1)_{n_i-n_j}}{(\frac{d}{2}(j-i))_{n_i-n_j} (\frac{d}{2}(j-i-1)+1)_{n_i-n_j}} z^{n_1 + \cdots + n_r} \\
&= \sum_{0 \leq m_1, \dots, m_r} \prod_{j=1}^r \frac{(\alpha - \frac{d}{2}(j-1))_{\sum_{k=1}^{r+1-j} m_{r-k+1}} (\beta - \frac{d}{2}(j-1))_{\sum_{k=1}^{r+1-j} m_{r-k+1}}}{(\frac{d}{2}(r-j)+1)_{\sum_{k=1}^{r+1-j} m_{r-k+1}} (\gamma - \frac{d}{2}(j-1))_{\sum_{k=1}^{r+1-j} m_{r-k+1}}} \\
&\cdot \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(\frac{d}{2}(j-i+1))_{\sum_{k=j+1}^i m_k} (\frac{d}{2}(j-i)+1)_{\sum_{k=j+1}^i m_k}}{(\frac{d}{2}(j-i))_{\sum_{k=j+1}^i m_k} (\frac{d}{2}(j-i-1)+1)_{\sum_{k=j+1}^i m_k}} z^{1m_1 + 2m_2 + \cdots + rm_r}
\end{aligned}$$

を得ます^{*14}。

ここで $r=2$ としたものが、⁸「本伝」の冒頭で山田先生がおっしゃっていたものです。

以上で述べたのはいずれも 1 つの分割でラベル付けられた多変数超幾何の話でしたが、

^{*14} これはネクラソフ関数の truncation と合致すると思われる。これについては、 q 版も含め、Nobukawa-Shibukawa-Yamada で研究中です。

Nekrasov 関数はこうした昔から知られていた多変数超幾何の 2 つの分割の組への自然な拡張になっているというのが「本伝」のメインテーマの 1 つなのでした (超幾何の歴史が, また 1 ページ...).

参考文献

- [FK] J. Faraut and A. Korányi : *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, (1994).
- [Ka] J. Kaneko : *Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), 1086–1110.
- [金子] 金子讓一述, 渋川元樹記 : セルバーグ積分, 超幾何系, 組合せ論零点定理, 本報告集収録.
- [Ko] T. H. Koornwinder : *Okounkov's BC-type interpolation Macdonald polynomials and their $q = 1$ limit*, Sémin. Lothar. Combin, **72** (2014/15), 27pp.
- [M] I. G., Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, (1995).
- [野海] 野海正俊述, 渋川元樹-宮永愛子記 : *Macdonald 多項式 –アフィン Hecke 環からのアプローチ–*, 本報告集収録.
- [S] R. Stanley : *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*, Adv. Math., **77-1** (1989) 76–115.
- [VK] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk: *Representation of Lie Groups and Special Functions -Recent Advances-*, Kluwer Academic Publishers, (1995).