Sendra-Winkler の有理曲線パラメトライズ・アルゴリズムの高速化とその実装

藤堂秀平, 神戸大学自然科学研究科

2005 年 2 月 2 日. 改訂版 2005 年 9 月 10 日

Title: An Acceleration method of the Parametrization Algorithm of Rational Curves of Sendra-Winkler and its Implementation
Author: Shuhei Todo
Submission: February 2, 2005. Revised: September 10, 2005.
English Summary: A parametrization algorithm of rational curves is given by Sendra and Winkler [1], [2]. We will give an acceleration method for Sendra-Winkler's algorithm. The main point of the acceleration is a heuristic method to find fixed points to obtain a rational map, by which the given curve is reduced to a quadratic curve. We implement our method in Risa/Asir and examine timing data. Our implementation is published in the asir-contrib project [3].

1 はじめに

代数的閉体 K 上で定義された既約射影代数曲線 $C : F(x, y, z) = 0 \quad (n = deg(F))$ の種数 $g(C)$ を

$$g(C) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum_{p \in N} r_p(r_p - 1).$$

で定義する。ただし、r_p は点 p における重複度を表し、和は隣接点もこめてとらなければならない ([1])。$g(C)$ は 0 以上の整数である。代数曲線 C は種数 $g(C) = 0$ のとき、またそのときに限り K 上の多項式 $p(t), q(t), r(t)$ によって $(x : y : z) = (p(t) : q(t) : r(t)), t \in K$ とパラメーター表示され、$(x : y : z) \in C$ と $t \in K$ が有限個の点を除いて一対一に対応することが知られている。

種数 0 の曲線、すなわち有理曲線を、有理関数によってパラメトライズする問題は、曲線上の有理点を求める問題とも関連して 19 世紀後半に Max Noether[6]、Hilbert-Hurwitz[7]、Poincare[8] 等によって取り扱われた。1990

年代、Sendra -Winkler[1][2] は体 K が計算機上で取り扱える場合（例えば K が代数的数全体のなす体 $\overline{\mathbb{Q}}$ のとき）、与えられた既約斉次多項式 $F(x,y,z)$ から対応する代数曲線の種数を計算し、もしそれが 0 ならば、この曲線をパラメトライズする多項式の組 $p(t),q(t),r(t)$ を実際に計算するための実用的なアルゴリズムを考案した。

著者はこのアルゴリズムを Risa/Asir 上に実装し実験を行った結果、このアルゴリズムをそのまま使うだけでは、次数が 6 程度の曲線に対しても相当の計算時間がかかることが分かった。ボトルネックは曲線の特異点の座標を計算する部分と随伴曲線から適当な双有理写像をつくる部分にあるが、後者に関しては、Sendra-Winkler の一般論を用いなくても、いくつかのケースはヒューリスティックな方法で計算時間を短くすることができた。この方法は外見上はかなり限られた状況の下でしか適用できないように見える。しかし、４次程度の多項式を分母分子に持つ 2 つの有理関数からパラメーターを消去して、ランダムに作った有理曲線や、いくつかの論文に登場する有名な有理曲線にこれらの方法を適用したところ、ほとんどの場合この方法は有効であることを見た。以下の議論では、$K=\overline{\mathbb{Q}}$ とし、取り扱う既約曲線 $C:F(x,y,z)=0$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義されたものを考える。

2　ある条件が満たされる場合の高速アルゴリズム

$F(x,y,z)$ を n 次既約斉次多項式とする。m 次の斉次多項式 $A(x,y,z)\in K[x,y,z]$ によって定義される曲線 $C':A(x,y,z)=0$ が既約曲線 $C:F(x,y,z)=0$ 上の重複度 r の点（隣接点も含めて）を少なくとも重複度 $r-1$ に持つとき、曲線 C' あるいはその定義多項式を曲線 C の m 次の adjoint という ([1])。$g(C)=0$ のとき、以下の事実が成立する。

命題 1 ([2])

1. $n-1$ 個の $n-2$ 次の *adjoint*、$A_0(x,y,z),A_1(x,y,z),\ldots,A_{n-2}(x,y,z)$ が存在して、$n-2$ 次の *adjoint* 全体は

$$c_0A_0(x,y,z)+c_1A_1(x,y,z)+\ldots+c_{n-2}A_{n-2}(x,y,z),\ (c_i\in K).$$

   と表される。ここで各 $A_i(x,y,z)$ は $F(x,y,z)$ から有理的に計算できる $\mathbb{Q}$ 上の斉次多項式である。同様にして $n-1$ 次の *adjoint* が定義でき、$2n-1$ 個の基底が存在する。

2. 曲線 C 上の特異点ではない、異なる $e(\leq n-2)$ 個の点を通る $n-2$ 次の *adjoint* 全体は

$$c_0B_0(x,y,z)+\ldots+c_{n-2-e}B_{n-2-e}(x,y,z),\ (c_i\in K).$$

と表される。e 個の固定点が

$$\{(p(t):q(t):r(t));\lambda(t)=0\} \quad (p(t),q(t),r(t),\lambda(t)\in\mathbb{Q}[t],\lambda(t)\text{は既約}) \tag{1}$$

というタイプの点の和集合によって表されているとき、$B_j(x,y,z)$ は $\mathbb{Q}$ 上の斉次多項式で、$A_i(x,y,z)$ から有理的に計算できる。

ここではこの命題を証明する代わりに、$F(x,y,z)=(x^2+y^2)^3-4x^2y^2z^2$ によって定義される曲線 C を例にとって、C の 4 次の adjoint を計算してみよう。

そのためにはまず曲線 C の特異点 $S(C)$ を計算しなければならない。方程式 $F_x=F_y=F_z=0$ を終結式（または Gröbner 基底）を利用して解けば、

$$S(C)=\{(0:0:1)\}\cup\{(t:1:0);t^2+1=0\}$$

が出せる。次に、それぞれの特異点を適当な射影変換で原点にうつした後、二次変換で特異点を分解する ([4],Chap.3,Section7)。原点 $(0:0:1)$ は重複度 4 の通常でない特異点で、二次変換による分解で重複度 2 の通常特異点 (node) が二つ現れる。二つ目のものは重複度 2 の通常でない特異点 (cusp) で、二次変換で分解すると通常点になる。したがって、隣接点も含めれば、C は重複度が 4,2,2,2,2 の合計 5 つの特異点を持ち、$g(C)=0$ である。曲線 $G(x,y,z)=0$ が $(0:0:1)$ を分解することによって出てくる二つの node を通るということは、実は $G(x,y,z)=0$ が原点で x 軸、y 軸に接するということと同値である。よって、4 次の一般多項式

$$G(x,y,z)=\sum_{i+j+k=4}c_{ijk}x^iy^jz^k$$

が C の adjoint になるための条件は

$$\begin{gathered}G_{xx}(0,0,1)=G_{xy}(0,0,1)=G_{xz}(0,0,1)\\=G_{yy}(0,0,1)=G_{yz}(0,0,1)=G_{zz}(0,0,1)\\c_{103}=c_{013}=0,\\t^2+1\mid G(t,1,0)\end{gathered}$$

である。これらの関係式を用いて $G(x,y,z)$ を書き直せば、C の adjoint の一般形

$$G(x,y,z)=c_0(x^4+x^2y^2)+c_1(x^3y+xy^3)+c_2(y^4-x^4)+c_3x^2yz+c_4xy^2z$$

を得る。

Sendra-Winkler の方法 ([2]) により有理曲線をパラメトライズするために我々が必要とするのは、固定点の個数 $e=n-3$（あるいは $e=n-4$）の場

合の $B_0(x,y,z)$,
$B_1(x,y,z)$ (あるいは $B_0(x,y,z), B_1(x,y,z), B_2(x,y,z)$) である。最初の目標は、これらの多項式を効率よく計算することである。B_0, B_1 あるいは B_0, B_1, B_2 から曲線のパラメーター表示を得る方法は次節で見る。$n-1$ 次の adjoint に対しても、$e = 2n-3$, または $2n-4$ として、同様の多項式系が得られ、これらが有用になることもある（ただし、次数が 1 大きくなる分だけ計算量も増える)。以下の場合、固定点 (1) が直ちに得られるので、A_i から B_j を求めることが非常に容易になる。($n = 3, 4$ のときは A_i がすでに求めるべき多項式 B_j になっていることに注意。)

方法 1　(場合分けによる方法)

1. 重複度 3 の有理点 p がある場合。この場合 p を通る直線 L を適当に選べば L と C は p 以外で $n-3$ 個の交点を持つ。これらの点を固定点にすれば $n-2$ 次の adjoint の基底 $A_i(i = 0, 1, \ldots, n-2)$ から B_0, B_1（$n-2$ 次）を得る。

2. 重複度 4 の有理点がある場合。あるいは、さらに一般に $n-r \mid n-4$ となるような重複度 r の有理点 p がある場合。p を通る直線 L を適当に選べば L と C は p 以外で $n-r$ 個の交点を持つ。この操作を $(n-4)/(n-r)$ 回繰り返せば $n-4$ 個の点を得る。これらの点を固定点にすれば $n-2$ 次の adjoint の基底 $A_i(i = 0, 1, \ldots, n-2)$ から B_0, B_1, B_2（$n-2$ 次）を得る。

3. $n-r \mid 2n-3$ となるような重複度 r の有理点 p がある場合。p を通る直線 L を適当に選べば L と C は p 以外で $n-r$ 個の交点を持つ。この操作を $(2n-3)/(n-r)$ 回繰り返せば $2n-3$ 個の点が得られ、これらの点を固定点にすれば $n-1$ 次の adjoint の基底 $A_i(i = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ から B_0, B_1（$n-1$ 次）を得る。

4. $n-r \mid 2n-4$ となるような重複度 r の有理点がある場合。3. と同様、$n-1$ 次の adjoint の基底 $A_i(i = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ から B_0, B_1, B_2（$n-1$ 次）を得る。

上の 4 つは非常に特殊なケースに見えるが、4 次程度の多項式を分母分子に持つ 2 つの有理関数からパラメーターを消去して、ランダムに作った有理曲線や、いくつかの論文に登場する有名な有理曲線のほとんどは、これらのうちのどれかに該当することを実験的に確かめた。先ほどの例の場合は、原点が重複度 4 の有理点になっているので、直線 L を $y-x=0$ として、固定点 $\{(t/2 : 0 : 1); t^2-2=0\}$ が得られる。この二点を通る adjoint の一般形は

$$c_0(-x^4+x^3y-x^2y^2+xy^3)+c_1(-x^4+y^4)+c_2(xy^2z-x^2yz)$$

である。

例

$$
\begin{aligned}
F_1 &= (4y^2+4z^2)x^4+8z^3x^3+8z^2y^2x^2-8z^5x+4z^4y^2-4z^6\\
F_2 &= (2y^2+4zy+4z^2)x^3+(-4z^2y+4z^3)x^2+(6z^2y^2-4z^3y-4z^4)x\\
&\quad +4z^4y-4z^5\\
F_3 &= (8y^5-120z^3y^2-360z^4y-240z^5)x^2\\
&\quad +(-14zy^5-41z^2y^4-118z^3y^3-210z^4y^2-139z^5y-13z^6)x\\
&\quad +3z^2y^5+9z^3y^4+13z^4y^3\\
F_4 &= (y^4+8zy^3-10z^2y^2-8z^3y-7z^4)x^5\\
&\quad +(-4zy^4+34z^2y^3-18z^3y^2-18z^4y-10z^5)x^4\\
&\quad +(-17z^2y^4+56z^3y^3+3z^4y^2-26z^5y-12z^6)x^3\\
&\quad +(-25z^3y^4+36z^4y^3+29z^5y^2-8z^6y-8z^7)x^2\\
&\quad +(-17z^4y^4+3z^5y^3+19z^6y^2+8z^7y)x-5z^5y^4-6z^6y^3-2z^7y^2\\
F_5 &= 9x^5+4yx^4+(9y^2+6z^2)x^3\\
&\quad +(4y^3+13/3z^2y)x^2+(9/4y^4+13/4z^2y^2+z^4)x+y^5+2z^2y^3+z^4y\\
F_6 &= (x^2+y^2)^3-4x^2y^2z^2\\
F_7 &= 64x^8-128z^2x^6+80z^4x^4-16z^6x^2+16z^2y^6-24z^4y^4+9z^6y^2\\
&\quad (\text{リサージュ曲線 } x=\sin(3\theta), y=\sin(4\theta))\\
F_8 &= 256x^{10}-640z^2x^8+560z^4x^6-200z^6x^4+25z^8x^2+4z^6y^4-4z^8y^2\\
&\quad (\text{リサージュ曲線 } x=\sin(2\theta), y=\sin(5\theta))\\
F_9 &= (12y^3+20zy^2+10z^2y+2z^3)x^3\\
&\quad +(12zy^3+2z^2y^2-3z^3y-z^4)x^2-2z^3y^2x+z^3y^3
\end{aligned}
$$

上記場合分けによる方法と SW の一般論の計算時間の比較 (Sec)

F_i	方法 1 の場合分け番号	方法 1	SW 一般論
F_1	2	0.21	1.121
F_2	1	0.14	1 時間以上
F_3	1	0.781	1 時間以上
F_4	2	1.732	1 時間以上
F_5	適用外	—-	2.423
F_6	2	0.241	1.142
F_7	4	11.07	1 時間以上
F_8	4	12.82	1 時間以上
F_9	1	0.311	0.921

上記タイミングデータは次の環境での値である.

```
CPU: Intel(R) Pentium(R) III CPU family
   1133MHz (1129.43-MHz 686-class CPU)
real memory  = 2147418112 (2097088K bytes)
```

3　双有理変換に関する計算

$C : F(x,y,z) = 0$ を種数 0 の既約代数曲線とする。固定点の個数を $e = n-4$ として B_0, B_1, B_2 が得られる場合、曲線 C をパラメトライズするために、次のような有理変換

$$\varphi : \mathbb{P}^2(K) \ni (x : y : z) \longmapsto (B_0(x,y,z) : B_1(x,y,z) : B_2(x,y,z)) \in \mathbb{P}^2(K)$$

を定義する。$B_0(x,y,z) = B_1(x,y,z) = B_2(x,y,z) = 0$ を満たす点は φ の不確定点である。C 上にある不確定点（有限個）を取り除いたものを $\dot{C}$ と書く。このとき次の良く知られた事実が成立する。

命題 2

1. $\varphi(\dot{C})$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された二次曲線から有限個の点を除いた集合になる。
2. φ は $\dot{C}$ から $\varphi(\dot{C})$ への単射である。
3. $\varphi(\dot{C})$ 上定義された有理変換 ψ で、$\psi \circ \varphi$ が $\dot{C}$ 上で恒等写像となるものが存在する。

したがって、問題は二次曲線をパラメトライズする問題に帰着される。

これらの事実を証明している文献が見当たらないので、ここに証明を載せておく。まず 1, 2 を証明しよう。1 は『拡張定理』および『閉包定理』([5], Chap.3 および p.376-383) から従う（あるいは [4], p142, Theorem6.2 も参照)。2 を証明するために、$\dot{C}$ 上に $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$ を満たす異なる二点 $p_i = (x_i : y_i : z_i) \quad (i = 1, 2)$ があると仮定する。C 上に固定点、p_1, p_2 以外から一点 $p_0 = (x_0 : y_0 : z_0)$ をとり、$\lambda_0 B_0(x_j, y_j, z_j) + \lambda_1 B_1(x_j, y_j, z_j) + \lambda_2 B_2(x_j, y_j, z_j) = 0 \quad (j = 0, 1)$ を満たすように、すべてが 0 ではない $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ を選ぶ。このとき C と $\lambda_0 B_0(x,y,z) + \lambda_1 B_1(x,y,z) + \lambda_2 B_2(x,y,z) = 0$ は p_0, p_1, p_2 を交点にもち、交点数は少なくとも

$$\sum_{p \in N} r_p(r_p - 1) + (n-4) + 3 = (n-1)(n-2) + (n-2) + 1 = n(n-2) + 1 > n(n-2)$$

となって、Bezout の定理に矛盾する。故に φ は単射。

3 でいう ψ は、次の構成的証明によって具体的に計算できる: 曲線 C の次数を n とし、$m = n+2$ とおく。$3(m+1)-1$ 個の未定係数 $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m, c_0, \ldots, c_{m-1}$

を含む斉次多項式

$$\begin{aligned} H(x,y,z) &= \{(a_0B_1^m+\ldots+a_{m-1}B_1B_0^{m-1}+a_mB_0^m)B_0 \\ &\quad +(b_0B_1^m+\ldots+b_{m-1}B_1B_0^{m-1}+b_mB_0^m)B_2\}z \\ &\quad +(c_0B_1^m+\ldots+c_{m-1}B_1B_0^{m-1}+B_0^m)B_0x \end{aligned} \tag{2}$$

を作る。曲線 C と曲線 $H(x,y,z)=0$ は、係数 a_i,b_i,c_i が何であっても、C の特異点と $n-4$ 個の固定点において合計

$$(m+1)\{\sum_{p\in N} r_p(r_p-1)+(n-4)\}=(m+1)\{(n-1)(n-2)+(n-4)\} \tag{3}$$

の交点数をもつ（[4],p.110 にある交点数の定義、また特に p.113, Theorem 5.9 参照)。C 上に固定点以外から、$3(m+1)-2$ 個の点を選び、曲線 $H(x,y,z)=0$ がこれらの点を通るように係数 a_i,b_i,c_i を定めることができる。このとき (3) と合わせると、2 曲線の交点数は少なくとも

$$\begin{aligned} & (m+1)\{(n-1)(n-2)+(n-4)\}+3(m+1)-2 \\ = \ & (m+1)\{(n-1)(n-2)+n-1\}-2 \\ = \ & (m+1)\{n(n-2)+1\}-2 \\ = \ & (m+1)n(n-2)+n+1 \end{aligned}$$

になる。一方

$$deg(F)deg(H)=n\{(m+1)(n-2)+1\}=(m+1)n(n-2)+n$$

であるから、Bezout の定理より $H(x,y,z)$ は恒等的に 0 である。有理式

$$\frac{x}{z}=-\frac{(a_0u^m+\ldots+a_{m-1}uw^{m-1}+a_mw^m)w+(b_0u^m+\ldots+b_{m-1}uw^{m-1}+b_mw^m)v}{(c_0u^m+\ldots+c_{m-1}uw^{m-1}+w^m)w}$$

と、(2) の右辺の最後の x を y に置き換えた多項式から同様の方法で得られる有理式

$$\frac{y}{z}=-\frac{(a'_0u^m+\ldots+a'_{m-1}uw^{m-1}+a'_mw^m)w+(b'_0u^m+\ldots+b'_{m-1}uw^{m-1}+b'_mw^m)v}{(c'_0u^m+\ldots+c'_{m-1}uw^{m-1}+w^m)w}$$

から、求めるべき有理変換

$$\psi:\varphi(\dot{C})\ni(u:v:w)\longmapsto(x:y:z)\in\mathbb{P}^2(K)$$

が得られる。

特異点と固定点以外から選ぶ $3(m+1)-2$ 個の点は次のようにしてとるとよい:
直線 L をランダムにとり、C と L の交点を (1) の形の和集合で表す。$H(x,y,z)$

が $\{(p(t):q(t):r(t));\lambda(t)=0\}$ を零点にもつための条件は、$H(p(t),q(t),r(t))$ を $\lambda(t)$ で割った余り $R(t;a_i,b_i,c_i)$ が 0 になることであり、R の t の冪の係数より a_i,b_i,c_i に関する $\mathbb{Q}$ 上の連立一次方程式ができる。適当な数だけ直線をとってこの操作を続ければ、目的の a_i,b_i,c_i を求めることができる（それらは $\mathbb{Q}$ の元である）。もちろん、$\{(p(t):q(t):r(t));\lambda(t)=0\}$ が固定点であるときは、これらを除外する。

ψ は Gröbner 基底を用いても計算できる。そのためには、$\mathbb{Q}[x,y,u,v,k]$ のイデアル $< B_0(x,y,1)u-B_1(x,y,1), B_0(x,y,1)v-B_2(x,y,1), kB_0(x,y,1)-1 >$ から x,y,k を消去したイデアルの Gröbner 基底を計算すればよい。

これら二つの方法での計算時間を比べてみると、次の表になる。

未定係数法 vs. Gröbner 基底 (Sec)

F_i	未定係数法	Gröbner 基底
F_1	0.541	0.01
F_4	4.897	1 時間以上
F_6	0.301	0.03

B_i が簡単なときは両者に大差はないが、B_i が少し長い式になると Gröbner 基底による計算では膨大な時間がかかってしまい、未定係数法のほうが格段に有効である。

固定点の個数が $e=n-3$ で、$B_0(x,y,z),B_1(x,y,z)$ が得られる場合、問題はより簡単になる。$B_0(x,y,z)+tB_1(x,y,z)=0$ と $F(x,y,z)=0$ は、固定点以外にちょうど一つ、パラメーター t に依存する交点 $p_t=(x(t):y(t):z(t))$ をもち、t の値を適当に選ぶことによって、p_t が任意の点（有限個を除く）になるようにできる。$x(t),y(t),z(t)\in\mathbb{Q}[t]$ となることが証明され、曲線 C が $(x:y:z)=(x(t):y(t):z(t))$, $t=B_0(x,y,z)/B_1(x,y,z)$ とパラメトライズされる。$B_0(x,y,z),B_1(x,y,z)\in\mathbb{Q}[x,y,z]$ が有理的に計算できる場合は、以上のようにして曲線 C をパラメトライズするのである。通常、多項式 $x(t),y(t),z(t)$ を計算するのに終結式が用いられる（終結式による方法）が、これらの多項式を上記の未定係数法によっても求めることができる:

$$\begin{aligned} H(x,y,z) &= (a_0B_1^n+a_1B_1^{n-1}B_0+\ldots+a_nB_0^n)z \\ &\quad +(b_0B_1^n+b_1B_1^{n-1}B_0+\ldots+b_nB_0^n)x \end{aligned} \tag{4}$$

とおき、曲線 $H(x,y,z)=0$ が曲線 C の特異点と $n-3$ 個の固定点以外の $2n-1$ 個の点を通るように、係数 a_i,b_i に全てが 0 でない値を与える。この時、2 曲線 $F(x,y,z)=0, H(x,y,z)=0$ の交点数の合計は、少なくとも

$$\begin{aligned} & n[(n-1)(n-2)+(n-3)]+2(n+1)-1 \\ = \;& n[(n-1)(n-2)+(n-3)+2]+1 \\ = \;& n[n(n-2)+1]+1 \end{aligned}$$

になる。これは

$$deg(F)deg(H) = n[n(n-2)+1]$$

よりも大きい。これから、上の議論と全く同様にして

$$\frac{x}{z} = -\frac{a_0 + a_1(-t) + \cdots + a_n(-t)^n}{b_0 + b_1(-t) + \cdots + b_n(-t)^n}$$

を得る ($t = -B_1(x,y,z)/B_0(x,y,z)$)。これと、(4) の右辺の最後の x を y に変えて、同様の方法で得られる有理式

$$\frac{y}{z} = -\frac{a'_0 + a'_1(-t) + \cdots + a'_n(-t)^n}{b'_0 + b'_1(-t) + \cdots + b'_n(-t)^n}$$

を合わせれば、曲線 C をパラメトライズできる。

以上、$n-2$ 次の adjoint から得られる多項式系を用いたが、$n-1$ 次の adjoint から得られる多項式系を用いても全く同様の議論が行える。

未定係数法 vs. 終結式 (Sec)

F_i	未定係数法	終結式
F_2	0.1	0.01
F_3	0.331	0.35
F_9	0.14	0.06

上の表のように、大抵の場合、未定係数法は終結式にわずかに負ける。それでも Gröbner 基底による計算より計算時間はずっと短い。

最後に、前節の例で出した曲線 $C : (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2z^2 = 0$ をパラメトライズしてみよう。

$$B_0 = -x^4 + x^3y - x^2y^2 + xy^3, \quad B_1 = -x^4 + y^4, \quad B_2 = xy^2z - x^2yz$$

であった。有理変換 φ によって C は、二次曲線 $-2u^2 + 2uv - v^2 + 4w^2 = 0$ に変換される。この計算方法は [2] にある。この二次曲線は有理点 $(0:2:1)$ をもつので、$\mathbb{Q}$ 上の有理関数でパラメトライズできる。結局、C は

$$\begin{aligned}
&(x:y:z)\\
&= (-16t^5 - 40t^4 - 32t^3 - 8t^2 :\\
&\quad 16t^4 + 32t^3 + 20t^2 + 4t :\\
&\quad 8t^6 + 24t^5 + 36t^4 + 32t^3 + 18t^2 + 6t + 1),
\end{aligned}$$

$$t = \frac{-x^4 + yx^3 - y^2x^2 + y^3x}{x^4 - 2zyx^2 + 2zy^2x - y^4}$$

というパラメーター表示をもつ。

4 実装

我々の実装は、Risa/Asir Contrib の代数曲線論用パッケージ上 ([3]) で試すことができる。有理曲線のパラメトライゼーションを取り扱ったパッケージとしては、RISC-Linz で開発された CASA がある。CASA は Maple 用パッケージとして配布されている。我々のパッケージが CASA から改良された点は次の通り。

1. CASA の実装では、非常に大きな係数をもつ有理関数が返ってくる。われわれのものは、2 節で述べた方法によって、多くの例に対して係数が比較的小さい。したがって計算時間も短縮されている。
2. $\mathbb{Q}$ 上の有理関数によってパラメトライズできる場合は、必ずこのような関数を返す。したがって曲線上の有理点を求めるのにも使える。CASA では、こうはいかない。

参考文献

[1] J.F.S̃endra, F.W̃inkler, Symbolic Parametrization of Curves, Journal of Symbolic Computation **12**, (1991), 607-631.

[2] J.F.S̃endra, F.W̃inkler, Parametrization of Algebraic Curves over Optimal Field Extensions, Journal of Symbolic Computation **23**, (1997), 191-207.

[3] OpenXM; http://www.openxm.org,
`OpenXM/src/asir-contrib/packages/src/todo_parametrize`,
`OpenXM/src/asir-contrib/packages/doc/todo_parametrize_ja.tex`

[4] R.J.W̃alker, *Algebraic Curves*, Princeton University Press, 1950.

[5] D. コックス, J. リトル, D. オシー, グレブナー基底と代数多様体入門（上）, シュプリンガーフェアラーク東京, 2000.

[6] Max Noether, Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen, Mathematiche Annallen **23**, (1884), 311-358.

[7] D.H̃ilbert, A.H̃urwitz, Über die Diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null, Acta Mathematica **14**,(1890),217-224.

[8] M.H.P̃oincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, Journal de Mathematique pure et applique (5^esérie), tome VII, (1901), 161-233.