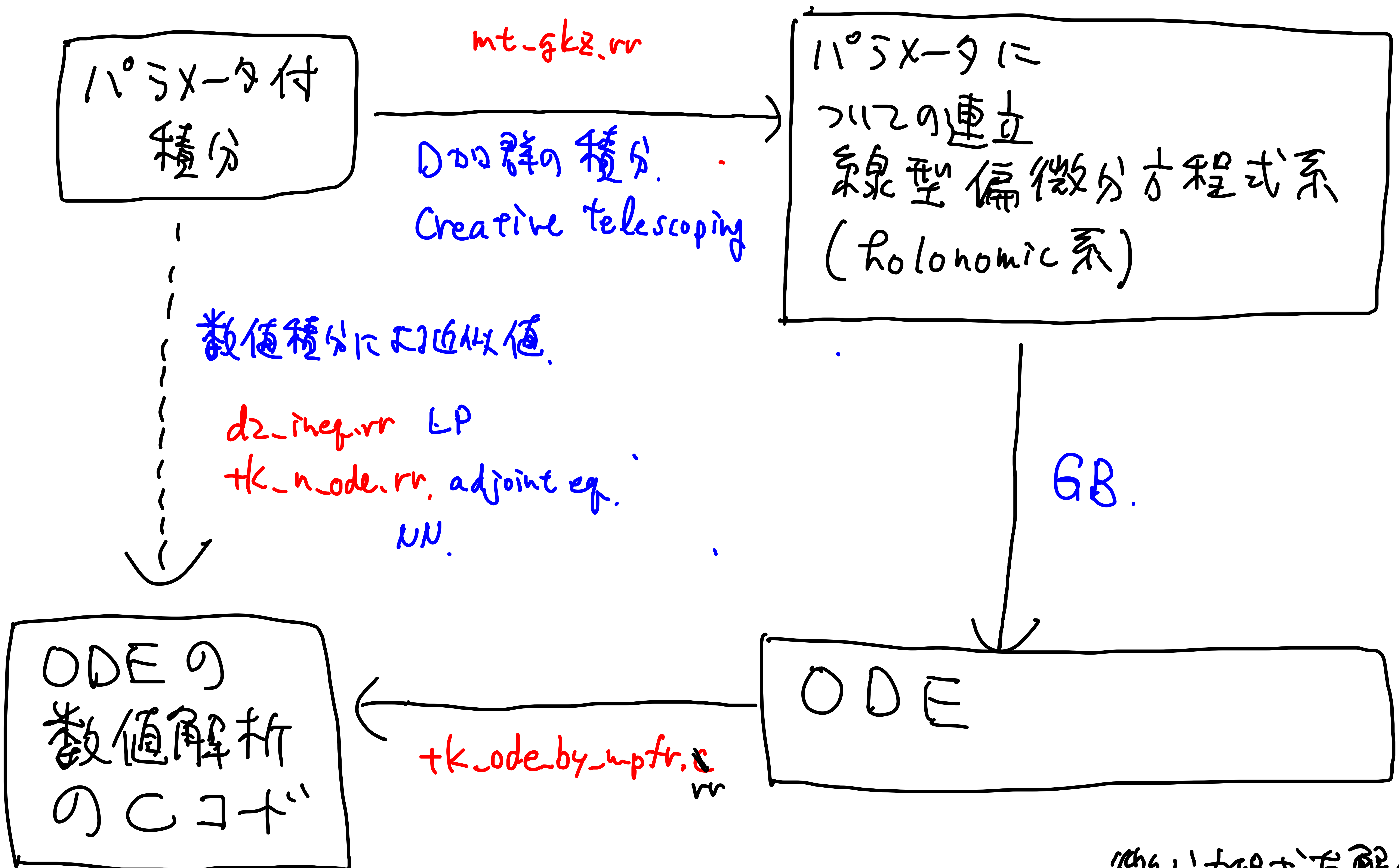


微分方程式を解くことにより、数値積分の回数をへらせる.

Rahgm. ← 初期値を級数計算することにより、多重積分より高精度計算できる場合もあり.

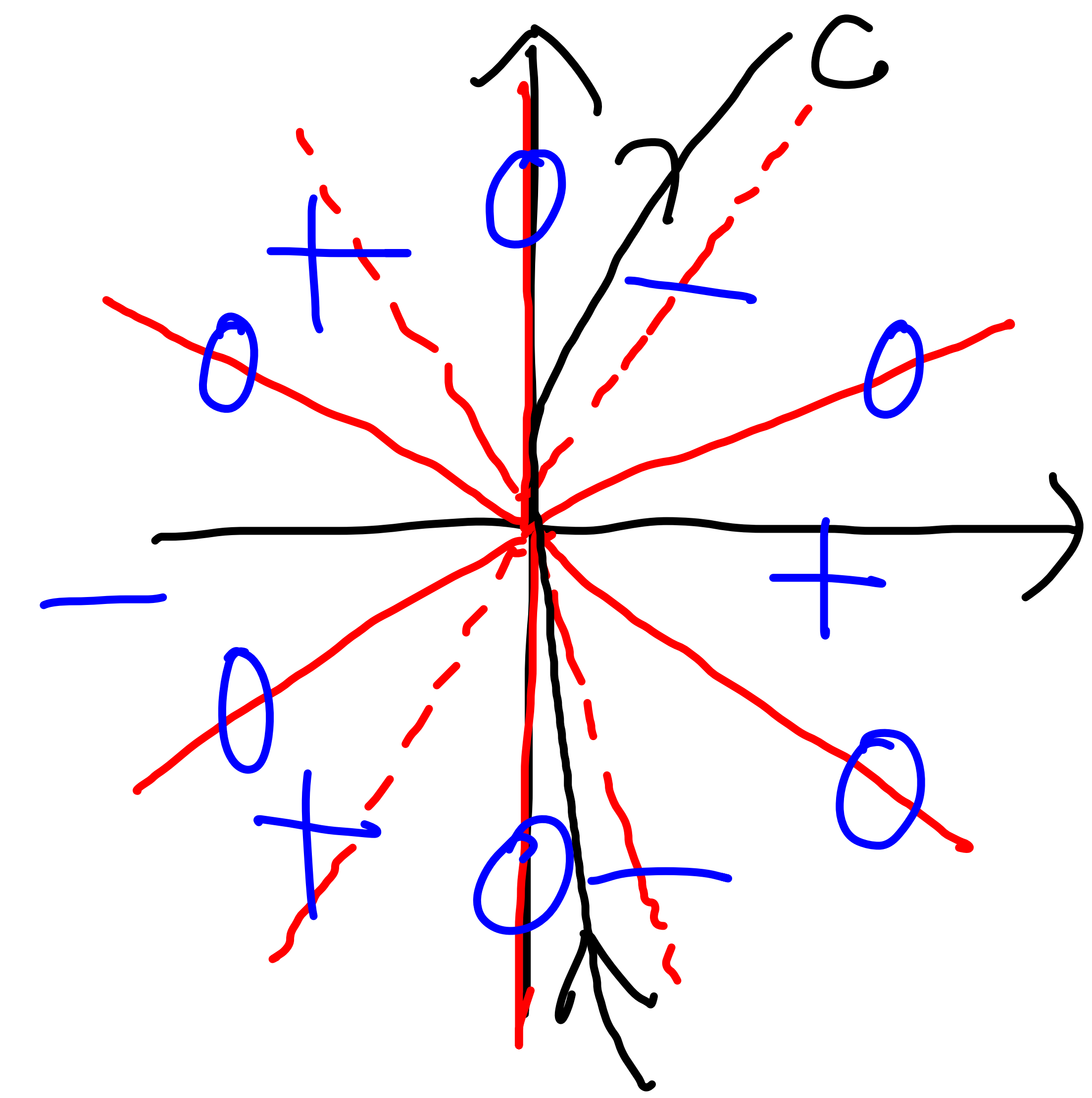
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \exp\left(\frac{x^3}{3}-tx\right)dx \longrightarrow \left(\partial_t^2 - t\right)\cdot f = 0$$

$$= f(t)$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta.$$

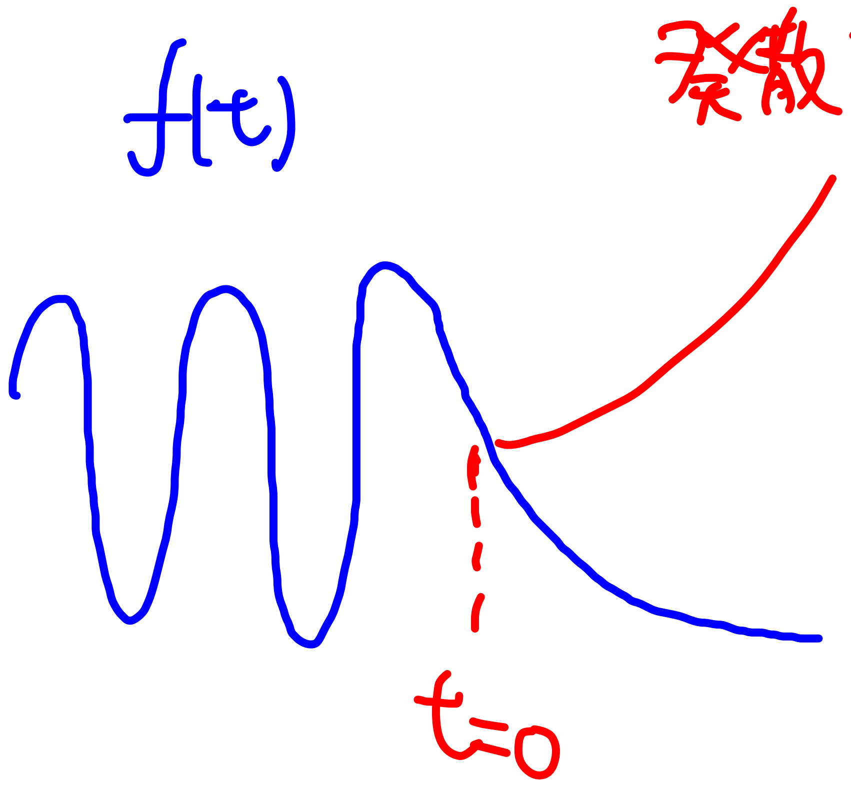
$$3\theta = \frac{\pi}{2},\quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$3\theta = \frac{3}{2}\pi,\quad \theta = \frac{\pi}{2}$$



$$\left(\partial_t^2 - t\right)\cdot f = 0$$

発散解をいかに除くか？



かんたん？

$$f(0) = 0.355$$

$$f'(0) = -0.2588$$

$$\frac{dY}{dt} = p(t)Y.$$

$$Y = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \quad \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} Y.$$

$$Y(t+h) \fallingdotseq M(t)\,Y(t).$$

$$M(nh) \cdots M(2h)\,M(h)\,M(0)$$

matrix.factorial.

$$\frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} Y(t)$$

$$Y(t+h) \fallingdotseq Y(t) + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} Y(t)$$

$$= \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right]}_{\parallel \atop M(t)} Y(t)$$

$M(t)$. ← rk4_mat(p)

これを計算.

固有値 λ_1, λ_2

$\lambda_1 \gg 0$ 　λ_2 小さい

λ_2の固有ベクトルの定数倍を、初期値にすれば、発散解を除去できる。

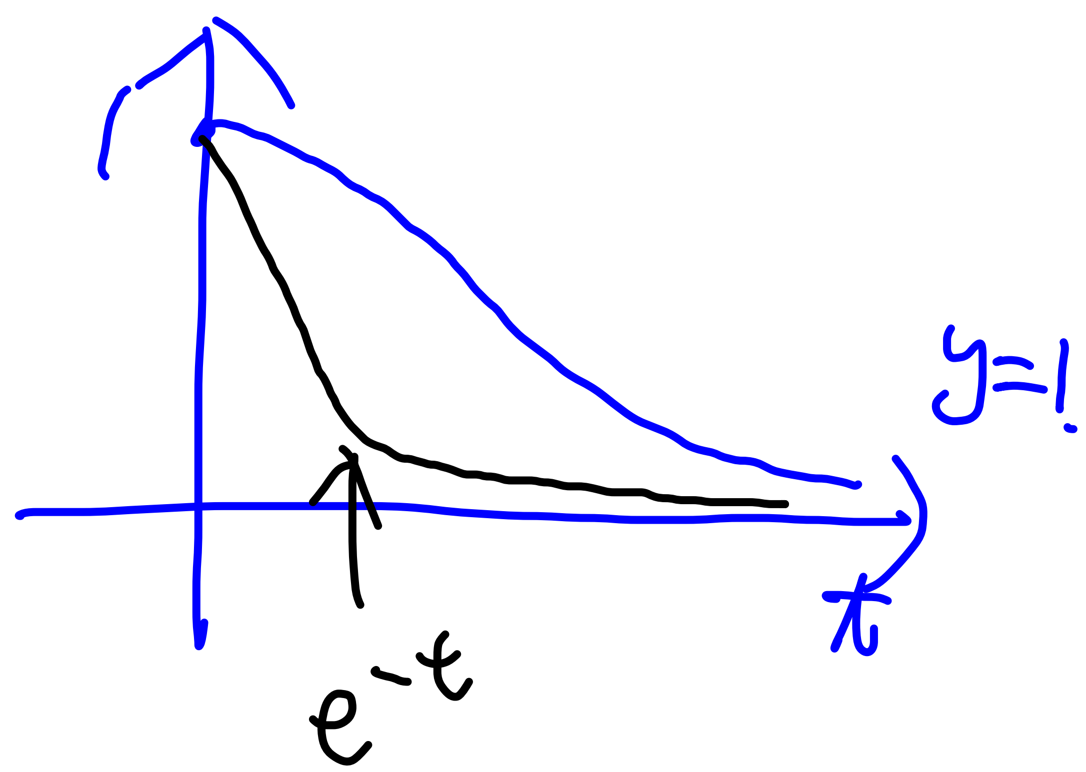
defusing 法.

mpfr. bigfloatで

tk_ode_by_mpfr.rn

例. $H_n^k(x,y) = \int_0^x t^k \underbrace{e^{-t}\,{}_0F_1(;n;ty)}\,dt$

arxiv 1707.02564.



x を fix. y についての ODE をときたい

$y \to +\infty$ で,

$h_1 =$

$h_2 =$

$H_n^k \sim h_3 \sim y^{-1/2\,(1/2+n)} \exp\left(\underline{2(xy)^{1/2}}\right) + \cdots$

$h_4 \sim y^{(-n+k)}\, \underline{\exp(y)}$

$$\begin{cases} \left[\theta_y(\theta_y+n-1) + y(\theta_x-\theta_y-k-1)\right]\cdot u = 0 \\ (\theta_x-\theta_y-k-1+x)\,\theta_x\cdot u = 0 \end{cases}$$

$\theta_x = x\partial_x,\quad \theta_y = y\partial_y$

$\downarrow$

y についての 4階の O.D.E.

$F = G\cdot e^{-y} y^{-(k-n+1)}$ についての方程式

$k=10,\ n=1,\ x=1$ fix

$y=1$ で $F = \begin{pmatrix} 0.028 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $y=51$ で $F = \begin{pmatrix} 2.22\times 10^{-36} \\ \vdots \end{pmatrix}$

数値積分の値

いろんな
パラメータでの

↓

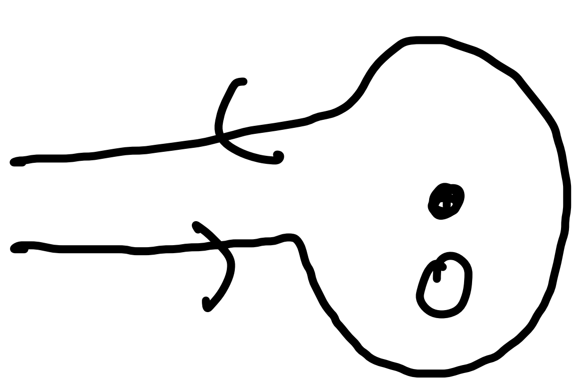
ODE

パラメータ変数についての.

例. $Z(t)=\int_C k(x,t)\,dx$

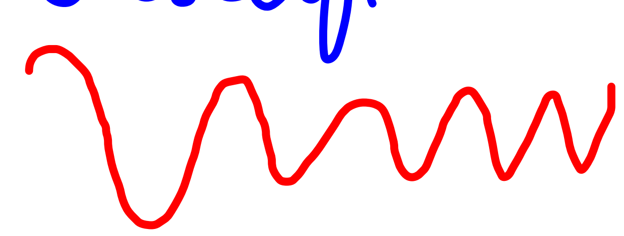
$$k(x,t)=\exp\left(\frac{t}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)x^{-a}\frac{1}{x}$$

Cは?



$$Z(t)=2\pi i\cdot J_a(t)$$

Bessel fn



$$\frac{dY(t)}{dt}=\frac{G(t)}{d(t)}Y(t)$$

行列(多項式成分)

多項式

例. $\frac{G(t)}{d(t)}=G_0+G_1\frac{1}{t}=\frac{G_0t+G_1}{t}$

未定係数行列.

$a=2$, $Y=\begin{pmatrix}J_a(t)\\ J_{a-1}(t)\end{pmatrix}$ の Besselの場合の答えは、 $G_0+G_1\frac{1}{t}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{t}\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}$

Step 1. LPで. G_0, G_1 をひとつみつける

t_i いろいろ.

$$d(t_i)\frac{dY}{dt}(t_i)\fallingdotseq G(t_i)Y(t_i)$$

未定係数についての関係式.

ただし≒なので、

$-\varepsilon <$ 左 $-$ 右 $< \varepsilon$ LP

d2ineq.rr.

glpsol 用の入力

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{pmatrix}0.0156 & 1.012\\ -0.995 & (-0.01561)\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc}-1 & 0\end{array}\end{array} + \frac{1}{t}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}-2 & 0\end{array}\\ \begin{pmatrix}-2.2 & 0.003\\ -0.1 & 1.02\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\end{array}$$

Step 2. adjoint eq を用いて、
この値をよくする。

Cao, Li, Petzold, Serban,
Adjoint sensitivity analysis for differential-algebraic equations, 2003

linear の場合

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = PY \\ Y(0) = Y_0(w) \end{cases} \qquad P(w,t)$$

未定係数

loss ft.

$$F(w) = \int_0^T f(Y, w, t)\,dt$$ の

$F(w)$ を最小化したい。

$f(Y, w, t)$ の例.

$$\rightarrow |Y(t) - D(t)|^2$$

Y を fit させたいデータ

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial w_i} \text{ をもとめたい}}$$

gradient descent に必要.

adjoint eq.

$$\frac{d\lambda}{dt} = -P^T \lambda - \mathrm{grad}_Y f$$

$\lambda(T) = 0$ t をへらして $\lambda(0)$ までもとめる。

$$\frac{\partial F}{\partial w_i} = \int_0^T \left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial w_i}} + \lambda^T \frac{\partial P}{\partial w_i} Y \right) dt + \lambda^T(0) \cdot \frac{\partial Y_0}{\partial w_i}$$

tk_n_ode.rr: adjoint_eq を解いて、
w_i をずらしてい.

利点. $[0, T]$ の外でも、正しい解に
近いものが得られると期待.

動き.

- Greydanus, Dzamba, Yosinki, Hamiltonian Neural Networks 2019.

自動微分.

Adept (C++ lib)
autodiff

2重数を用いたMathematicaプログラム

↓

tk_dual_num.rr
d1

デモ Tests/test4.c

まだ 演習レベル.

tk_pg.rr. polygraph.

[積分] → [方程式]

↑ A-hg 積分用.

mt_gkz.rr with 松原

http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/intersection2

Math/

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \end{array}$$

$$f(z) = \int_C (\underbrace{z_1 t^0 + z_2 t^1}_{h_1})^{-\gamma_1} (\underbrace{z_3 t^0 + z_4 t^1}_{h_2})^{-\gamma_2} t^c \, dt$$

$h_1^{\rho_1} h_2^{\rho_2} t^{g_1} dt$

$H_A(-\delta)$, $\delta = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ c \end{pmatrix}$

mt_gkz.pfaff_eq.

これを与えて、pfaff eq

Cohomology intersection num.