超幾何系の同型分類アルゴリズム

中山洋将 (日本大学), 高山信毅 (神戸大学 *)

1. D 加群の同型とは?
2. 問題: Horn 型超幾何系を同型なもので分類せよ $\Rightarrow$ できる.
3. 例: 合流型 HG ${}_1F_1$, Appell F_2.
4. パラメータ空間の stratify および同型構成のためのアルゴリズム

プログラムは

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2025/prog-rest

スライドは Nobuki Takayama 検索

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/index-ja.html

D 加群の同型とは?

$D = \mathbb{C}\langle x, \partial_x \rangle$, $\partial_x x = x\partial_x + 1$. 結合法則や分配法則 OK.

Example 1

$$L(a) = x\partial_x + a$$

$a \in \mathbb{Z}$ に対して左 D 加群 $D/L(a)$ を同型なもので分類せよ.

$$D/L(a) \ni \ell \xmapsto{\cdot x} \ell x \in D/L(a+1)$$

は D 左準同型. $L(a)x = (x\partial_x + a)x = x(x\partial_x + a + 1) = xL(a+1)$ なので well-defined.

$$D/L(a+1) \ni \ell \xmapsto{\cdot \partial_x} \ell\partial_x \in D/L(a)$$

も D 左準同型. $L(a+1)\partial_x = (x\partial_x + a + 1)\partial_x = \partial_x(x\partial_x + a)$ なので well-defined.

この 2 つの準同型を合成すると

$$D/L(a) \ni \ell \mapsto \ell x\partial_x \in D/L(a)$$

だが

$$x\partial_x \equiv -a \mod L(a)$$

となる. $a \neq 0$ なら x, ∂_x は同型射を与える. しかし $a = 0$ では $D/L(0)$ と $D/L(1)$ をつなぐ同型射はつくれていない. $-a$ が超幾何 b 函数のもっとも単純な例.

∂_x, x は解の contiguity relation (隣接関係) を与える. つまり,
$f = x^{-(a+1)}$ を $L(a+1) \bullet f = 0$ なる解とすると, xf は $L(a)$ の解.
$f = x^{-a}$ を $L(a) \bullet f = 0$ なる解とすると, $\partial_x \bullet f$ は $L(a+1)$ の解.

同型なら解空間もベクトル空間として同型

$$M \simeq M' \Rightarrow RHom_D(M, S) \simeq RHom_D(M', S)$$

問題: Horn 型超幾何系を同型なもので分類せよ

定理 1. 各 strata に属するパラメータに対する normal な Horn 型超幾何系が同型であるように, パラメータ空間 $\mathbb{Z}^d$ を stratify し同型を構成するアルゴリズムあり.

H.Nakayama, N.Takayama, Comprehensive Restriction Algorithm for Hypergeometric Systems, arxiv:???

例 ${}_1F_1$ 　　($S(a,c)$ は解空間)

Pochhammer symbol: $(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$, $(a)_0 := 1$.

$$ {}_1F_1(a,c;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(1)_k (c)_k} x^k $$

微分方程式は,

$$ x\partial_x^2 + (c-x)\partial_x - a \tag{1} $$

$V = \mathbb{R}^2$, $v_1(V) = (1,0)$, $v_2(V) = (0,1)$.

$$ S(a,c) \xrightarrow{x\partial_x + a} S(a+1,c) \tag{2} $$

$$ S(a+1,c) \xrightarrow{-x\partial_x + x + a - c + 1} S(a,c) \tag{3} $$

b-函数 (多項式) は $a(a-c+1)$.

$$ S(a,c) \xrightarrow{x\partial_x + c - 1} S(a,c-1) \tag{4} $$

$$ S(a,c-1) \xrightarrow{x\partial_x - 1} S(a,c) \tag{5} $$

b-函数 (多項式) は $a-c+1$.

V: $a=0$ に制限した 1 次元 arrangement 上では $S(V)=(0,1)$, $v_1(S)=(0,1)$. contiguity は (4), (5).

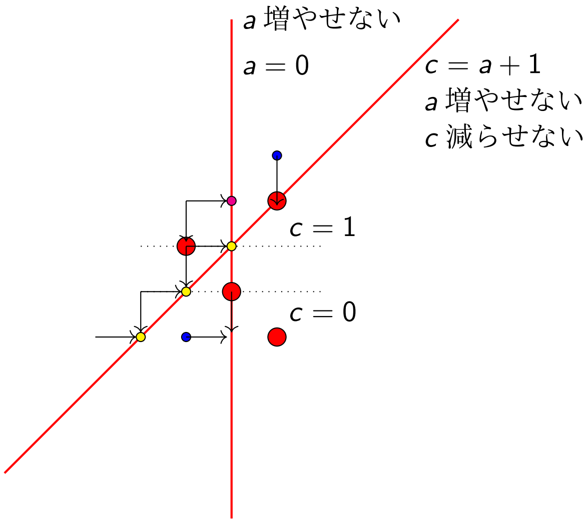
V : $a-c+1=0$ つまり $c=a+1$ に制限した 1 次元 arrangement 上では $S(V)=(0,1)$, $v_1(S)=(1,1)$ で

$$S(c-1,c) \xrightarrow{c\partial_x} S(c,c+1) \tag{6}$$

$$S(c,c+1) \xrightarrow{x\partial_x-x+c} S(c-1,c) \tag{7}$$

b-函数 (多項式) は $c(c-1)$.

同型なら矢印で．参照点を減らす．



実装, 例: Appell F_2

sagemath + (subsystem Risa/Asir) + (subsystem Polymake)

$$x(1-x)\partial_x^2 - xy\partial_x\partial_y + (c-(a+b+1)x)\partial_x - by\partial_y - ab,$$
$$y(1-y)\partial_y^2 - xy\partial_x\partial_y + (c'-(a+b'+1)y)\partial_y - b'x\partial_x - ab'.$$

```
contiguity---
[[[[0, 0, 0, 0, a], [0, 0, 0, 0, a + 1]],
[(-x*y^2*dy^2 - y^3*dy^2 + x*y*dy^2 + 2*y^2*dy^2 + y^2*dy*a - x*y*dy -
 [y*dy + a, 1]]]
---contiguity
 bf =  [(a - 1, 1), (a, 2)]
 (2)  -->  (0, 0, 0, 0, 2)
 (-5)  -->  (0, 0, 0, 0, -5)
```

5713 個の contiguity relations (同型射), 8672 個の孤立点 (約 5 日).

先行研究

1. Mutsumi Saito, Isomorphism classes of A-hypergeometric systems, Compositio Mathematica 128 (2001), 323–338.
2. Berkesch, Christine; Matusevich, Laura Felicia; Walther, Uli, Torus equivariant D-modules and hypergeometric systems, Advances in Mathematics 350 (2019), 1226–1266.

1 は A-超幾何系 (GKZ 超幾何系) について同型分類の方法.
GKZ 超幾何系と Gauss, Appell などの Horn 型超幾何との対応は 2.
GKZ 超幾何系 $H_A(\beta)$ は $d \times n$ の整数成分の行列 $A = (a_{ij})$ とパラメータベクトル $\beta \in \mathbb{C}^d$ で決まる n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ の holonomic 線形偏微分方程式系.

$$H_A(\beta) = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \partial_j - \beta_i, \partial^u - \partial^v \;\; i = 1, \ldots, d, Au = Av, u, v \in \mathbb{N}_0^n \right\rangle$$

$D_n = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$ の左イデアル.

定理 2.

1. E を $d \times d$ 単位行列とする．$A = (E, *)$ の時 GKZ 超幾何を $x_1 = \cdots = x_d = 1$ へ制限つまり
$$\begin{aligned} & (H_A(\beta) + (x_1 - 1)D_n + \cdots + (x_d - 1)D_n) \\ \cap \quad & \mathbb{C}\langle x_{d+1}, \ldots, x_n, \partial_{d+1}, \ldots, \partial_n \rangle \end{aligned}$$
を求めることで対応する Horn 型超幾何系が得られる．さらに $H_A(\beta)$ と $H_A(\beta')$ が GKZ 超幾何系として同型なら対応する Horn 型超幾何系も同型.
2. GKZ 超幾何としての同型射を制限して Horn 型超幾何の同型射を構成するアルゴリズムあり.

A が normal とは $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q} a_i \right) \cap \mathbb{Z}^d$

Example 2

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad \beta = (c-1, -a, -b)^T, \ \text{Gauss HG } {}_2F_1$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right), \quad \beta = (-a, -b, -b', c-1)^T, \ \text{Appell } F_1$$

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right), \quad \beta = (-a, -b, -b', c-1, c'-1)^T, \ F_2$$

```
F=sm1.gkz(A=[[[1,0,0,-1],[0,1,0,1],[0,0,1,1]],Beta=[c-1,-a,-b]]);
  [[-x4*dx4+x1*dx1-c+1,x4*dx4+x2*dx2+a,x4*dx4+x3*dx3+b,
    -dx1*dx4+dx2*dx3],
   [x1,x2,x3,x4]]
load("2024-08-09-gkzGauss-rest.rr");;
test1(); // F[0] を x1=x2=x3=1 へ制限. x4->x, dx4 -> dx
  (-x^2+x)*dx^2+((-a-b-1)*x+c)*dx-b*a
```

パラメータ空間の stratify のためのアルゴリズム (Markov basis check なし版)

procedure $\texttt{representative\_candidates}(V, H(\beta))$

1. V に対する $\{v_j(V)\}$ と $S(V)$ を求める. $v_j(V)$ 方向の $H(\beta)$ の contiguity relations と b-函数の集合 $B(V)$ を求める.
2. $\mathcal{A} = B(V)$ が V で定義する arrangement.
3. $\mathcal{A}$ の最大次元の face の内点を一つづつ取り出しその集合を P とする.
4. $\mathcal{A}$ の codim が 1 の face f の affine hull を V' とする[1].
   $P' = \texttt{representative\_candidates}(V', H(\beta))$ を呼び出し,
   $P = P \cup P'$ とする.
5. return P

$P = \texttt{representative\_candidates}(\mathbb{R}^d, H(\beta))$ とすることにより同型なものの代表元が得られる.
なお, この方法は異なる P の元は同型でないということは保証しない.

[1] この step はすべての codim 1 の face について繰り返す.