

Comprehensive Restriction Algorithm for Hypergeometric Systems, F_1 , F_2

Hiromasa Nakayama and Nobuki Takayama

August 13, 2025

This note contains a detailed explanations on restrictions of the Appell hypergeometric system F_1 to $x = y = 0$. As to a general theory, refer to the paper “Comprehensive Restriction Algorithm for Hypergeometric Systems”.

1 Gauss 超幾何微分方程式の制限加群について

Gauss 超幾何微分方程式の微分作用素を

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial - \alpha\beta$$

とし, これで生成される左 D イデアルを

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = DL(\alpha, \beta, \gamma)$$

とおく. 左 D 加群 $M(\alpha, \beta, \gamma) = D/I(\alpha, \beta, \gamma)$ の $x = 0$ への制限加群

$$M(\alpha, \beta, \gamma)/xM(\alpha, \beta, \gamma) \cong D/(I(\alpha, \beta, \gamma) + xD)$$

を計算する.

重みベクトル $w = (1)$ についての generic b 関数は, パラメータ α, β, γ によらず,

$$b(s) = s(s + \gamma - 1)$$

である. $b(s)$ の非負最大整数根 s_0 は,

$$s_0 = \begin{cases} 0 & (\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}) \\ 1 - \gamma & (\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}) \end{cases}$$

である.

パラメータ γ により制限加群は変化する. 制限加群は以下のようになる.

- (1) $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, 制限加群は $\mathbb{C}$ とベクトル空間として同型.
- (2) $\gamma = 0$ の時, $s_0 = 1$ より $\mathcal{B}_1 = \{1, \partial_x\}$ であり, $\mathcal{B}_1$ を基底とする $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot \partial_x$ を考える. $L(\alpha, \beta, 0)$ を $<_{(-1,1)}$ の大きい順に項を並べると,

$$L(\alpha, \beta, 0) = x\partial_x^2 - x^2\partial_x^2 + (-\alpha - \beta - 1)x\partial_x - \alpha\beta$$

となり, $(-1, 1)$ -階数は 1 であるから, $(L(\alpha, \beta, 0))|_{x=0}$ を計算して,

$$(L(\alpha, \beta, 0))|_{x=0} = -\alpha\beta$$

となる. 制限加群は, $\mathbb{C}^2/V$ で, $V = \mathbb{C} \cdot \alpha\beta$ となる. さらに α, β により, 制限加群は以下のように場合分けされる.

- $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ の時, $V = \{0\}$ であり, 制限加群は 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ と同型.
- $\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ の時, $V = \mathbb{C}$ であり, 制限加群は 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}$ と同型.

(3) $\gamma \in \mathbb{Z}_{<0}$ の時, Gauss 超幾何微分方程式の γ についての隣接関係式による D 加群の同型

$$D/I(\alpha, \beta, \gamma) \cong D/I(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma + 1)$$

を繰り返し用いて (ここで $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ は α, β に 0 または 1 を加えたもの), $\gamma \in \mathbb{Z}_{<0}$ の場合を $\gamma = 0$ の場合に帰着できる. すなわち,

$$D/I(\alpha, \beta, \gamma) \cong D/I(\alpha + k, \beta + k, \gamma + 1)$$

が成り立つ. ここで k は非負整数である.

(3) について, 次の命題を示す.

Proposition 1. $\gamma \in \mathbb{Z}_{<0}$ のとき,

$$D/I(\alpha, \beta, \gamma) \cong D/I(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 0)$$

が成り立つ. ここで $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ は α, β に 0 または 1 を加えたものである.

Proof. Gauss の超幾何微分方程式の作用素とイデアルを $L(\gamma) = L(\alpha, \beta, \gamma)$, $I(\gamma) = I(\alpha, \beta, \gamma)$ と略記する.

γ の下降作用素 $B(\gamma)$ とは,

$$\exists P \in D \text{ s.t. } L(\gamma - 1)B(\gamma) = PL(\gamma)$$

を満たすものと定めると,

$$B(\gamma) = \theta_x + (\gamma - 1)$$

がとれる. 上昇作用素 $H(\gamma)$ とは,

$$L(\gamma + 1)H(\gamma) = PL(\gamma)$$

を満たすものと定めると,

$$H(\gamma) = (1 - x)\partial_x + (\gamma - \alpha - \beta)$$

がとれる.

左 D 加群の準同型

$$\varphi : D/I(\gamma + 1) \ni [P] \mapsto [P \cdot H(\gamma)] \in D/I(\gamma)$$

$$\psi : D/I(\gamma) \ni [P] \mapsto [P \cdot B(\gamma + 1)] \in D/I(\gamma + 1)$$

が得られるが, これらの合成は,

$$\varphi \circ \psi : D/I(\gamma) \ni [P] \mapsto [P \cdot B(\gamma + 1) \cdot H(\gamma)] \in D/I(\gamma)$$

$$B(\gamma + 1) \cdot H(\gamma) \equiv (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) \pmod{I(\gamma)}$$

$$\varphi \circ \psi = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\text{id}$$

がわかる。同様にして,

$$\psi \circ \varphi : D/I(\gamma + 1) \ni [P] \mapsto [P \cdot H(\gamma) \cdot B(\gamma + 1)] \in D/I(\gamma + 1)$$

$$H(\gamma) \cdot B(\gamma + 1) \equiv (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) \pmod{I(\gamma + 1)}$$

$$\psi \circ \varphi = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\text{id}.$$

$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) \neq 0$ の時, $D/I(\alpha, \beta, \gamma) \cong D/I(\alpha, \beta, \gamma + 1)$ である.

同型が成り立たないようなパラメータの時,

$$\alpha - \gamma = 0 \text{ または } \beta - \gamma = 0$$

に対して, γ についての隣接関係式を計算し同型を導く

(1) $\alpha - \gamma = 0$ の時. $\alpha = \gamma$ とおき, $I(\gamma, \beta, \gamma)$ の γ についての昇降作用素を求めると,

$$B(\gamma) = (1 - \gamma)(x(x - 1)\partial_x + \beta x - \gamma + 1),$$

$$H(\gamma) = (x - 1)\partial_x + \gamma,$$

$$B(\gamma + 1) \cdot H(\gamma) \equiv \gamma^2(\beta - \gamma) \pmod{I(\gamma + 1)},$$

$$H(\gamma) \cdot B(\gamma + 1) \equiv \gamma^2(\beta - \gamma) \pmod{I(\gamma)}.$$

よって, $\gamma^2(\beta - \gamma) \neq 0$ の時, $D/I(\gamma, \beta, \gamma) \cong D/I(\gamma + 1, \beta, \gamma + 1)$.

(1-1) $\beta - \gamma = 0$ の時. $\beta = \gamma$ とおき, $I(\gamma, \gamma, \gamma)$ の γ についての昇降作用素は

$$B(\gamma) = (1 - \gamma)(x(x - 1)\partial_x + (2\gamma - 1)x - \gamma + 1),$$

$$H(\gamma) = \partial_x,$$

$$B(\gamma + 1) \cdot H(\gamma) \equiv \gamma^3 \pmod{I(\gamma + 1)},$$

$$H(\gamma) \cdot B(\gamma + 1) \equiv \gamma^3 \pmod{I(\gamma)}.$$

よって, $\gamma^3 \neq 0$ の時, $D/I(\gamma, \gamma, \gamma) \cong D/I(\gamma + 1, \gamma + 1, \gamma + 1)$.

(2) $\beta - \gamma = 0$ の時. $\beta = \gamma$ とおき, $I(\alpha, \gamma, \gamma)$ の γ についての昇降作用素は,

$$B(\gamma) = (1 - \gamma)(x(x - 1)\partial_x + \alpha x - \gamma + 1),$$

$$H(\gamma) = (x - 1)\partial_x + \gamma,$$

$$B(\gamma + 1) \cdot H(\gamma) \equiv -\gamma^2(\alpha - \gamma) \pmod{I(\gamma + 1)},$$

$$H(\gamma) \cdot B(\gamma + 1) \equiv -\gamma^2(\alpha - \gamma) \pmod{I(\gamma)}.$$

$\gamma^2(\alpha - \gamma) \neq 0$ の時, $D/I(\alpha, \gamma, \gamma) \cong D/I(\alpha, \gamma + 1, \gamma + 1)$.

(2-1) $\alpha - \gamma = 0$ の時. これは 1-1. の場合に帰着される.

□

2 Appell F_1 超幾何微分方程式系の制限加群について

Appell の超幾何関数 $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma)$ の満たす微分方程式系に対応するイデアルを

$$I_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma) = \langle \partial_x(\theta_x + \theta_y + \gamma - 1) - (\theta_x + \theta_y + \alpha)(\theta_x + \beta), \partial_y(\theta_x + \theta_y + \gamma - 1) - (\theta_x + \theta_y + \alpha)(\theta_y + \beta'), \\ (x - y)\partial_x\partial_y - \beta'\partial_x + \beta\partial_y \rangle$$

とおく. $M(\alpha, \beta, \beta', \gamma) = D/I_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma)$ の $x = 0, y = 0$ への制限加群を求める. 重みベクトル $(-1, -1, 1, 1)$ についての generic b 関数は, パラメータ $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ によらず,

$$b(s) = s(s + \gamma - 1)$$

となる. $b(s)$ の非負最大正数根 s_0 は,

$$s_0 = \begin{cases} 0 & (\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}) \\ 1 - \gamma & (\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}) \end{cases}$$

である.

$\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, $s_0 = 0$ であり, 制限加群は $\mathbb{C}$ とベクトル空間として同型となる.

$\gamma = 0$ の場合を考える. $s_0 = 1$ より $\mathcal{B}_1 = \{1, \partial_x, \partial_y\}$ であり, $\mathcal{B}_1$ を基底とする 3 次元 $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 $\mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot \partial_x + \mathbb{C} \cdot \partial_y$ をとり, $I_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma)$ の $\prec_{(-1, -1, 1, 1)}$ についてのグレブナー基底から, 制限加群は

$$(\mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot \partial_x + \mathbb{C} \cdot \partial_y) / (\mathbb{C} \cdot (-\beta'\partial_x + \beta\partial_y) + \mathbb{C} \cdot \alpha\beta' + \mathbb{C} \cdot \alpha\beta)$$

と $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として同型であることがわかる. この商ベクトル空間をパラメータにより場合分けをすれば以下になる.

- $\beta = 0$ かつ $\beta' = 0$ の時, $(\mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot \partial_x + \mathbb{C} \cdot \partial_y)$ と同型で次元は 3.
- $(\beta \neq 0 \text{ または } \beta' \neq 0)$ かつ $\alpha = 0$ の時, $(\mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot \partial_x + \mathbb{C} \cdot \partial_y) / (\mathbb{C} \cdot (-\beta'\partial_x + \beta\partial_y))$ と同型で次元は 2.
- $(\beta \neq 0 \text{ または } \beta' \neq 0)$ かつ $\alpha \neq 0$ の時, $(\mathbb{C} \cdot \partial_x + \mathbb{C} \cdot \partial_y) / (\mathbb{C} \cdot (-\beta'\partial_x + \beta\partial_y))$ と同型で次元は 1.

$\gamma \in \mathbb{Z}_{<0}$ の場合を考える. Appell F_1 超幾何微分方程式系の γ についての隣接関係式による D 加群の同型

$$D/I_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma) \cong D/I_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\beta}', \gamma + 1)$$

を繰り返し用いて (ここで, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\beta}'$ は α, β, β' に 0 または 1 を加えたものとする), $\gamma \in \mathbb{Z}_{<0}$ の場合は $\gamma = 0$ の場合に帰着できる. すなわち, $D/I_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma) \cong D/I_1(\alpha + k, \beta + k, \beta' + k, 0)$ が成り立つ. ここで k は非負整数とする.

Proposition 2. $\gamma \in \mathbb{Z}_{<0}$ の時,

$$D/I_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma) \cong D/I_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\beta}', \gamma + 1)$$

が成り立つ. ここで, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\beta}'$ は α, β, β' に 0 または 1 を加えたものとする.

Proof. 下降作用素 $B(\gamma)$ (i.e., $I_1(\gamma-1)Q \subset I_1(\gamma)$ となる Q) は,

$$B(\gamma) = \theta_x + \theta_y + \gamma - 1$$

となり, 上昇作用素 $H(\gamma)$ (i.e., $I_1(\gamma+1)Q \subset I_1(\gamma)$ となる Q) は,

$$H(\gamma) = (x-1)\partial_x + (y-1)\partial_y + \alpha - \gamma + \beta_1 + \beta_2$$

となる.

これら昇降作用素から, D 準同型

$$\varphi : D/I_1(\gamma+1) \ni [P] \mapsto [P \cdot H(\gamma)] \in D/I_1(\gamma)$$

と, D 準同型

$$\psi : D/I_1(\gamma) \ni [P] \mapsto [P \cdot B(\gamma+1)] \in D/I_1(\gamma+1)$$

が得られる. 合成

$$\varphi \circ \psi : D/I_1(\gamma) \ni [P] \mapsto [P \cdot B(\gamma+1) \cdot H(\gamma)] \in D/I_1(\gamma)$$

となるが, $B(\gamma+1) \cdot H(\gamma) \equiv (\alpha - \gamma)(\gamma - \beta_1 - \beta_2) \pmod{I_1(\gamma)}$ であるから,

$$\varphi \circ \psi = (\alpha - \gamma)(\gamma - \beta_1 - \beta_2)\text{id}$$

がわかる. 同様に,

$$\psi \circ \varphi : D/I_1(\gamma+1) \ni [P] \mapsto [P \cdot H(\gamma) \cdot B(\gamma+1)] \in D/I_1(\gamma+1)$$

であるが, $H(\gamma) \cdot B(\gamma+1) \equiv (\alpha - \gamma)(\gamma - \beta_1 - \beta_2) \pmod{I_1(\gamma+1)}$ であるから,

$$\psi \circ \varphi = (\alpha - \gamma)(\gamma - \beta_1 - \beta_2)\text{id}$$

がわかる. よって, $(\alpha - \gamma)(\gamma - \beta_1 - \beta_2) \neq 0$ の時, $D/I_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma) \cong D/I_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma+1)$ が成り立つ.

上の同型が成り立たない時, パラメータを場合分けして γ の隣接関係式を求め, 同型を調べていく.

(1) $\alpha - \gamma = 0$ の時. $\alpha = \gamma$ とおく. $I_1(\gamma, \beta_1, \beta_2, \gamma)$ に対して, γ の昇降作用素を求めると,

$$\begin{aligned} B(\gamma) &= x(1-x)\partial_x + y(1-y)\partial_y - \beta_1x - \beta_2y + \gamma - 1 \\ H(\gamma) &= (x-1)\partial_x + (y-1)\partial_y + \gamma \end{aligned}$$

が得られる. 同型性について,

$$\begin{aligned} B(\gamma+1) \cdot H(\gamma) &\equiv \gamma(\gamma - \beta_1 - \beta_2) \pmod{I_1(\gamma+1)} \\ H(\gamma) \cdot B(\gamma+1) &\equiv \gamma(\gamma - \beta_1 - \beta_2) \pmod{I_1(\gamma)} \end{aligned}$$

であるから, $\gamma(\gamma - \beta_1 - \beta_2) \neq 0$ の時, $D/I_1(\gamma, \gamma, \beta_1, \beta_2) \cong D/I_1(\gamma+1, \gamma+1, \beta_1, \beta_2)$ がわかる.

(1-1) $\gamma - \beta_1 - \beta_2 = 0$ の時, $\beta_2 = \gamma - \beta_1$ とおく. $I_1(\gamma, \beta_1, \gamma - \beta_1, \gamma)$ に対して, γ の昇降作用素を求めると,

$$\begin{aligned} B(\gamma) &= x(1-x)\partial_x + y(1-y)\partial_y - \beta_1x - (2\gamma - \beta_1 - 1)y + \gamma - 1 \\ H(\gamma) &= \partial_y \end{aligned}$$

が得られる。同型性について,

$$\begin{aligned} B(\gamma+1) \cdot H(\gamma) &\equiv \gamma(\gamma - \beta_1) \pmod{I_1(\gamma+1)} \\ H(\gamma) \cdot B(\gamma+1) &\equiv \gamma(\gamma - \beta_1) \pmod{I_1(\gamma)} \end{aligned}$$

であるから, $\gamma(\gamma - \beta_1) \neq 0$ の時, $D/I_1(\gamma, \beta_1, \gamma - \beta_1, \gamma) \cong D/I_1(\gamma+1, \beta_1, \gamma+1 - \beta_1, \gamma+1)$ がわかる.

(1-1-1) $\gamma - \beta_1 = 0$ の時, $\beta_1 = \gamma$ とおくと, $\beta_2 = \gamma - \beta_1 = 0$ となる. $I_1(\gamma, \gamma, 0, \gamma)$ に対して, γ の昇降作用素を求めると,

$$\begin{aligned} B(\gamma) &= x(1-x)\partial_x + y(1-y)\partial_y + (-2\gamma+1)x + \gamma - 1 \\ H(\gamma) &= \partial_x \end{aligned}$$

が得られる。同型性について,

$$\begin{aligned} B(\gamma+1) \cdot H(\gamma) &\equiv \gamma^2 \pmod{I_1(\gamma+1)} \\ H(\gamma) \cdot B(\gamma+1) &\equiv \gamma^2 \pmod{I_1(\gamma)} \end{aligned}$$

であるから, $\gamma^2 \neq 0$ の時, $D/I_1(\gamma, \gamma, 0, \gamma) \cong D/I_1(\gamma+1, \gamma+1, 0, \gamma+1)$ がわかる.

(2) $\gamma - \beta_1 - \beta_2 = 0$ の時. $\beta_2 = \gamma - \beta_1$ とおく. $I_1(\alpha, \beta_1, \gamma - \beta_1, \gamma)$ に対して, γ の昇降作用素を求めると,

$$\begin{aligned} B(\gamma) &= x(1-y)\partial_x + y(1-y)\partial_y - \alpha y + \gamma - 1 \\ H(\gamma) &= (y-1)\partial_y + \gamma - \beta_1 \end{aligned}$$

が得られる。同型性について,

$$\begin{aligned} B(\gamma+1) \cdot H(\gamma) &\equiv (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta_1) \pmod{I_1(\gamma+1)} \\ H(\gamma) \cdot B(\gamma+1) &\equiv (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta_1) \pmod{I_1(\gamma)} \end{aligned}$$

であるから, $(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta_1) \neq 0$ の時, $D/I_1(\alpha, \beta_1, \gamma - \beta_1, \gamma) \cong D/I_1(\alpha, \beta_1, \gamma+1 - \beta_1, \gamma+1)$ がわかる.

(2-1) $\gamma - \alpha = 0$ の時. (1-1) の場合に帰着する.

(2-2) $\gamma - \beta_1 = 0$ の時. $\beta_1 = \gamma$ とおくと, $\beta_2 = \gamma - \beta_1 = 0$ となる. $I_1(\alpha, \gamma, 0, \gamma)$ に対して, γ の昇降作用素を求めると,

$$\begin{aligned} B(\gamma) &= x(1-x)\partial_x + y(1-x)\partial_y - \alpha x + \gamma - 1 \\ H(\gamma) &= (x-1)\partial_x + \gamma \end{aligned}$$

が得られる。同型性について,

$$\begin{aligned} B(\gamma+1) \cdot H(\gamma) &\equiv \gamma(\gamma - \alpha) \pmod{I_1(\gamma+1)} \\ H(\gamma) \cdot B(\gamma+1) &\equiv \gamma(\gamma - \alpha) \pmod{I_1(\gamma)} \end{aligned}$$

であるから, $\gamma(\gamma - \alpha) \neq 0$ の時, $D/I_1(\alpha, \gamma, 0, \gamma) \cong D/I_1(\alpha, \gamma+1, 0, \gamma+1)$ がわかる.

(2-2-1) $\gamma - \alpha = 0$ の時. これは (1-1-1) の時に帰着する.

こうしていずれの場合でも, $D/I_1(\gamma) \cong D/I_1(\gamma+1)$ の間の同型が成り立つことが示された. $\square$

Theorem 1. Appell F_1 の超幾何微分方程式系の $x = 0, y = 0$ への制限加群は以下のようになる。

- $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として同型.
- $\beta = 0$ かつ $\beta' = 0$ の時, $(\mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot \partial_x + \mathbb{C} \cdot \partial_y)$ と $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として同型.
- $(\beta \neq 0 \text{ または } \beta' \neq 0)$ かつ $\alpha = 0$ の時, $(\mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot \partial_x + \mathbb{C} \cdot \partial_y)/(\mathbb{C} \cdot (-\beta' \partial_x + \beta \partial_y))$ と $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として同型.
- $(\beta \neq 0 \text{ または } \beta' \neq 0)$ かつ $\alpha \neq 0$ の時, $(\mathbb{C} \cdot \partial_x + \mathbb{C} \cdot \partial_y)/(\mathbb{C} \cdot (-\beta' \partial_x + \beta \partial_y))$ と $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として同型.

3 Appell F_2 超幾何微分方程式系の制限加群について

Appell の超幾何関数 $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$ の満たす微分方程式系に対応するイデアルを

$$I_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma') = \langle \partial_x(\theta_x + \gamma - 1) - (\theta_x + \theta_y + \alpha)(\theta_x + \beta), \partial_y(\theta_y + \gamma' - 1) - (\theta_x + \theta_y + \alpha)(\theta_y + \beta') \rangle$$

とおく. $M(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma') = D/I_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma')$ の $x = 0, y = 0$ への制限加群を計算する. 重みベクトル $w = (-1, -1, 1, 1)$ についての generic b 関数 $b(s)$ は,

$$\begin{aligned} b(s) &= s(s + \gamma - 1)(s + \gamma' - 1)(s + \gamma + \gamma' - 2) & V(0) \setminus V((\gamma - \gamma')(\gamma + \gamma' - 2)) \\ b(s) &= s(s + \gamma - 1)(s + 2\gamma - 2) & V(\gamma - \gamma') \\ b(s) &= s(s - \gamma + 1)(s + \gamma' - 1) & V(\gamma + \gamma' - 2) \setminus V(\gamma - 1, \gamma' - 1) \end{aligned}$$

である. 場合分けにより, $b(s) = 0$ の非負最大整数根 s_0 が次のように定まる.

- (1) $\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ かつ $\gamma' \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, $s_0 = 2 - \gamma - \gamma'$.
- (2) $\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ かつ $\gamma' \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, $s_0 = 1 - \gamma$.
- (3) $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ かつ $\gamma' \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, $s_0 = 1 - \gamma'$.
- (4) $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ かつ $\gamma' \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ かつ $\gamma + \gamma' \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$ の時, $s_0 = 2 - \gamma - \gamma'$.
- (5) $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ かつ $\gamma' \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ かつ $\gamma + \gamma' \notin \mathbb{Z}_{\leq 1}$ の $s_0 = 0$.

と定まる.

(5) の場合は, 制限加群は $\mathbb{C}$ と同型となる.

(1), (2), (3) は, $M(\alpha, \beta, \beta', 0, \gamma')$, $M(\alpha, \beta, \beta', \gamma, 0)$, $M(\alpha, \beta, \beta', 0, 0)$ の制限加群に隣接関係式を使って帰着させることになる.

$M(\alpha, \beta, \beta', 0, \gamma')$, $M(\alpha, \beta, \beta', \gamma, 0)$, $M(\alpha, \beta, \beta', 0, 0)$ について, 制限加群を計算した結果は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & \gamma' & -\alpha\beta' \end{pmatrix} \quad (\text{各列は } \partial_x, \partial_y, 1 \text{ に対応する.})$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & -\alpha\beta' \end{pmatrix} \quad (\text{各列は } \partial_x, \partial_y, 1 \text{ に対応する.})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -(\alpha+1)\beta & \alpha^2\beta\beta' \\ 0 & 0 & (\alpha+1)\beta' & 0 & 0 & -\alpha^2\beta\beta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha+1)\beta & 0 \\ 1 & 0 & -(\alpha+1)(\beta+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(\alpha+1)(\beta'+1) & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha+1)\beta' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{各列は}\partial_x^2, \partial_x\partial_y, \partial_x, \partial_y^2, \partial_y, 1 \text{ に対応する.})$$

となる。パラメータの場合分けにより、この行列のランクがわかり、制限加群のベクトル空間としての次元が得られる。(細かい計算結果を書く)

(4) は以下のように扱う。 $\gamma + \gamma' = k \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$ とおき、 $\gamma' = -\gamma - k$ とおいて、

$$I_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, -\gamma - k)$$

を考える。 b 関数の最大非負整数根は $s_0 = 2 - k$ 。 k を改めてパラメータと思って、 k についての隣接関係式を求め、 k が消えるようなパラメータに帰着させる。すなわち、

$$I_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, -\gamma - k) \leftrightarrow I_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, -\gamma - (k-1)) \leftrightarrow I_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, -\gamma - (k-2)) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow I_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, -\gamma)$$

参考文献

- [1] M.A.Barkatou, T.Cluzeau, C.El Bacha, J.-A.Weil, Computing Closed Form Solutions of Integrable Connections, ISSAC '12: Proceedings of the 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 43–50.
https://www.unilim.fr/pages_perso/thomas.cluzeau/Packages/IntegrableConnections/PDS.html
- [2] C.Berkesch, L.F.Matusevich, U.Walther, Torus equivariant D-modules and hypergeometric systems, Advances in Mathematics, 350 (2019), 1226–1266.
- [3] K.Nabeshima, K.Ohara, S.Tajima, Comprehensive Gröbner Systems in Rings of Differential Operators, Holonomic D -modules and b -functions, ISSAC 2016 - Proceedings of the 2016 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 349–356.
- [4] D.Micciancio, Efficient reductions among lattice problems, Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2008, San Francisco, California, USA, January 20–22, 2008
- [5] H.Nakayama, Computing contiguity operators by Gröbner bases of free modules, to appear in Susikisyori 30(2) (2024), in Japanese.
- [6] T.Oaku, Algorithms for b -functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D -modules. Advances in Applied Mathematics 19 (1997), 61–105.
- [7] T.Oshima, Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, MSJ Memoirs, Mathematical Society of Japan, 28 (2012).
- [8] M.Saito, Isomorphism Classes of A -Hypergeometric Systems, Compositio Mathematica 128, (2001) 323–338.
- [9] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations, (2000), Springer.

- [10] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, Hypergeometric polynomials and integer programming. *Compositio Mathematica* 155 (1999), 185–204.
- [11] B.Sturmfels, Gröbner bases and convex polytopes, AMS, 1996.
- [12] N.Takayama, Gröbner basis and the problem of contiguous relations, *Japan Journal of Applied Mathematics*, 6 (1989), 147-160.