

円上の画像圧縮

神戸大学大学院 数学専攻

高山ゼミ 山口晃広

目次

1	具体的手法	3
1.1	弦の振動と $[0, 1]$ 上 1 変数関数の近似	3
1.2	矩形上の膜の振動と J P E G の関係	5
1.3	このアイデアを円上の画像圧縮へ適応	6
2	円上の場合の固有関数展開の詳細	8
2.1	円上のラプラス方程式を変数分離で解く	8
2.2	ベッセル関数の直交性	14
2.3	フーリエ・ベッセルの展開	15
3	まとめ	16

序

画像圧縮技術は、文字画像のような画素の並びをパターンと見た方が効率的であるものにはG I F 圧縮、写真のような色の変化が滑らかな画像にはJ P E G 圧縮、とその用途に応じて使い分ける必要があります。

画像を (x, y) の位置における色や輝度を値に持つ2変数関数と思うことで、多くの画像で使用されているJPEG圧縮は、 $\cos(\pi m x) \cos(\pi n y)$ ($m, n \in \mathbb{N}_0$) で固有関数展開した係数を格納していると見ることができます。

しかしこの方法では、図1のように、画像を載せる物体の形が矩形でない場合、その境界上で色(濃度)の差が大きいことからギブズ現象が起り、図2のようにノイズが入ってしまいます。

そこで音の圧縮が、弦や膜といった物体の形に合わせた固有関数で展開することで、実際の音色を良く近似できるということに着目し、画像を載せる物体の形に合わせた固有関数を使って展開することを試みました。このアイデアは高山先生から頂きました。

特に今回は画像を載せる形が円形の場合で調べ、通常のJPEGなどで使われている $\cos(\pi m x) \cos(\pi n y)$ ($m, n \in \mathbb{N}_0$) で展開した場合(図2)と比較し、図3のように綺麗に圧縮できることが分かりました。

以下、その概要を見ていきたいと思います。

図1: 円上の画像における圧縮結果の比較



図2: 通常のJPEGで使われる \cos の積で展開した画像圧縮例(係数の数:5184)

図3: ベッセル関数による新しく行った円上の画像圧縮法(係数の数:5050)

1 具体的手法

具体的には、以下のようなラプラス方程式の固有関数を求め、その関数で音（今回は画像）を固有関数展開することを考えます。

f を D 上で定義できる関数として、

$$\begin{cases} D = \text{正方形や円といった圧縮したい物体の領域} \\ -\Delta f = \lambda f \\ \text{領域 } D \text{ の境界上で } f = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1.1 弦の振動と $[0, 1]$ 上 1 変数関数の近似

ラプラス方程式 (1) の最も簡単な例として、 $f(x)$ を $[0, 1]$ 上で定義できる関数として、

$$\begin{cases} D = [0, 1] \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = \lambda f(x) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

の固有値問題があります。これを解くと固有関数は、

$$\sin \pi n x \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

と求まり、

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x$$

のように表すことができます。この級数を有限で打ち切っても、弦の音色は良く近似できているという性質があります。これを $[0, 1]$ 内で連続な関数に適応した例が図 4 で、離散的な値を持つ関数に適応した例が図 8 になります。連続関数であれば、高周波成分を切り取っても殆どもとの関数を近似できますが、不連続な部分ではギブズ現象が起こってしまって、綺麗に元の関数に収束しないことが分かります。

図 4: $x < 0.5$ の時 $2x$ 、 $0.5 \leq x$ の時 $-2x + 2$ 、のグラフ

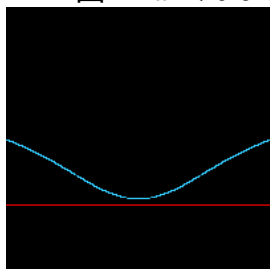


図 5: 係数の数:4

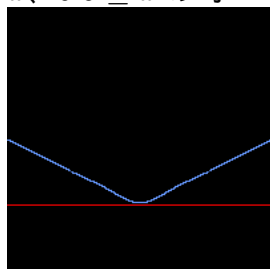


図 6: 係数の数:11

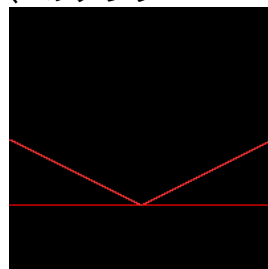


図 7: 係数の数:52

図 8: $x < 0.3$ の時 -1 、 $0.3 \leq x < 0.6$ の時 1 、 $0.6 \leq x$ の時 -0.5 のグラフ

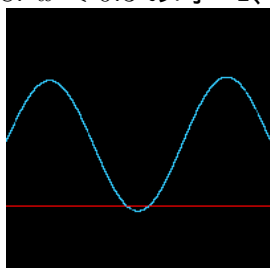


図 9: 係数の数:4

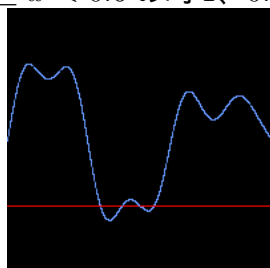


図 10: 係数の数:11

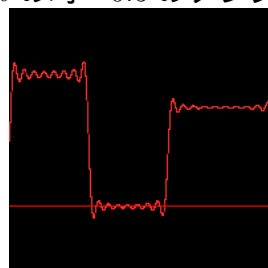


図 11: 係数の数:52

1.2 矩形上の膜の振動と J P E G の関係

次に、ラプラス方程式 (1) で領域 D が矩形の場合を考えます。具体的には、

$$\begin{cases} D = [0, 1] \times [0, 1] \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \lambda f \\ f(x, y) = 0 \ (\forall (x, y) \in \partial D) \end{cases}$$

という固有値問題を考えます。

この場合、固有関数展開は、

$$f = \sum_{m, n \in \mathbb{N}} a_{mn} \sin \pi m x \sin \pi n y$$

となります。この展開は級数を有限で打ち切っても、矩形の膜の振動を良く近似できることが知られています。

この固有関数展開を周波数の低い有限和で打ち切ることで、矩形領域に載せた画像を圧縮してみます。係数を格納することで元の関数 (または画像) を近似する固有関数展開を復元できるので、JPEG などの圧縮方式では、この係数を格納しています。¹

この \sin を \cos に変えた固有関数展開が JPEG 圧縮に対応しています。

図 12 は、 \sin または \cos を固有関数展開したものを周波数の低い有限和で打ち切った図です。

図 13 は元画像 f を、

$$f = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \sin \pi m x \sin \pi n y \ (M, N = 30)$$

で近似した図です。また図 14 は元画像 f を、

$$f = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \cos \pi m x \cos \pi n y \ (M, N = 71)$$

で近似した図です。

¹実際の JPEG 圧縮では 8×8 ブロックに対して離散コサイン変換した係数を格納しています。また格納するとき更にその係数の列を圧縮しています。

図 12: 矩形領域での固有関数展開を画像圧縮に適用した例



図 13: \sin を使って展開した例 (係数の総数 : $31 \times 31 = 961$)

図 14: \cos を使って展開した例 (係数の総数 : $72 \times 72 = 5184$)

1.3 このアイデアを円上の画像圧縮へ適応

図 1 から分かるように、円上に載せた画像を通常の \cos の積を使って固有関数展開すると、円周の周りにノイズが入ってしまっているのが分かります。これは、写真のような濃度の変化が滑らかな画像なら、級数展開を有限和で打ち切っても綺麗に復元できるのですが、 \cos の積で展開する場合矩形領域で展開しなければならず、濃度の変化が激しい部分でギブズ現象が起きているためです。

そこで、円領域の固有関数を求め、 \cos の積の代わりにその関数で画像を近似することを試みました。実際、円領域の固有関数展開を有限和で打ち切ったものは、円形膜の太鼓の音を良く近似できることが知られています。それを画像に適応したことが、今回新しく行ったこととなります。

具体的には以下のラプラス方程式の固有値問題を解きます。

$$\begin{cases} D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \lambda f \\ f|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

この固有関数展開は、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と極座標変換して、

$$f(r, \theta) = F(r)G(\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{A_{n,k} \cos(n\theta) + B_{n,k} \sin(n\theta)\} J_n(\lambda_{n,k} r)$$

($\lambda_{n,k}$: $J_n(x)$ の k 番目の正の零点)

この展開はフーリエ・ベッセルの展開と言います。

\cos , \sin に直交性があるように、ベッセル関数にも以下のような直交性がある為、

$$A_{n,k} = \frac{2}{\pi [J_{n+1}(\lambda_{n,k})]^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) J_n(\lambda_{n,k} r) \cos n\theta r dr d\theta, \quad n = 0, 1, \dots$$

($n = 0$ の時、係数 2 を 1 に変える)

$$B_{n,k} = \frac{2}{\pi [J_{n+1}(\lambda_{n,k})]^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta r dr d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

のように係数を求めることができ、画像を圧縮復元することが可能です。図 3 は、級数の和を n, k 共に 50 で打ち切った時の圧縮結果で、係数の総数は $51 \times 50 + 50 \times 50 = 5050$ です。

図 15 は、フーリエ・ベッセルの展開で級数の数を増やしていった時、画像が近似されていく様子を表しています。図 19 は、通常の \cos の積を使った展開で級数の数を増やしていった時、画像が近似されていく様子を表しています。図 15 と図 19 を比べると、近似されていく様子も固有関数によって独特であることが分かります。

図 15: ベッセル関数による近似過程

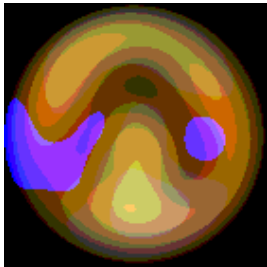


図 16: 係数の数:108

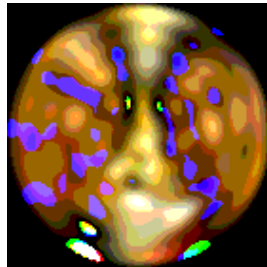


図 17: 係数の数:210

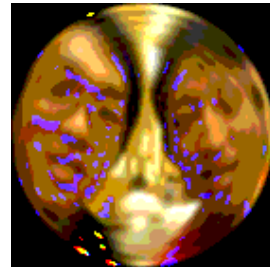


図 18: 係数の数:1176

図 19: \cos の積による近似過程

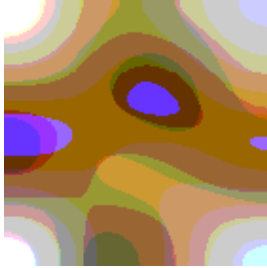


図 20: 係数の数:16

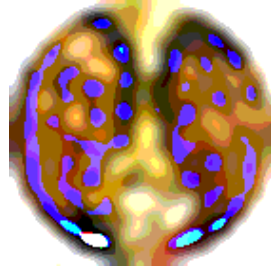


図 21: 係数の数:289



図 22: 係数の数:1936

ホームページでは、ここで紹介した図をアニメーションで公開しています。もし興味があれば御覧になってください。

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/yamaguti/en>

数学の詳細は次のセクションで説明します。

2 円上の場合の固有関数展開の詳細

ここでは、画像を載せる物体が円の場合の固有関数展開の導出の数学的詳細を書きたいと思います。

2.1 円上のラプラス方程式を変数分離で解く

このセクションは、ゼミで同輩が解いた部分を再度解き直した部分になります。

以下の D 上で定義された f を変数分離法で求めます。

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (2)$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \lambda f \quad (3)$$

$$f|_{\partial D} = 0 \quad (4)$$

まず、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と極座標に変換することを考えます。

$$\begin{aligned} f_x &= f_r r_x + f_\theta \theta_x \\ f_{xx} &= (f_r r_x)_x + (f_\theta \theta_x)_x \\ &= (f_r)_x r_x + f_r r_{xx} + (f_\theta)_x \theta_x + f_\theta \theta_{xx} \\ &= (f_{rr} r_x + f_{r\theta} \theta_x) r_x + f_r r_{xx} + (f_{\theta r} r_x + f_{\theta\theta} \theta_x) \theta_x + f_\theta \theta_{xx} \end{aligned}$$

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r} \\ \theta_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} \\ r_{xx} &= \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3} \\ \theta_{xx} &= -y \cdot \left(-\frac{2}{r^3}\right) \cdot r_x = \frac{2xy}{r^4} \end{aligned}$$

から、

$$f_{xx} = \frac{x^2}{r^2} f_{rr} - \frac{2xy}{r^3} f_{r\theta} + \frac{y^2}{r^3} f_r + \frac{y^2}{r^4} f_{\theta\theta} + \frac{2xy}{r^4} f_\theta$$

同様に、

$$f_{yy} = \frac{y^2}{r^2} f_{rr} - \frac{2yx}{r^3} f_{r\theta} + \frac{x^2}{r^3} f_r + \frac{x^2}{r^4} f_{\theta\theta} + \frac{2yx}{r^4} f_\theta$$

よって、

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \lambda \right) f = 0 \quad (5)$$

$f(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ とおくことで、式 (5) は $F' = \frac{\partial F}{\partial r}$ 、 $\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial \theta}$ とすると、

$$\begin{aligned} F''G + \frac{1}{r}F'G + \frac{1}{r^2}F\ddot{G} + \lambda FG &= 0 \\ \frac{r^2}{F}(F'' + \frac{1}{r}F' + \lambda F) &= -\frac{\ddot{G}}{G} = k(\text{定数}) \\ \begin{cases} r^2F'' + rF' + (\lambda r^2 - k)F &= 0 & (6) \\ \ddot{G} + kG &= 0 & (7) \end{cases} \end{aligned}$$

と変数分離できます。

更に、

$$x = \sqrt{\lambda}r, \nu = \sqrt{k}, y = F \quad (8)$$

と置くと、式 (7) の解は θ が 2π で周期を持つことと ν が非負であることから $\nu \in \mathbb{N}_0$ が分かり、 A, B を任意定数として

$$\forall \nu \in \mathbb{N}_0 \text{ に対して、 } G(\theta) = A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta) \quad (9)$$

となります。

次に式 (6) の解を求めます。式 (8) より

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu)y = 0 \quad (10)$$

$$\text{または } Dy = 0 \quad (D := x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \nu^2)) \quad (11)$$

と変形できます。以下この一般解を導出します。

微分作用素 D は、オイラー作用素を $\theta_x := x \frac{d}{dx}$ と置き、

$h(x)$ を多項式とすると、 $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $h(\theta_x)x^\alpha = h(\alpha)x^\alpha$ (12)

$$\theta_x(\theta_x - 1) = x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} - 1 \right) = x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} = x^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

に注意して、

$$\begin{aligned} D &= \theta_x(\theta_x - 1) + \theta_x + (x^2 - \nu^2) = \theta_x^2 + (x^2 - \nu^2) \\ &= (\theta_x - \nu)(\theta_x + \nu) + x^2 \end{aligned}$$

と書けます。

フロベニウスの方法から、

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\rho+n} \quad (\rho \in \mathbb{R}, c_0 \neq 0) \quad (13)$$

$$\text{特に } c_0 := \frac{1}{2\rho\Gamma(\rho+1)} \quad (14)$$

と置いて、 $Dy = 0$ より、

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \{(\theta_x - \nu)(\theta_x + \nu) + x^2\} c_n x^{\rho+n} = 0 \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(\theta_x - \nu)\{(\rho + n)x^{\rho+n} + \nu x^{\rho+n}\} + x^{\rho+n+2}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \{(\rho + n + \nu)(\theta_x - \nu)x^{\rho+n} + x^{\rho+n+2}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \{(\rho + n + \nu)((\rho + n)x^{\rho+n} - \nu x^{\rho+n}) + x^{\rho+n+2}\} = 0 \\
\text{よって、} & \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((\rho + n + \nu)(\rho + n - \nu) + x^2) x^{\rho+n} = 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

であるから、級数の各係数が0であることに注意して、

$$x^\rho: c_0(\rho + \nu)(\rho - \nu) = 0, \quad c_0 \neq 0 \text{ より、} \quad \rho = \pm \nu$$

$$x^{\rho+1}: c_1(\rho + 1 + \nu)(\rho + 1 - \nu) = 0 \text{ より、} \quad c_1 = 0$$

$$x^{\rho+n} \ (n \geq 2): c_n(\rho + n + \nu)(\rho + n - \nu) + c_{n-2} = 0 \text{ より、} \quad c_n = \frac{-1}{(\rho + n + \nu)(\rho + n - \nu)} c_{n-2}$$

が求まります。よって、

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} x^{\rho+2l} \quad (16) \\
c_{2l} &= \frac{(-1)^1}{(\rho + 2l + \nu)(\rho + 2l - \nu)} c_{2(l-1)} \\
&= \frac{(-1)^2}{(\rho + 2l + \nu)(\rho + 2(l-1) + \nu)(\rho + 2l - \nu)(\rho + 2(l-1) - \nu)} c_{2(l-2)} \\
&\vdots \\
&\text{式 (14) より} \\
&= \frac{(-1)^l}{(\rho + 2l + \nu)(\rho + 2(l-1) + \nu) \cdots (\rho + 2 + \nu)} \\
&\quad \frac{1}{(\rho + 2l - \nu)(\rho + 2(l-1) - \nu) \cdots (\rho + 2 - \nu)} \frac{1}{2^\rho \Gamma(\rho + 1)} \quad (17)
\end{aligned}$$

となり、 Γ 関数の性質

$$\Gamma(m + 1) = m\Gamma(m), \quad \Gamma(1) = 1 \quad (18)$$

を使って、

1. ($\rho = +\nu$ の時):

$$c_{2l} = \frac{(-1)^l}{2^{2l}(\nu+l)(\nu+l-1)\cdots(\nu+1)l!} \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

ガンマ関数の性質 (18) より

$$= \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+\nu+1)}$$

2. ($\rho = -\nu$ の時):

$$c_{2l} = \frac{(-1)^l}{2^{2l}(-\nu+l)(-\nu+l-1)\cdots(-\nu+1)l!} \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}$$

ガンマ関数の性質 (18) より

$$= \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l-\nu+1)}$$

と計算できます。このことから、

$$\begin{cases} J_\nu(x) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu} & (19) \\ J_{-\nu}(x) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-\nu} & (20) \end{cases}$$

は、微分方程式 (10) の解となります。ベッセルの微分方程式 (10) は、2階線形常微分方程式であるから、一般解を求めるには、線形独立な2個の特解を必要とします。

ベッセル関数の性質から、

- $\nu \notin \mathbb{Z}$ なら、式 (19) と式 (20) は一次独立 (証明未)。
- $\nu \in \mathbb{Z}$ なら、 $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu(x)$ より、式 (19) と式 (20) は一次従属。²

² $J_{-n} = (-1)^n J_n(x) \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$

Proof. 式 (20) で、 $\nu = n$ と置けば、

$$J_{-n}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-n} \quad (21)$$

$\nu \in \mathbb{Z}$ の場合、式 (19) と一次独立な解として、

$\alpha \notin \mathbb{Z}$ に対して、

$$\begin{aligned}
 Y_\nu(x) &:= \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \nu} \frac{J_\alpha(x) - (-1)^\nu J_{-\alpha}(x)}{\alpha - \nu} \\
 &= \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \nu} \left\{ \frac{J_\alpha(x) - J_\nu(x)}{\alpha - \nu} - (-1)^\nu \frac{J_{-\alpha}(x) - J_{-\nu}(x)}{\alpha - \nu} \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial J_\alpha(x)}{\partial \alpha} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\alpha}(x)}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=\nu} \quad (22)
 \end{aligned}$$

が採れます。

式 (9) より $\nu \in \mathbb{N}_0$ なので、式 (10) の一般解は A, B を任意定数として、 $y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$ と書けますが、 $y = F$, $x = \sqrt{\lambda}r$ より $x = 0$ で有界。 $Y_\nu(x)$ は $x = 0$ で発散するので $B = 0$ となります。

結局、(境界条件も含めた) 式 (6) の解は、

$\forall \nu \in \mathbb{N}_0, \forall \lambda \in \{ \text{式 (3) (または式 (6)) の正の固有値} \}$ に対して、

$$F(r) = AJ_\nu(\sqrt{\lambda}r) \quad (23)$$

と書けます。

m の正負に関わらず、 $m\Gamma(m) = \Gamma(m+1)$ が成立するので、 m が 0 または自然数の時、

$$\frac{1}{\Gamma(-m)} = \frac{-m}{\Gamma(-m+1)} = \frac{-m(-m+1)\cdots(-1)\cdot 0}{\Gamma(1)} = 0$$

が成り立つ。よって、式 (21) の級数は n から始まり、

$$\begin{aligned}
 J_{-n}(x) &= \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-n} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l}}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(n+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l} \\
 &= (-1)^n J_n(x)
 \end{aligned}$$

□

2.2 ベッセル関数の直交性

このセクションと次のセクションは、文献 [1] に書かれている必要部分をそのまま引用したものです。

微分方程式 (6) は、微分演算子 L を使って

$$L[F] := \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) - \frac{\nu^2}{r} F \quad (24)$$

$$L[F] + \lambda r F = 0 \quad (25)$$

と書くことができます。相異なる固有値を λ_k, λ_l ととると

$$L[J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r)] + \lambda_k r J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r) = 0, \quad L[J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r)] + \lambda_l r J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r) = 0$$

最初の式に $J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r)$ を第 2 の式に $J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r)$ を掛け、差をとり r に関し 0 から 1 まで積分すると、

$$\begin{aligned} & (\lambda_k - \lambda_l) \int_0^1 r J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r) J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r) dr \\ &= \int_0^1 \left\{ J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r) L[J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r)] - J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r) L[J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r)] \right\} dr \\ &= \int_0^1 \left\{ J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_\nu(\sqrt{\lambda_l}r)}{dr} \right) - J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_\nu(\sqrt{\lambda_k}r)}{dr} \right) \right\} dr \end{aligned}$$

ここで部分積分を行うと右辺は

$$= \left[r \left\{ J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r) \frac{dJ_\nu(\sqrt{\lambda_l}r)}{dr} - J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r) \frac{dJ_\nu(\sqrt{\lambda_k}r)}{dr} \right\} \right]_0^1$$

$\nu \geq 0$ より右辺は

$$= J_\nu(\sqrt{\lambda_k}r) \sqrt{\lambda_l} J'_\nu(\sqrt{\lambda_l}r) - J_\nu(\sqrt{\lambda_l}r) \sqrt{\lambda_k} J'_\nu(\sqrt{\lambda_k}r)$$

ここで、 $\sqrt{\lambda_k}, \sqrt{\lambda_l}$ として、ベッセル関数の正の零点 $\lambda_{\nu,j} (j = 1, 2, \dots)$ の中の相異なる任意の 2 つを選ぶこととすると、

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda_{\nu,k}r) J_\nu(\lambda_{\nu,l}r) dx = 0, \quad \lambda_{\nu,k} \neq \lambda_{\nu,l}: J_\nu(x) \text{ の正の零点} \quad (26)$$

計算は省略しますが、固有値を正の零点の 2 乗にとることで、以下の式も成り立ちます。

$$\int_0^1 x [J_\nu(\lambda_{\nu,k}r)]^2 dx = \frac{1}{2} [J_{\nu+1}(\lambda_{\nu,k})]^2, \quad \lambda_{\nu,k}: J_\nu(x) \text{ の正の零点} \quad (27)$$

2.3 フーリエ・ベッセルの展開

固有値をベッセル関数の正の零点の2乗にとることで、式(23)と式(9)と合わせ、 $A_{n,k}, B_{n,k}$ を任意定数として、

$$f(r, \theta) = F(r)G(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{A_{n,k} \cos(n\theta) + B_{n,k} \sin(n\theta)\} J_n(\lambda_{n,k}r) \quad (28)$$

$\lambda_{n,k}: J_n(x)$ の k 番目の正の零点

のように表すことができます。

式(2.3)の両辺に $\cos n\theta$ を掛け、 $-\pi$ から π まで積分すれば、 \cos, \sin の直交性より、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \cos n\theta d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} J_n(\lambda_{n,k}r), \quad n = 1, 2, \dots$$

($n = 0$ に対しては係数 π を 2π に書き換える。)

更に、 $r J_n(\lambda_{n,k}r)$ を掛け、 0 から 1 まで積分すると、式(26)と式(27)より、

$$A_{n,k} = \frac{2}{\pi [J_{n+1}(\lambda_{n,k})]^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) J_n(\lambda_{n,k}r) \cos n\theta r dr d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

($n = 0$ の時、係数 2 を 1 に変える)

同様にして、

$$B_{n,k} = \frac{2}{\pi [J_{n+1}(\lambda_{n,k})]^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) J_n(\lambda_{n,k}r) \sin n\theta r dr d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (30)$$

が得られます。

この展開をフーリエ・ベッセル展開と呼びます。³

³この展開が可能である ($\{\sqrt{x}J_n(\lambda_{n,k}x)\}$ が完全である) ことの証明は、吉田耕作: 積分方程式論 (1950) を参照。

3 まとめ

FFTのような効率の良い計算法が未だ無いため、速度に問題がありますが、今回の実験で、画像を載せる物体の形に合わせた固有関数を使い展開することで、その画像により適した画像圧縮法を作れる可能性が出てきました。

また、この展開の係数を特徴量とすることで画像の形状により適した画像認識アルゴリズムを作れる可能性もあります。

今後、円上以外の画像に対しても調べていけたらと思っています。

ホームページではここで紹介した図をアニメーションで公開しています。もし興味があれば御覧になってください。

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/yamaguti/en>

アニメーション GIF を C 言語で作成するライブラリは、

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/yamaguti/>

で公開しています。自分自身このライブラリを使って画像処理の研究をしています。

参考文献

- [1] “直交関数系”，伏見 康治 (著)，赤井 逸 (著)，共立出版；ISBN: 432007114X；増補版 版 (1987/02)