

微分積分学（微分法） 講義スライド

担当教員：伊藤健一

2026年8月10日版

この講義について

内容： 微分法（常微分，偏微分）に関する基礎事項を学ぶ.

参考書： 南和彦「微分積分講義」（裳華房）
難波誠「微分積分学」（裳華房）
杉浦光夫「解析入門I, II」（東大出版）
（あくまで参考として挙げた．各自に合う本を見つけるのが望ましい.）

1

第1章 記号・用語等の確認

§ 1.1 数の集合

数の集合に以下の記号を用いる.

$\mathbf{R}$ ：実数全体の集合 $\mathbf{Q}$ ：有理数全体の集合
 $\mathbf{Z}$ ：整数全体の集合 $\mathbf{N}$ ：自然数 $(1, 2, \dots)$ 全体の集合
 $\mathbf{C}$ ：複素数全体の集合

また，区間を以下の記号で表す.

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R}; a < x < b\}$ ：开区間
 $[a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a \leq x \leq b\}$ ：閉区間
 $(a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a < x \leq b\}$ ：(左) 半开区間, (右) 半閉区間
 $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R}; a < x\}$ ：半無限开区間

ここで， $\leq$ は $\geq$ と同じである． $[a, b)$, $(-\infty, b]$ なども同様に定義される.

3

注意. ∞ は無限大と読む. ∞ は便宜的な記号であって「数」ではない. よって, $(a, \infty]$ などは考えない.

問 1. 次の区間を数直線上に図示せよ.

1. $(-1, 1/2)$
2. $[-3, 2]$
3. $[0, \sqrt{2})$
4. $[3, \infty)$

§ 1.2 論理記号

定義. 1. 「すべての」を全称記号「 $\forall$ 」で表す.

2. 「存在する」を存在記号「 $\exists$ 」で表す.

例. 1. 論理式

$$\forall x \in \mathbf{R} \ x^2 \geq 0$$

は「すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $x^2 \geq 0$ が成り立つ」を意味する. なお英語で書けば, 「For all $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geq 0$ 」となる.

2. 論理式

$$\exists x \in \mathbf{R} \text{ s.t. } x \geq 0$$

は「 $x \geq 0$ を満たす $x \in \mathbf{R}$ が存在する」を意味する. なお英語で書けば, 「There exists $x \in \mathbf{R}$ such that $x \geq 0$ 」となる. 「s.t.」は省略してもよい.

注意. 1. 「すべての」, 「任意の」, 「それぞれの」, 「各」などはすべて同じ意味である. 「変数を勝手に一つ選んで固定する」と読むべき場合もある.

2. 「 $\cdots$ を満たす x が存在する」, 「ある x が存在して $\cdots$ 」, 「ある x に対して $\cdots$ 」はすべて同じ意味である. 「 $\cdots$ を満たす x を一つ選んで固定する」と読むべき場合もある. なお一意性は主張しない.
3. 数学の文章では, 変数の現れる順番に意味があり, 前出の変数は後出の変数には依存せず, 逆に, 後出の変数は前出の変数に依存してよい. 実際上は「変数は現れた順に固定し, その後は原則的に動かさない」と考えるとよい. 具体的には次の問とその解答を参照せよ.
4. 日本語としておかしく感じられることもあるが, 気にしないでよい.
5. 本講ではこのような論理的な事項にはそれほど重点を置かない.

問 2. 次の命題の真偽を判定せよ.

1. すべての実数 x に対してある実数 y が存在して $x < y$ となる.
2. 任意の実数 x に対してある実数 y をとると $x < y$ である.
3. $\forall x \in \mathbf{R} \ \exists y \in \mathbf{R} \text{ s.t. } x < y$.
4. ある実数 y が存在してすべての実数 x に対して $x < y$ が成り立つ.
5. $\exists y \in \mathbf{R} \ \forall x \in \mathbf{R} \ x < y$.
6. ある $C > 0$ が存在してすべての $x \in (0, \infty)$ に対し $x^2 < Cx$ である.
7. 任意の $R > 0$ に対してある $C > 0$ が存在してすべての $x \in (0, R]$ に対して $x^2 < Cx$ が成り立つ.

解. 1, 2, 3は同一の命題で, すべて真である. 例えば,

- $x = 100$ に対して, $y = 101$ は $x < y$ を満たす.
- $x = 1000000$ に対して, $y = 1000001$ は $x < y$ を満たす.
- $x = 10^{10^{10}}$ に対して, $y = 10^{10^{10}} + 1$ は $x < y$ を満たす.
-

一般に, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し $y = x + 1$ ととれば良い.

注意. 「任意の」とあっても動かさないで考えるとよい. 動かしてもよいが, その場合は後出の変数もそれに応じて動いてしまうことに注意する. 変数選択時に任意性を課しておけば, 固定しても動かすのと同じ効果がある.

4, 5は同一の命題で, ともに偽である. 例えば,

- $y = 100$ ととっても $x = 101$ は $x < y$ を満たさない.
- $y = 1000000$ ととっても $x = 1000001$ は $x < y$ を満たさない.
- $y = 10^{10^{10}}$ ととっても $x = 10^{10^{10}} + 1$ は $x < y$ を満たさない.
-

一般に, どのような $y \in \mathbf{R}$ をとっても $x = y + 1$ は $x < y$ を満たさない.

注意. 1. $y = \infty$ とすることはできない. ∞ は数ではないからである.

2. 繰り返しになるが, 変数は現れた順に固定して読むとよい. 固定する際に, 「任意の」変数なのか, 「ある (適切な)」変数なのか, に注意せよ.

6. これは偽である. なお命題を論理記号で書けば,

$$\exists C > 0 \ \forall x \in (0, \infty) \ x^2 < Cx$$

となる.

7. これは真である. なお命題を論理記号で書けば,

$$\forall R > 0 \ \exists C > 0 \ \forall x \in (0, R] \ x^2 < Cx$$

となる.



問 3. 以下の命題の真偽を判定せよ.

1. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbf{N} \forall x \in [0, 1) \ x^n \leq \epsilon$
2. $\forall c \in (0, 1) \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbf{N} \forall x \in [0, c) \ x^n \leq \epsilon$

12

§ 1.3 関数

高校数学では, $f(x) = (\log x)^2$ のように, 「 x を含む式」のことを関数と呼んだ. 大学の数学ではこれを, $x \in (0, \infty)$ を入れると実数 $f(x)$ が返ってくる「ブラックボックス」あるいは「対応」と読み替える. 例えば,

- $x = 1$ には $f(1) = (\log 1)^2 = 0$ が対応する.
- $x = e$ には $f(e) = (\log e)^2 = 1$ が対応する.
- $x = \pi$ には $f(\pi) = (\log \pi)^2$ が対応する.
- 一般の $x \in (0, \infty)$ には $f(x) = (\log x)^2 \in \mathbf{R}$ が対応する.

このように, 対応としての機能に注目した $f(x)$ を単に f で表し,

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \ x \mapsto (\log x)^2$$

のように書く. これを一般化して, 以下のように定義する.

13

定義. $X, Y \subset \mathbf{R}$ とする. 各 $x \in X$ に一つの $f(x) \in Y$ を返すような対応 f のことを, X 上の関数と呼び, これを

$$f: X \rightarrow Y, \ x \mapsto f(x)$$

で表す. さらに, X, Y をそれぞれ f の定義域, 終域 (終集合) と呼び, 集合

$$\{f(x) \in Y; \ x \in X\}$$

を f の値域と呼ぶ.

注意. 関数は定義域のすべての点で定義されなければならないが, 終域は値域と一致しなくてよい. 例えば, 前項の関数 $f(x) = (\log x)^2$ は

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

のどちらともよい. (これは, 値域を特定することが一般には困難なためである.) ただし, 値域が終域をはみ出すような設定はできない.

14

例. $f(x) = \pm x$ で定まる対応 f は, $x \neq 0$ に対し 2 つの値 $\pm x$ を返すため, 数学では関数とはみなさない. このような対応は, 多価関数と呼ばれる.

例 (Dirichlet の関数). 対応 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を, 各 $x \in \mathbf{R}$ に対し

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \text{ のとき,} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める. f は「 x の自然な式」では書けないが, 大学の数学では関数として扱われる.

15

問 4. Dirichlet の関数のグラフを想像せよ.

定義. $X, Y \subset \mathbf{R}$ とし, $f: X \rightarrow Y$ を関数とする.

1. f が単射 (または **1対1**) であるとは,

$$\forall x \in X \ \forall x' \in X \quad "x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')"$$

を満たすことである.

2. f が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \text{ s.t. } y = f(x)$$

を満たすことである.

3. f が全単射 (または **1対1対応**) であるとは, f が全射かつ単射となることである.

注意. これらを議論するときは, 定義域や終域も関数の一部と考えるとよい.

問 5. $f(x) = (\log x)^2$ に対し, 以下のように定義域と終域を設定したとき, 単射であるか, また全射であるか判定せよ.

1. そのまま自然に $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ と考える.
2. 値域を精査して $f: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ とする.
3. 定義域も適当に制限して $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ とする.

問 6. f が狭義単調増加 [広義単調増加または単調非減少] であるとは,

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad [x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]$$

が成り立つことである. f が狭義単調増加なら, 単射であることを確かめよ. 逆はどうか, また広義単調増加の場合はどうかも考えよ.

§ 1.4 逆関数

高校数学では、 $y = f(x)$ が x について一意的に解けるとき、

$$x = f^{-1}(y)$$

と書いて、 f^{-1} を f の**逆関数**と呼んだ。これの一般化は以下のようになる。

定義. $X, Y \subset \mathbf{R}$ とし、 $f: X \rightarrow Y$ は全単射とする。このとき、任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ を満たす $x \in X$ がただ一つ定まる。この対応

$$f^{-1}: Y \rightarrow X, y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

で表し、 f の**逆関数**と呼ぶ。 f^{-1} は**エフ・インバース**と読む。

○ 逆三角関数

三角関数を逆に解くと無数の解が得られるので、前項の意味での逆関数は存在しない。しかし慣例的には、多価性を許容して**逆三角関数**が定義される。

定義. $y = \sin x$ の多価の逆関数を、**逆正弦（アーク・サイン）関数**と呼び、

$$\sin^{-1} y, \quad \arcsin y$$

で表す。特に、定義域（と終域）を制限した $\sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ の逆関数（前項の意味で）を、逆正弦関数の**主値**と呼び、

$$\text{Sin}^{-1} y, \quad \text{Arcsin } y$$

で表すことがある。余弦関数 $\cos$ 、正接関数 $\tan$ 、およびこれらの制限

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad \tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-\infty, \infty)$$

に対しても同様に定義する。

注意. $\sin^{-1} x$ を $(\sin x)^{-1}$ と読み間違えないよう注意せよ。

問 7. 多価の逆三角関数

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arctan x$$

のグラフを描き、主値の部分（**枝**、**分枝**とも呼ばれる）を見つけよ。

§ 1.5 初等関数

定義. 双曲線関数を $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

で定義する. これらはそれぞれ, ハイパボリック・サイン, ハイパボリック・コサイン, ハイパボリック・タンジェントと読む.

問 8. 双曲線関数のグラフの概形を描け.

以下のように, 双曲線関数は三角関数に似た性質を持つ.

問 9. 以下の等式を確かめよ.

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad (\cosh x)' = \sinh x \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

問 10. 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad \cosh t \geq 1$$

が成り立つことを確かめよ. 特に双曲線 (の片側) $x^2 - y^2 = 1, x \geq 1$ は

$$(x, y) = (\cosh t, \sinh t), \quad t \in \mathbf{R},$$

によってパラメータ付けられる.

注意. 問 10 の意味では, 三角関数は「円関数」とも呼べるだろう.

定義. 以下の組み合わせ（有限回の四則演算と合成）で書ける関数は、**初等関数**と呼ばれる：

$$c \text{ (定数関数)}, \quad x^\alpha \text{ } (\alpha \text{ は定数}), \quad e^x, \quad \log x, \\ \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x.$$

例. 双曲線関数や、**セカント**、**コセカント**、**コタンジェント**

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

は初等関数である。(cot x は稀に出てくるので覚えておくとうい.)

注意. 1. 正確には初等関数はいくつか広いクラスだが、厳密な定義は割愛する。

2. ガンマ関数、ゼータ関数、ベッセル関数、楕円関数などは初等関数としての表示を持たない。これらは**特殊関数**と呼ばれる。

28

問 11. $\cosh x$ ($x \geq 0$), $\sinh x$, $\tanh x$ の逆関数を**逆双曲線関数**と呼び、それぞれ

$$\operatorname{arcosh} x, \quad \operatorname{arsinh} x, \quad \operatorname{artanh} x$$

で表す。等式

$$\operatorname{arcosh} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x \in [1, \infty))$$

を示せ。同様に、 $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{artanh} x$ を初等関数で表せ（こちらは結果のみでよい）。

注意. 記号 $\operatorname{arcsinh} x$ (綴りに注意) が用いられることもあるが、これは本来は誤表記であり、正しくは $\operatorname{arsinh} x$ である。 $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$ に対しても同様である。なお、問の表示公式は覚えなくてもよいだろう。

29

解. $y = \operatorname{arcosh} x$ とおくと、定義より

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad (\spadesuit)$$

である。これを y について解く。相加・相乗平均の関係から

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq \sqrt{e^y \cdot e^{-y}} = 1$$

であることに注意しておく。方程式 $(\spadesuit)$ の両辺に $2e^y$ を掛けて整理すると、

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

となる。これを e^y に関する2次方程式と見ると、判別式は

$$\frac{D}{4} = x^2 - 1 \geq 0$$

30

なので、解くことができて

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

である。 $e^y \geq 1$ なので上の符号を選び、自然対数を取れば

$$y = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

を得る。

同様の計算から

$$\operatorname{arsinh} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad (x \in (-1, 1))$$

が分かる。

□

31

第2章 収束と連続性

§ 2.1 数列の収束

定義. 実数列 $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ の極限において実数 α に**収束する**とは,

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \text{ s.t. } "n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon"$$

が成り立つことである. このとき, α を $\{a_n\}$ の**極限**と呼び,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ または } a_n \rightarrow \alpha \ (n \rightarrow \infty)$$

で表す.

問 12. 上の収束の定義が「近づく」という事象に一致していることを, 納得するまで考えよ.

33

例. 上の定義に基づいて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

を確かめてみよう.

- $\epsilon = 0.01$ に対し $N = \epsilon^{-1} = 100$ ととると, $n > N = 100$ のとき

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = 0.01 = \epsilon.$$

- $\epsilon = 0.000001$ に対し $N = \epsilon^{-1} = 1000000$ ととると, $n > N$ のとき

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = 0.000001 = \epsilon.$$

- 一般に, 任意の $\epsilon > 0$ に対しては, $N \in \mathbf{N}$ を $N \geq \epsilon^{-1}$ となるように選べばよいだろう. (この例では, 収束の大体の早さもわかる.)

注意. 「近づく」という事象を, 論理式のみで表現し切れている点が重要である. このことにより, 直感に頼らずに収束の判定が可能となる. なお, この定義は (式で書けるとは限らない) あらゆる数列を適用対象としている. 収束の早さには何も言及していないことにも注意せよ.

34

35

定義. 実数列 $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ の極限において ∞ に発散するとは,

$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbf{N} \text{ s.t. } "n > N \Rightarrow a_n > M"$$

が成り立つことである. このことを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \text{ または } a_n \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)$$

で表す.

問 13. 実数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} n & n \text{ が素数のとき,} \\ n^{-1} & n \text{ が素数でないとき,} \end{cases}$$

により定める. $\{a_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ の極限において 0 に収束せず, また ∞ にも発散しないことを, 定義に基づいて理解せよ.

定理 2.1. 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

を持つとする. このとき, 以下が成り立つ:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$;
3. $\beta \neq 0$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$;
4. 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $a_n \leq b_n$ が成り立つならば, $\alpha \leq \beta$.

証明. ここでは 1 のみを示し, 2,3,4 の証明は省略する. 任意の $\epsilon > 0$ を固定する. このとき仮定から, ある $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して, 任意の $n > N_1$ に対し

$$|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ. 同様にある $N_2 \in \mathbf{N}$ が存在して, 任意の $n > N_2$ に対し

$$|b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ. 今, $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbf{N}$ とすると, 任意の $n > N$ に対し

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \epsilon$$

を得る. よって 1 が示された. $\square$

注意. 赤字の箇所を拾い読みすると, 示すべき結論 (の定義) をそのままなぞっていることが分かる. 仮定を使って, 如何にして行間を埋めるかが証明のキーである.

問 14. 定理 2.1 の仮定の下で, 上の証明と同様にして,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

を示せ. また証明を暗記せよ.

§ 2.2 連続性公理

○ 数列を用いた定式化

定義. 1. 実数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとは, ある $M > 0$ が存在して任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $a_n \leq M$ が成り立つことである.

2. 実数列 $\{a_n\}$ が広義単調増加 (単調非減少) であるとは, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことである.

公理 2.2 (実数の連続性公理). 上に有界な広義単調増加実数列は極限を持つ.

注意. 1. 公理という用語にはいくつかの意味があるが, ここでは理論体系の出発点となるべき「前提」を意味する. 実数に対し, 四則演算と大小関係に関する性質, および連続性公理を認めれば, 微分積分学のすべての定理を導出できる, という意味で連続性公理は重要な前提である. 本講では「実数の連続性公理」を証明なしで認める.

2. この公理は極限の具体的な値や収束の早さについては何も主張しない.

○ 連続性公理の応用例

定理 2.3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は収束する.

定義. 上の極限値を **Napier 数** と呼び, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ で表す.

証明. 任意の $n \geq 2$ に対し,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad \left[\text{ただし } \binom{n}{k} = {}_nC_k \text{ は二項係数} \right] \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

と書けることに注意する．するとこのとき，

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &< 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &< 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ．また， $\frac{1}{k!} = \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ に注意して，

$$a_n < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \cdot 1 \cdots 1 < 2 + 1 = 3$$

を得る．したがって実数の連続性公理により $\{a_n\}$ は収束する． $\square$

44

○ 最大値・最小値と上限・下限

定義. $A \subset \mathbf{R}$ とする． $\alpha \in A$ が A の **最大値** であるとは，

$$\forall a \in A \quad a \leq \alpha$$

が成り立つことである． A が最大値 α を持つとき，これを

$$\alpha = \max A$$

で表す． A の **最小値** も同様に定義され， $\min A$ で表される．

例. 明らかに， $\max[3, 9] = 9$ ， $\min[-2, 10] = -2$ である．

注意. 最大値は必ずしも存在しない．実際，区間 $[0, 1)$ に対しては，1 を最大値としたいところだが， $1 \notin [0, 1)$ なので，上の定義を満たさない．

45

定義. $A \subset \mathbf{R}$ とする．

1. $\alpha \in \mathbf{R}$ が A の **上界** であるとは，

$$\forall a \in A \quad a \leq \alpha$$

が成り立つことである． A が上界を持つとき， **上に有界** であるという．

2. A が上に有界なとき，その **上限** を

$$\sup A = \min\{\alpha \in \mathbf{R}; \alpha \text{ は } A \text{ の上界}\}$$

で定義する．また， A が上に有界でないときは，(便宜的に)

$$\sup A = \infty$$

と表す．

下界， **下に有界** であることおよび **下限** ($\inf A$) も同様に定義される．

46

例. 例えば，

$$\begin{aligned} \sup[0, 1] &= 1 = \max[0, 1], & \sup[2, 5] &= 5, \\ \sup\{x \in \mathbf{Q}; x < \sqrt{2}\} &= \sqrt{2}, & \sup(1, \infty) &= \infty, \\ \sup \mathbf{Z} &= \infty, & \inf(-1, 2] &= -1 \end{aligned}$$

である．これらを定義に基づいて厳密に証明するには少し議論が必要である．とりあえずここでは直感的に理解しておけば十分である．

注意. 一般に， A が最大値を持つなら，上限はその最大値に一致する．

47

上限の存在は次の公理によって保障される。

公理 2.4 (実数の連続性公理). 上に有界な実数の部分集合は上限を持つ。

定理 2.5. 公理2.2と公理2.4は同値である。

注意. 定理 2.5の証明は省略する。実数の連続性公理には、他にもいくつかの同値な言い換えが存在する。

48

§ 2.3 関数の連続性

本小節では、 $I \subset \mathbf{R}$ を区間とし、 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ を関数とする。

定義. $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が α に収束するとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } "0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon"$$

が成り立つことである。このとき、 α を $f(x)$ の $x \rightarrow a$ における極限と呼び、

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ または } f(x) \rightarrow \alpha \ (x \rightarrow a)$$

で表す。

注意. 右・左極限や $x \rightarrow \infty$ の場合も同様に定義する。詳細は省略する。

49

定義. 1. f が点 $a \in I$ において連続であるとは、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである。論理式を用いて表現するなら、

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } "0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon"$$

が成り立つことである。

2. f が区間 I 上で連続（または C^0 級）であるとは、 f が任意の $x \in I$ において連続となることである。

注意. 閉区間の端点では右・左極限を用いる。閉区間の端点の扱いは今後も同様であるが、いちいち注意しない。

50

例. 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ のとき,} \\ 1 & x > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める。 f は $x = 0$ で連続ではない。

51

例. 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbf{Q} \text{ のとき,} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める. f は $x = 0$ で連続だが, 任意の $x \neq 0$ では連続ではない.

52

定理 2.6 (中間値の定理). f は $[a, b]$ 上で連続で, $f(a) \leq f(b)$ とする. このとき, 任意の $\gamma \in [f(a), f(b)]$ に対しある $c \in [a, b]$ が存在して,

$$f(c) = \gamma$$

が成り立つ.

証明. 証明は省略する. □

注意. f が $[a, b]$ 上で連続なら, そのグラフは「つながっている」とされる. 中間値の定理はそれを裏付ける状況証拠である.

53

定理 2.7 (最大値・最小値の存在). f が閉区間 $[a, b]$ 上で連続ならば,

$$\max_{x \in [a, b]} f(x), \quad \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

が存在する.

証明. 証明は省略する. □

注意. 有界区間上の連続関数であっても, 最大値・最小値を持つとは限らない. 例えば, $f(x) = \tan x$, $x \in (0, \pi/2)$ は最大値も最小値も持たない.

54

○ 一様連続性

定義. f が I 上で一様連続であるとは,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x, y \in I \quad " |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon "$$

が成り立つことである.

注意. f が I 上で連続であるとは,

$$\forall x \in I \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall y \in I \quad " |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon "$$

が成り立つことであった. 上と比較して違いを理解せよ.

55

定理 2.8. 有界閉区間上の連続関数は一様連続である.

証明. 証明は省略する. $\square$

問 15. 以下の関数について, $\mathbf{R}$ 上で一様連続か判定せよ. なお, 証明をする必要はなく, 一様連続性の概念を捉えられれば十分である.

1. $\sin x$ 2. $e^{-|x|}$ 3. x^2

略解. 1. 一様連続である, 2. 一様連続である, 3. 一様連続ではない. $\square$

第3章 一変数関数の微分法：計算編

§ 3.1 微分の基本的性質

定義. 1. f が点 a で微分可能であるとは, 極限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することである. この極限値を

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left(\frac{df}{dx}\right)(a), \quad \left(\frac{d}{dx}f\right)(a)$$

などで表す. f' は **エフ・プライム** と読む.

2. f が区間 I 上で微分可能であるとは, f が任意の $x \in I$ で微分可能なことである. 関数 $f': I \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ を f の **(1階) 導関数** と呼ぶ.

3. f が区間 I 上で連続微分可能または C^1 級であるとは, f が I 上で微分可能かつ f' が I 上で連続なことである.

○ 公式集

覚えておくべき公式:

$$\begin{aligned} c' &= 0 & (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} & (e^x)' &= e^x & (\log x)' &= \frac{1}{x} \\ (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x & (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

覚えておくか, 必要に応じて即再構成できるとよい公式:

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} & (\sinh x)' &= \cosh x \\ (\cosh x)' &= \sinh x & (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

$$\text{線形性: } (af + bg)' = af' + bg'$$

$$\text{積の微分: } (fg)' = f'g + fg'$$

$$\text{商の微分: } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\text{合成関数の微分: } (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$\text{逆関数の微分: } (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

注意. 商の微分は積の微分と合成関数の微分から再構成できる.

60

問 16. 合成関数の微分は, $z = f(y)$, $y = g(x)$ とおくと, 形式的に

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

と書ける. 合成関数の微分公式に (形式的) 証明を与え, 上の等式と比較せよ.

注意. この表示では, 省略されている変数は何であるか注意が必要である.

61

問 17. 逆関数の微分は, $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$ とおくと, 形式的に

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

と書ける. 逆関数の微分公式に (形式的) 証明を与え, 上の等式と比較せよ.

解. $y = f^{-1}(x)$, $b = f^{-1}(a)$ とおく. $x = f(y)$, $a = f(b)$ に注意して,

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(f(y)) - f^{-1}(f(b))}{f(y) - f(b)} \\ &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f(y) - f(b)} = \lim_{y \rightarrow b} \left(\frac{f(y) - f(b)}{y - b} \right)^{-1} \\ &= f'(b)^{-1} = f'(f^{-1}(a))^{-1} \end{aligned}$$

を得る. □

注意. ここでも, 省略された変数に注意が必要である. 以下の問も参照せよ.

62

問 18. 逆関数の微分公式を用いて, 逆三角関数の微分公式を導け.

略解. $(\arcsin x)'$ のみを計算する. $y = \arcsin x$ とおくと, $x = \sin y$ であることから

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \quad (\spadesuit)$$

となる. ここで, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ より $\cos y \geq 0$ であることに注意すると,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

を得る. □

注意. $(\arcsin x)'$ は x の関数なので, y が残った $(\spadesuit)$ を答としてはならない.

63

問 19. 1. 逆関数の微分公式を用いて, 逆双曲線関数の微分公式

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

を導け.

2. 問 11 の逆双曲線関数の表示式を直接微分し, 上の公式に一致するか確かめよ.

問 20. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$ とおく. f の導関数を求めよ.

略解. 直接計算により, $f'(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$ を得る. □

問 21. $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ とおく.

1. 関数 f を微分せよ.
2. 関数 f を簡単な関数で表せ.

略解. 直接計算により, $f'(x) = 0$ および $f(x) = \pi/2$ が分かる. □

問 22. 次の関数の微分を計算せよ.

1. $\log \tan \frac{x}{2}$

2. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

3. $\arccos(\sin x)$

4. $2^{\sqrt{x}}$

略解. 直接計算により,

1. $\frac{1}{\sin x}$

2. 0

3. $-\frac{\cos x}{|\cos x|}$

4. $\frac{\log 2}{2\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}}$

が分かる. □

○ 高階微分

定義. 1. f が I 上で導関数 f' を持ち、さらに f' が I 上で導関数を持つとき、それを f の **2 階導関数** と呼び、

$$f'', \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f$$

などで表す. n 階導関数も同様に定義し、記号

$$f^{(n)}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f$$

などで表す.

2. f が I 上で n 回連続微分可能または C^n 級であるとは、 f が I 上で n 階までの導関数を持ち、かつ $f^{(n)}$ が I 上で連続となることである.
3. f が I 上で無限回微分可能または C^∞ 級であるとは、 f が I 上で任意階の導関数を持つことである.

問 23. 次の関数の第 n 階導関数を求めよ.

$$1. \sin x \qquad 2. \log(1+x) \qquad 3. \cos ax$$

略解. 直接計算により、

$$1. \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad 2. (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad 3. a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

が分かる. $\square$

定理 3.1 (Leibniz の公式). 積 fg の n 階導関数について、

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

が成り立つ. ここで、 $\binom{n}{k} = {}_n C_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ は **二項係数** である.

注意. 第 2 クォーターで扱う偏微分の記号を用いて、

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n (f(x)g(y)) \Big|_{y=x}$$

と考えると理解し易いかもしれない. ここで $|_{y=x}$ は偏微分後に $y = x$ を代入することを意味する.

証明. 帰納法を用いる. $n = 0$ のときは自明である. n のときの結論を仮定

すると、直接計算により、

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)}g^{(n-k)})' \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
 &= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)}g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \quad [k+1=l] \\
 &= fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)}g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}g
 \end{aligned}$$

が分かる。あとは

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$$

を用いればよい。これらは定義から容易に確かめられる（省略する）。□

72

問 24. 関数 x^2e^x の n 階導関数を求めよ。

解. Leibniz の公式により

$$\begin{aligned}
 (x^2e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\
 &= \left(x^2 + n \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \right) e^x \\
 &= (x^2 + 2nx + n^2 - n) e^x
 \end{aligned}$$

を得る。□

73

§ 3.2 Taylor 展開

定理 3.2 (Taylor 展開). f は「自然な関数」とする。このとき、任意の点 a に対し、ある $r > 0$ が存在して、任意の $x \in (a-r, a+r)$ に対し

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

が成り立つ。

注意. 1. このような関数は、**解析的**あるいは C^ω 級と呼ばれる。初等関数や特殊関数はすべて自然な定義域の上で C^ω 級なことが知られている。よって、普通の関数はすべて Taylor 展開可能と考えて差し支えない。

2. C^∞ 級だが C^ω 級ではない関数の例を具体的に構成できる。したがって、 C^ω 級は C^∞ 級よりも**真に強い**性質である。

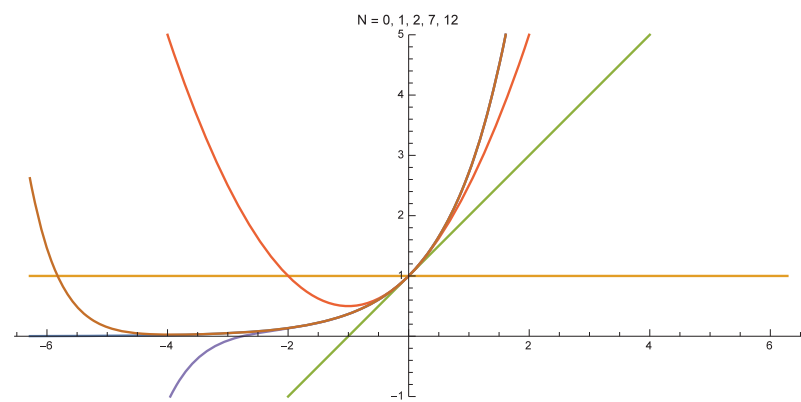
74

例. 以下の Taylor 展開が成り立つ（これらは記憶しておくが良い）。

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbf{R}) \\
 \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (x \in \mathbf{R}) \\
 \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (x \in \mathbf{R}) \\
 \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (|x| < 1) \\
 \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)
 \end{aligned}$$

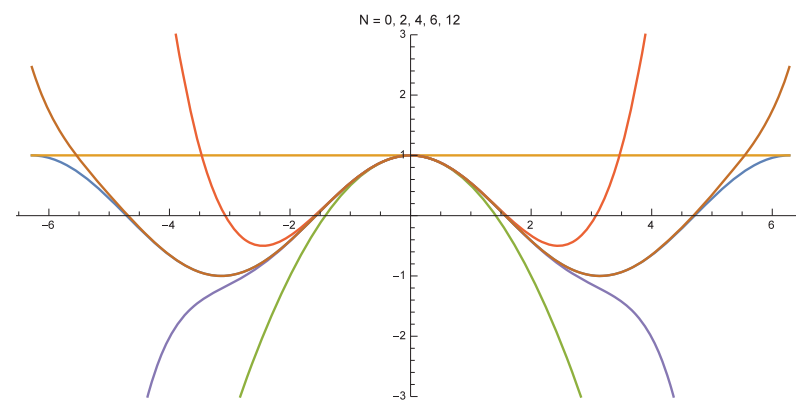
注意. これらのような、 $a = 0$ での展開は特に **Maclaurin 展開**とも呼ばれる。

75



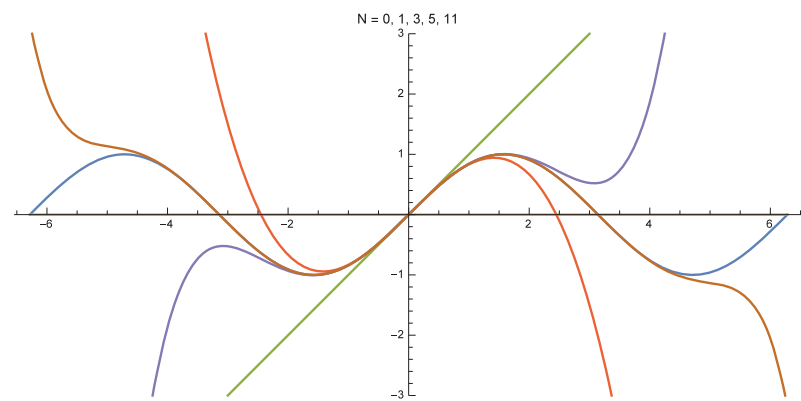
e^x の $x = 0$ における第 N 次近似多項式のグラフ

76



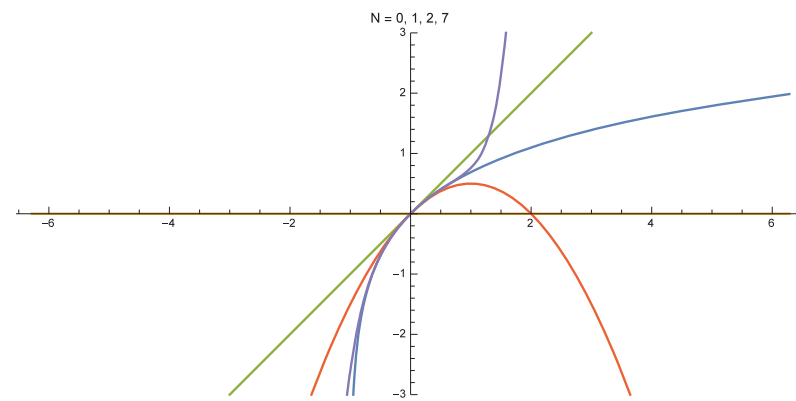
$\cos x$ の $x = 0$ における第 N 次近似多項式のグラフ

77



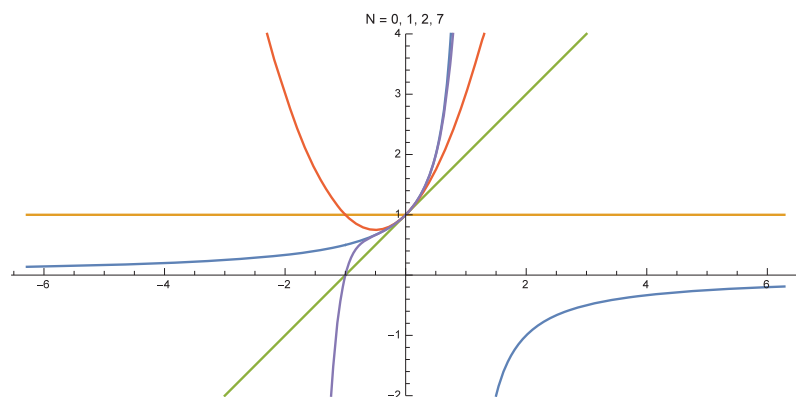
$\sin x$ の $x = 0$ における第 N 次近似多項式のグラフ

78



$\log(1+x)$ の $x = 0$ における第 N 次近似多項式のグラフ

79



$(1-x)^{-1}$ の $x=0$ における第 N 次近似多項式のグラフ

問 25. 上の Taylor 展開をすべて暗記せよ.

注意. 例えば, 以下の特徴に着目すると記憶の助けとなるだろう.

- e^x は何度微分しても形が変わらず, また $e^0 = 1$ であるため, 係数には $1/n!$ しか現れない.
- 指数関数と三角関数の展開はよく似ているが, $\cos x$ は偶数次の項, $\sin x$ は奇数次の項だけからなり, 符号も各々で正負を交互に繰り返す.
- $\cos x$ は偶関数であるため, その展開には偶数次の項しか現れない. 同様に, $\sin x$ は奇関数であるため, その展開には奇数次の項しか現れない.
- $y = \cos x$ は $x = 0$ で接線 $y = 1$ を持つため, その展開は 1 から始まる. 同様に, $y = \sin x$ は $x = 0$ で接線 $y = x$ を持つため, その展開は x から始まる.

- $\log x$ ではなく $\log(1+x)$ を展開しているのは, $\log x$ が $x=0$ では定義されないからである.
- $y = \log(1+x)$ は $x=0$ で接線 $y=x$ を持つため, その展開は x から始まる.
- $\log(1+x)$ の展開でも係数の符号は正負を交互に繰り返す. ただし $n=1$ から始まるので, 初項の係数を正とするには符号を $(-1)^{n-1}$ とする必要がある. これを n ($n!$ ではない) で割ったものが係数になる.
- $\log(1+x)$ は $x=-1$ では定義されないため, 収束範囲が $|x| < 1$ に制限される.
- $(1-x)^{-1}$ の展開は等比級数の和の公式に他ならない. 収束範囲 $|x| < 1$ も和の収束条件と整合する.

さらに次の事実も知識として知っておくとよいだろう.

- $\log(1+x)$ は $x \geq 1$ でも定義されるが, 右辺の級数は $x \geq 1$ では収束しない.
- 同様に, $(1-x)^{-1}$ はすべての $x \neq 1$ で定義されるが, 右辺は $|x| \geq 1$ では収束しない.

その他, 各自で気づいたことを書き留めておくと, より良いだろう.

○ Taylor係数の覚え方のヒント

べき級数展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \quad (\heartsuit)$$

を仮定すると、係数 c_n が自動的に決まってしまうことを見ておこう。

まず $(\heartsuit)$ に $x = a$ を代入すると

$$f(a) = c_0 \quad \therefore c_0 = f(a)$$

が分かる。次に、 $(\heartsuit)$ を微分して

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

となったところに、 $x = a$ を代入すると

$$f'(a) = c_1 \quad \therefore c_1 = f'(a)$$

84

が分かる。さらに微分すると

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + \cdots$$

となるので、やはりこれに $x = a$ を代入して

$$f''(a) = 2c_2 \quad \therefore c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

を得る。一般に $(\heartsuit)$ を n 回微分すると

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x-a) + \frac{(n+2)!}{2}c_{n+2}(x-a)^2 + \cdots$$

となるので、これに $x = a$ を代入することで

$$f^{(n)}(a) = n!c_n \quad \therefore c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

が従う。

85

○ Taylor展開の計算問題

問 26. 以下の関数に対し、与えられた点の周りでの Taylor展開を計算せよ。

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1. $e^{x^2} \quad (x=0)$ | 2. $\frac{x^3}{1+x^2} \quad (x=0)$ |
| 3. $e^{2x} \quad (x=1)$ | 4. $\frac{1}{1-2x} \quad (x=-1)$ |
| 5. $\log(1+x) \quad (x=2)$ | 6. $\frac{1}{(1-x)^2} \quad (x=0)$ |
| 7. $\arctan x \quad (x=0)$ | |

注意. Taylor係数は一般形は重要なので覚えておく必要があるが、具体的な関数の場合には、既知の Taylor展開を組み合わせで計算した方が良い。

86

解. 1. $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ に $X = x^2$ を代入することで

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

を得る。

2. $(1-X)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$ に注意して、

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+3}$$

を得る。

87

3. 1,2と同様に考えて,

$$e^{2x} = e^2 e^{2(x-1)} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(x-1))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 2^n}{n!} (x-1)^n$$

を得る.

注意. 先に $x = 0$ の周りで展開して,

$$\begin{aligned} e^{2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} ((x-1) + 1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k \end{aligned}$$

などとしてはならない. (さらに式変形をすれば, 正しい形に持っていくことはできるが, 見通しは良くない.)

4. これまでと同様に考えて,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2x} &= \frac{1}{3-2(x+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(2/3)(x+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (x+1)^n \end{aligned}$$

を得る.

5. これまでと同様に考えて,

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \log(3+(x-2)) = \log 3 + \log\left(1 + \frac{1}{3}(x-2)\right) \\ &= \log 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n n} (x-2)^n \end{aligned}$$

を得る.

6. $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の両辺を微分して,

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

を得る. (このような操作を**項別微分**と呼ぶ.)

7. $(1+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ の両辺を t について 0 から x まで積分して,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

を得る. (このような操作を**項別積分**と呼ぶ.) $\square$

注意. 級数の項別微分や項別積分では, 暗に2つの極限の順序交換を行っており, 厳密には条件を確認する必要がある.

○ Eulerの公式

e^x の Taylor 展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$$

において, 右辺の級数は x が複素数であっても意味を持つ. このことを逆手に取って, 以下の定義を採用する.

定義. 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して, 指数関数 e^z を

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

によって定義する.

注意. ここでは証明しないが, 右辺は任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して収束する.

定理 3.3 (Eulerの公式). 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ.

証明. 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し, 定義に従って e^{ix} を計算すると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

を得る. □

92

問 27. Euler の公式を用いて, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が成り立つことを確かめよ.

注意. 双曲線関数の定義との類似に注意せよ.

93

問 28. Euler の公式と三角関数の加法定理を既知として, 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対し

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

が成り立つことを導け.

注意. 一般の $z, w \in \mathbf{C}$ に対しても, 指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w$ が成り立つ. また, これは加法定理を用いずに示せる.

94

§ 3.3 Taylor展開と第 n 次近似

○ Landau の記号

定義. 1. $x \rightarrow a$ の極限において, $R(x)$ が $(x-a)^n$ の定数倍以上の早さで 0 に収束するとき, すなわち, ある $\epsilon, C > 0$ が存在して任意の $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ に対し

$$|R(x)| \leq C|x-a|^n$$

が成り立つとき, $R(x) = O((x-a)^n)$ と書く.

2. $x \rightarrow a$ の極限において, $R(x)$ が $(x-a)^n$ より真に早く 0 に収束するとき, すなわち,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$$

が成り立つとき, $R(x) = o((x-a)^n)$ と書く.

95

例. 1. $x \rightarrow 0$ のとき,

$$10^{100}x^3 \sin(e^{1/x}) = O(x^3) = o(x^2) = O(x^2)$$

が成り立つ.

2. $x \rightarrow -2$ のとき,

$$5(x+2)^3 - (x+2)^5 = O((x+2)^3)$$

が成り立つ.

注意. 一般に, Landau の記号を含む等式を逆に辿ることはできない.

96

定理 3.4. 自然な関数 f に対し, $x \rightarrow a$ のとき,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + O((x-a)^{n+1}) \quad (\diamond)$$

が成り立つ.

証明. Taylor 展開の第 $(n+1)$ 項以降を $(x-a)^{n+1}$ で括ればよい. $\square$

注意. 例えば, $n=1$ のときは

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + O((x-a)^2)$$

となる. これは, $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ の挙動を最もよく近似する 1 次多項式 (第 1 次近似) が, $f(a) + f'(a)(x-a)$ で与えられることを意味する. より一般に, f の $x=a$ の周りでの第 n 次近似は $(\diamond)$ の右辺の和で与えられる.

97

○ 極限計算への応用

問 29. 以下の各極限を計算せよ.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

解. 1. Taylor の定理より, $x \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= x^{-2} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - 1 - x \right) \\ &= x^{-2} \left(\frac{1}{2}x^2 + O(x^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} + O(x) \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である.

98

2. 近似式

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

に注意して, $x \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} &= x^{-2} \left[1 + x^2 + O(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right) \right] \\ &= x^{-2} \left(\frac{3}{2}x^2 + O(x^4) \right) \\ &= \frac{3}{2} + O(x^2) \rightarrow \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる. $\square$

99

問 30. 1. $\log \cos x$ の $x = 0$ の周りでの第4次近似多項式を求めよ.

2. 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log \cos x + x^2}{\sin^4 x}$ を計算せよ.

解. 1. 既知の Taylor 展開を組み合わせることで,

$$\begin{aligned} \log \cos x &= \log \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4) \right)^2 + O(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + O(x^6) \end{aligned}$$

を得る.

2. 1の結果より $-1/6$ であることが分かる. $\square$

100

問 31. 次の極限值を求めよ.

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x e^x + x^2 \cos x}{x(1 - \cos x)} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} & \end{array}$$

略解. Taylor の定理を用いて近似計算することで,

$$1. \frac{1}{2} \quad 2. \frac{1}{6} \quad 3. -\frac{1}{3} \quad 4. -\frac{4}{3} \quad 5. \frac{1}{3}$$

がわかる. $\square$

101

102

103

○ 実用的な応用

問 32. 1. $\alpha \in \mathbf{R}$ とする. $h \approx 0$ のとき

$$(1+h)^\alpha \approx 1 + \alpha h$$

であることを示せ.

2. 等式 $\sqrt{2} = \frac{7}{5} \sqrt{1 + \frac{1}{49}}$ と上の近似式より, $\sqrt{2}$ の近似値を計算せよ.

解. 1. 定理 3.4 を $f(x) = x^\alpha$, $a = 1$, $x = 1 + h$ に適用すると, $h \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned}(1+h)^\alpha &= 1^\alpha + \alpha \cdot 1^{\alpha-1} \cdot (1+h-1) + O(h^2) \\ &= 1 + \alpha h + O(h^2)\end{aligned}$$

である. よって, 高次の微小量を見捨てれば, 示すべき近似式が従う.

104

2. まず, 直接計算により

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49}{25} \cdot \frac{50}{49}} = \frac{7}{5} \sqrt{1 + \frac{1}{49}}$$

が分かる. 1 で示した近似式を $\alpha = 1/2$, $h = 1/49$ に対し適用すれば,

$$\sqrt{2} \approx \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} \right) = 1.4142857 \dots$$

を得る. □

注意. 上の議論は厳密ではないが, 真の値 $\sqrt{2} = 1.4142135 \dots$ との誤差 Δ は

$$\Delta = 0.0000721 \dots$$

で, これは確かに $h^2 = 0.0004 \dots$ 程度のオーダーである. 後述の理論を用いれば, 数学的に厳密な精度保証も可能である.

105

第4章 一変数関数の微分法：理論編

§ 4.1 平均値の定理と1次近似

定理 4.1 (Rolleの定理). f は $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能とし, さらに $f(a) = f(b)$ とする. このとき, ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$f'(c) = 0$$

が成り立つ.

証明. 定理 2.7 より

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

が存在する. もし $m = M$ ならば, 任意の $x \in [a, b]$ に対し

$$m \leq f(x) \leq M = m$$

なので, f は $[a, b]$ 上で定数である. よって任意の $c \in [a, b]$ に対し

$$f'(c) = 0$$

107

が成り立つ。したがって $m < M$ としてよい。

(I) $f(a) = f(b) < M$ の場合、ある $c \in (a, b)$ に対し $f(c) = M$ となる。このとき、

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

である。よって $f'(c) = 0$ が成り立つ。

(II) $m < f(a) = f(b)$ の場合も (I) と同様に議論できる。よって主張は示された。 $\square$

注意. 以降でも同様であるが、この種の定理では c の具体的な取り方は分らない。しかし (a, b) 内に存在することは保証されており、この事実を不等式評価に利用できることがある。

定理 4.2 (平均値の定理). f は $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能とする。このとき、ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つ。

証明. 関数 F を

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

で定めると、 F は $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能であり、 $F(a) = F(b)$ を満たす。よって Rolle の定理より、ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つ。これは定理の主張に他ならない。 $\square$

系 4.3. f は (a, b) 上で微分可能とする。このとき、

1. 任意の $x \in (a, b)$ に対し $f'(x) = 0$ ならば、 f は定数である。
2. 任意の $x \in (a, b)$ に対し $f'(x) > 0$ ならば、 f は狭義単調増加である。
3. 任意の $x \in (a, b)$ に対し $f'(x) < 0$ ならば、 f は狭義単調減少である。

証明. 1. $x, y \in (a, b)$ かつ $x < y$ とする。このとき、平均値の定理よりある $c \in (x, y)$ が存在して

$$0 = f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \therefore f(x) = f(y)$$

が成り立つ。これは f が (a, b) 上で定数であることを意味する。

2. $x, y \in (a, b)$ かつ $x < y$ とする。このとき、平均値の定理よりある $c \in (x, y)$ が存在して

$$0 < f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \therefore f(x) < f(y)$$

が成り立つ。これは f が (a, b) 上で狭義単調増加であることを意味する。

3. 2 と同様に示せるので証明を省略する。 $\square$

定理 4.4. f を区間 I 上の C^1 級関数とし, $a \in I$ とする. $x \rightarrow a$ のとき,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

が成り立つ.

証明. $x \in I$ かつ $x \neq a$ とすると, ある $c \in I$ が a と x の間に存在して

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$$

と書ける. ただし, 剰余項 $R(x)$ を

$$R(x) = (f'(c) - f'(a))(x-a)$$

で定めた. さて $x \rightarrow a$ のとき, x を動かすと c も動くが, 少なくとも a と x の間にあることは保証されているので $c \rightarrow a$ である. よって f' の連続性より

$$(x-a)^{-1}R(x) = f'(c) - f'(a) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow a$$

であり, $R(x) = o(x-a)$ を得る. $\square$

§ 4.2 Taylor の定理と高次近似

定理 4.5 (Taylor の定理). 1. 関数 f が (a, b) 上で n 回微分可能かつ $[a, b]$ 上で $(n-1)$ 回連続微分可能ならば, ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n$$

が成り立つ.

2. 関数 f が (b, a) 上で n 回微分可能かつ $[b, a]$ 上で $(n-1)$ 回連続微分可能ならば, ある $c \in (b, a)$ が存在して

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n$$

が成り立つ.

注意. 1. 上の 2 つの主張は a, b の大小で場合分けしただけで, 本質的には同じである. 特に $n=1$ のとき, これらは平均値の定理に他ならない.

2. 右辺の最後の項は剰余項と呼ばれ, 単に R_n で表すことがある. c は a と b の間にあるので, 代わりに, ある $\theta \in (0, 1)$ を用いて

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n = \frac{f^{(n)}(a + \theta(b-a))}{n!} (b-a)^n$$

と表すこともある. $a + \theta(b-a)$ は a, b を端点とする区間の $\theta : (1-\theta)$ 内分点であることに注意する.

3. Taylor の定理 (有限和 + 剰余項) と Taylor 展開 (無限和) は別物なので, 主張の違いをきちんと理解し, 区別した方がよい.

証明. 主張 1, 2 は同様に示せるので, ここでは 1 のみを示す. 定数 $A \in \mathbf{R}$ を,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{A}{n!} (b-a)^n$$

を満たすようにとり, 関数 F を

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{A}{n!} (b-x)^n$$

で定める. すると F は $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能であり, さらに

$$F(a) = f(b) = F(b)$$

を満たす。よって Rolle の定理より、ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$\begin{aligned} 0 &= F'(c) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!} (b-c)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!} (b-c)^{k-1} \\ &\quad - \frac{A}{(n-1)!} (b-c)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} (b-c)^{n-1} - \frac{A}{(n-1)!} (b-c)^{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。これは

$$A = f^{(n)}(c)$$

を意味し、よって主張が示された。 $\square$

116

系 4.6. f は区間 I 上の C^n 級関数で、 $a \in I$ とする。極限 $x \rightarrow a$ において

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

が成り立つ。

証明. Taylor の定理より、各 $x \in I$ に対しある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

と書ける。ここで、

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a)) - f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

とおいた。 x を動かすと θ も動くが、 $\theta \in (0, 1)$ は保証されている。よって $f^{(n)}$ の連続性から、 $x \rightarrow a$ のとき $R_{n+1}(x) = o((x-a)^n)$ が従う。 $\square$

117

系 4.7 (Taylor 展開). f は区間 I 上で C^∞ 級関数とし、 $a, x \in I$ とする。もし Taylor の定理における第 n 剰余項 $R_n(x)$ が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (\spadesuit)$$

を満たすなら、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

が成り立つ。

証明. Taylor の定理において、 $n \rightarrow \infty$ とすればよい。 $\square$

注意. ($\spadesuit$) こそが、 C^∞ 級と C^ω 級の差異と特徴付ける条件である。 C^∞ 級関数はこれを必ずしも満たさないが、「自然な関数」はこれを満たす。

118

問 33. $f(x) = e^x$ 、 $a = 0$ および任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し、系 4.7 の条件 ($\spadesuit$) を確かめ、 e^x の Taylor 展開を求めよ。

解. Taylor の定理より、任意の $x \in \mathbf{R}$ に対しある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n$$

と書ける。 $x \in \mathbf{R}$ は固定されていることに注意して、 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{n!} |x|^n \rightarrow 0$$

が確かに成り立つ。よって

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

を得る。 $\square$

119

○ 近似の精度保証

$f: I \rightarrow \mathbf{R}$ は C^n 級とする. 任意の $a, a+h \in I$ に対し, ある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_n(a, h); \quad R_n(a, h) = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} h^n,$$

と書ける. もしここで

$$M := \sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)| < \infty$$

が分かっているならば, 剰余項について

$$|R_n(a, h)| \leq \frac{M}{n!} |h|^n$$

が従う. これは近似値の精度保証に利用できる.

例. 問 32 で得た $\sqrt{2}$ の近似値の精度を評価しよう. 関数 $f(x) = x^{1/2}$ に対し $x = 1$ のまわりで Taylor の定理を適用する. このとき, $h = 1/49$ に対しある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}(1+h)^{1/2} = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}(1+\theta h)^{-3/2}h^2 \right)$$

が成り立つ. ここで $h > 0$ に注意して多少粗く見積もると

$$(1+\theta h)^{-3/2} \leq 1^{-3/2} = 1$$

となるので,

$$|\Delta| = \left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{2}h \right) \right| \leq \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{49} \right)^2 = 0.0000728 \dots$$

を得る. したがって

$$\sqrt{2} = 1.4142857 \dots \pm 0.0000728 \dots$$

が保証される.

§ 4.3 参考: Cauchy の平均値定理と L'Hôpital の定理

定理 4.8 (Cauchy の平均値定理). f, g は $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能とし, さらに (a, b) 上で $g'(x) \neq 0$ とする. このとき, ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つ.

注意. パラメータ曲線 $(g(t), f(t))$, $t \in [a, b]$, の点 $(g(c), f(c))$ における接ベクトルが $(g'(c), f'(c))$ で与えられることを考えると, Cauchy の平均値定理は通常の平均値の定理と同じ幾何的意味を持つことが分かる.

証明. まず $g(a) \neq g(b)$ であることに注意する. 実際, $g(a) = g(b)$ とすると, Rolle の定理によりある $c \in (a, b)$ で $g'(c) = 0$ となって仮定に矛盾する. さて今,

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

とおくと, F は $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能であり,

$$F(a) = F(b) = 0$$

を満たす. よって再び Rolle の定理より, ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c)$$

が成り立つ. □

定理 4.9 (L'Hôpitalの定理). f, g は (a, b) 上で微分可能で, $g'(x) \neq 0$ とする. さらに

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0 \text{ or } \infty$$

とする. もし

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在すれば,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

注意. 同様の主張は $x \rightarrow b-0$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ の場合でも成立する.

証明. ここでは

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$$

の場合のみ示す. $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ と定義すると, f, g は $[a, b)$ 上で連続である. 任意の $x \in (a, b)$ に対し, $[a, x]$ 上で Cauchy の平均値定理を適用すると, ある $c \in (a, x)$ に対して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つ. ここで $x \rightarrow a+0$ とすると $c \rightarrow a+0$ となるので, 右辺の極限が存在すれば左辺の極限も存在して, 両者は一致する. $\square$

注意. 例えば $x \rightarrow \infty$ の場合については, 変数変換 $t = 1/x$ により $x \rightarrow +0$ の場合に帰着される.

問 34. 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x}$$

解. $x \rightarrow 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} \rightarrow \frac{0}{0}, \\ \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{\sin x}{2x \cos x - x^2 \sin x} \rightarrow \frac{0}{0}, \\ \frac{f''(x)}{g''(x)} &= \frac{\cos x}{2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

なので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}$$

を得る. $\square$

注意. 1. L'Hôpital の定理は適用条件を確認せずに使うと誤った結果を導くことがあるので, 注意が必要である. 例えば, 上の問で3階微分まで計算してから, 分母分子を x で割って極限をとると

$$\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{-\sin x}{-6 \sin x - 6x \cos x + x^2 \sin x} \rightarrow \frac{1}{12}$$

となってしまう.

2. ほとんどの場合, Taylor の定理でも極限を計算することができ, その方が計算量も少なく済む. 上の問でもそうである.

第5章 多変数関数

§ 5.1 多変数関数のグラフ

定義. $n \in \mathbf{N}$ とする. n 次元実数空間を

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n \text{ 個}} = \{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

で定める. $\mathbf{R}^n$ 上の関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を n 変数関数と呼ぶ.

例. 2つの変数 x, y を持つ数式 $f(x, y)$ は2変数関数である. 例えば,

$$f(x, y) = x^2 + y, \quad f(x, y) = e^{x+y} \sin(xy)$$

などは2変数関数である.

129

○ 1 変数関数のグラフの復習

$\mathbf{R}$ 上の関数 f とは, 各点 $x \in \mathbf{R}$ に数 $f(x) \in \mathbf{R}$ を割り当てる対応のことだった. これは, 直線 $\mathbf{R}$ の x の位置に数 $f(x)$ が載っている, と見ることができる. 例えば, 直線上に f によって指定された重みの密度分布が載っている, と想像することもできるだろう. この状況をより視覚的に捉えるために, x 軸とは別に新しく y 軸を描き加え, x 軸上に載っている数 $f(x)$ を y 軸方向への高さを読み換えよう, というのがグラフの考え方である.

正確に言えば, 関数 f のグラフとは $\mathbf{R}^2$ の部分集合

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2; x \in \mathbf{R}\}$$

のことである. 実用上はこれを単に $y = f(x)$ で表すことが多い.

130

○ グラフ

定義. n 変数関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ に対し, そのグラフを

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1}; x \in \mathbf{R}^n\}$$

で定める.

注意. 1. 2変数関数のグラフは, 曲面となることが分かるだろう. グラフを与える関係式 $z = f(x, y)$ 自体を曲面と呼ぶことも多い.

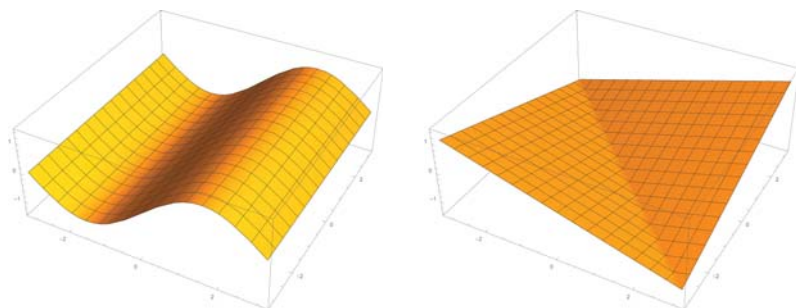
2. 3変数以上の関数のグラフは超曲面となるが, 定義域の変数の個数を退化させない限り, 可視化はできない. (3変数関数のグラフなら4次元時空間内に描くこともできるが, あまり実用的ではない.)

3. グラフ以外にも, 多変数関数を密度分布として想像する方法もある. また2変数関数, 3変数関数は, それぞれ等高線, 等高面でも可視化できる.

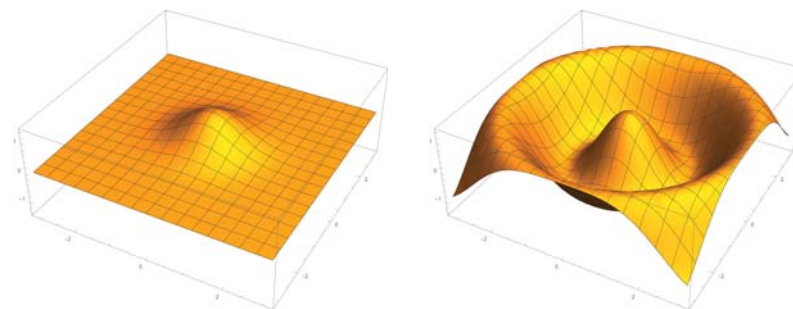
131

問 35. 以下の2変数関数のグラフの概形を想像せよ.

1. $f(x, y) = \sin x$
2. $f(x, y) = \frac{1}{3}|x + y| - 1$
3. $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$
4. $f(x, y) = \cos(2\sqrt{x^2 + y^2})$



132



133

§ 5.2 $\mathbf{R}^3$ 内の基本的な曲面

○ 平面

問 36. $\mathbf{R}^3$ 内の平面で、点 $(1, 0, -1)$ を通りベクトル $(2, 3, 1)$ に垂直なものを表す方程式を求めよ.

解. $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{x}_0 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{n} = (2, 3, 1)$ とおく. 同値変形により,

$\mathbf{x}$ が求める平面上にある

$$\iff (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \perp \mathbf{n}$$

$$\iff 0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 2(x - 1) + 3y + (z + 1)$$

$$\iff 2x + 3y + z - 1 = 0$$

が成り立つ. よって求める方程式は $2x + 3y + z - 1 = 0$ である. $\square$

134

問 37. 方程式 $3x - 2y - z + 5 = 0$ が与える $\mathbf{R}^3$ 内の図形は何か述べよ.

解. 与えられた方程式を満たす (x, y, z) の組を一組とる. 例えば,

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 6 + 5 = 0$$

である. これと与えられた方程式の差をとると

$$3(x - 1) - 2(y - 1) - (z - 6) = 0$$

となる. 前項の問と同様の同値変形を逆にたどれば, $3x - 2y - z + 5 = 0$ は $(1, 1, 6)$ を通り $(3, -2, -1)$ に垂直な平面であることがわかる. $\square$

注意. 「与えられた方程式を満たす (x, y, z) の組」は何でも良い.

135

上の議論より、平面の方程式の一般形は

$$ax + by + cz + d = 0; \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0),$$

であることが分かる。逆にこのような方程式が与えられたら、

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

と書きかえることで、これは $x_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り $\mathbf{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面であることが分かる。このような $\mathbf{n}$ を平面の**法ベクトル**と呼ぶ。

注意. $c \neq 0$ ならば、

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$$

と変形できるので、与えられた平面は2変数関数のグラフとして書ける。もちろん、 z 軸に平行な平面は、 (x, y) を変数とする2変数関数のグラフとして表示することはできない。

問 38. 1. 点 $(0, 0, 1)$ を通り、 $(1, 2, 3)$ と $(-3, 0, 4)$ を接ベクトルに持つ平面をパラメータ表示せよ。また、パラメータを消去することでこの平面の方程式表示を求め、法ベクトルを一つ求めよ。

2. 平面 $-x + 3y - z + 5 = 0$ をパラメータ表示し、法ベクトルを一つ求めよ。

注意. 空間内の図形の表示方法として、グラフ表示、方程式表示、パラメータ表示の3つがあることを押さえておくとうまいだろう。第7.1節も参照せよ。

問 39. 点 (x_0, y_0, z_0) を通りベクトル $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ に平行な直線は、

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), \quad t \in \mathbb{R},$$

とパラメータ表示され、特に $abc \neq 0$ のときには、

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

と方程式表示される。これらはいつでも一方から他方へ移れることを確かめよ。また $abc = 0$ のとき、後者はどのように修正されるか考えよ。

○ 楕円放物面

定義. $ab > 0$ とする。 $\mathbb{R}^3$ において、

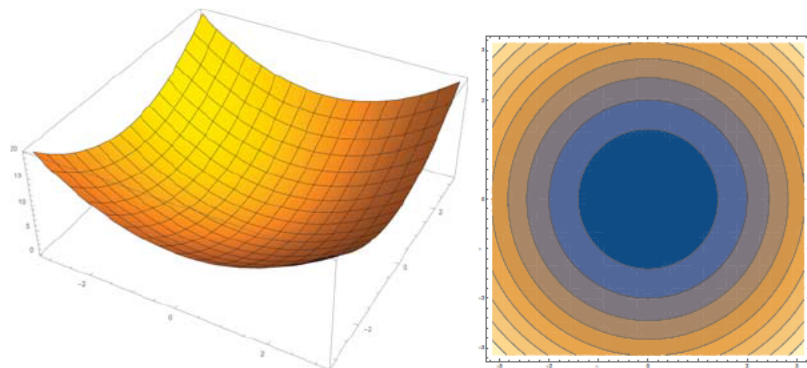
$$z = ax^2 + by^2 \quad (\spadesuit)$$

の定める曲面を**楕円放物面**と呼ぶ。

例えば、 $a, b > 0$ の場合を考える。 $X = \sqrt{a}x, Y = \sqrt{b}y$ とスケールすると

$$z = X^2 + Y^2 = r^2, \quad \text{ただし } r = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

となる。これは、 XYz 空間において、原点を頂点とし z 軸を軸とする放物線を、 z 軸の周りに回転させてできる曲面（**回転放物面**）である。よって xyz 空間において $(\spadesuit)$ は、回転放物面を x 軸方向に $1/\sqrt{a}$ 倍、 y 軸方向に $1/\sqrt{b}$ 倍だけスケールしたものである。



$z = x^2 + y^2$ のグラフと等高線群

140

問 40. $z = ax^2 + by^2$ の定める曲面の, z 軸に垂直な平面による切り口の図形を求めよ. また, x 軸または y 軸に垂直な平面による切り口の図形も求めよ.

141

○ 双曲放物面

定義. $ab > 0$ とする. $\mathbb{R}^3$ において,

$$z = ax^2 - by^2 \quad (\heartsuit)$$

の定める曲面を双曲放物面と呼ぶ.

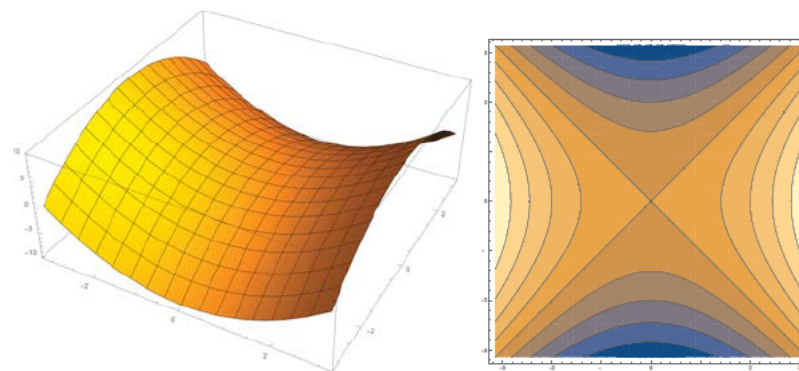
例えば $a, b > 0$ の場合を考える. $X = \sqrt{a}x, Y = \sqrt{b}y$ とスケールすると

$$z = X^2 - Y^2$$

となる. この XYZ 空間において曲面の概形は次のようになっている. よって xyz 空間において $(\heartsuit)$ は, この曲面を x 軸方向に $1/\sqrt{a}$ 倍, y 軸方向に $1/\sqrt{b}$ 倍だけスケールしたものである.

注意. 上の曲面の原点近くのような形状となる点を, 鞍点と呼ぶ.

142



$z = x^2 - y^2$ のグラフと等高線群

143

問 41. xyz 空間において, $z = x^2 - y^2$ の定める曲面の, z 軸に垂直な平面による切り口の図形を求めよ. また, x 軸または y 軸に垂直な平面による切り口の図形も求めよ.

144

○ 放物線柱面

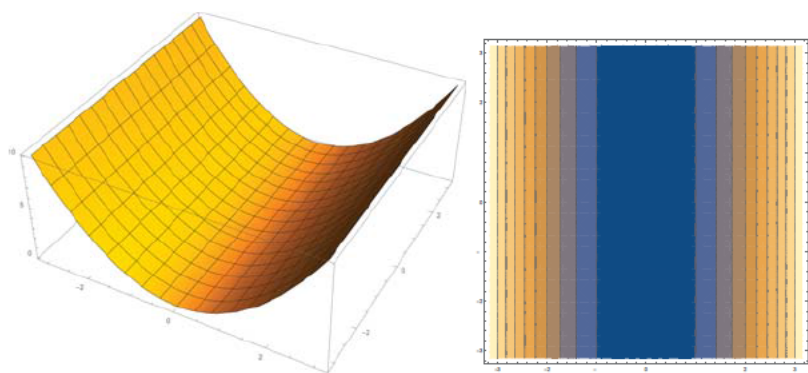
定義. $a \neq 0$ とする. $\mathbb{R}^3$ において,

$$z = ax^2 = ax^2 + 0y^2$$

の定める曲面を放物線柱面と呼ぶ.

問 42. $z = ax^2$ の定める曲面の概形を求めよ (説明せよ).

145



$z = x^2$ のグラフと等高線群

146

○ 2 次式の定める曲面の分類

定理 5.1. $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする. 曲面

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

は, (x, y) 変数に関する適当な可逆行列変換 (斜交座標変換) により, 以下のように分類される.

1. $ac - b^2 > 0$, $a > 0$ ならば, 下に凸な (上に開いた) 楕円放物面である.
2. $ac - b^2 > 0$, $a < 0$ ならば, 上に凸な (下に開いた) 楕円放物面である.
3. $ac - b^2 < 0$ ならば, 双曲放物面である.
4. $ac - b^2 = 0$ ならば, 放物線柱面である.

注意. 分類条件または以下の証明の流れを覚えておくこと.

147

証明. I. $a \neq 0$ のとき, x について平方完成すると

$$z = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 =: aX^2 + \frac{ac - b^2}{a}Y^2$$

となる. よって, $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ なら下に凸な楕円放物面, $a < 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ なら上に凸な楕円放物面, $ac - b^2 < 0$ なら双曲放物面, $ac - b^2 = 0$ なら放物線柱面である.

II. $c \neq 0$ のとき, I と同様に議論できる.

III. $a = c = 0$ のとき, $b \neq 0$ に注意して,

$$z = \frac{b}{2}\{(x+y)^2 - (x-y)^2\} =: \frac{b}{2}X^2 - \frac{b}{2}Y^2$$

と書ける. よって与えられた曲面は双曲放物面である. $\square$

148

注意. 与えられた2次式は, 行列を用いると

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように書ける. ここで任意の実対称行列は必ずある直交行列で対角化できることを既知とすると, 定理5.1の可逆行列変換は直交行列変換 (直交座標変換) にまで強められる. 実際, ある直交行列 P が存在して

$${}^tP \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となることに注意すると,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \alpha X^2 + \beta Y^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

と書ける. 定理5.1の主張は, 線形代数では, 行列の $(1, 1)$ 成分 a と行列式 $ac - b^2$ から固有値 α, β の符号判定ができる, という事実に対応する.

149

問 43. 以下の2次式の曲面に対し, 直交座標系 (x, y) を適当な斜交座標系 (X, Y) に変換して, $z = \alpha X^2 + \beta Y^2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, の形に書き換えよ. さらに, 楕円放物面, 双曲放物面, 放物線柱面のいずれであるかを判定せよ.

$$1. z = 2x^2 - 8xy + 11y^2 \quad 2. z = -x^2 + 2xy + 4y^2$$

解. 1. 一方の変数に関して平方完成することで,

$$z = 2(x - 2y)^2 + 3y^2 = 2X^2 + 3Y^2$$

と書ける. よってこれは楕円放物面である.

2. 一方の変数に関して平方完成することで,

$$z = -(x - y)^2 + 5y^2 = -X^2 + 5Y^2$$

と書ける. よってこれは双曲放物面である. $\square$

150

§ 5.3 $\mathbf{R}^n$ の距離と位相

○ 距離

定義. 1. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ と $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ の間の距離を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$$

で定義する.

2. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の球体を

$$B_r(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}$$

で定義する. これは $\mathbf{x}$ の r 近傍とも呼ばれる.

151

○ 位相

定義. $D \subset \mathbf{R}^n$ とする.

1. D が開集合であるとは, 任意の $\mathbf{x} \in D$ に対しある $\epsilon > 0$ が存在して

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset D$$

が成り立つことである.

2. D が閉集合であるとは, その補集合 D^c が開集合となることである.

3. D の境界とは, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ で任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap D \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap (D^c) \neq \emptyset$$

を満たすものの全体の集合である. D の境界を ∂D で表す.

4. D の閉包とは, 和集合 $\bar{D} = D \cup \partial D$ のことである.

152

問 44. 以下の各集合に対し, 開集合か, 閉集合かまたはそのいずれでもな
いかを判定し, さらに境界を求めよ. 証明についても考えてみよ.

1. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

2. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

3. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x| \leq 1, |y| < 1\}$

4. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x, y \in \mathbf{Q}\}$

153

定義. $D \subset \mathbf{R}^n$ とする.

1. D 内の連続曲線とは, 写像

$$\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow D, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

ですべての $j = 1, \dots, n$ に対し x_j が連続となるもののことである. このとき, $\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)$ をそれぞれこの曲線の始点, 終点と呼ぶ.

2. D が弧状連結であるとは, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ に対しそれらをそれぞれ始点, 終点とする D 内の連続曲線が存在することである.

3. D が弧状連結な開集合のとき, D を領域と呼ぶ.

4. D が有界であるとは, ある $r > 0$ が存在して $D \subset B_r(\mathbf{0})$ となることである.

注意. 領域は厳密には上のように定義されているが, しばしば単に部分集合の意味で使われることもある.

155

注意. 直感的には, 開集合は縁を含まない集合, 閉集合は縁を含む集合である.

問 45 (余力があれば). 任意の $D \subset \mathbf{R}^n$ に対し, その閉包 $\bar{D}$ は必ず閉集合となることを定義に従って示せ.

154

§ 5.4 連続関数

定義. $D \subset \mathbf{R}^n$ を領域とし, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ を関数とする.

1. f が $a \in D$ において連続であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つこと, すなわち,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon$$

が成り立つことである.

2. f が D 上で連続 (または C^0 級) であるとは, f が任意の $x \in D$ において連続となることである.

注意. 多次元空間では点の近づけ方が無数にあることに注意せよ.

156

問 46. 次の極限は存在するか. 存在するならばその極限値を求めよ.

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 2. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

解. 1. $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおけば, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ は θ を固定せずに $r \rightarrow +0$ とすることに対応する. このとき,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta$$

は θ に応じて $[-1, 1]$ の任意の値をとれる. よって極限は存在しない.

2. 1 と同様に考えると, $r \rightarrow +0$ のとき, θ によらずに

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = r \cos^2 \theta \sin \theta \rightarrow 0$$

である.

□

157

定理 5.2 (中間値の定理). $D \subset \mathbf{R}^n$ は弧状連結, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ は連続とし, $a, b \in D$ かつ $f(a) \leq f(b)$ とする. このとき, 任意の $\gamma \in [f(a), f(b)]$ に対しある $c \in D$ が存在して

$$f(c) = \gamma$$

が成り立つ.

証明. a, b を結ぶ D 内の連続曲線 $x(t)$ ($t \in [a, b]$) をとって

$$F(t) = f(x(t)), \quad t \in [a, b],$$

と定めれば, 1 変数関数に対する中間値の定理に帰着される. □

158

定理 5.3 (最大値・最小値の存在). f が有界閉集合 D 上で連続なら,

$$\max_{x \in D} f(x), \quad \min_{x \in D} f(x)$$

が存在する.

証明. 証明は省略する. □

159

定理 5.4. 有界閉集合 D 上の連続関数 f は一様連続である, すなわち,

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.t. “ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \epsilon$ ”
が成り立つ.

証明. 証明は省略する. □

160

問 47 (余力があれば). 任意の連続関数 $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ に対し, 集合

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; g(x, y) = 0\}$$

は閉集合であることを定義に従って示せ.

解. 補集合 A^c が開集合であることを示せばよい. 任意の $(a, b) \in A^c$ をとる. A の定義から, $g(a, b) \neq 0$ に注意する. すると, g が連続であることから, $\epsilon = |g(a, b)|/2 > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して,

$$(x, y) \in B_\delta(a, b) \Rightarrow |g(x, y) - g(a, b)| < \epsilon$$

が成り立つ. 三角不等式より, これは任意の $(x, y) \in B_\delta(a, b)$ に対し

$$|g(x, y)| \geq |g(a, b)| - \epsilon = \frac{1}{2}|g(a, b)| > 0$$

が成り立つことを意味する. したがって $B_\delta(a, b) \subset A^c$ であり, A^c は確かに開集合である. □

161

第6章 偏微分法

§ 6.1 偏微分

簡単のため, 本章では主に2変数関数 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を考えるが, n 変数関数への一般化は容易である.

定義. 1. f が点 $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ において x 偏微分可能であるとは, 極限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

が存在することである. この極限值を f の (a, b) における x 偏微分と呼び,

$$f_x(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)(a, b)$$

などで表す. 領域上での x 偏微分可能性や x 偏導関数なども, 1 変数関数のときと同様に定義する. さらに, y 変数についても同様に定義する.

163

2. f_x が x 偏導関数を持つとき、それを

$$f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f$$

などで表す。また、 f_x が y 偏導関数を持つとき、それを

$$f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$$

などで表す。高階偏導関数について同様に定義する。

3. f が $\mathbf{R}^2$ 上で C^n 級であるとは、 f の n 階までのすべての偏導関数が存在し、それらがすべて連続となることである。

4. f が $\mathbf{R}^2$ 上で C^∞ 級であるとは、 f の任意の階数の偏導関数が存在し、それらがすべて連続となることである。

注意. 偏微分と区別するために、1変数関数の微分を**常微分**と呼ぶこともある。

問 48. 以下の式で与えられる関数に対し、2階偏導関数をすべて計算せよ。

$$1. x^3 + xy^2 + y \quad 2. e^{x \sin y} \quad 3. \arctan \frac{y}{x}$$

略解. 1のみ解答を与える。 $z = x^3 + xy^2 + y$ とおくと

$$z_x = 3x^2 + y^2, \quad z_y = 2xy + 1$$

なので、

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = 2y, \quad z_{yx} = 2y, \quad z_{yy} = 2x,$$

を得る。□

問 49. 以下の各等式を満たす2変数関数 f を求めよ。

$$1. f_{xy} = 3y^2 \quad 2. f_{xxx} = 0$$

解. 1. 与えられた等式を y で積分すると、任意関数 $C(x)$ を用いて

$$f_x = y^3 + C(x)$$

と書ける。これをさらに x で積分して

$$f = xy^3 + \int C(x) dx + D(y) = xy^3 + \tilde{C}(x) + D(y)$$

を得る。

2. 1と同様に x で3回積分すると、一般的に

$$f = C(y)x^2 + D(y)x + E(y)$$

の形に書ける。□

定理 6.1. f が C^2 級ならば、

$$f_{xy} = f_{yx}$$

が成り立つ。

注意. このことから特に、 C^n 級関数の n 階までの任意の偏導関数は、偏微分する変数の順序に依存しないことが分かる。実際、例えば $n=3$ のときには

$$f_{xxy} = (f_x)_{xy} = (f_x)_{yx} = f_{xyx} = (f_{xy})_x = (f_{yx})_x = f_{yxx}$$

が成り立つ。一般には隣り合う偏微分を一組ずつ入れ替えていくことで、任意の順序の偏微導関数に等式変形できる。

証明. 任意の $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ を固定する. 任意の $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ で $st \neq 0$ となるものに対し

$F(s, t) = f(a + s, b + t) - f(a, b + t) - f(a + s, b) + f(a, b)$
とおく. まず, $g(y) = f(a + s, y) - f(a, y)$ において, これを

$$F(s, t) = g(b + t) - g(b)$$

のように書き換え, 平均値の定理を2度用いる. すると, ある $\theta, \theta' \in (0, 1)$ が存在して

$$\begin{aligned} F(s, t) &= tg'(b + \theta t) \\ &= t(f_y(a + s, b + \theta t) - f_y(a, b + \theta t)) \\ &= tsf_{yx}(a + \theta's, b + \theta t) \end{aligned}$$

168

となる. 一方, $h(x) = f(x, b + t) - f(x, b)$ とおけば,

$$F(s, t) = h(a + s) - h(a)$$

のようにも書ける. 同様に議論すると, ある $\rho, \rho' \in (0, 1)$ に対し

$$F(s, t) = stf_{xy}(a + \rho s, b + \rho't)$$

となる. したがって,

$$f_{yx}(a + \theta's, b + \theta t) = f_{xy}(a + \rho s, b + \rho't)$$

であり, ここで $st \neq 0$ としながら $(s, t) \rightarrow (0, 0)$ とすれば, f_{xy}, f_{yx} の連続性から

$$f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$$

を得る. □

169

問 50. 関数 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x \neq y \text{ のとき,} \\ 0 & x = y \text{ のとき.} \end{cases}$$

で定める. このとき,

$$f_{xy}(0, 0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0, 0)$$

を確かめよ.

170

§ 6.2 全微分と接平面

定義. $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ が (a, b) において全微分可能であるとは, ある $A, B \in \mathbf{R}$ が存在して, $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right),$$

すなわち

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - A(x - a) - B(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

が成り立つことである. このとき, 平面 $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ を曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b)) \in \mathbf{R}^3$ における接平面と呼ぶ.

注意. 全微分可能性とは1次近似可能性に他ならない. また, 接平面とは曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b))$ の近くでの1次近似のことである.

171

定理 6.2. 1. f が C^1 級なら, f は任意の $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ で全微分可能である.

2. f が $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ で全微分可能なら, f は (a, b) で連続かつ x, y 偏微分可能であり, さらに $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right)$$

が成り立つ.

注意. 1. 特に, 接平面の公式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で与えられ, その法ベクトルは $(f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ である.

172

2. 粗くまとめると,

$$C^1 \text{ 級} \Rightarrow \text{全微分可能} \Rightarrow \text{連続かつ } x, y \text{ 偏微分可能}$$

である. x, y 偏微分は特定の方向しか考えないため, x, y 偏微分可能性だけでは全微分可能性には不十分なことに注意する. なお, 実用上は「 C^1 級でない全微分可能な関数」が現れることはないので, C^1 級なら1次近似可能なことと, 接平面の公式を覚えておけばよい.

3. f が全微分可能なら,

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \end{aligned}$$

と書ける. これを形式的に

$$df = f_x dx + f_y dy$$

と書いて, df を f の全微分と呼ぶ.

173

証明. 1. 任意の $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ を固定し, 任意の $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$f(x, y) - f(a, b) = f(x, y) - f(a, y) + f(a, y) - f(a, b)$$

と書く. f を第1, 2変数それぞれに関して1変数関数と見て平均値の定理を適用すると, ある $\theta, \theta' \in (0, 1)$ が存在して

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) \\ = f_x(a + \theta(x - a), y)(x - a) + f_y(a, b + \theta'(y - b))(y - b) \end{aligned}$$

となる. ここで, f_x, f_y の連続性を用いると, $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) \\ = (f_x(a, b) + o(1))(x - a) + (f_y(a, b) + o(1))(y - b) \\ = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + o(x - a) + o(y - b) \end{aligned}$$

が成り立つ. これから主張が従う.

174

2. f が (a, b) で全微分可能とすると, ある $A, B \in \mathbf{R}$ が存在して

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right)$$

が成り立つ. この表示から,

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \frac{A(x - a) + o(x - a)}{x - a} = A + o(1)$$

となるので, f の (a, b) における x 偏微分可能性と

$$A = f_x(a, b)$$

が従う. y 偏微分についても同様である. 残りの主張も明らかである. $\square$

175

問 51. 以下の曲面に対し、与えられた点における接平面とその法ベクトルを求めよ.

1. $z = x^3 + y^2$, $(1, 2, 5)$
2. $z = x^2 + 2y^2$, $(-2, 0, 4)$
3. $z = xy$, (a, b, ab)

略解. 1のみ解答を与える. 定理 6.2により, 接平面の方程式は

$$z = 5 + 3(x - 1) + 4(y - 2) \quad \therefore z = 3x + 4y - 6$$

で与えられる. また, 法ベクトルとして $(3, 4, -1)$ がとれる. $\square$

§ 6.3 連鎖律 (chain rule)

定理 6.3. $f(x, y), \phi(t), \psi(t)$ は C^1 級とする. 合成 $f(\phi(t), \psi(t))$ は t の関数として C^1 級であり, さらに

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [f(\phi(t), \psi(t))] \\ &= \frac{d\phi}{dt}(t) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (\phi(t), \psi(t)) + \frac{d\psi}{dt}(t) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (\phi(t), \psi(t)) \end{aligned}$$

が成り立つ.

注意. $z = f(x, y), x = \phi(t), y = \psi(t)$ において,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{あるいは単に} \quad \frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y}$$

のように略記されることがある. 省略されている変数に注意せよ. これは形式的には全微分 $dz = z_x dx + z_y dy$ を dt で割ったものに一致する.

証明. まず, 任意の t を固定して, 極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [f(\phi(t+h), \psi(t+h)) - f(\phi(t), \psi(t))]$$

を計算する. 記号を簡単にするため, 各 $h \neq 0$ に対して

$$\phi(t) = \phi, \quad \phi(t+h) = \phi + \Delta\phi, \quad \psi(t) = \psi, \quad \psi(t+h) = \psi + \Delta\psi$$

とおく. すると定理 6.2 より

$$\begin{aligned} & f(\phi + \Delta\phi, \psi + \Delta\psi) - f(\phi, \psi) \\ &= f_x(\phi, \psi) \cdot (\Delta\phi) + f_y(\phi, \psi) \cdot (\Delta\psi) + o\left(\sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\psi)^2}\right) \end{aligned}$$

と書ける. ϕ, ψ が C^1 級であったことから, $h \rightarrow 0$ のとき

$$\Delta\phi = \phi'(t)h + o(h) = O(h), \quad \Delta\psi = \psi'(t)h + o(h) = O(h)$$

であり, これらを代入することで

$$\begin{aligned} & f(\phi + \Delta\phi, \psi + \Delta\psi) - f(\phi, \psi) \\ &= [f_x(\phi(t), \psi(t)) \cdot \phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)]h + o(h) \end{aligned}$$

を得る. よって結局,

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [f(\phi + \Delta\phi, \psi + \Delta\psi) - f(\phi, \psi)] \\ &= f_x(\phi(t), \psi(t)) \cdot \phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t) \end{aligned}$$

が従う.

t は任意であったから, $f(\phi(t), \psi(t))$ は定義域の上で微分可能である. また, その導関数は与えられた表示公式と仮定から定義域の上で連続である. したがって, $f(\phi(t), \psi(t))$ は確かに C^1 級である. $\square$

定理 6.4. $z = f(x, y), x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)$ は C^1 級とする. 合成 $z = f(\phi(u, v), \psi(u, v))$ は (u, v) の関数として C^1 級であり, さらに

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial y}$$

が成り立つ.

注意. 式が長いので, 略記法を用いた. 例えば, 第1式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}[f(\phi(u, v), \psi(u, v))] &= \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(\phi(u, v), \psi(u, v)) \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(\phi(u, v), \psi(u, v)) \end{aligned}$$

を意味する. 第2式についても同様である.

証明. u, v の一方を固定すれば, 1変数の場合 (定理 6.3) に帰着する. $\square$

180

問 52. C^1 級関数 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を極座標表示したものを,

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

とおく. g_r, g_θ を f_x, f_y を用いて表せ.

解. 連鎖律を用いて計算する. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ に注意して,

$$\begin{aligned} g_r(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} g_\theta(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) r \sin \theta + f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) r \cos \theta \end{aligned}$$

を得る. $\square$

181

注意. $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を単に $f(r, \theta)$ で表すこともあるが, これは $f(x, y)$ に $(x, y) = (r, \theta)$ を代入したものと区別できない. 慣れるまでは, 別の記号 $g(r, \theta)$ を導入した方が誤解が無く, 理解も早い. 同様に, g_r, g_θ を単に f_r, f_θ で表すこともあるが, どの変数について考えているか注意が必要である.

問 53. C^1 級関数 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ に対して

$$g(s, t) = f(s, \sin(s^2 + t^2))$$

とおく. g_s, g_t を f_x, f_y を用いて表せ.

182

§ 6.4 Laplace作用素

定義. $n \in \mathbf{N}$ とする. $\mathbf{R}^n$ 上の2階偏微分作用素

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

を **Laplace作用素** または **ラプラシアン** と呼ぶ.

注意. Laplace作用素は, 物理学や工学における多くのモデル方程式 (偏微分方程式) に現れる重要な作用素である. 考えている問題の対称性に応じて, 曲線座標系での表示公式が必要となることがあり, それは連鎖律により計算される.

183

例. 1. 温度分布または拡散物質密度 $u = u(t, x, y, z)$ は, **熱・拡散方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u$$

を満たす. ここで, $D > 0$ は熱伝導または拡散の強さを表す係数である.

2. 波動を伝える媒質の元の位置からの変位 $u = u(t, x, y, z)$ は, **波動方程式**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

を満たす. ここで, $c > 0$ は波動の (位相) 速度を表す.

3. 質量 m の量子論的粒子がポテンシャル V の下で運動するとき, その波動関数 $u = u(t, x, y, z)$ は, **Schrödinger 方程式**

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + Vu$$

を満たす. ここで, $\hbar$ は換算 Planck 定数, i は虚数単位である.

184

○ $\mathbf{R}^2$ 上の Laplace 作用素の極座標表示

問 54. $\mathbf{R}^2$ の極座標 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ に関して,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

を確かめよ. 正確に述べるなら, 任意の C^2 級関数 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ に対し

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

とおいたとき, 等式

$$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$$

が成り立つことを確かめよ.

解. 連鎖律を用いて計算する. まず

$$g_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta, \quad g_\theta = -f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta$$

185

であり, さらに計算することで

$$\begin{aligned} g_{rr} &= f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \sin^2 \theta, \\ g_{\theta\theta} &= f_{xx} r^2 \sin^2 \theta - 2f_{xy} r^2 \sin \theta \cos \theta + f_{yy} r^2 \cos^2 \theta \\ &\quad - f_x r \cos \theta - f_y r \sin \theta \end{aligned}$$

となる. 最後の2式および g_r の表示式を用いると,

$$g_{rr} + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} = f_{xx} + f_{yy} - \frac{1}{r} g_r$$

を得る. □

186

○ $\mathbf{R}^3$ 上の Laplace 作用素の球面座標表示

定義. $\mathbf{R}^3$ の任意の点 (x, y, z) は, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ を用いて

$$(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

のように表示できる. このような (r, θ, ϕ) を $\mathbf{R}^3$ の球面座標系と呼ぶ.

問 55. $\mathbf{R}^3$ の球面座標系 (r, θ, ϕ) に関して,

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

であることを確かめよ.

187

注意. 左辺から計算を始めるとは結構大変なことになる.

188

問 56. $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数 $u = u(t, x)$ は, 1 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を満たすとする. ただし, $c > 0$ は正定数とする.

1. $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi - \eta}{2c}, \frac{\xi + \eta}{2}\right)$ とおく. $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$ を求めよ.

2. ある 1 変数関数 $F(\xi), G(\eta)$ が存在して,

$$u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

と書けることを示せ.

189

解. 1. 連鎖律を用いて順次計算する. u が波動方程式を満たすことを用いて

$$v_\eta = -\frac{1}{2c}u_t + \frac{1}{2}u_x, \quad v_{\eta\xi} = -\frac{1}{4c^2}u_{tt} - \frac{1}{4c}u_{tx} + \frac{1}{4c}u_{xt} + \frac{1}{4}u_{xx} = 0$$

を得る.

2. $(v_\eta)_\xi = 0$ なので, ある $H(\eta)$ が存在して

$$v_\eta(\xi, \eta) = H(\eta)$$

と書ける. G を H の原始関数とすると $(v - G)_\eta = 0$ なので, ある $F(\xi)$ が存在して

$$v(\xi, \eta) - G(\eta) = F(\xi)$$

と書ける. よって, v の定義と変数変換 $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ により

$$u(t, x) = v(\xi, \eta) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

を得る. $\square$

190

注意. $t = 0$ における初期条件

$$u(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$$

が与えられたとすると,

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad cF'(x) - cG'(x) = g(x)$$

でなければならない. 後者の等式より

$$F(x) - G(x) = F(0) - G(0) + \frac{1}{c} \int_0^x g(\xi) d\xi$$

であり, これを前者と合わせれば, F, G を f, g で表すことができる. 少し計算すると, **d'Alembert の公式**

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(f(x + ct) + f(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi$$

が得られる.

191

§ 6.5 勾配ベクトル場

定義. $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場とは、ベクトル値関数 $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ のことである。これは $\mathbf{R}^2$ 上の2つの関数 f, g を用いて

$$(f, g): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$$

のように書ける。あるいは、 $\mathbf{R}^2$ の元をボールド体で表すことにして、

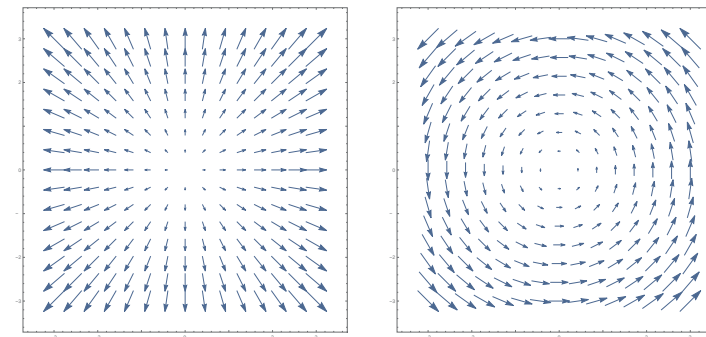
$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$$

のようにも書ける。

注意. $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場は、各点 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ に矢印 $f(\mathbf{x})$ を描くことで可視化できる。グラフと同様の方法では $\mathbf{R}^4$ を考えることになり、うまくいかない。

例. 流体の各点での流速がなす場や重力場、電場、磁場などがある。

192



ベクトル場 (x, y) および $(-y, x)$ の概形

193

定義. C^1 級関数 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、その勾配ベクトル場を

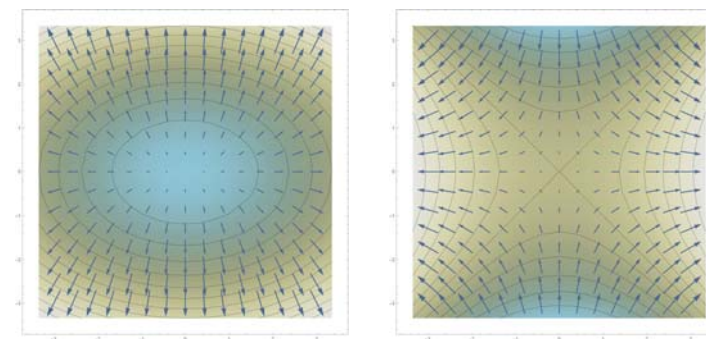
$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

で定義する。 f の勾配ベクトル場を $\text{grad } f$ で表す。

定理 6.5. $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 級とし、 $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ 、 $\text{grad } f(a, b) \neq (0, 0)$ とする。このとき、以下が成り立つ。

1. $\text{grad } f(a, b)$ は等高線 $f(x, y) = f(a, b)$ の (a, b) における法ベクトルである。
2. $\text{grad } f(a, b)$ は (a, b) から見て、 f の値が最も増大する向きを指す。
3. $\|\text{grad } f(a, b)\|$ は (a, b) から $\text{grad } f(a, b)$ の向きへの f の値の増大度（傾きの大きさ、あるいは等高線群の詰まり具合）を与える。

194



関数 $x^2 + 2y^2$ および $x^2 - y^2$ の等高線群と勾配ベクトル場

195

証明. 1. (a, b) を通る等高線 $f(x, y) = f(a, b)$ を, (a, b) の近くでパラメータ表示したものを $(x(t), y(t))$ とする. パラメータ付けを適当に取り直して,

$$(x(0), y(0)) = (a, b)$$

として良い. (後述の陰関数定理により, このようなパラメータ表示が存在する.) このとき, 任意の t に対して

$$f(x(t), y(t)) = f(a, b)$$

であり, 両辺を $t = 0$ で微分すると

$$f_x(a, b)x'(0) + f_y(a, b)y'(0) = 0$$

を得る. $(x'(0), y'(0))$ は等高線 $f(x, y) = f(a, b)$ の (a, b) における接ベクトルを与えるので, 主張1が従う.

2,3. 点 (a, b) において, x 軸に対して角度 θ 方向への f の値の増大度は,

$$\begin{aligned} k(\theta) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} (f(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta)) \right|_{t=0} \\ &= \left[f_x(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + f_y(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta) \sin \theta \right]_{t=0} \\ &= f_x(a, b) \cos \theta + f_y(a, b) \sin \theta \\ &= (\text{grad } f(a, b)) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

で与えられる. $\|(\cos \theta, \sin \theta)\| = 1$ に注意すると, $k(\theta)$ が最大となるのは

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \|\text{grad } f(a, b)\|^{-1} \text{grad } f(a, b)$$

のときであり, このとき,

$$k(\theta) = \|\text{grad } f(a, b)\|$$

である. よって主張2,3が示された. $\square$

問 57. $\mathbf{R}^2$ において, 以下で与えられるベクトル場を勾配ベクトル場に持つ関数は存在するか. もし存在するならそれを求めよ.

$$1. (y^2 \cos x, 2y \sin x - 4) \quad 2. (2xy, x^2) \quad 3. (2e^{xy}, \cos xy)$$

略解. 1. $\text{grad } f(x, y) = (y^2 \cos x, 2y \sin x - 4)$ とする. 第1成分を比較することで, $f(x, y) = y^2 \sin x + g(y)$ と書けることが分かる. これを用いて初めの等式の第2成分を計算すると $g'(y) = -4$ となる. したがって, $f(x, y) = y^2 \sin x - 4y + C$ (C は定数) を得る.

2. 1と同様にして, $f(x, y) = x^2 y + C$ (C は定数) を得る.

3. もし $\text{grad } f(x, y) = (2e^{xy}, \cos xy)$ とすれば, $2xe^{xy} = f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -y \sin xy$ でなければならないが, これは不合理である. よって条件を満たす関数は存在しない. $\square$

§ 6.6 多変数関数に対する Taylor の定理

定理 6.6. f は C^n 級とし, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ とする. このとき, 任意の $(h, k) \in \mathbf{R}^2$ に対しある $\theta \in (0, 1)$ が存在して,

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f \right] (a, b) \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right] (a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき,

$$f(a + h, b + k) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f \right] (a, b) + o((h^2 + k^2)^{n/2})$$

が成り立つ.

注意. 微分作用素のべきは二項展開を用いて計算する．具体的には，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f = \sum_{l+m=j} \frac{j!}{l!m!} h^l k^m \frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}$$

である．

証明. 任意の $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ と $(h, k) \in \mathbf{R}^2$ を固定して，

$$F(t) = f(a + th, b + tk), \quad t \in \mathbf{R},$$

とおくと， $F(t)$ は t の C^n 級関数である．ゆえに Taylor の定理により，ある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$f(a + h, b + k) = F(1) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!} \quad (\clubsuit)$$

200

が成り立つ．ここで連鎖律を用いて直接計算すれば，

$$\begin{aligned} F^{(j)}(t) &= \frac{d^j}{dt^j} f(a + th, b + tk) \\ &= \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right) f \right] (a + th, b + tk) \\ &= \cdots = \left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f \right] (a + th, b + tk) \end{aligned}$$

となるので，これを $(\clubsuit)$ に代入すれば前者の表示が得られる．後者については，前者の表示の剰余項（を展開したものの各項）に対して，

$$\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m} (a + \theta h, b + \theta k) = \frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m} (a, b) + o(1)$$

であることと， $h = O(\sqrt{h^2 + k^2})$ および $k = O(\sqrt{h^2 + k^2})$ を用いればよい． $\square$

201

系 6.7. 特に $n = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)] + o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明. 定理 6.6 からすぐに従う． $\square$

注意. (h, k) に関する 1 次近似は，全微分に他ならない．なお，2 次近似に現れる係数行列

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

は，**Hesse 行列**と呼ばれる．

202

問 58. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ に対し， $(1, 0)$ の周りでの 2 次近似を求めよ．

解. 系 6.7 より，

$$f(1 + h, k) = 1 + h + \frac{1}{2}k^2 + o(h^2 + k^2)$$

を得る． $\square$

203

§ 6.7 極値問題

定義. 1. f が $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ で **極大値** をとるとは, ある $\delta > 0$ が存在して任意の $(x, y) \in B_\delta(a, b)$ に対し

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

が成り立つことである. このような (a, b) を **極大点** と呼ぶ.

2. f が $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ で **極小値** をとるとは, ある $\delta > 0$ が存在して任意の $(x, y) \in B_\delta(a, b)$ に対し

$$f(x, y) \geq f(a, b)$$

が成り立つことである. このような (a, b) を **極小点** と呼ぶ.

3. 極大値と極小値を合わせて **極値**, 極大点と極小点を合わせて **極値点** と呼ぶ.

204

○ 極値であるための必要条件

定理 6.8. f は C^1 級とする. もし f が (a, b) で極値をとるならば,

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

が成り立つ.

証明. 極大の場合のみを示す. 極大値の定義より, 十分小さな $h > 0$ に対して

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0, \quad \frac{f(a-h, b) - f(a, b)}{-h} \geq 0$$

が成り立つ. よって $h \rightarrow +0$ とすれば, $f_x(a, b) = 0$ が従う. $f_y(a, b) = 0$ も同様に示せる. $\square$

注意. 上の定理は, 極値において, 接平面が xy 平面に平行になることを主張している. なお, 逆は必ずしも成立しない. 例えば, 鞍点を考えよ.

205

○ 極値であるための十分条件

定理 6.9. f は C^2 級とし, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ において

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

とする. このとき,

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b), \quad C = f_{yy}(a, b)$$

とおくと, 以下が成立する.

1. $AC - B^2 > 0$ かつ $A > 0$ ならば, f は (a, b) で極小値をとる.
2. $AC - B^2 > 0$ かつ $A < 0$ ならば, f は (a, b) で極大値をとる.
3. $AC - B^2 < 0$ ならば, (a, b) は f の鞍点である. 特に, f は (a, b) で極値をとらない.

206

注意. 1. この定理では, f の (a, b) の周りでの第2次近似を用いて, 極値判定を行っている. 系 6.7 と定理 5.1 も参照せよ.

2. $AC - B^2 = 0$ の場合は, 2次近似では極値判定不能である. 3次以上の近似を調べることになるが, これは一般には難しい.
3. 以下では, まずいくつかの演習問題を見て, その後に定理 6.9 の証明を概要のみ与える. 以下の別解の流れを覚えておけば, 判定条件を復元できることに注意する. (もちろん判定条件を覚える方が計算は簡単である.)

207

問 59. 関数 $f(x, y) = 6x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x^3$ の極値をすべて求めよ.

解. Step 1. [まず1次近似を見て, 極値の候補を絞る]

もし f が (x, y) で極値をとるならば,

$$f_x(x, y) = 12x + 6y - 6x^2 = 0, \quad f_y(x, y) = 6x + 6y = 0$$

でなければならない. これを解くと

$$(x, y) = (0, 0), (1, -1)$$

となる.

Step 2. [次に各極値候補の周りで2次近似を調べ, 極値判定を行う]

f の2階偏導関数は

$$f_{xx} = 12 - 12x, \quad f_{xy} = 6, \quad f_{yy} = 6$$

で与えられることに注意しておく.

(I) $(x, y) = (0, 0)$ においては,

$$AC - B^2 = 36 > 0, \quad A = 12 > 0$$

なので, f は $(0, 0)$ で極小値 $f(0, 0) = 0$ をとる.

(II) $x = (1, -1)$ においては,

$$AC - B^2 = -36 < 0$$

なので, $(1, -1)$ は f の鞍点であり, f は $(1, -1)$ で極値をとらない. $\square$

注意. 少し長くなるが, 上の (I) と (II) は以下で差し替えることもできる.

別解. (I) f の $(0, 0)$ の近くでの2次近似を計算すると

$$f(h, k) = 6h^2 + 6hk + 3k^2 + o(h^2 + k^2)$$

となる. 一方の変数について平方完成し, 変数変換すると

$$\begin{aligned} f(h, k) &= 6\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}k^2 + o(h^2 + k^2) \\ &= 6H^2 + \frac{3}{2}K^2 + o(H^2 + K^2) \end{aligned}$$

となる. ただし, $H = h + k/2$, $K = k$ とおいた. 最後の表示から, f は $(0, 0)$ で極小値 $f(0, 0) = 0$ をとることがわかる.

注意. 2次部分が正係数のみなので, (H, K) が $(0, 0)$ からどの向きに動いても, f の値は増大することが分かる. なお, 極値判定には2次の部分のみを見ればよいことに注意する. 実際, 高位の微少量の項は (H, K) が十分 $(0, 0)$ に近ければ, 2次部分に完全に飲まれてしまい, f の増減には影響を与えないことができないからである.

(II) f の $(1, -1)$ の近くでの2次近似を計算すると

$$f(1+h, -1+k) = 1 + 6hk + 3k^2 + o(h^2 + k^2)$$

となる. 一方の変数について平方完成を行い, 適当に変数変換すると

$$\begin{aligned} f(1+h, -1+k) &= 1 + 3(k+h)^2 - 3h^2 + o(h^2 + k^2) \\ &= 1 + 3K^2 - 3H^2 + o(H^2 + K^2) \end{aligned}$$

となる. よって, $(1, -1)$ は f の鞍点であり, f は $(1, -1)$ で極値をとらない.

注意. 2次部分が正負の係数を持つことから, (H, K) の動く方向に応じて, f の値は増大も減少もする. 先ほどと同様に, 高位の微少量の項は無視できるため, このような点は極値にはなり得ない. $\square$

問 60. 関数 $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^4 - y^4$ の極値をすべて求めよ.

解(?). Step 1. [1次近似を見て, 極値の候補を絞る]

もし f が (x, y) で極値をとるならば,

$$f_x(x, y) = 2x + 2y - 4x^3 = 0, \quad f_y(x, y) = 2x + 2y - 4y^3 = 0$$

でなければならない. これを解くと

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1)$$

となる.

Step 2. [各極値候補の周りで2次近似を調べ, 極値判定を行う]

f の2階偏導関数は

$$f_{xx} = 2 - 12x^2, \quad f_{xy} = 2, \quad f_{yy} = 2 - 12y^2$$

で与えられることに注意しておく.

212

(I) $x = (0, 0)$ においては

$$AC - B^2 = 0$$

となることから, これは定理 6.9 では極値判定できないケースである. 例えば, f の $(0, 0)$ の周りで2次近似を計算してみると,

$$\begin{aligned} f(h, k) &= h^2 + 2hk + k^2 + o(h^2 + k^2) \\ &= (h + k)^2 + o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

となる. もし (h, k) が $h = -k$ を満たしながら $(0, 0)$ の周りを動くと, 主要部分 $(h + k)^2$ が0なので, f の増減は $o(h^2 + k^2)$ の項の挙動に依存することが分かる.

(II), (III) 残りの候補の点 $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ (複合同順) において, 直前の問と同様に議論すると, 定理 6.9 が適用でき, 極大値2を取ることが分かる. 詳細は省略する. $\square$

213

定理 6.9 の証明の概要. 上の問の解における議論を抽象化する. 条件より,

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{2} [Ah^2 + 2Bhk + Ck^2] + o(h^2 + k^2)$$

が成り立つ. 主張の場合分けから, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ としてよい.

I. $A \neq 0$ のとき, 上の右辺の2次部分は

$$\frac{A}{2} \left(h + \frac{B}{A} k \right)^2 + \frac{AC - B^2}{2A} k^2$$

と書けるので, (a, b) は, $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ ならば極小値, $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ ならば極大値, $AC - B^2 < 0$ ならば鞍点を与える.

II. $C \neq 0$ のときはIと同様に議論できる.

III. $A = C = 0$ かつ $B \neq 0$ のとき, f は (a, b) の近くで増減の両方があり, 極値をとらない. $\square$

214

問 61. 次の関数の極値をすべて求めよ.

$$1. f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad 2. f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2 y^2$$

解. 1. もし点 (x, y) で極値を取るならば

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad f_y = 3y^2 - 3x = 0$$

でなければならない, これより $(x, y) = (0, 0)$ または $(1, 1)$ が必要である.

(I) $(x, y) = (0, 0)$ では

$$AC - B^2 = -9 < 0$$

なので, $(0, 0)$ は f の鞍点である.

(II) $(x, y) = (1, 1)$ では

$$AC - B^2 = 27 > 0, \quad A = 6 > 0$$

なので, f は $(1, 1)$ において極小値 -1 をとる.

215

別解. (I) $(x, y) = (0, 0)$ のまわりでの2次近似を計算すると,

$$\begin{aligned} f(h, k) &= -3hk + o(h^2 + k^2) \\ &= -\frac{3}{4}(h+k)^2 + \frac{3}{4}(h-k)^2 + o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

となる. よって, $(0, 0)$ は f の鞍点である.

(II) $(x, y) = (1, 1)$ のまわりでの2次近似を計算すると,

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k) &= -1 + 3h^2 - 3hk + 3k^2 + o(h^2 + k^2) \\ &= -1 + 3\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}k^2 + o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

となる. よって, f は $(1, 1)$ において極小値 -1 をとる.

216

2. もし点 (x, y) で極値を取るならば

$$f_x = 2x - 2xy^2 = 0, \quad f_y = 2y - 2x^2y = 0$$

でなければならず, これより

$$(x, y) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1) \text{ (複合任意)}$$

が必要である.

(I) $(x, y) = (0, 0)$ では

$$AC - B^2 = 4 > 0, \quad A = 2 > 0$$

なので, f は $(0, 0)$ において極小値 0 をとる.

(II) $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ (複合任意) では

$$AC - B^2 = -16 < 0$$

なので, $(\pm 1, \pm 1)$ は f の鞍点である.

□

217

別解. (I) $(x, y) = (0, 0)$ のまわりでの2次近似を計算すると,

$$f(h, k) = h^2 + k^2 + o(h^2 + k^2)$$

となる. よって, f は $(x, y) = (0, 0)$ で極小値 0 をとる.

(II) $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ (複合同順) のまわりでの2次近似を計算すると,

$$\begin{aligned} f(\pm 1 + h, \pm 1 + k) &= 1 - 4hk + o(h^2 + k^2) \\ &= 1 - (h+k)^2 + (h-k)^2 + o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

となる. よって, $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ は鞍点を与える.

(III) 同様に, $(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順) も鞍点を与える (計算は省略する). □

218

第7章 陰関数定理

§ 7.1 陰関数定理

○ 曲線の表現方法

$\mathbf{R}^2$ 内の曲線の表示方法として、主に以下の3つが知られている。

陽関数表示: $y = f(x)$ (例えば, $y = x^2$)

陰関数表示: $F(x, y) = 0$ (例えば, $x^2 + y^2 - 1 = 0$)

パラメータ表示: $(x, y) = (\phi(t), \psi(t))$ (例えば, $(x, y) = (\cos t, \sin t)$)

注意. 陰関数表示 $F(x, y) = 0$ は, 曲面 $z = F(x, y)$ の平面 $z = 0$ による切り口に現れる図形と見てもよい。

220

陽関数表示から陰関数表示への移行は常に可能である。実際, $y = f(x)$ が与えられたとき,

$$F(x, y) = f(x) - y$$

を考えればよい。しかし, 陰関数表示から陽関数表示への移行は必ずしも可能ではない。例えば,

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

を陽関数表示しようとしても,

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

は多価関数になってしまう。また, 仮に局所的に考えたとしても, $(1, 0)$ の近傍は x の関数のグラフで表示できない。

以下に述べる陰関数定理は, 陰関数表示で与えられた図形が, 考えている点の近くで陽関数表示できるための十分条件を与える。

221

定理 7.1 (陰関数定理). $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 級とし, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ で

$$F(a, b) = 0, \quad F_y(a, b) \neq 0$$

となるとする。このとき, ある $\epsilon, \delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ に対しある $f(x) \in (b - \delta, b + \delta)$ が一意的に存在して

$$F(x, f(x)) = 0 \quad (\heartsuit)$$

が成り立つ。さらに, このように定められた関数

$$f: (a - \epsilon, a + \epsilon) \rightarrow (b - \delta, b + \delta) \subset \mathbf{R}$$

は C^1 級であり, その導関数は

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad (\diamondsuit)$$

を満たす。

222

注意. 1. 条件 $F(a, b) = 0$ は点 (a, b) が図形 $F(x, y) = 0$ の上にあることを意味する。また, 条件 $F_y(a, b) \neq 0$ は, xyz 空間において曲面 $z = F(x, y)$ の $(a, b, 0)$ における接平面が, 「 y 方向に傾き 0 ではない」ことを意味する。(どのような幾何学的状況か, 次の結論と合わせて想像してみよ。)

2. 等式 $(\heartsuit)$ は, 曲線 $y = f(x)$ が $F(x, y) = 0$ の上にあることを意味する。さらに, $f(x)$ には一意性があることから, 長方形領域 $|x - a| < \epsilon, |y - b| < \delta$ 内では, $F(x, y) = 0$ は曲線 $y = f(x)$ に完全に一致する。

3. 陰関数定理は陰関数 f の局所存在を保証してくれるが, これは理論上の話であり, その具体的な形までは分からない。ただし, f の導関数に関する情報は $(\diamondsuit)$ が与えてくれる。なお $(\diamondsuit)$ は, $(\heartsuit)$ を連鎖律を用いて x で微分すれば得られるので, わざわざ覚える必要はない。

4. 陰関数定理は一次近似で形状が判別できる場合のみを扱っている。

223

証明. Step 1. まず主張のような $\epsilon, \delta > 0$ を適切に選んで, f を構成する. 必要なら F を $-F$ に取り直すことで, $F_y(a, b) > 0$ としてよい. まず F_y の連続性から, $\epsilon, \delta > 0$ を十分小さく取れば, 任意の $(x, y) \in [a - \epsilon, a + \epsilon] \times [b - \delta, b + \delta]$ に対し

$$F_y(x, y) > 0 \quad (\clubsuit)$$

が成り立つ. すると, $F(a, y)$ は $y \in [b - \delta, b + \delta]$ について狭義単調増加であり, $F(a, b) = 0$ より

$$F(a, b - \delta) < 0 < F(a, b + \delta)$$

となる. F の連続性から, 必要なら $\epsilon > 0$ をより小さく取り直すことで, 任意の $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ に対して

$$F(x, b - \delta) < 0 < F(x, b + \delta) \quad (\spadesuit)$$

224

が成り立つことに注意する. これを任意の $x, x' \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ に対し $y = f(x), y' = f(x')$ として適用すると, ある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(x + \theta(x' - x), f(x) + \theta(f(x') - f(x)))(x' - x) \\ &\quad + F_y(x + \theta(x' - x), f(x) + \theta(f(x') - f(x)))(f(x') - f(x)) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで定理 5.3 と $(\clubsuit)$ より, $[a - \epsilon, a + \epsilon] \times [b - \delta, b + \delta]$ 上で

$$M := \max |F_x(x, y)| < \infty, \quad m := \min |F_y(x, y)| > 0$$

であることに注意すると

$$|f(x') - f(x)| \leq \frac{M}{m} |x' - x|$$

が従う. よって f は $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 上で連続である.

226

としてよい. さて, 任意の $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ をとる. このとき, $(\clubsuit)$ より $F(x, y)$ は $y \in (b - \delta, b + \delta)$ に関して単調増加かつ $(\spadesuit)$ を満たすので, 中間値の定理より, ある $f(x) \in (b - \delta, b + \delta)$ が一意的存在して

$$F(x, f(x)) = 0$$

が成り立つ. これにより $(\heartsuit)$ を満たすような

$$f: (a - \epsilon, a + \epsilon) \rightarrow (b - \delta, b + \delta) \subset \mathbf{R}$$

が構成された.

Step 2. 上の f が $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 上で連続なことを示す. まず, Taylor の定理により, 任意の (x, y) と (x', y') に対し, ある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$\begin{aligned} F(x', y') &= F(x, y) + (x' - x)F_x(x + \theta(x' - x), y + \theta(y' - y)) \\ &\quad + (y' - y)F_y(x + \theta(x' - x), y + \theta(y' - y)) \end{aligned}$$

225

Step 3. 最後に f が $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 上で C^1 級なことを示す. Step 2 の等式から, 任意の $x, x + h \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ に対しある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = -\frac{F_x(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))}{F_y(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))}$$

と書ける. ここで $h \rightarrow 0$ とすれば, f の連続性より

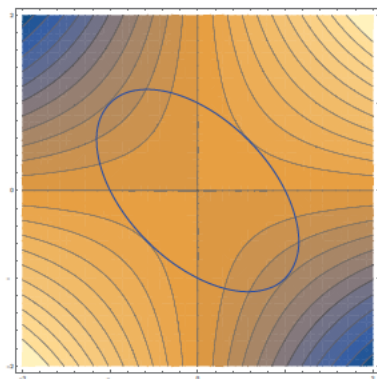
$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

が従う. よって f は $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 上で微分可能であり, さらにこの表示式から C^1 級であることも分かる. よって主張が示された. $\square$

227

§ 7.2 条件付き最大・最小問題

問 62. 条件 $x^2 + xy + y^2 = 1$ の下で, xy の最大値と最小値を求めよ.



228

考え方. $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とおく. 上の様に, $\mathbb{R}^2$ 上に f の等高線群と曲線 $g(x, y) = 0$ を描いてみると, それらは最大・最小点で接することが分かる.

逆に, 点 (a, b) で等高線 $f(x, y) = c$ と $g(x, y) = 0$ が横断的に交わっていたとしよう. このとき, 点 (x, y) を (a, b) の近くで $g(x, y) = 0$ に沿って動かすと, 値 $f(x, y)$ は $f(a, b) = c$ より大きくも小さくもできる. これは $f(a, b)$ が最大値・最小値ではないことを意味する. $\square$

229

定理 7.2 (Lagrange の未定乗数法). $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級とする. もし曲線 $g(x, y) = 0$ が有界なら, f はその上で最大値と最小値を持つ. さらにこのとき, そのような最大・最小点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ では,

1. $g_x(a, b) = g_y(a, b) = 0$,
2. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $f_x(a, b) - \lambda g_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) - \lambda g_y(a, b) = 0$

の少なくとも一方が成り立つ.

注意. 1. これを条件付き最大・最小問題に適用するには, 包含関係

$$\{\text{最大・最小点}\} \subset \{\text{条件1または2を満たす } g = 0 \text{ 上の点}\}$$

に着目するとよい. 未知変数の個数と方程式の本数の関係から, (大抵の場合) 右辺は有限集合となることに注意しよう. すなわち, 無限個の実数の大小比較問題が, 有限個の実数のそれに簡略化されるのである.

230

2. 曲線 $g(x, y) = 0$ 上の点で条件1を満たすものを, その曲線の**特異点**と呼ぶ. 特異点では陰関数定理が使えず, 必ずしもパラメータ表示できない (例えば, 曲線が折れたり, 交差する) ため, 分けて扱う必要がある.
3. 条件2は, f の等高線が $g(x, y) = 0$ に接することを意味する. λ は**未定乗数**と呼ばれるが, その値自体にはここでは特に意味はない.
4. 定理の条件1と2は, まとめて

“ $\text{grad } f(a, b)$ と $\text{grad } g(a, b)$ は線形従属である”

や

$$“f_x(a, b)g_y(a, b) - f_y(a, b)g_x(a, b) = 0”$$

と言い換えられる. 文献によって条件の表現が異なるので, 覚え易いものを覚えておくとよいだろう. 後述の定理 7.3 や定理 7.4 も参照せよ.

231

定理 7.2 の証明の前に、実際の適用の流れを見ておく。

問 62 の解. $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ とおく。

Step 0. [曲線 $g(x, y) = 0$ の有界性 (本講では省略可)] $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ のとき,

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 - 1 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1 \rightarrow \infty$$

なので、曲線 $g(x, y) = 0$ は有界である。

注意. あるいは、少し粗いが,

$$g(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - 1 = X^2 + \frac{3}{4}Y^2 - 1 \rightarrow \infty$$

としても良い。

232

Step 1. [曲線 $g(x, y) = 0$ の特異点] $g(x, y) = 0$ が特異点を持つなら、そこでは

$$g_x(x, y) = 2x + y = 0, \quad g_y(x, y) = x + 2y = 0$$

が成り立つ。これらを解くと $x = y = 0$ となるが、 $g(0, 0) = -1 \neq 0$ なので、 $g(x, y) = 0$ は特異点を持たない。

Step 2. [特異点以外の候補] (x, y) を f の条件 $g(x, y) = 0$ の下での最大・最小点とする。 $g(x, y) = 0$ に特異点はないから、Lagrange の未定乗数法より、ある $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して

$$y - \lambda(2x + y) = 0, \quad x - \lambda(x + 2y) = 0$$

が成り立つ。2 式を辺々加えて、

$$(1 - 3\lambda)(x + y) = 0 \quad \therefore \lambda = \frac{1}{3} \text{ or } x + y = 0$$

となる。

233

(i) $\lambda = \frac{1}{3}$ のとき、 $g(x, y) = 0$ と合わせて解くと、

$$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ であり、このとき } f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}$$

となる。

(ii) $x + y = 0$ のとき、 $g(x, y) = 0$ と合わせて解くと、

$$x = -y = \pm 1 \text{ であり、このとき } f(\pm 1, \mp 1) = -1$$

となる。

Step 3. [得られた候補の大小比較] 以上より、

$$\text{最大値: } f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}, \quad \text{最小値: } f(\pm 1, \mp 1) = -1$$

が分かる。

□

234

定理 7.2 の証明. 仮定と g の連続性から $g(x, y) = 0$ は有界閉集合となる (問 47 参照) ので、定理 5.3 より最大・最小点 (a, b) が存在する。

$g_x(a, b) = g_y(a, b) = 0$ でないとする。 x, y 変数の対称性から、 $g_y(a, b) \neq 0$ としてよい。すると陰関数定理より、 $x = a$ の近くで定義されたある C^1 級関数 ϕ が存在して、

$$\phi(a) = b, \quad g(x, \phi(x)) = 0$$

が成り立つ。 $F(x) := f(x, \phi(x))$ は $x = a$ で極値をとることから、

$$0 = F'(a) = f_x(a, \phi(a)) + f_y(a, \phi(a))\phi'(a)$$

である。さてここで、 $\phi'(a) = -g_x(a, b)/g_y(a, b)$ を代入すると、

$$0 = f_x(a, \phi(a)) - \frac{f_y(a, \phi(a))}{g_y(a, b)}g_x(a, b)$$

となる。よって $\lambda = f_y(a, b)/g_y(a, b)$ とおけばよい。

□

235

問 63. 条件 $2x^2 + xy + 2y^2 = 1$ の下で, $x^2 + y^2$ の最大値, 最小値を求めよ.

解. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2 - 1$ とおく. $\mathbf{R}^2$ の無限遠方において

$$g(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x + y)^2 - 1 \geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2) - 1 \rightarrow \infty$$

となるので, 曲線 $g(x, y) = 0$ は有界である.

I. まず,

$$g_x(x, y) = 4x + y = 0, \quad g_y(x, y) = x + 4y = 0$$

とすると, $(x, y) = (0, 0)$ であるが, $g(0, 0) = -1 \neq 0$ なので, 曲線 $g(x, y) = 0$ 上に特異点はない.

II. $\lambda \in \mathbf{R}$ を Lagrange の未定乗数として,

$$2x - \lambda(4x + y) = 0, \quad 2y - \lambda(x + 4y) = 0$$

とする. これを $g(x, y) = 0$ と合わせて解くと, 極値を与える点 (x, y) の候補として

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (\text{複合同順})$$

が得られる. よって

$$\text{最大値: } f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}, \quad \text{最小値: } f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{5}$$

である. $\square$

問 64. 条件 $x^4 + y^4 = 2$ の下で, $x^2 + y^2$ の最大値, 最小値を求めよ.

解. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^4 + y^4 - 2$ とおく. $\mathbf{R}^2$ の無限遠方において

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2 - 2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2 \rightarrow \infty$$

となるので, 曲線 $g(x, y) = 0$ は有界である.

I. まず,

$$g_x(x, y) = 4x^3 = 0, \quad g_y(x, y) = 4y^3 = 0$$

とすると, $(x, y) = (0, 0)$ であるが, $g(0, 0) = -2 \neq 0$ なので, 曲線 $g(x, y) = 0$ 上に特異点はない.

II. $\lambda \in \mathbf{R}$ を Lagrange の未定乗数として,

$$2x - 4\lambda x^3 = 0, \quad 2y - 4\lambda y^3 = 0$$

とする. これを $g(x, y) = 0$ と合わせて解くと, 極値を与える点 (x, y) の候補として

$$(x, y) = (\pm \sqrt[4]{2}, 0), (0, \pm \sqrt[4]{2}), (\pm 1, \pm 1) \quad (\text{複合同任意})$$

が得られる. よって

$$\text{最大値: } f(\pm 1, \pm 1) = 2, \quad \text{最小値: } f(\pm \sqrt[4]{2}, 0) = f(0, \pm \sqrt[4]{2}) = \sqrt{2}$$

である. $\square$

○ 3変数関数に対するLagrangeの未定乗数法

問 65. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の下で, $x + 2y + 3z$ の最大値, 最小値を求めよ.

略解. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ とおく.
曲面 $g(x, y, z) = 0$ は明らかに有界である.

I. $g = 0$, $g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = 0$ を同時に満たす点は存在しないので,
曲面 $g = 0$ に特異点はない.

II. $g = 0$, $f_x - \lambda g_x = 0$, $f_y - \lambda g_y = 0$, $f_z - \lambda g_z = 0$ を解いて, 得られた点における f の値を大小比較すると

$$\text{最大値: } f(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}) = \sqrt{14},$$

$$\text{最小値: } f(-1/\sqrt{14}, -2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14}) = -\sqrt{14}$$

を得る. □

240

○ 参考: Lagrangeの未定乗数法の別の表現

文献によっては別の形のLagrangeの未定乗数法が掲載されていることもあるので, 参考のため, 次の2つを紹介しておく. 証明はいずれも定理 7.2と同様なので省略する. 定理 7.3が最も一般的な形であり, 定理 7.4はその系, 定理 7.2はさらにその系と見ることができる.

定理 7.3 (Lagrangeの未定乗数法). $f, g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を C^1 級とする. 条件 $g(x, y) = 0$ の下で f が点 $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ において極値をとるなら,

$$1. g_x(a, b) = g_y(a, b) = 0,$$

$$2. \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ s.t. } f_x(a, b) - \lambda g_x(a, b) = 0, f_y(a, b) - \lambda g_y(a, b) = 0$$

の少なくとも一方が成り立つ.

241

定理 7.4 (Lagrangeの未定乗数法). $D \subset \mathbf{R}^2$ を有界領域とし,

$$f, g: \overline{D} \rightarrow \mathbf{R}$$

は C^0 級かつ D 上で C^1 級とする. ここで $\overline{D}$ は D の閉包である. このとき, f は $\overline{D}$ 内で条件 $g(x, y) = 0$ の下で最大値と最小値を持つ. さらに, そのような最大・最小点 (a, b) では,

$$1. (a, b) \in \partial D,$$

$$2. g_x(a, b) = g_y(a, b) = 0,$$

$$3. \exists \lambda \in \mathbf{R} \text{ s.t. } f_x(a, b) - \lambda g_x(a, b) = 0, f_y(a, b) - \lambda g_y(a, b) = 0$$

の少なくとも一つが成り立つ.

242

§ 7.3 逆写像定理

定義. 1. 各 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ にただ一つの点 $\phi(x, y) \in \mathbf{R}^2$ を対応させる対応 ϕ を, $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像と呼び,

$$\phi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto \phi(x, y)$$

で表す. これは2つの2変数関数 f, g の組に他ならず,

$$\phi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

の様に成分表示できる.

2. 上の写像 $\phi = (f, g)$ が C^k 級であるとは, その成分 f, g が共に C^k 級関数となることである.

注意. ϕ をベクトル場と見することもできるが, ここではそのようにはしない.

243

例. 1. $\phi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ (ただし, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ とする.)

2. $\phi(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$

注意. y, x を固定して得られる x 曲線, y 曲線の族で写像を可視化できる.

244

定義. C^1 級写像 $\phi = (f, g): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対し, その **Jacobi 行列** および **Jacobi 行列式** (ヤコビアン) を, それぞれ

$$\phi' = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}, \quad J_\phi = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \det \phi'$$

で定義する.

注意. Jacobi 行列は, 写像 ϕ の考えている点の周りでの 1 次近似を与える.

245

問 66. 以下で与えられる写像に対し, それぞれ Jacobi 行列式を計算せよ.

1. $\phi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ (ただし, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ とする)

2. $\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

3. $\phi(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$

略解. それぞれ, $ad - bc$, r , $r^2 \sin \theta$ となる. $\square$

注意. $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への写像とその Jacobi 行列, Jacobi 行列式はまだ定義していないが, $\mathbf{R}^2$ の場合と同様である. 第 8 章で一般次元での定義を与える.

246

定理 7.5 (逆写像定理). $\phi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ は C^1 級で, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ において

$$J_\phi(a, b) \neq 0$$

を満たすとする. このとき, (a, b) を含むある開集合 U と $\phi(a, b)$ を含むある開集合 V が存在して, ϕ は U から V への全単射となる. さらに, V 上で定義される ϕ の逆写像 ϕ^{-1} は C^1 級であり, 任意の $(u, v) \in V$ に対して

$$(\phi^{-1})'(u, v) = \phi'(\phi^{-1}(u, v))^{-1}$$

が成り立つ. (右辺の最後の $^{-1}$ は逆行列を表す.)

注意. 1. ϕ の 1 次近似が点 (a, b) で退化していなければ, ϕ は (a, b) の周りで局所的な逆写像を持つことを主張している.

2. 本講では証明を省略するが, 陰関数定理から逆写像定理を導くこと, あるいはその逆は, 比較的容易である.

247

第8章 参考：多変数への一般化

§ 8.1 写像とその微分

定義. 1. 各 $x \in \mathbf{R}^n$ にただ一つの点 $f(x) \in \mathbf{R}^m$ を対応させる対応 f を、 $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像と呼び、

$$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m, x \mapsto f(x)$$

で表す。これは m 個の n 変数関数 $f_1, \dots, f_m$ の組に他ならず、

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

の様に成分表示できる。

2. 写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ が C^k 級であるとは、その成分 $f_1, \dots, f_m$ がすべて C^k 級関数となることである。

249

定義. 1. C^1 級写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ に対し、その **Jacobi** 行列を

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

で定義する。

2. C^1 級写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対し、その **Jacobi** 行列式 (ヤコビアン) を

$$J_f = \det f'$$

で定義する。これは、成分表示 $f = (f_1, \dots, f_n)$ を用いて、

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$$

などで表されることもある。

250

§ 8.2 連鎖律の多変数形

定理 8.1. $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ および $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l$ はともに C^1 級とする。このとき、合成 $g \circ f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^l$ は C^1 級で、

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

が成り立つ。ここで右辺の $\cdot$ は行列の積を意味する。あるいは、

$$z = g(y), \quad y = f(x)$$

とおいて、これを成分表示すれば、各 $j = 1, \dots, l$ と $k = 1, \dots, n$ に対し

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_k} = \frac{\partial z_j}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial z_j}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_k},$$

となる。

証明. 各成分において、微分に関係ない変数を固定すれば、定理 6.3 に帰着する。□

252

§ 8.3 陰関数定理の多変数形

定理 8.2 (陰関数定理). $F: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 級とし, $(a, b) \in \mathbf{R}^{n+1}$ は

$$F(a, b) = 0, \quad F_y(a, b) \neq 0$$

を満たすとする. このとき, ある $\epsilon, \delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in B_\epsilon(a)$ に対しある $f(x) \in (b - \delta, b + \delta)$ が一意的に存在して

$$F(x, f(x)) = 0$$

が成り立つ. さらに, このように定められた関数 $f: B_\epsilon(a) \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 級であり, 任意の $j = 1, \dots, n$ に対しその x_j 偏導関数は

$$f_{x_j}(x) = -\frac{F_{x_j}(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

を満たす.

253

定理 8.3 (陰関数定理). $F: \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^k$ は C^1 級とし, $(a, b) \in \mathbf{R}^{n+k}$ は

$$F(a, b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

を満たすとする. このとき, ある $\epsilon, \delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in B_\epsilon(a)$ に対しある $f(x) \in B_\delta(b)$ が一意的に存在して

$$F(x, f(x)) = 0$$

が成り立つ. さらに, このように定められた写像 $f: B_\epsilon(a) \rightarrow \mathbf{R}^k$ は C^1 級であり, その各成分の 1 階偏導関数は

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

の解として一意に定まる. ここで, F_x, F_y はそれぞれ $F = F(x, y)$ の x, y 変数に関する Jacobi 行列である.

254

§ 8.4 逆写像定理の多変数形

定理 8.4 (逆写像定理). $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ は C^1 級で, $a \in \mathbf{R}^n$ において

$$J_f(a) \neq 0$$

とする. このとき, a を含むある開集合 U と $f(a)$ を含むある開集合 V が存在して, f は U から V への全単射となる. さらに, V 上で定義される f の逆写像 f^{-1} は C^1 級であり, 任意の $y \in V$ に対して

$$(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$$

が成り立つ.

255

§ 8.5 Lagrange の未定乗数法の多変数形

定理 8.5 (Lagrange の未定乗数法). $f, g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 級とする. 条件 $g(x) = 0$ の下で f が $a \in \mathbf{R}^n$ において極値をとるなら,

1. $\text{grad } g(a) = 0$,
2. $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ s.t. $\text{grad } f(a) - \lambda \text{grad } g(a) = 0$

の少なくとも一方が成り立つ.

注意. 1. C^1 級関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ に対し, その勾配ベクトル場は

$$\text{grad } f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$$

で定義される.

2. 定理 7.4 や定理 7.2 のような主張も成り立つ. 次についても同様である.

256

定理 8.6 (Lagrangeの未定乗数法). $k < n$ とし, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ および $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ はともに C^1 級とする. 条件 $g(x) = \mathbf{0}$ の下で f が $a \in \mathbf{R}^n$ において極値をとるなら, 以下の少なくとも一方が成り立つ.

1. $\text{rank}(g'(a)) < k$ である.
2. ある $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\text{grad } f(a) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad } g_j(a) = \mathbf{0}$$

が成り立つ.