教室，担当

日	教室(room)	2	3	4
23	Z302	高山	Rossman	高岡
24	Z402	高山	Rossman	高岡
25	Y203	高山	Rossman	高岡
26	Z402	高山	Rossman	高岡
27	Z402	高山	Rossman	高岡

なお 7/27 2 時間目のみ B428. 3, 4 は Z402.

微分方程式，差分法，代数方程式系，多面体数値ホモトピー法
Differential equations, difference schemes, systems of algebraic equations, numerical homotopy method

高山信毅 (Nobuki Takayama), 2 時間目担当.

1. 出席をかねた feedback form の提出 (Download (write) short programs and try to execute it, ...)

2. レポート (report).

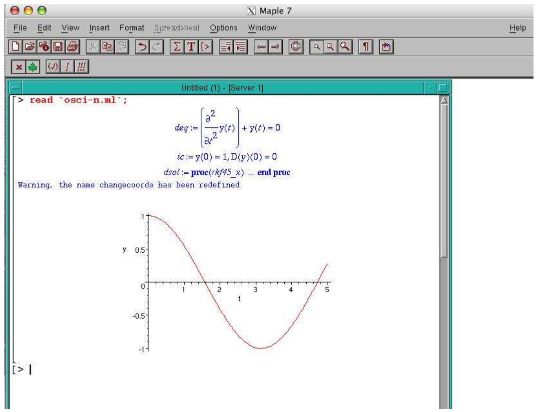
講義はビデオでも閲覧できる予定.
http://www.math.kobe-u.ac.jp/cm,
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2007/tokuron

微分方程式の例 (Examples of Differential Equations): 振動 (Oscillation)

$y'' + y = 0$,　y(t) は変数 t についての未知関数(unknown function)

$$y'' + y = 0,\ y(1) = 1, y'(0) = 0$$

初期条件に対する解は(solution for the initial condition is)　$y = \cos t$

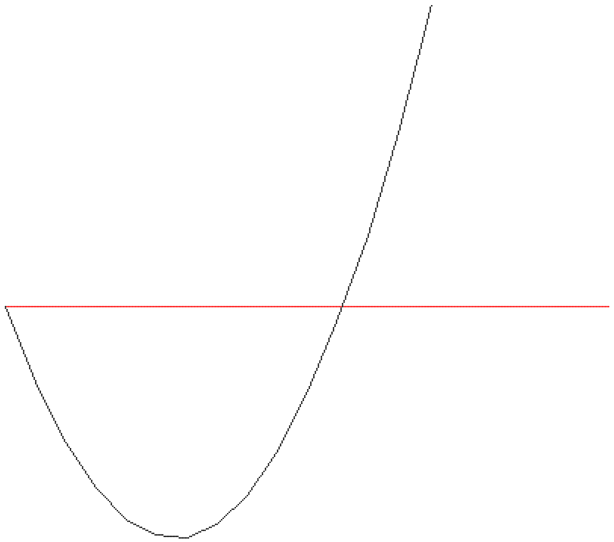


osci-n.ml

微分方程式の例: ボール投げ (Falling ball). 初期値問題(initial value problem)

$$y' = z, z' = -9.8, \quad y(0) = 0, z(0) = 5$$

$y(t)$, $z(t)$ は変数(variable) t についての未知関数(unknown functions).
z' は加速度(acceleration).



ball2.rr

熱伝導方程式 (heat equation), 初期値問題(initial value problem)

$a(x)$ は初期熱分布 ($a(x)$ is the initial heat distribution). $a(x)$ is given.

$$u_t = u_{xx}, u(0,x) = a(x), u(t,0) = u(t,1) = 0$$

$u(t,0) = u(t,1) = 0$ は Dirichlet 境界条件 (boundary condition). $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

この方程式の定常状態($u_t = 0$, $t = +\infty$) が $u'' = 0, u(0) = u(1) = 0$ の解. (Stable state of this solution is a solution of the ODE $u'' = 0$ with the boundary condition $u(0) = u(1) = 0$). 解(solution) は $u \equiv 0$. この問題は 境界値問題 (boundary value problem).

`heat.rr`

例: 反応拡散方程式の定常状態 (stable state of reaction-diffusion equation in 1 dim) [Leck2/parter]

$$u'' + au(1-u) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

条件 (condition) $u(0) = u(1) = 0$ が境界条件 (boundary condition).

a は パラメータ (parameter). 解の形態はパラメータ a の違いで変化 (solution pattern depends on a).

$$u_t = u_{xx} + au(1-u), \text{(プリントの = 0 はとる)}\ u(t,0) = u(t,1) = 0$$

この方程式の定常状態 ($u_t = 0$, $t = \infty$) が上の方程式の解 (Stable state of this solution is a solution of the ODE (1) with the boundary condition).

a が大きくなければ, $u = 0$ のみが解. a が大きいと $u = 0$ 以外に解がある. (If a is not large, $u = 0$ is the unique solution. If a is large, there exists non zero solution, too.)

例: Lorentz equation (initial value problem)

ローレンツ方程式は3つの未知関数(3 unknown functions) $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ についての次の連立微分方程式である. a, b, c には適当な数字をいれる (a, b, c are parameters).

$$
\begin{aligned}
p_1' &= -ap_1 + ap_2, \\
p_2' &= -p_1p_3 + bp_1 - p_2, \\
p_3' &= p_1p_2 - cp_3
\end{aligned}
$$

プログラム `lorentz.rr` では $(p_1(t), p_2(t))$ をプロット(plot)している.

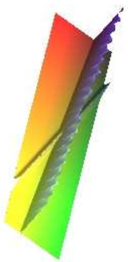
Lorentz 方程式は解が chaos 的な振る舞いをする代表的方程式.

例: KdV equation (initial value problem)

これは浅い水路の水の流れを記述する方程式である(This equation describes water surface in canals.)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2}$$

ソリトン方程式(soliton equation)の代表．行列式と特殊関数を用いて書ける解がある(there exist solutions written in terms of determinants of a matrix of entries with special functions.) `kdv2.rr`



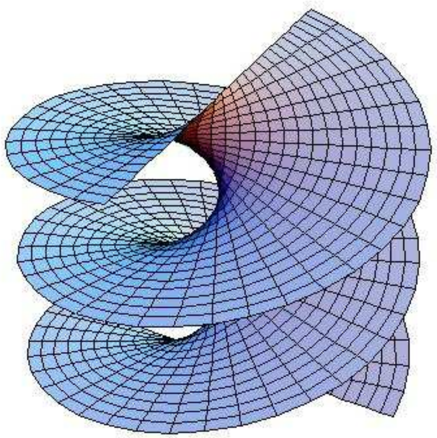
例: 極小曲面(minimal surface)の方程式 (boundary value problem)

曲面(surface)が $z = w(x, y)$ と書ける場合を考えよう.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w_x}{\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w_y}{\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}}\right)=0 \qquad (3)$$

$w(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ は解の例 (example of solution). これは Helicoid とよばれる. 一部を描画するには(dynagraph, Maple, x¿0, x¡0)

```
plot3d(arctan(y/x),x=-3..3,y=-5..5)
```



http://en.wikipedia.org

例: 流体の方程式, Cavity flow (initial value problem)

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \omega \\ \omega_t &= -\psi_y\omega_x + \psi_x\omega_y + \frac{1}{R}\Delta\omega \end{aligned}$$

R is a paramter (Raynolds number). $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (Laplacian).

$u = \psi_y, v = -\psi_x$: 速度ベクトル(velocity vector)
ω : 渦度 (vorticity)

境界条件(boundary condition): $u = 1, v = 0$ on AD. $u = v = 0$ on other walls. (ここから ψ, ω を計算するのはすこし説明が必要)

http://www.aoni.waseda.jp/ushiro/flowanime/flow.htm, cavity400.gif
(by 後 保範)

差分法 (difference scheme) の原理

$f(t)$: 未知関数(unknown function).

$$f'(t) = a(t)f(t) + b(t), \quad f(0) = c$$

ここで $a(t)$, $b(t)$ は時刻 t の関数(function)であり, c は定数(constant)である．たとえば $a(t) = -1$, $b(t) = |\cos(t)|$, $c = 2$ とすれば上の微分方程式は $f'(t) = -f(t) + |\cos(t)|$, $f(0) = 2$ となる．

$f(t)$ は時刻 t おけるある量，たとえば温度とか細菌の数とか物体の位置や電流の大きさを表すとすれば，初期条件 $f(0) = c$ での微分方程式を満たす関数 $f(t)$ を求めることは，時刻 0 でのこれらの値から時刻 t での値を予想することにほかならない．

さて $h = \Delta t$ を微小な時間(small number, short time)，たとえば $h = 0.00001$ とする．このとき微分の定義より $f'(t)$ は $(f(t+h) - f(t))/h$ にほぼ等しい．よって

$$f(t+h) \approx f(t) + hf'(t)$$

差分法の原理 2

微分方程式の右辺を用いて $f'(t)$ を書き換えると,

$$f(t+h) \approx f(t) + h(a(t)f(t) + b(t)) \tag{4}$$

となる．つまり $f(t)$ の $h = \Delta t$ 秒後の値 $f(t+h)$ は $f(t)+h(a(t)f(t)+b(t))$ に大体等しいということになる．つまり (4) は 微小時間 h 秒未来(h second future) の f の値を現在の f の値で表す式とみなせる．

(4) より $t = 0$ とすれば,

$$f(h) \approx f(0) + h(a(0)f(0) + b(0)) = c + h(a(0)c + b(0))$$

である．これで時刻 $t = h$ での $f(t)$ の近似値 (approximate value) が求まった．次に (4) で $t = h$ とすれば,

$$f(h+h) \approx f(h) + h(a(h)f(h) + b(h)),$$

$t = 2h$ とすれば

$$f(2h+h) \approx f(2h) + h(a(2h)f(2h) + b(2h))$$

となり，時刻$t = 2h$, $t = 3h$ の $f(t)$ の近似値が次々とさだまっていくこととなる．まとめると漸化式 (recurrence relation)

$$f_{k+1} = f_k + h(a(hk)f_k + b(hk)), \quad f_0 = c \tag{5}$$

で数列 f_k を決めていけばそれが時刻 $t = hk$ での $f(t)$ の近似値となるのである．

同じ原理で PDE の initial value problem も解ける (An analogous method can be applied to solve approximate solutions for the initial value problem of PDE).

Initial value problem は漸化式(recurrence relation) を解く問題に．
では boundary value problem は?

境界値問題を解くと差分法は代数方程式系を解く問題を自然に生じる．(Difference schemes for boundary value problems gives us systems of algebraic equations)

$u(r)$ を未知関数(unknown function), a をパラメータ(paramter)とする次の非線形常微分方程式の境界値問題 (boundary problem of non-linear ODE)

$$ru'' + u' + aru(1-u) = 0, \quad u(1/2) = u(1) = 0.$$

を差分法で解く(ある反応拡散方程式の定常問題)．さて区間[1/2, 1] を4つの区間に等しく分割(devide [1/2,1] into 4 segments)．差分法(difference scheme)で書き下すと,

$$\begin{aligned}
&(1/2 + ih)\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \\
&+ \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + a(1/2 + ih)u_i(1 - u_i) = 0, \\
&\qquad i = 1, 2, 3, \\
&u_0 = 0, u_4 = 0, h = \frac{1}{2 \cdot 4}
\end{aligned} \tag{6}$$

なる 3 つの方程式を得る．この代数方程式系(systems of algebraic equations)を解くことにより，差分法による近似解を得る．

このような代数方程式系をどのように解くか？How do we solve such systems of algebraic equations?

Remark: 差分法は万能ではない. The method of difference shemes is strong , but it has several disadvantages.

不安定性 (Instability)

$$y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1$$

解は $y = \exp(-2t)$ であるべきだが... The solution should be $y = \exp(-2t)$...

unstable.rr

ソフトウエア (Software)

1. C and cgif library, http://www.math.kobe-u.ac.jp/∼yamaguti
2. (Maple (情報基盤センター), Mathematica, Matlab)
3. Risa/Asir, http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir
4. PHCpack, http://www.math.uic.edu/∼jan/download.html
5. (Knoppix/Math, http://www.knoppix-math.org)

講義の流れ (Table of Contents) [高山担当分, 2時間目]

1. 差分法, 差分法 (difference scheme) から生じる代数方程式系 (systems of algebraic equations)
2. Newton 法.
3. Numerical homotopy method in one variables.
4. Formal power series. Ideals, Grobner basis and number of solutions.
5. Mixed volumes and numerical homotopy method.

以下は黒板と配布資料をもとにやります.
07-31, 講演会 (Research lecture). Solving equations by semidefnite programming relaxations.

参考文献 (references)

1. http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2007/tokuron

2. http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2005/asir-book-en.pdf

3. J.C. Strikwerda, Finite difference schemes and partial differential equations. ISBN: 9780898715675 or Smith の本

4. 高見, 河村, 偏微分方程式の差分解法.

5. D.Cox, J.Little, D.O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms — An Introduction to Commutative Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 1991, Springer-Verlag. (日本語版もあるが英語版なかなかいい)

6. B.Huber and B.Sturmfels, A polyhedral method for solving sparse polynomial systems. Mathematics of Computation, 1995, 1541–1555.