

超幾何関数が満たす微分差分方程式系 – 超幾何微分方程式の Voros 係数の導出について

竹井 優美子（茨城工業高等専門学校）

竹井 義次氏（同志社大学）との共同研究に基づく

超幾何方程式研究会 2025

2025 年 1 月 5 日

超幾何関数が満たす微分差分方程式系

超幾何関数

$$\phi = F(a, b, c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m m!} x^m \quad (1)$$

は超幾何微分方程式

$$\left[x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\} \frac{d}{dx} - ab \right] \phi = 0 \quad (2)$$

と次の隣接関係式を満たす.

$$\left(x \frac{d}{dx} + a \right) F(a, b, c; x) = a F(a+1, b, c; x). \quad (3)$$

σ_a を $a \rightarrow a+1$ とするシフト作用素とすると, (3) は

$$\left(x \frac{d}{dx} + a - a\sigma_a \right) \phi = 0 \quad (4)$$

と書き直せる.

したがって、超幾何関数は次の微分差分方程式系を満たす。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\} \frac{d}{dx} - ab \right] \phi = 0, \\ \left(x \frac{d}{dx} + a - a\sigma_a \right) \phi = 0, \\ \left\{ x(1-x) \frac{d}{dx} + c - b - ax - (c-b)\sigma_b^{-1} \right\} \phi = 0, \\ \left\{ (1-x) \frac{d}{dx} + c - a - b + \frac{(c-a)(c-b)}{c} \sigma_c \right\} \phi = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

ここで、 σ_a , σ_b^{-1} , σ_c はそれぞれ $a \rightarrow a+1$, $b \rightarrow b-1$, $c \rightarrow c+1$ とするシフト作用素である。

大きなパラメータ η を $x = z$, $a = \eta\lambda_1$, $b = -\eta\lambda_2$, $c = \eta(\lambda_1 + \lambda_3)$ で導入し, 次の微分差分方程式系を考える.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[z(1-z)\eta^{-2} \frac{d^2}{dz^2} + \{ \lambda_1 + \lambda_3 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \eta^{-1})z \} \eta^{-1} \frac{d}{dz} + \lambda_1\lambda_2 \right] \psi = 0, \\ \left(z\eta^{-1} \frac{d}{dz} \sigma_3 + \lambda_1 \sigma_3 - \lambda_1 \sigma_1 \right) \psi = 0, \\ \left\{ z(1-z)\eta^{-1} \frac{d}{dz} + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 z - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \sigma_2 \right\} \psi = 0, \\ \left\{ (\lambda_1 + \lambda_3)(1-z)\eta^{-1} \frac{d}{dz} + (\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \sigma_3 \right\} \psi = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

ただし, σ_j ($j = 1, 2, 3$) は $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + \eta^{-1}$ とするシフト作用素である.

微分差分方程式系を考える利点

- (1) Voros 係数の明示公式が得られる.

微分差分方程式系を考える利点

(1) Voros 係数の明示公式が得られる.

(2) 次の複素 3 重積分の形の積分表示式が得られる.

$$\begin{aligned}\psi &= \iiint \frac{e^{\eta(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3)+\mu_1+\mu_2+\mu_3}z}{(e^{\mu_3}-1)^2(e^{\mu_3}-e^{\mu_1})^2} \left(\frac{e^{\mu_1}}{e^{\mu_3}-e^{\mu_1}}z + \frac{e^{\mu_2}-1}{e^{\mu_3}-1} \right)^{-2} d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \\ &= (1-c) \iiint \frac{e^{a\log t_1+b\log t_2+c\log t_3}}{t_1 t_2 t_3^2} \frac{1}{t_1 t_2 (1-t_3)z - (1-t_1)(1-t_2)} dt_1 dt_2 dt_3.\end{aligned}\tag{7}$$

微分差分方程式系を考える利点

(1) Voros 係数の明示公式が得られる.

(2) 次の複素 3 重積分の形の積分表示式が得られる.

$$\begin{aligned}\psi &= \iiint \frac{e^{\eta(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3)+\mu_1+\mu_2+\mu_3}z}{(e^{\mu_3}-1)^2(e^{\mu_3}-e^{\mu_1})^2} \left(\frac{e^{\mu_1}}{e^{\mu_3}-e^{\mu_1}}z + \frac{e^{\mu_2}-1}{e^{\mu_3}-1} \right)^{-2} d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \\ &= (1-c) \iiint \frac{e^{a\log t_1+b\log t_2+c\log t_3}}{t_1 t_2 t_3^2} \frac{1}{t_1 t_2 (1-t_3)z - (1-t_1)(1-t_2)} dt_1 dt_2 dt_3.\end{aligned}\quad (7)$$

(3) さらにガンマ関数による gauge 変換 $\psi = \frac{\Gamma(\eta(\lambda_1+\lambda_3))}{\Gamma(\eta\lambda_1)\Gamma(\eta\lambda_3)}\varphi$ を考えれば, 複素 3 重積分が 1 変数複素積分に reduce され, よく知られた超幾何関数の積分表示式

$$\varphi(z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta) = \int e^{\eta\{\lambda_1 \log t + \lambda_2 \log(1-zt) + \lambda_3 \log(1-t)\}} \frac{dt}{t(1-t)} \quad (8)$$

も得られる.

目次

① Voros 係数の明示公式の導出

② 積分表示式の導出

Voros 係数

超幾何微分方程式

$$\left[z(1-z)\eta^{-2} \frac{d^2}{dz^2} + \{ \lambda_1 + \lambda_3 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \eta^{-1}) z \} \eta^{-1} \frac{d}{dz} + \lambda_1 \lambda_2 \right] \psi = 0 \quad (9)$$

の WKB 解

$$\psi(z, \eta) = \exp \left(\eta \int^z S(z, \eta) dz \right) \quad (10)$$

を考える. ただし, $S = \sum_{j \geq 0} \eta^{-j} S_j(x)$ は

$$z(1-z) \left(S^2 + \eta^{-1} \frac{dS}{dz} \right) + \{ \lambda_1 + \lambda_3 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \eta^{-1}) z \} S + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \quad (11)$$

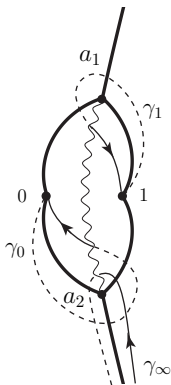
の解である.

このとき, Voros 係数を

$$V^{(j)} = \eta \int_{\gamma_j} (S_{\text{even}} - S_0)_{\text{reg}}^{(j)} dz \quad (j = 0, 1, \infty) \quad (12)$$

で定義する. ここで

$$(S_{\text{even}} - S_0)_{\text{reg}}^{(j)} = S_{\text{even}}(z, \eta) - S_0(z) - \frac{1}{z} \text{Res}_{z=j} (S_{\text{even}}(z, \eta) - S_0(z)). \quad (13)$$



ただし, $z = a_1, a_2$ は

$$\{\lambda_1 + \lambda_3 - (\lambda_1 - \lambda_2)z\}^2 - 4\lambda_1\lambda_2z(1-z) = 0$$

の解 (変わり点) である.

定理 1 (cf. [ATT])

Voros 係数の明示公式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
 V^{(0)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \{ \lambda_1^{1-2m} - \lambda_2^{1-2m} + \lambda_3^{1-2m} \\
 & + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} - 2(\lambda_1 + \lambda_3)^{1-2m} \} \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \eta^{1-2m} (\lambda_1 + \lambda_3)^{1-2m}, \tag{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V^{(1)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \{ \lambda_1^{1-2m} - \lambda_2^{1-2m} - \lambda_3^{1-2m} \\
 & - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} + 2(\lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} \}, \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V^{(\infty)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \{ \lambda_1^{1-2m} + \lambda_2^{1-2m} - \lambda_3^{1-2m} \\
 & + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} - 2(\lambda_1 + \lambda_2)^{1-2m} \}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

命題 1

微分差分方程式系 (6) の WKB 解

$$\psi(z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta) = \exp \left\{ \eta \int^{(z, \lambda)} (S dz + T_1 d\lambda_1 + T_2 d\lambda_2 + T_3 d\lambda_3) \right\} \quad (17)$$

について、次が成り立つ。ここで、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ である。

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \eta^{-n} \partial_{\lambda_1}^n \log \left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_3)(zS + \lambda_1)\{(1-z)S + \lambda_2 + \lambda_3\}}{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \right], \quad (18)$$

$$T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \eta^{-n} \partial_{\lambda_2}^n \log \left\{ \frac{z(1-z)S - \lambda_1 z + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right\}, \quad (19)$$

$$T_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \eta^{-n} \partial_{\lambda_3}^n \log \left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_3)\{(1-z)S + \lambda_2 + \lambda_3\}}{\lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \right]. \quad (20)$$

命題 1 の証明の概略

$$\begin{aligned}\sigma_j \psi &= \exp \left\{ \eta \int^{(z, \sigma_j \lambda)} (S dz + T_1 d\lambda_1 + T_2 d\lambda_2 + T_3 d\lambda_3) \right\} \\ &= \psi \exp \left\{ \eta \int_{(z, \lambda)}^{(z, \sigma_j \lambda)} T_j d\lambda_j \right\} \quad (j = 1, 2, 3)\end{aligned}\quad (21)$$

に注意すると

$$\left\{ z(1-z)\eta^{-1} \frac{d}{dz} + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 z - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\sigma_2 \right\} \psi = 0 \quad (22)$$

より

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \exp \int_{(z, \lambda)}^{(z, \sigma_2 \lambda)} \eta T_2 d\lambda_2 = z(1-z)S - \lambda_1 z + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (23)$$

が成り立つので,

$$\int_{(z,\lambda)}^{(z,\sigma_2\lambda)} \eta T_2 d\lambda_2 = \log \left\{ \frac{z(1-z)S - \lambda_1 z + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right\}. \quad (24)$$

よって,

$$\begin{aligned} T_2 &= (\sigma_2 - 1)^{-1} \eta^{-1} \partial_{\lambda_2} \log \left\{ \frac{z(1-z)S - \lambda_1 z + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \eta^{-n} \partial_{\lambda_2}^n \log \left\{ \frac{z(1-z)S - \lambda_1 z + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

ここで, B_n は n 番目の Bernoulli 数である.

$$\frac{w}{e^w - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} w^n. \quad (26)$$

T_1 , T_3 も同様に示せる.

命題 2

微分差分方程式系 (6) の WKB 解

$$\psi(z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta) = \exp \left\{ \eta \int^{(z, \lambda)} (S dz + T_1 d\lambda_1 + T_2 d\lambda_2 + T_3 d\lambda_3) \right\}$$

について, 次が成り立つ.

$$S^{(+)} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_3} + O(z), \quad (27)$$

$$S^{(-)} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_3 - \eta^{-1}}{z} - \frac{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)\eta^{-1} + \eta^{-2}}{\lambda_1 + \lambda_3 - 2\eta^{-1}} + O(z). \quad (28)$$

命題 2 の証明の概略

確定特異点 $z = 0$ において, S は simple pole をもつので

$$S = \frac{r_{-1}}{z} + r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots \quad (29)$$

と表せる. 超幾何微分方程式より

$$z(1-z) \left(S^2 + \eta^{-1} \frac{dS}{dz} \right) + \{ \lambda_1 + \lambda_3 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \eta^{-1}) z \} S + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \quad (30)$$

が成り立つので, 代入して係数比較すると従う.

命題 3

(1) 次が成り立つ.

$$\lim_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \infty} (S_{\text{even}} - S_0)_{\text{reg}}^{(0)} = 0.$$

(2)

$$I_j^{(0)} = \lim_{\lambda_k \rightarrow \infty \text{ for } k > j} \eta \int_{\infty}^{\lambda_j} (T_j - T_{j,0})_{\text{reg}}^{(0)} d\lambda_j \Big|_{z=0} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (31)$$

とおくと

$$I_1^{(0)} = 0, \quad I_2^{(0)} = 0, \quad I_3^{(0)} = 0$$

が成り立つ.

(3)

$$\hat{I}_j^{(0)} = \lim_{\lambda_k \rightarrow \infty \text{ for } k > j} \eta \int_{\infty}^{\lambda_j} (T_j - T_{j,0})_{\text{reg}}^{(0)} d\lambda_j \Big|_{z=\hat{0}} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (32)$$

とおくと

$$\hat{I}_1^{(0)} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \lambda_1^{1-2m},$$

$$\hat{I}_2^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \lambda_2^{1-2m},$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_3^{(0)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \{ 2(\lambda_1 + \lambda_3)^{1-2m} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} \\ & - \lambda_3^{1-2m} \} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \eta^{1-2m} (\lambda_1 + \lambda_3)^{1-2m} \end{aligned}$$

が成り立つ.

命題 3 の証明の概略

命題 1 より

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \eta^{-n} \partial_{\lambda_1}^n \log \left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_3)(zS + \lambda_1)\{(1-z)S + \lambda_2 + \lambda_3\}}{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \right]. \quad (18)$$

命題 2 より

$$\log \left(S^{(+)} + \frac{\lambda_1}{z} \right) + \log z \Big|_{z=0} = \log \lambda_1, \quad (33)$$

$$\log \left(S^{(+)} - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{z-1} \right) \Big|_{z=0} = \log \frac{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_3} \quad (34)$$

が成り立つので

$$T_1 - T_{1,0}|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \eta^{-n} \partial_{\lambda_1}^n \log 1 = 0.$$

他も同様に計算できる.

定理 1 (cf. [ATT])

Voros 係数の明示公式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
 V^{(0)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \{ \lambda_1^{1-2m} - \lambda_2^{1-2m} + \lambda_3^{1-2m} \\
 & + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} - 2(\lambda_1 + \lambda_3)^{1-2m} \} \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \eta^{1-2m} (\lambda_1 + \lambda_3)^{1-2m}, \tag{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V^{(1)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \{ \lambda_1^{1-2m} - \lambda_2^{1-2m} - \lambda_3^{1-2m} \\
 & - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} + 2(\lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} \}, \tag{36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V^{(\infty)} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \eta^{1-2m} \{ \lambda_1^{1-2m} + \lambda_2^{1-2m} - \lambda_3^{1-2m} \\
 & + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{1-2m} - 2(\lambda_1 + \lambda_2)^{1-2m} \}. \tag{37}
 \end{aligned}$$

目次

① Voros 係数の明示公式の導出

② 積分表示式の導出

微分差分方程式系 (6)

考える微分差分方程式系：

$$\left[z(1-z)\eta^{-2} \frac{d^2}{dz^2} + \{ \lambda_1 + \lambda_3 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \eta^{-1}) z \} \eta^{-1} \frac{d}{dz} + \lambda_1 \lambda_2 \right] \psi = 0, \quad (G)$$

$$\left(z\eta^{-1} \frac{d}{dz} \sigma_3 + \lambda_1 \sigma_3 - \lambda_1 \sigma_1 \right) \psi = 0, \quad (a)$$

$$\left[z \left\{ (1-z)\eta^{-1} \frac{d}{dz} - \lambda_1 \right\} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(1 - \sigma_2) \right] \psi = 0, \quad (b)$$

$$\left\{ (\lambda_1 + \lambda_3)(1-z)\eta^{-1} \frac{d}{dz} + (\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\sigma_3 \right\} \psi = 0. \quad (c)$$

ただし, σ_j ($j = 1, 2, 3$) は $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + \eta^{-1}$ とするシフト作用素であり,

$$a = \eta \lambda_1, \quad b = -\eta \lambda_2, \quad c = \eta(\lambda_1 + \lambda_3).$$

定理 2

微分差分方程式系 (6) に対して, パラメータに関する Laplace 変換

$$\psi(z, \lambda, \eta) = \iiint e^{\eta(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3)} \hat{\psi}(z, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \eta) d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \quad (38)$$

を考える. $\hat{\psi}$ が満たす偏微分方程式系 $(*)$ を考えると

$$\hat{\psi} = z \frac{e^{\mu_1+\mu_2+\mu_3}}{(e^{\mu_3} - e^{\mu_1})^2(e^{\mu_3} - 1)^2} \left(\frac{e^{\mu_1}}{e^{\mu_3} - e^{\mu_1}} z + \frac{e^{\mu_2} - 1}{e^{\mu_3} - 1} \right)^{-2} \quad (39)$$

は $(*)$ の解である. よって, 複素 3 重積分の形の積分表示式

$$\begin{aligned} \psi &= z \iiint \frac{e^{\eta(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3)+\mu_1+\mu_2+\mu_3}}{(e^{\mu_3} - e^{\mu_1})^2(e^{\mu_3} - 1)^2} \left(\frac{e^{\mu_1}}{e^{\mu_3} - e^{\mu_1}} z + \frac{e^{\mu_2} - 1}{e^{\mu_3} - 1} \right)^{-2} d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \\ &= (1 - c) \iiint \frac{t_1^{a-1} t_2^{b-1} t_3^{c-2}}{t_1 t_2 (1 - t_3) z + (1 - t_1)(1 - t_2)} dt_1 dt_2 dt_3 \end{aligned} \quad (40)$$

が得られる.

定理 2 の証明の概略

ポイント

1 階の微分方程式に変形することができる.

注意 : $\lambda_j \psi \longleftrightarrow -\eta^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu_j} \hat{\psi}, \quad \sigma_j \psi \longleftrightarrow e^{\mu_j} \hat{\psi} \quad (j = 1, 2, 3)$

$$(G), (b) \implies \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{z} \left\{ \sigma_2 z \eta^{-1} \frac{d}{dz} + (\lambda_2 + \eta^{-1})(1 - \sigma_2) \right\} \psi = 0,$$

$$(G), (b), (c) \implies$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{z} \left\{ z(z + \sigma_2 - 1) \eta^{-1} \frac{d}{dz} + \eta^{-1}(1 - \sigma_2) - \lambda_3 z(1 - \sigma_3) \right\} \psi = 0.$$

定理 2 の証明の概略

ポイント

1 階の微分方程式に変形することができる。

注意 : $\lambda_j \psi \longleftrightarrow -\eta^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu_j} \hat{\psi}, \quad \sigma_j \psi \longleftrightarrow e^{\mu_j} \hat{\psi} \quad (j = 1, 2, 3)$

$$(G), (b) \implies \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{z} \left\{ \sigma_2 z \eta^{-1} \frac{d}{dz} + (\lambda_2 + \eta^{-1})(1 - \sigma_2) \right\} \psi = 0, \quad (G')$$

$$(G), (b), (c) \implies$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{z} \left\{ z(z + \sigma_2 - 1) \eta^{-1} \frac{d}{dz} + \eta^{-1}(1 - \sigma_2) - \lambda_3 z(1 - \sigma_3) \right\} \psi = 0. \quad (c')$$

(G'), (a), (b), (c') からなる微分差分方程式系に対して, パラメータに関する Laplace 変換を考えると, $\hat{\psi}$ は次の偏微分方程式系 $(\hat{*})$ を満たす.

$$\left\{ e^{\mu_2} z \frac{\partial}{\partial z} + (e^{\mu_2} - 1) \frac{\partial}{\partial \mu_2} + 1 \right\} \hat{\psi} = 0, \quad (41)$$

$$\left\{ e^{\mu_3} z \frac{\partial}{\partial z} + (e^{\mu_1} - e^{\mu_3}) \frac{\partial}{\partial \mu_1} + e^{\mu_1} \right\} \hat{\psi} = 0, \quad (42)$$

$$\left\{ z(1-z) \frac{\partial}{\partial z} + (z + e^{\mu_2} - 1) \frac{\partial}{\partial \mu_1} + (e^{\mu_2} - 1) \frac{\partial}{\partial \mu_2} + (e^{\mu_2} - 1) \frac{\partial}{\partial \mu_3} + e^{\mu_2} \right\} \hat{\psi} = 0, \quad (43)$$

$$\left\{ z(z + e^{\mu_2} - 1) \frac{\partial}{\partial z} - (e^{\mu_2} - 1) - (e^{\mu_3} - 1)z \frac{\partial}{\partial \mu_3} - ze^{\mu_3} \right\} \hat{\psi} = 0. \quad (44)$$

よく知られた積分表示式との関係

Gauge 変換 $\psi = \frac{\Gamma(\eta(\lambda_1 + \lambda_3))}{\Gamma(\eta\lambda_1)\Gamma(\eta\lambda_3)}\varphi$ を考えると, φ は

$$\left[z(1-z)\eta^{-2}\frac{d^2}{dz^2} + \{\lambda_1 + \lambda_3 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \eta^{-1})z\}\eta^{-1}\frac{d}{dz} + \lambda_1\lambda_2 \right] \varphi = 0, \quad (45)$$

$$\left\{ (1-z)\eta^{-1}\frac{d}{dz} - \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\sigma_1 \right\} \varphi = 0, \quad (46)$$

$$\left[z \left\{ (1-z)\eta^{-1}\frac{d}{dz} - \lambda_1 \right\} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(1 - \sigma_2) \right] \psi = 0, \quad (47)$$

$$\left\{ (1-z)\eta^{-1}\frac{d}{dz} - \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(1 - \sigma_3) \right\} \varphi = 0 \quad (48)$$

を満たす.

パラメータに関する Laplace 変換

$$\varphi(z, \lambda, \eta) = \iiint e^{\eta(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3)} \hat{\varphi}(z, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \eta) d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \quad (49)$$

を考えると, $\hat{\varphi}$ は次の偏微分方程式系を満たす.

$$(*) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ (1 - ze^{\mu_1}) \frac{\partial}{\partial z} + e^{\mu_1} \right\} \hat{\varphi} = 0, \end{aligned} \right. \quad (50)$$

$$(*) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ e^{\mu_1} \frac{\partial}{\partial \mu_1} - z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \hat{\varphi} = 0, \end{aligned} \right. \quad (51)$$

$$(ze^{\mu_1} + e^{\mu_2} - 1) \hat{\varphi} = 0, \quad (52)$$

$$(e^{\mu_1} + e^{\mu_3} - 1) \hat{\varphi} = 0. \quad (53)$$

定理 3

$\delta(z)$ をデルタ関数とすると

$$\hat{\varphi}(z, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (ze^{\mu_1} - 1)\delta(ze^{\mu_1} + e^{\mu_2} - 1)\delta(e^{\mu_1} + e^{\mu_3} - 1) \quad (54)$$

は偏微分方程式系 $(**)$ の解である. よって, 複素 3 重積分が 1 変数複素積分に reduce され, よく知られた超幾何関数の積分表示式

$$\varphi(z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta) = \int e^{\eta\{\lambda_1 \log t + \lambda_2 \log(1-zt) + \lambda_3 \log(1-t)\}} \frac{dt}{t(1-t)} \quad (55)$$

が得られる.

まとめ（主結果）

(1) Voros 係数の明示公式が得られる.

(2) 超幾何微分方程式と隣接関係式から得られる微分差分方程式を連立させた微分差分方程式系を考えると, 次の複素 3 重積分の形の積分表示式が得られる.

$$\begin{aligned}\psi &= \iiint \frac{e^{\eta(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3)+\mu_1+\mu_2+\mu_3}z}{(e^{\mu_3}-1)^2(e^{\mu_3}-e^{\mu_1})^2} \left(\frac{e^{\mu_1}}{e^{\mu_3}-e^{\mu_1}}z + \frac{e^{\mu_2}-1}{e^{\mu_3}-1} \right)^{-2} d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \\ &= (1-c) \iiint \frac{e^{a\log t_1+b\log t_2+c\log t_3}}{t_1 t_2 t_3^2} \frac{1}{t_1 t_2 (1-t_3)z - (1-t_1)(1-t_2)} dt_1 dt_2 dt_3.\end{aligned}\quad (56)$$

(3) さらにガンマ関数による gauge 変換 $\psi = \frac{\Gamma(\eta(\lambda_1+\lambda_3))}{\Gamma(\eta\lambda_1)\Gamma(\eta\lambda_3)}\varphi$ を考えれば, 複素 3 重積分が 1 変数複素積分に reduce され, よく知られた超幾何関数の積分表示式

$$\varphi(z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta) = \int e^{\eta\{\lambda_1 \log t + \lambda_2 \log(1-zt) + \lambda_3 \log(1-t)\}} \frac{dt}{t(1-t)} \quad (57)$$

も得られる.

参考文献

[ATT] Aoki, T., Takahashi, T. and Tanda, M. : Borel sums of Voros coefficients of Gauss' hypergeometric differential equations with a large parameter and confluence, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.

参考文献

[ATT] Aoki, T., Takahashi, T. and Tanda, M. : Borel sums of Voros coefficients of Gauss' hypergeometric differential equations with a large parameter and confluence, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.

ご清聴ありがとうございました.