WKB 解と高次留数形式

廣瀬三平　(芝浦工業大学)

超幾何方程式研究会 2025
神戸大学
January 5, 2025

WKB 解

- 1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(\eta^{-2}\frac{d^2}{dx^2} - Q(x)\right)\psi = 0$$

のようなパラメタ η を含む方程式の形式解

$$\psi(x,\eta) = e^{\eta y(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(x)\eta^{-k-\alpha}$$

構成では, 次も用いられる

$$\psi(x,\eta) = \eta^{-\alpha}\exp\int^x S(x,\eta)dx, \quad S(x,\eta) = S_{-1}(x)\eta + S_0(x) + \cdots$$

Borel 総和法

- 形式級数
$$f(\eta) = e^{\eta s} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \eta^{-k-\alpha}$$
が Borel 総和可能であるとは
  - Borel 変換 $\mathcal{B}f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{\Gamma(k+\alpha)} (y+s)^{k+\alpha-1}$ は次で (多価) 正則函数を定める
$$\{y \in \mathbb{C} \mid y = -s + r, r > 0\} \setminus \{y = 0\}$$
  - Borel 和 $F(\eta) = \mathcal{L}^0 \mathcal{B}f(\eta) = \int_{-s}^{\infty} e^{-\eta y} \mathcal{B}f(y) dy$ が十分大きな $\eta > 0$ に対して定まる

性質

- $f(\eta)$ が収束しているとすると, その Borel 和 $F(\eta)$ が定まり, $f(\eta) = F(\eta)$
- $f(\eta)$ の Borel 和 $F(\eta)$ に対し, $F(\eta) \sim f(\eta)$ $(\eta \to \infty)$
- WKB 解 $\psi(x, \eta)$ の Borel 和 $\Psi(x, \eta)$ はもとの方程式の解析的な解

例

- 超幾何方程式

$$\left\{x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+(c-(a+b+1)x)\frac{d}{dx}-ab\right\}\psi=0$$

に $a=\alpha_0+\alpha_1\eta, b=\beta_0+\beta_1\eta, c=\gamma_0+\gamma_1\eta$ を代入して得られる方程式の WKB 解を考える
積分表示解は

$$\int_{\Gamma_\pm(x)} e^{\eta F(t,x)}a(t,x)dt$$

である
ただし

- $F(t,x)=\log t^{\alpha_1}(1-t)^{\gamma_1-\alpha_1}(1-xt)^{-\beta_1}$
- $a(t,x)=t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-xt)^{-\beta_0}$
- $\Gamma_\pm(x)$: $F(t,x)$ の t についての臨界点 $t_\pm(x)$ に対応する Lefschetz thimble

積分表示解の $\eta\to\infty$ での漸近展開を考える (Aomoto-Kita の第 4 章)

例 (続き)

- 漸近展開は, Laplace 型の積分に書きかえ, Watson の補題より得られる

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_\pm(x)} e^{\eta F(t,x)} a(t,x)dt \\
=&\int_{-y_\pm(x)}^{\infty} e^{-\eta y}\psi_\pm^B(x,y)dy \quad (y_\pm(x) = F(t_\pm(x),x)) \\
=&\int_{-y_\pm(x)}^{\infty} e^{-\eta y}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{\pm,k}^B(x)(y+y_\pm(x))^{k-\frac{1}{2}}dy \\
\sim& e^{\eta y_\pm(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\psi_{\pm,k}^B(x)\eta^{-k-\frac{1}{2}} \quad (\eta\to\infty)
\end{aligned}
$$

以上で得られた

$$
\psi_\pm(x,\eta) = e^{\eta y_\pm(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\psi_{\pm,k}^B(x)\eta^{-k-\frac{1}{2}}
$$

が WKB 解であり, その Borel 変換, Borel 和はそれぞれ

$$
\psi_\pm^B(x,y), \quad \int_{\Gamma_\pm(x)} e^{\eta F(t,x)} a(t,x)dt
$$

ここで

- $y_+(x) = y_-(x)$ を満たす x が変わり点
- $\Im y_+(x) = \Im y_-(x)$ を満たす x の集合が Stokes 集合 (Stokes 曲線)(Aomoto-Kita の仮定 3.9.1 を満たさない x の集合)

性質

- 適切な仮定を満たす函数 $F(t,x) = F(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対する振動積分

$$\int e^{\eta F(t,x)} dt, \quad dt = dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_m$$

の満たす微分方程式 $\mathscr{M}$ とすると次が成り立つ

  - Lefschetz thimble を積分路とした振動積分の $\eta \to \infty$ での漸近展開は $\mathscr{M}$ の WKB 解
  - Lefschetz thimble を積分路とした振動積分は $\mathscr{M}$ の WKB 解の Borel 和

これを用いると次が得られる

  - $\mathscr{M}$ の WKB 解の Borel 総和可能性は Stokes 集合 $\mathcal{S}$ で記述できる (Koike-Schäfke の結果の類似)

仮定としては, 例えば $\int \delta(y+F(t,x))dt$ の満たす微分方程式系 (Gauss-Manin 系) について議論した次における仮定を用いる

- Noumi, M.: Expansion of the Solutions of a Gauss-Manin Systems at a Point Infinity, Tokyo J. Math., **7**, No.1, 1-60 (1984)

振動積分との関係は

$$\int e^{\eta F(t,x)}dt = \iint e^{-\eta y}\delta(y+F(t,x))dydt = \int e^{-\eta y}\int \delta(y+F(t,x))dtdy$$

例えば, 単純特異点を持つ多項式の普遍開折は仮定を満たす

$$\begin{aligned}
A_n : F(t,x) &= t_1^{n+1} + t_2^2 + \cdots + t_m^2 \\
&\quad + x_{n-1}t_1^{n-1} + \cdots + x_2 t_1^2 + x_1 t_1 \\
D_n : F(t,x) &= t_1^{n-1} + t_1 t_2^2 + t_3^2 + \cdots + t_m^2 \\
&\quad + x_{n-1}t_1^{n-2} + \cdots + x_3 t_1^2 + x_2 t_2 + x_1 t_1 \\
E_6 : F(t,x) &= t_1^4 + t_2^3 + t_3^2 + \cdots + t_m^2 \\
&\quad + x_5 t_1^2 t_2 + x_4 t_1 t_2 + x_3 t_1^2 + x_2 t_2 + x_1 t_1 \\
E_7 : F(t,x) &= t_1^3 t_2 + t_2^3 + t_3^2 + \cdots + t_m^2 \\
&\quad + x_6 t_1 t_2 + x_5 t_1^4 + x_4 t_1^3 + x_3 t_1^2 + x_2 t_2 + x_1 t_1 \\
E_8 : F(t,x) &= t_1^5 + t_2^3 + t_3^2 + \cdots + t_m^2 \\
&\quad + x_7 t_1^3 t_2 + x_6 t_1^2 t_2 + x_5 t_1 t_2 + x_4 t_1^3 + x_3 t_1^2 + x_2 t_2 + x_1 t_1
\end{aligned}$$

対応表

完全 WKB 解析	振動積分の解析
微分方程式系	振動積分が満たす微分方程式系
WKB 解	振動積分の漸近展開
WKB 解の Borel 変換	Gauss-Manin 系の解
WKB 解の Borel 和	振動積分
変わり点の集合	分岐集合
仮想的変わり点の集合	Maxwell 集合
微分方程式の Stokes 集合	振動積分の Stokes 集合
Voros 係数 (Wronskian)	?

ここで振動積分の Stokes 集合は

- $F(t,x)$ の t についての臨界値の虚部は全て異なる (Aomoto-Kita の仮定 3.9.1) を満たさない x の集合

この対応を用いれば, 例えば振動積分の解析接続を

1. 振動積分が満たす微分方程式を求め,
2. 微分方程式の変わり点と Stokes 集合を (計算機を用いて) 調べ,
3. Stokes 集合での接続公式を用いる

を行うことにより調べられる

このことを踏まえ, 高次留数形式 (Saito) の振動積分表示 (Pham) を考える

$$K_F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^{\mu} \left(\int_{\Gamma_i^+(x)} e^{\eta F(t,x)} \omega_1(t, x, \eta) \right) \times \left(\int_{\Gamma_i^-(x)} e^{-\eta F(t,x)} \omega_2(t, x, -\eta) \right)$$

ただし

- μ: $F(t,x)$ の t についての臨界点の個数 ($\mathscr{M}$ の階数)
- $\Gamma_i^{\pm}(x)$: $\pm F(t,x)$ の t についての臨界点 $t_i(x)$ に対応する Lefschetz thimble
- $\omega_j = \omega_j(t,x,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \{\omega_{j,k}(t,x)dt\}\, \eta^{-k-\alpha_j}$ (正確には, フィルター付き de Rham コホモロジー群の要素)

ここでの設定とは異なるが, 次においてコホモロジー交点形式は高次留数形式と類似の性質を持つことが述べられている

- Matsubara-Heo, S.-J.: Localization formulas of cohomology intersection numbers, J. Math. Soc. Japan, **75**, No.3, 909-940 (2023)

以下では $\partial_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ とし, x についての多項式を係数とする微分作用素環を $\mathscr{D}_X$ として

$$\mathscr{D}_X((\eta^{-1})) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k-\alpha} P_k \;\middle|\; P_k \in \mathscr{D}_X, \alpha \in \mathbb{Z} \right\}$$

$F(t,x)$ は次を満たすと仮定

- 任意の $\omega(t,x,\eta)$ に対し, 次を満たす $Q_\omega(x,\eta,\partial_x) \in \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))$ が存在

$$\int e^{\eta F(t,x)} \omega(t,x,\eta) = Q_\omega(x,\partial_x,\eta) \int e^{\eta F(t,x)} dt$$

例えば

$$\int e^{\eta(t^4 + x_2 t^2 + x_1 t)} t dt = \eta^{-1} \partial_{x_1} \int e^{\eta(t^4 + x_2 t^2 + x_1 t)} dt$$

性質

- $\displaystyle\int_{\Gamma_i^+(x)} e^{\eta F(t,x)} dt$ の $\eta \to \infty$ とした漸近展開から得られる WKB 解を $\psi_i^{\mathrm{int}}(x,\eta)$ とすると
$$\int_{\Gamma_i^+(x)} e^{\eta F(t,x)} dt = (\mathcal{L}^0 \mathcal{B} \psi_i^{\mathrm{int}})(x,\eta), \quad \int_{\Gamma_i^-(x)} e^{-\eta F(t,x)} dt = (\mathcal{L}^\pi \mathcal{B} \psi_i^{\mathrm{int}})(x,-\eta)$$

これより

$$
\begin{aligned}
K_F(\omega_1,\omega_2) &= \sum_{i=1}^{\mu} \left(\int_{\Gamma_i^+(x)} e^{\eta F(t,x)} \omega_1(t,x,\eta) \right) \\
&\qquad \times \left(\int_{\Gamma_i^-(x)} e^{-\eta F(t,x)} \omega_2(t,x,-\eta) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\mu} \left(Q_{\omega_1}(x,\partial_x,\eta) \int_{\Gamma_i^+(x)} e^{\eta F(t,x)} dt \right) \\
&\qquad \times \left(Q_{\omega_2}(x,\partial_x,-\eta) \int_{\Gamma_i^-(x)} e^{-\eta F(t,x)} dt \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\mu} Q_{\omega_1}(x,\partial_x,\eta)(\mathcal{L}^0 \mathcal{B}\psi_i^{\mathrm{int}})(x,\eta) \\
&\qquad \times Q_{\omega_2}(x,\partial_x,-\eta)(\mathcal{L}^\pi \mathcal{B}\psi_i^{\mathrm{int}})(x,-\eta)
\end{aligned}
$$

この最後の表示は (Borel 総和可能な)WKB 解が構成できる微分方程式に対して意味を持つ

階数 μ の微分方程式

$$\mathscr{M} : P_1(x, \partial_x, \eta)\psi = 0, \quad \ldots, \quad P_N(x, \partial_x, \eta)\psi = 0,$$

に対し, 次を考える

$$K_{\mathscr{M}}(Q_1, Q_2) = \sum_{i=1}^{\mu} Q_1(x, \partial_x, \eta)(\mathcal{L}^0 \mathcal{B}\psi_i)(x, \eta) \times Q_2(x, \partial_x, -\eta)(\mathcal{L}^\pi \mathcal{B}\psi_i)(x, -\eta)$$

ただし

- $\psi_i(x, \eta)$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$: $\mathscr{M}$ の WKB 解
- $Q_j(x, \partial_x, \eta) \in \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))$ $(j = 1, 2)$

性質

- $Q_1, Q_1', Q_2, Q_2' \in \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))$ が
  $Q_1 - Q_1', Q_2 - Q_2' \in \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))P_1 + \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))P_2 + \cdots + \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))P_N$
  を満たすとすると
  $$K_{\mathscr{M}}(Q_1, Q_2) = K_{\mathscr{M}}(Q_1', Q_2')$$

従って, $K_{\mathscr{M}}$ は $\mathscr{D}_X((\eta^{-1}))$ 加群

$$\mathscr{D}_X((\eta^{-1}))/\mathscr{D}_X((\eta^{-1}))P_1 + \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))P_2 + \cdots + \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))P_N$$

上の双線形形式を定める

1 次元 Schrödinger 方程式

$$\mathscr{M} : P\psi = 0, \quad P = \eta^{-2}\partial_x^2 - Q(x)$$

の場合に, 適切に正規化された WKB 解 $\psi_\pm(x,\eta)$ から定まる次を考える

$$\begin{aligned} K_{\mathscr{M}}(Q_1, Q_2) =& Q_1(x,\partial_x,\eta)(\mathcal{L}^0\mathcal{B}\psi_+)(x,\eta)Q_2(x,\partial_x,-\eta)(\mathcal{L}^\pi\mathcal{B}\psi_+)(x,-\eta) \\ &+ Q_1(x,\partial_x,\eta)(\mathcal{L}^0\mathcal{B}\psi_-)(x,\eta)Q_2(x,\partial_x,-\eta)(\mathcal{L}^\pi\mathcal{B}\psi_-)(x,-\eta) \end{aligned}$$

このとき

$$[a_1(x,\eta)\partial_x + b_1(x,\eta)], [a_2(x,\eta)\partial_x + b_2(x,\eta)] \in \mathscr{D}_X((\eta^{-1}))/\mathscr{D}_X((\eta^{-1}))P$$

に対して

$$\begin{aligned} &K_{\mathscr{M}}\left([a_1(x,\eta)\partial_x + b_1(x,\eta)], [a_2(x,\eta)\partial_x + b_2(x,\eta)]\right) \\ &\qquad = \frac{2}{\sqrt{-1}}\left\{a_1(x,\eta)b_2(x,-\eta) - b_1(x,\eta)a_2(x,-\eta)\right\} \end{aligned}$$

例

- Airy 方程式を考える

$$\mathscr{M} : \left(\eta^{-2}\frac{d^2}{dx^2} - x\right)\psi = 0$$

$F(t,x) = -\dfrac{1}{3}t^3 + xt$ の t についての臨界点 $t_\pm(x) = \pm x^{\frac{1}{2}}$ に対応する Lefschetz thimble$\Gamma_\pm(x)$ を積分路とする Airy 積分

$$\int_{\Gamma_\pm(x)} e^{\eta\left(-\frac{1}{3}t^3 + xt\right)} dt$$

の漸近展開から得られる WKB 解から定まる $K_{\mathscr{M}}$ に対し

$$K_{\mathscr{M}}\left(1, \frac{d}{dx}\right) = -\frac{2}{\sqrt{-1}}$$

を考えると

$$\left\{\int_{\Gamma_+(x)} e^{\eta\left(-\frac{1}{3}t^3+xt\right)}dt\right\}\left\{\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_-(x)} e^{\eta\left(-\frac{1}{3}t^3+xt\right)}dt\right\} \\ -\left\{\int_{\Gamma_-(x)} e^{\eta\left(-\frac{1}{3}t^3+xt\right)}dt\right\}\left\{\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_+(x)} e^{\eta\left(-\frac{1}{3}t^3+xt\right)}dt\right\} = -\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}$$

ここで右辺の π は WKB 解の正規化に関係する定数

まとめとコメント

- 振動積分

$$\int e^{\eta F(t,x)} dt$$

が満たす微分方程式の WKB 解と振動積分の関係について述べた

- これを用いると完全 WKB 解析と振動積分の解析を互いに翻訳できるが, まだ不明な部分もある
例えば, Voros 係数, あるいは単純楕円型特異点から定まる振動積分の接続公式で完全 WKB 解析において対応物が見つかっていない (と思われる) ものがある
- 高次留数形式を WKB 解の Borel 和で表示し, これにより (Borel 総和可能な)WKB 解が構成できる方程式に対して高次留数形式の類似物を定義できることを述べた
- 高次留数形式の類似物は

$$\left\{ \eta^{-2} \frac{d^2}{dx^2} - (x^3 + b_1 x + b_0) \right\} \psi = 0$$

のような (積分表示解を持たない) 微分方程式や q シフト作用素 $\sigma_q \psi(x) = \psi(qx)$ を

$$\sigma_q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \eta^{-k} \left(x \frac{d}{dx} \right)^k, \quad \eta = \frac{1}{\log q}$$

と考えた線形 q-差分方程式などで (形式的に) 考えることができるが, その性質を調べることは今後の課題である