点平等な一般 q 超幾何方程式

信川喬彦 (のぶかわ　たかひこ)
神戸大学 学術研究員
mail:tnobukw@math.kobe-u.ac.jp

2025 年 1 月 6 日

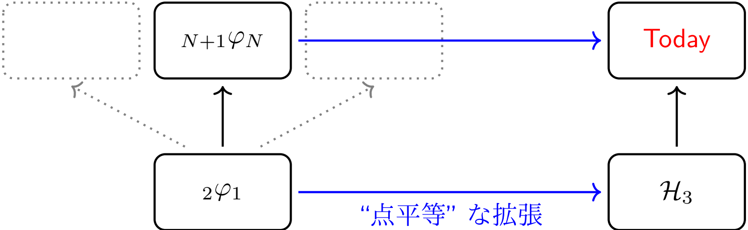
超幾何方程式研究会 2025

概要

q 超幾何方程式の 3 次の変異版 $\mathcal{H}_3$：
量子可積分系を背景にもつ 2 階線形 q 差分方程式.
Heine の q 超幾何方程式 ${}_2\varphi_1$ のある拡張.
Hatano-Matsunawa-Sato-Takemura (2022, FE) により導入された.

Fujii-N. (2022)：
$\mathcal{H}_3$ を<u>"点平等な" q 超幾何方程式 ${}_2\varphi_1$</u>と見て, 積分解・級数解を構成.

点平等：特異点の位置を対等に扱う.
Gauss：$\mathbb{P}^1$ 上 3 点 $\{0, 1, \infty\}$ に特異点をもつ 2 階 Fuchs 型微分方程式.
Riemann-Papperitz：$\{t_1, t_2, t_3\}$ に特異点をもつ 2 階 Fuchs 型.



記号の準備

$q \in \mathbb{C}$ を, $0 < |q| < 1$ととり固定する.
q 上昇階乗ベキ (または q-Pochhammer symbol)：

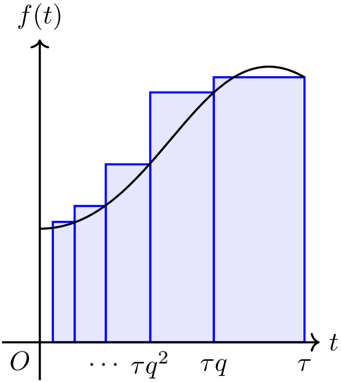
$$(a)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1 - aq^i), \ (a)_n = \frac{(a)_\infty}{(aq^n)_\infty}, \ (a_1, \ldots, a_M)_n = (a_1)_n \cdots (a_M)_n.$$

Jackson 積分：

$$\int_0^\tau f(t)d_qt = (1-q)\tau \sum_{i=0}^{\infty} f(\tau q^i)q^i,$$

$$\int_0^{\tau\infty} f(t)d_qt = (1-q)\tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau q^i)q^i,$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)d_qt = \int_0^{\tau_2} f(t)d_qt - \int_0^{\tau_1} f(t)d_qt.$$



Heine の q 超幾何函数

級数表示 $\left[\dfrac{(a)_n}{(1-q)^n} \xrightarrow[a=q^\alpha]{q\to 1} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) \quad \left(\dfrac{1-q^\alpha}{1-q} \to \alpha\right)\right]$

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c,q)_n} x^n $$

積分表示 $\left[q \text{ 二項定理 } \dfrac{(ax)_\infty}{(x)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(a)_n}{(q)_n} x^n \xrightarrow[a=q^\alpha]{q\to 1} (1-x)^{-\alpha}\right]$

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a = q^\alpha, b \\ c \end{matrix} ; x\right) = \frac{(a, c/a)_\infty}{(1-q)(c,q)_\infty} \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{(qt)_\infty}{(ct/a)_\infty} \frac{(bxt)_\infty}{(xt)_\infty} d_q t $$

q 差分方程式 $T_x : x \mapsto qx$ ：q シフト作用素 $\left(\text{“}T_x = q^{x\frac{d}{dx}}\text{”}\right)$

$$ [(1-T_x)(1-cq^{-1}T_x) - x(1-aT_x)(1-bT_x)]y = 0 $$

q 超幾何方程式の 3 次の変異版 $\mathcal{H}_3$

q 超幾何方程式の 3 次の変異版 $\mathcal{H}_3$：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_3\, y = 0, \\
&\mathcal{H}_3 = \prod_{i=1}^{3}(x - q^{h_i+1/2}t_i)\cdot T_x^{-1} + q^{2\alpha+1}\prod_{i=1}^{3}(x - q^{l_i-1/2}t_i)\cdot T_x \\
&\qquad - q^{\alpha}\Bigg[(q+1)x^3 - q^{1/2}\sum_{i=1}^{3}(q^{h_i}+q^{l_i})t_i x^2 \\
&\qquad\qquad + q^{(h_1+h_2+h_3+l_1+l_2+l_3+1)/2}t_1t_2t_3\sum_{i=1}^{3}\frac{q^{-h_i}+q^{-l_i}}{t_i}x \\
&\qquad\qquad - q^{(h_1+h_2+h_3+l_1+l_2+l_3)/2}(q+1)t_1t_2t_3\Bigg].
\end{aligned}$$

(参考　Heine：$[(1-T_x)(1-cq^{-1}T_x) - x(1-aT_x)(1-bT_x)]y = 0.$

これは ${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c\end{matrix};x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c,q)_n}x^n$ が満たす方程式.)

方程式 $\mathcal{H}_3$ の特徴付け

q 差分作用素

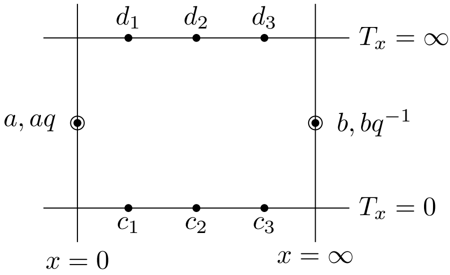
$$H=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=-1}^{1}a_{i,j}x^iT_x^j$$ について，

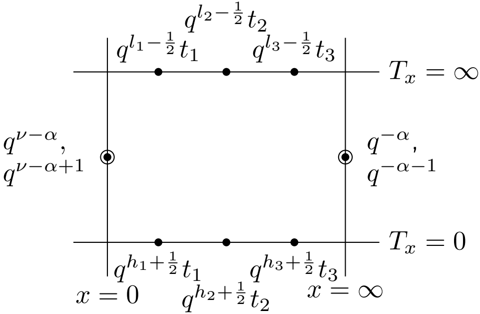
$$H=\sum_{i=0}^{3}x^iL_i(T_x)$$ と書いたとき，

- $L_0(T_x)\propto(T_x-a)(T_x-aq)$,
  $L_1(T_x)\propto(T_x-a)$,
- $L_3(T_x)\propto(T_x-b)(T_x-bq^{-1})$,
  $L_2(T_x)\propto(T_x-b)$,

$$H=\sum_{j=-1}^{1}P_j(x)T_x^j$$ と書いたとき，

- $P_{-1}(x)\propto(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$,
- $P_1(x)\propto(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)$.





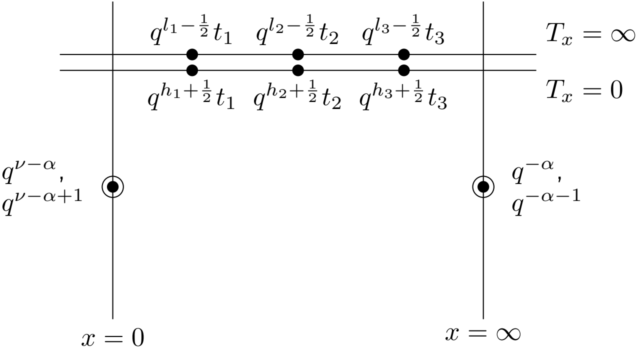
→ 適当なパラメータの置き換えのもと $H=\mathcal{H}_3$.

方程式 $\mathcal{H}_3$ は $q \to 1$ の極限で以下の Riemann scheme をもつ 2 階 Fuchs 型微分方程式となる：

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x=t_1 & x=t_2 & x=t_3 & x=0 & x=\infty \\ \hline 0 & 0 & 0 & \nu-\alpha & \alpha \\ l_1-h_1 & l_2-h_2 & l_3-h_3 & \nu-\alpha+1 & \alpha+1 \end{array}\right\},$$

ただし, $x=0$, ∞ は特性指数の差が 1 の見かけの特異点 (=正則点).

$\mathcal{H}_3$ は Riemann-Papperitz の微分方程式の q 類似！



積分解・級数解

次の積分と級数

$$x^{\nu-\alpha}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{(q^{\nu}xt, q^{h_1+\frac{1}{2}}t_1t, q^{h_2+\frac{1}{2}}t_2t, q^{h_3+\frac{1}{2}}t_3t)_\infty}{(xt, q^{\nu+l_1-\frac{1}{2}}t_1t, q^{\nu+l_2-\frac{1}{2}}t_2t, q^{\nu+l_3-\frac{1}{2}}t_3t)_\infty}\,d_qt,$$

$$x^{\nu-\alpha}\frac{(q^{\nu-h_3+\frac{1}{2}}x/t_3)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}-h_3}x/t_3)_\infty}$$

$$\times\,{}_8W_7\left(\frac{t_1q^{h_1-h_3+\nu}}{t_3};\frac{t_1q^{-h_3+l_1+\nu}}{t_3},\frac{t_2q^{-h_3+l_2+\nu}}{t_3},q^{-h_3+l_3+\nu},\frac{t_1q^{h_1+\frac{1}{2}}}{x},q^{\nu};\frac{xq^{\frac{1}{2}-h_2}}{t_2}\right),$$

は方程式 $\mathcal{H}_3\,y=0$ の解である．ただし，
$\nu=\frac{1}{2}(h_1+h_2+h_3-l_1-l_2-l_3+1)$，
$\tau_1,\ \tau_2\in\{q^{\frac{1}{2}-h_1}/t_1, q^{\frac{1}{2}-h_2}/t_2, q^{\frac{1}{2}-h_3}/t_3, q^{1-\nu}/x\}$ であり，

$${}_8W_7(a;b,c,d,e,f;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-aq^{2n}}{1-a}\frac{(a,b,c,d,e,f)_n}{(q,qa/b,qa/c,qa/d,qa/e,qa/f)_n}z^n.$$

方針

Riemann-Papperitz の解：$\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3=-2$,
(gauge factor) $\times \int_C (t-x)^{\nu_0}(t-t_1)^{\nu_1}(t-t_2)^{\nu_2}(t-t_3)^{\nu_3}dt$
$\rightsquigarrow \int \psi d_qt$, $\psi = \dfrac{(a_1t,a_2t,a_3t,Axt)_\infty}{(b_1t,b_2t,b_3t,Bxt)_\infty}$, $a_1a_2a_3A=q^2b_1b_2b_3B$ を考える.
ψ が満たす方程式をうまく整理すると, 積分が満たす 2 階の q 差分方程式が得られる. これが変異版と等価.

Bailey の公式 (cf. [Gasper-Rahman 2.10.18])：

$$\int_a^b \frac{(qt/a,qt/b,ct,dt)_\infty}{(et,ft,gt,ht)_\infty}d_qt \qquad (cd=abefgh)$$
$$=(q\text{-shifted factorial})\times {}_8W_7(bcd/hq;be,bf,bg,c/h,d/h;ah).$$

積分解の構成方法

$$\psi = \frac{(a_1t, a_2t, a_3t, Axt)_\infty}{(b_1t, b_2t, b_3t, Bxt)_\infty}.$$

$$D_t = \frac{1}{(1-q)t}(1-T_t) \qquad \left(D_t f(t) = \frac{f(t)-f(qt)}{t-qt} \right)$$ とする.

$$T_t\psi = \prod_{i=1}^{3} \frac{1-b_it}{1-a_it} \cdot T_x\psi. \rightsquigarrow T_t\left[\prod_{i=1}^{3}(1-a_it/q)\cdot\psi\right] = \prod_{i=1}^{3}(1-b_it)\cdot T_x\psi.$$

$$\rightsquigarrow D_t\left[\prod_{i=1}^{3}(1-a_it/q)\cdot\psi\right] = \frac{1}{(1-q)t}\left(\prod_{i=1}^{3}(1-a_it/q) - \prod_{i=1}^{3}(1-b_it)\cdot T_x\right)\psi.$$

$xt(B-AT_x)\psi = (1-T_x)\psi$ を駆使して右辺から t を消していくと,

$$D_t\left[(B-AT_x)\prod_{i=1}^{3}(1-a_it/q)\cdot\psi\right] = (.x \text{ について 2 階の作用素})\ \psi.$$

$\int_0^\tau D_tf(t)d_qt = f(\tau) - f(0)$ より, 積分路を適切にとれば積分が満たす 2 階の方程式.

${}_8W_7 \xrightarrow{q\to 1} {}_2F_1\left(\dfrac{x-t_1}{x-t_3}\dfrac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right)$

極限 $q \to 1$ をとると, 次のようになる：

$$
{}_8W_7\left(\frac{t_1q^{h_1-h_3+\nu}}{t_3};\frac{t_1q^{-h_3+l_1+\nu}}{t_3},\frac{t_2q^{-h_3+l_2+\nu}}{t_3},q^{-h_3+l_3+\nu},\frac{t_1q^{h_1+\frac{1}{2}}}{x},q^{\nu};\frac{xq^{\frac{1}{2}-h_2}}{t_2}\right)
$$

$$
=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(t_2q^{\bullet}/t_3)q^{2n}}{1-t_2q^{\bullet}/t_3}\frac{(t_1q^{\bullet}/t_3,t_1q^{\bullet}/t_3,t_2q^{\bullet}/t_3,q^{\bullet},t_1q^{\bullet}/x,q^{\bullet})_n}{(q,q^{\bullet},t_1q^{\bullet}/t_2,t_1q^{\bullet}/t_3,xq^{\bullet}/t_3,t_1q^{\bullet}/t_3)_n}\left(\frac{xq^{\bullet}}{t_2}\right)^n
$$

$$
\xrightarrow{q\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-h_3+l_3+\nu;n)(\nu;n)}{(1;n)(h_1-l_1+1;n)}\left(\frac{(1-t_1/t_3)(1-t_1/t_3)(1-t_2/t_3)(1-t_1/x)}{(1-t_1/t_2)(1-t_1/t_3)(1-x/t_3)(1-t_1/t_3)}\frac{x}{t_2}\right)^n
$$

$$
={}_2F_1\left(\begin{matrix}-h_3+l_3+\nu,\nu\\ h_1-l_1+1\end{matrix};\frac{x-t_1}{x-t_3}\frac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right).
$$

ここで, $(q^{\alpha})_n/(1-q)^n \xrightarrow{q\to 1} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)=(\alpha;n)$,
$(q^{\bullet}X)_n \xrightarrow{q\to 1} (1-X)^n$ に注意しておく.

q 差分の場合, 1 次分数変換が使えない.
($x = 0, \infty$ は q シフト作用素の不動点 $\cdots$ special)

しかし, Riemann-Papperitz の微分方程式の q 類似と
その積分解・級数解が得られた！

積分解 : Euler 型積分 $\displaystyle\int (t-x)^{\nu_0}(t-t_1)^{\nu_1}(t-t_2)^{\nu_2}(t-t_3)^{\nu_3}\,dt$ の q 類似.

級数解：${}_2F_1\left(\dfrac{x-t_1}{x-t_3}\dfrac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right)$ の q 類似.

q 差分の場合, 点平等にするとより対称性の高いものになる.
$\rightsquigarrow$ 種々の q 差分方程式の点平等版を考えたくなる！

本講演では一般 q 超幾何方程式 ${}_{N+1}\varphi_N$ の点平等版を考えよう.
(${}_{N+1}F_N\left(\dfrac{x-t_1}{x-t_3}\dfrac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right)$ の q 類似.
H-M-S-T 流に言えば一般 q 超幾何方程式の変異版？)

${}_8W_7$: ${}_2F_1\left(\dfrac{x-t_1}{x-t_3}\dfrac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right)$ の q 類似.

$\rightsquigarrow$ ${}_{2N+6}W_{2N+5}$: ${}_{N+1}F_N\left(\dfrac{x-t_1}{x-t_3}\dfrac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right)$ の q 類似？

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}W_r(a_1;a_2,a_3,\ldots,a_{r-1};z)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-a_1q^{2n}}{1-a_1}\frac{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{r-1})_n}{(q,qa_1/a_2,qa_1/a_3,\ldots,qa_1/a_{r-1})_n}z^n.
\end{aligned}
$$

$r+1=2k$: 偶数, $z=\dfrac{(a_1q)^{k-2}}{a_2a_3\cdots a_{2k-2}}$ のとき, balanced という.

${}_{2N+6}W_{2N+5}$ が満たす q 差分方程式 :
Aomoto-Ito (200$*$) の BC 型 Jackson 積分が満たす方程式.
本講演で扱うのは BC_1 の場合 :

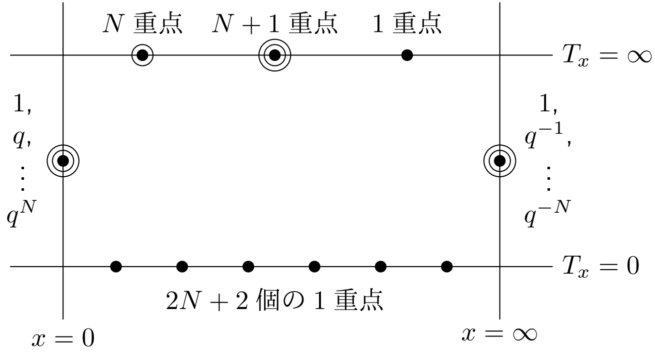
$$
\int_0^{\tau\infty}\Phi(t)\Delta(t)\frac{d_qt}{t},\ \Delta(t)=\frac{1-a_1t^2}{t},
$$

$$
\Phi(t)=t^{\mu}\frac{(qt,qa_1t/a_2,qa_1t/a_3,\ldots,qa_1t/a_{2N+4})_\infty}{(a_1t,a_2t,a_3t,\ldots,a_{2N+4}t)_\infty}\quad\left(q^{\mu}=\frac{a_1^{N+1}q^{N+2}}{a_2a_3\cdots a_{2N+4}}\right).
$$

$\cdots$ Ito (2009, SIGMA) に explicit な形で書かれている.

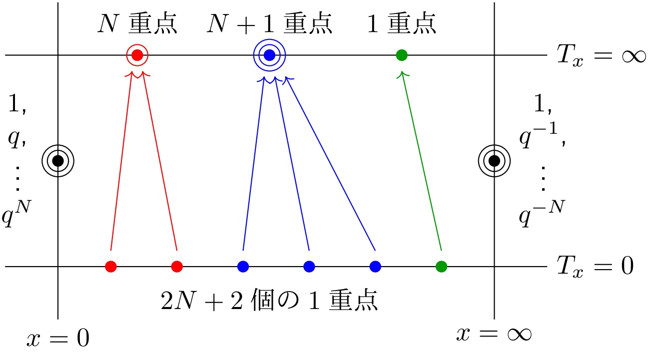
Ito の 1 階連立型

$\rightsquigarrow {}_{2N+6}W_{2N+5}$ が $x = a_{2N+4}$ について満たす $N+1$ 階方程式.
係数はかなり複雑になるが, 方程式の点配置を書くと綺麗にかける：



Ito の 1 階連立型

$\rightsquigarrow {}_{2N+6}W_{2N+5}$ が $x = a_{2N+4}$ について満たす $N+1$ 階方程式.
係数はかなり複雑になるが, 方程式の点配置を書くと綺麗にかける：



$$\xrightarrow{q\to 1} \left\{ \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline 0 & 0 & * \\ * & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & N-1 & * \\ * & * & * \end{array} \right\} : \text{方程式 } {}_{N+1}F_N\left(\frac{x-t_1}{x-t_3}\frac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right) \text{ の } q \text{ 類似.}$$

$$a_i = \begin{cases} q^{\alpha_i} t_3/t_1 & (i = 1, \dots, N+1) \\ q^{\alpha_i} & (i = N+2, \dots, 2N+2) \\ q^{\alpha_{2N+3}} t_3/t_2 & (i = 2N+3) \\ q^{\alpha_{2N+4}} x/t_1 & (i = 2N+4) \end{cases}$$ とおく.

(点配置の上下の点がぶつかるようにおいている)

$$ {}_{2N+6}W_{2N+5}(a_1; a_2, a_3, \dots, a_{2N+4}) $$
$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - a_1 q^{2n}}{1 - a_1} \frac{(a_1, \dots, a_{N+2}, \dots, a_{2N+3}, a_{2N+4})_n}{(q, \dots, qa_1/a_{N+2}, \dots, qa_1/a_{2N+3}, qa_1/a_{2N+4})_n} \left(\frac{(a_1 q)^{N+1}}{a_2 a_3 \cdots a_{2N+4}} \right)^n $$
$$ \xrightarrow{q \to 1} {}_{N+1}F_N \left(\begin{matrix} \alpha_{N+2}, \dots, \alpha_{2N+2} \\ 1 + \alpha_1 - \alpha_2, \dots, 1 + \alpha_1 - \alpha_{N+1} \end{matrix} ; \frac{x - t_1}{x - t_3} \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_1} \right) $$

赤：$\dfrac{(q^\alpha)_n}{(1-q)^n} \xrightarrow{q \to 1} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = (\alpha; n)$,

青・緑：$(X)_n \xrightarrow{q \to 1} (1-X)^n$. 緑は分母分子でキャンセル.

${}_{2N+6}W_{2N+5}$：級数 ${}_{N+1}F_N \left(\dfrac{x - t_1}{x - t_3} \dfrac{t_2 - t_3}{t_2 - t_1} \right)$ の q 類似.

積分解は？ $\cdots$ まず $N=2$ の場合に紹介する.
アイデア：gauge 変換や積分変換で方程式がどう変わるかを追跡する.
$\cdots$ 点配置を追跡する.
無限積の比による gauge 変換 $f(x)\mapsto f(x)\dfrac{(ax)_\infty}{(bx)_\infty}$ により作用素として

$$x\mapsto x,\ T_x\mapsto \frac{1-bx}{1-ax}T_x.$$

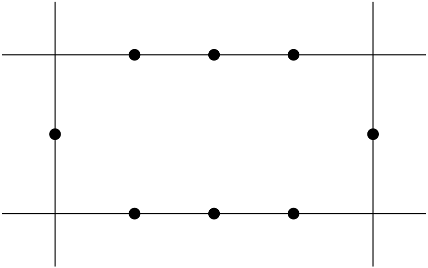
Euler 型積分変換 $f(x)\mapsto E[f](x)=\displaystyle\int_C f(t)\frac{(Atx)_\infty}{(Btx)_\infty}d_qt$ により

$$(B-AT_x)E[x\cdot f](x)=x^{-1}(1-T_x)E[f](x),\ E[T_xf](x)=q^{-1}T_x^{-1}E[f](x).$$
$$\left(x\mapsto \text{“}x^{-1}\frac{1-T_x}{B-Aq^{-1}T_x}\text{''},\ T_x\mapsto q^{-1}T_x^{-1}\right)$$

方程式の変化の追跡
方程式の可約部分を取り出すところ以外, 全て機械的に上の性質を用いてできる.
可約部分を取り出すには, q 差分商 D_t でまとめる.

$$\int \frac{(C_1xt, c_1t, c_2t, c_3t)_\infty}{(B_1xt, b_1t, b_2t, b_3t)_\infty} d_qt$$

$$f_1(x) = \frac{(c_1x, c_2x, c_3x)_\infty}{(b_1x, b_2x, b_3x)_\infty}$$



$$f_2(x) = \int f_1(t) \frac{(C_1xt)_\infty}{(B_1xt)_\infty} d_qt$$

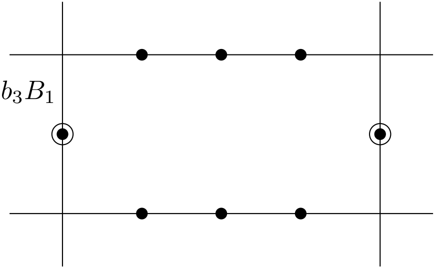
balance 条件 $c_1c_2c_3C_1 = q^2b_1b_2b_3B_1$

積分路をうまくとる

(f_1 の方程式を D_t で整理)

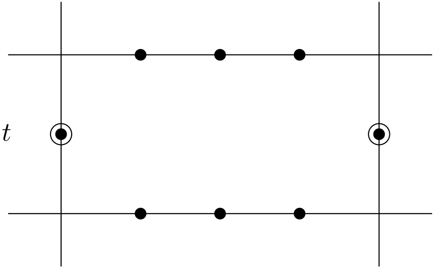
$\rightsquigarrow$ 方程式 $\mathcal{H}_3$ と等価

(漫然と変換すると 4 階になる)



$$\frac{(c_4x, c_5x)_\infty}{(b_4x, b_5x)_\infty} \int \frac{(C_1xt, c_1t, c_2t, c_3t)_\infty}{(B_1xt, b_1t, b_2t, b_3t)_\infty} d_qt$$

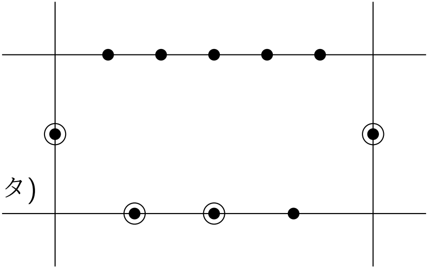
$$f_2(x) = \int f_1(t) \frac{(C_1xt)_\infty}{(B_1xt)_\infty} d_qt$$



$$f_3(x) = f_2(x) \frac{(c_4x, c_5x)_\infty}{(b_4x, b_5x)_\infty}$$

$c_4 = qB_1/c_1$, $c_5 = qB_1/c_2$

(下側に 2 重点ができるパラメータ)

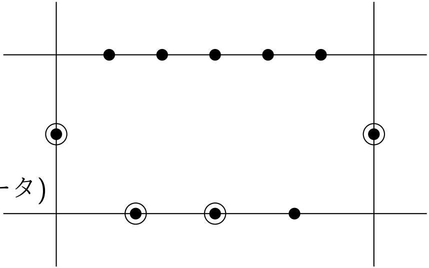


$$\int\int \frac{(C_2xs, c_4s, c_5s, C_1st, c_1t, c_2t, c_3t)_\infty}{(B_2xs, b_4s, b_5s, B_1st, b_1t, b_2t, b_3t)_\infty} d_qtd_qs$$

$$f_3(x) = f_2(x)\frac{(c_4x, c_5x)_\infty}{(b_4x, b_5x)_\infty}$$

$c_4 = qB_1/c_1$, $c_5 = qB_1/c_2$

(下側に 2 重点ができるパラメータ)



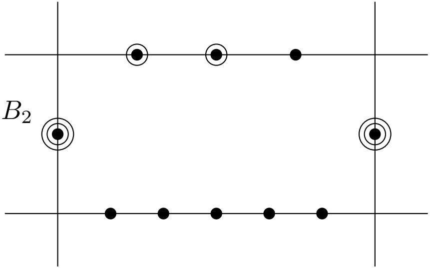
$$f_4(x) = \int f_3(s)\frac{(C_2xs)_\infty}{(B_2xs)_\infty} d_qs$$

balance 条件 $c_4c_5C_1C_2 = q^2b_4b_5B_1B_2$

積分路をうまくとる

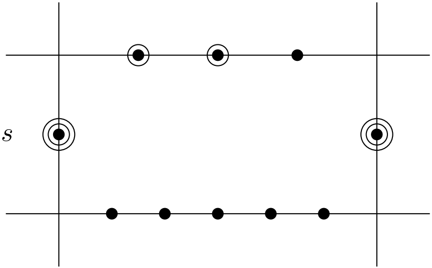
(f_3 の方程式を D_s, D_s^2 で整理)

(漫然とやると 7 階になる)



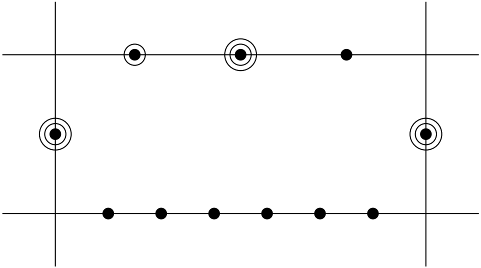
$$\frac{(c_6x)_\infty}{(b_6x)_\infty}\int\int\frac{(C_2xs, c_4s, c_5s, C_1st, c_1t, c_2t, c_3t)_\infty}{(B_2xs, b_4s, b_5s, B_1st, b_1t, b_2t, b_3t)_\infty}d_qtd_qs$$

$$f_4(x) = \int f_3(s)\frac{(C_2xs)_\infty}{(B_2xs)_\infty}d_qs$$



$$f_5(x) = f_4(x)\frac{(c_6x)_\infty}{(b_6x)_\infty}$$

$c_6 = B_2/b_5,\ b_6 = C_2/b_5$



今やっていたことを微分の場合で書いてみると以下の通り.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= (x-t_1)^{\nu_1}(x-t_2)^{\nu_2}(x-t_3)^{\nu_3} \\
f_2 &= \int f_1(t)(x-t)^{\lambda}dt \\
f_3 &= (x-t_1)^{\nu_4}(x-t_3)^{\nu_5} f_2 \\
f_4 &= \int f_3(t)(x-t)^{\mu}dt \\
f_5 &= (x-t_3)^{\nu_6} f_5
\end{aligned}
$$

f_5 が満たす方程式：${}_3F_2$ が満たす方程式に 1 次分数変換を施したもの. $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=\infty$ でやると, よく知られた ${}_3F_2(x)$ の Euler 型 2 重積分表示になる.

(q 差分の場合, $\{0,1,\infty\}$ でやるのと $\{t_1,t_2,t_3\}$ でやるのでは勝手がちがう)

$N \geq 3$ の場合は？
$\rightsquigarrow \cdots \to$gauge$\to$gauge$\to$integral$\to$gauge$\to$gauge$\to$integral$\to \cdots$ と繰り返すと良さそうである (が細部の計算が追えていない).

$$\cdots \to f(x) \to f_1(x) = f(x)\frac{(a_1x)_\infty}{(b_1x)_\infty} \to f_2(x)\frac{(a_2x)_\infty}{(b_2x)_\infty}$$
$$\to f_3(x) = \int f_2(t)\frac{(a_3xt)_\infty}{(b_3xt)_\infty}d_qt \to \cdots$$

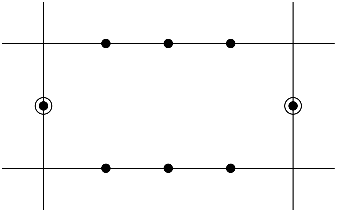
やっていることは

$$\cdots \to f(x) \to f_1(x) = f(x)(x-t_1)^{\mu_1} \to f_2(x) = f_1(x)(x-t_3)^{\mu_2}$$
$$\to f_3(x) = \int f_2(t)(x-t)^{\mu_3}dt \to \cdots$$

の q 差分版
$\left({}_NF_{N-1}\left(\frac{x-t_1}{x-t_3}\frac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right)\right.$ を ${}_{N+1}F_N\left(\frac{x-t_1}{x-t_3}\frac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right)$ に変換).
与えられた q 差分方程式を, q 差分商 D_t で “うまく” まとめる必要がある (ここが少し難しい).

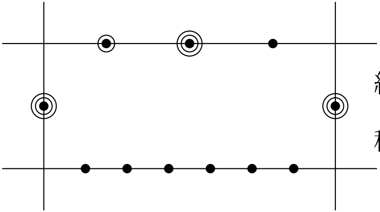
まとめ

q 超幾何方程式の変異版 $\mathcal{H}_3$=Heine の q 超幾何方程式の点平等版



積分解：$\displaystyle\int \prod_{i=1}^{4} \frac{(a_i t)_\infty}{(b_i t)_\infty}$

級数解：${}_8W_7$

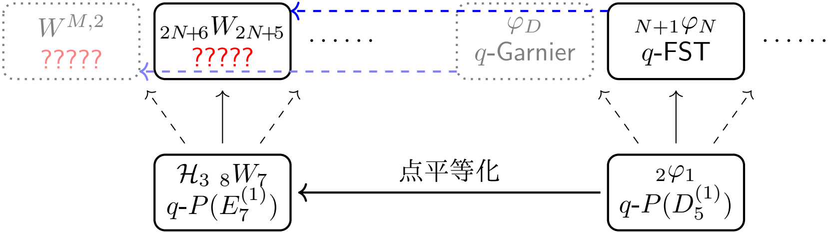


級数解：${}_{10}W_9$ $\left({}_{2N+6}W_{2N+5}\right)$

積分解：$\displaystyle\int\int \prod_{i=1}^{3} \frac{(a_i t)_\infty}{(b_i t)_\infty} \prod_{i=1}^{3} \frac{(c_i s)_\infty}{(d_i s)_\infty} \frac{(Ast)_\infty}{(Bst)_\infty}$

点平等な ${}_3\varphi_2$ $\left({}_{N+1}\varphi_N\right)$

- 高階の場合の積分解.
  より一般に, (点配置で)rigid な q 差分方程式の積分解.
  $\cdots$ どう D_t でまとめるかが大事 (ある程度わかってきた).
- 級数 ${}_{10}W_9$ と Euler 型 2 重積分解の間の関係.
  積分解の間の関係. (${}_{10}W_9$ の間の関係は古くから知られている.)
- 点平等な q 超幾何を特殊解にもつ Painlevé 型方程式.
  q-Fuji-Suzuki-Tsuda : ${}_{N+1}\varphi_N$ を特殊解にもつ Painlevé 型方程式
  $\rightsquigarrow$ ${}_{2N+6}W_{2N+5}$ なら点平等な q-Fuji-Suzuki-Tsuda???



q でも (q だからこそ) 点平等に！

発表は以上です. ありがとうございました.